

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in
Ingegneria Meccanica



**STIMA DELLA RIGIDEZZA DI DERIVA DELLO PNEUMATICO
DI UN ATV MEDIANTE FILTRO DI KALMAN**

Relatore: Prof. Luca Bascetta

Tesi di Laurea Specialistica di:
Federico STOPELLI Matr. 787515

Anno accademico 2013-2014

*Desidero ringraziare il prof. Bascetta per la disponibilità concessami
nello svolgimento e sviluppo di questa tesi.*

Sommario	7
Introduzione	9
1. Modellistica del contatto ruota-asfalto e stato dell'arte	10
1.1 Il contatto ruota-asfalto	10
1.2 Lo sviluppo di forze longitudinali	11
1.2.1 Pseudo-slittamento longitudinale	11
1.2.2 Legame forza longitudinale e pseudo-slittamento	12
1.3 Lo sviluppo di forze laterali	14
1.3.1 Calcolo della forza tangenziale in funzione dell'angolo di deriva	15
1.4 Stato dell'arte	16
1.4.1 Backsteeping Observer	16
1.4.2 Relazione cinematica-geometrica	18
2. Il Quad: descrizione e modellazione	20
2.1 Descrizione generale	20
2.2 Modellazione matematica	22
3. Filtro di Kalman	29
3.1 Grandezze random	29
3.2 Filtro di Kalman come filtro ottimo	34
3.3 Filtro di Kalman a regime	36
3.4 Il Filtro di Kalman Esteso	37
3.5 Il Filtro di Kalman Esteso (EKF) per modello "single-track"	42
4. Simulazioni	44
4.1 Verifica modello "single-track"	44
4.2 Verifica del Filtro di Kalman Esteso	51
4.3 Applicazione Filtro di Kalman Esteso	59
5. Conclusioni	97
Bibliografia	98

Sommario

Questo lavoro si pone l'obiettivo di realizzare un Filtro di Kalman Esteso per determinare il valore della rigidità di deriva (o cornering stiffness) per un All Terrain Vehicle. Una volta mostrati alcuni esempi di algoritmo di stima che si possono trovare in letteratura scientifica, si procederà alla costruzione dello stimatore. Per la sua validazione matematica si useranno delle traiettorie di sterzo generiche.

PAROLE CHIAVE: rigidità di deriva, ATV, modello "single-track", filtro di Kalman esteso

Abstract

This work aims at realizing an Extended Kalman Filter for cornering stiffness' estimation of All Terrain Vehicles (ATVs). After introducing some estimation algorithms extracted from the scientific literature, the Extended Kalman Filter (EKF) is considered. In order to validate the EKF, generic steer angle inputs are considered.

KEY WORDS: cornering stiffness, ATV, "single-track" model, Extended Kalman Filter

INTRODUZIONE

Scopo di questo lavoro di tesi è la scrittura di un algoritmo di stima utile a ricavare la cornering stiffness C_α che per un qualsiasi veicolo che compie una sterzata lega l'angolo di deriva con la forza laterale che si sviluppa nella zona di contatto ruota-strada; una volta nota questa grandezza è possibile ricavare la distribuzione delle forze agenti sul veicolo per indagare ad esempio, la condizione limite di ribaltamento ([6]) oppure per ricavare altri particolari parametri (ad esempio il coefficiente di attrito statico [7]). L'algoritmo usato è il filtro di Kalman nella sua versione estesa (EKF, Extended Kalman Filter) ricavato a partire dalle equazioni del modello "single-track" o "bicicletta" con cui si è deciso appunto di modellare il Quad del Dipartimento di Automatica del Politecnico su cui si basa questo lavoro di tesi.

All'interno del capitolo 1 si illustra una panoramica della modellistica del contatto ruota-asfalto per inquadrare il problema, proponendo in coda al capitolo alcuni metodi sviluppati per stimare il parametro stesso (stato dell'arte). Il capitolo 2 riporta invece una descrizione del sistema meccanico considerato con le relative equazioni di moto, mentre l'intero capitolo 3 è dedicato al filtro di Kalman e alla teoria su cui si basa. Le simulazioni che si sono rese necessarie per la stesura della tesi sono riportate nel capitolo 4 e infine nel capitolo 5 sono presentate osservazioni e considerazioni sui risultati ottenuti, in cui non si ha convergenza a un valore preciso ma oscillante in un determinato range di valori.

CAPITOLO 1

MODELLISTICA DEL CONTATTO RUOTA-ASFALTO E STATO DELL'ARTE

In questo capitolo viene svolta una panoramica sul problema del contatto ruota-asfalto e vengono illustrati alcuni metodi di stima della rigidità di deriva che si possono trovare in bibliografia.

Essendo la rigidità di deriva intimamente legata al problema del contatto ruota-asfalto, si introduce brevemente tale argomento, esponendo i fenomeni e le forze che si esercitano durante il contatto assieme alle formule che li governano basandosi su quanto esposto in [2], [3], [8].

1.1 Il contatto ruota-asfalto

Nella progettazione generale di un veicolo, lo pneumatico è quell'elemento grazie al quale si realizza l'accoppiamento strada-veicolo. Essendo un elastomero è soggetto a isteresi e non ha comportamento lineare né in frequenza né in ampiezza.

Dall'isteresi deriva la resistenza al rotolamento la quale può essere modellata in modi differenti: aggiungendo una coppia contraria alla rotazione o spostando in avanti la reazione normale; suddetta resistenza al rotolamento si attenua:

- all'aumentare della pressione di gonfiaggio e della temperatura perché diminuisce l'entità della deformazione,
- al diminuire della velocità perché diminuisce l'impronta e aumenta localmente la pressione,
- al diminuire del carico verticale perché calano le deformazioni.

Al fine di studiare il comportamento di una ruota, si definisce un sistema di riferimento cartesiano xyz avente l'origine degli assi nel centro dell'area di contatto dello pneumatico (Fig. 1):

- ❖ l'asse X , definito dall'intersezione del piano di contatto con il piano medio della ruota;
- ❖ l'asse Z , perpendicolare al piano di contatto della ruota e positivo verso l'alto
- ❖ l'asse Y , perpendicolare al piano XZ e diretto verso sinistra.

Analogamente il momento che viene scambiato tra pneumatico e asfalto nell'area di contatto può essere scomposto nelle tre direzioni degli assi evidenziando:

- ❖ il momento di overturning M_x ;
- ❖ il momento di resistenza al rollio M_y ;
- ❖ il momento autoallineante M_z .

Si individuano infine:

- ❖ l'angolo di deriva α , tra il piano XZ e la velocità del punto di contatto dello pneumatico
- ❖ l'angolo di camber o di inclinazione γ , tra il piano XZ e il piano verticale mediano della ruota.

Si assume che le forze ricevute dal terreno siano applicate nel centro dell'area di contatto e che pertanto possano essere scomposte lungo le tre direzioni XZY :

- ❖ forze longitudinali F_x ;
- ❖ forze laterali F_y ;
- ❖ forze normali F_z .

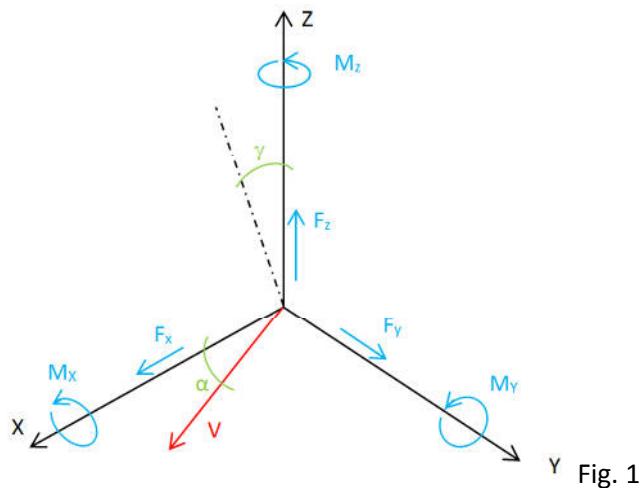


Fig. 1

La forza risultante che si sviluppa nel piano del terreno, data dalla somma vettoriale della forza longitudinale e laterale, è funzione di numerosi parametri:

- ❖ angolo di deriva α ,
- ❖ angolo di camber γ ,
- ❖ scorrimento longitudinale k
- ❖ forze longitudinali F_x ;
- ❖ forze laterali F_y ;
- ❖ forze normali F_z .

1.2 Lo sviluppo di forze longitudinali

1.2.1 Pseudo-slittamento longitudinale

Si consideri una ruota appoggiata su una superficie piana cui si applica una coppia motrice C positiva e quindi concorde con il verso della velocità angolare (Fig. 2): se si misura la velocità del centro ruota (con un sensore ottico, ad esempio) e la velocità angolare tramite encoder, si può capire come la velocità lineare del centro ruota $V_{cr} = V$ sia minore del prodotto velocità angolare per il raggio: $V_{cr} < \omega \cdot R$.

Si conclude quindi che l'applicazione di una coppia motrice comporta una differenza tra le due quantità, seppur minima e non rilevabile macroscopicamente (Fig. 3).

Ad analoghe conclusioni è possibile giungere in termini di spostamento, per cui la presenza della coppia motrice a fronte di una rotazione completa fa sì che l'avanzamento del centro ruota S non sia pari a $2 \cdot \pi \cdot R$ ma inferiore: $S < 2 \cdot \pi \cdot R$

In conclusione l'applicazione di una coppia motrice fa sì che non tutta la rotazione della ruota si traduca in un corrispondente avanzamento del suo centro.

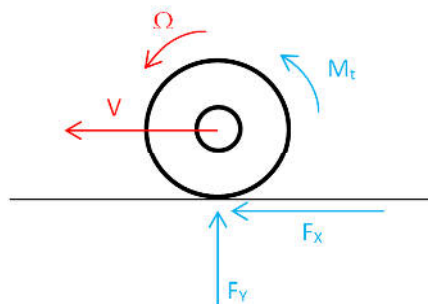


Fig. 2

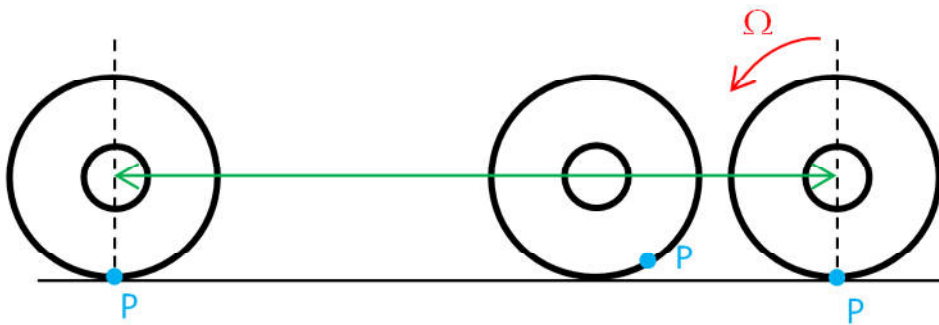


Fig. 3

Discorsi analoghi si possono fare nel caso in cui sia applicata una coppia frenante quindi opposta alla velocità angolare della ruota: la velocità lineare del centro ruota $V_{cr} = V$ e la quantità $\Omega \cdot R$ sono differenti, ma a differenza del caso precedente ora è la velocità lineare a essere maggiore del prodotto $\Omega \cdot R$ ($V_{cr} > \omega \cdot R$), in termini di spostamento invece lo spazio percorso S è maggiore della quantità $2 \cdot \pi \cdot R$: $S > 2 \cdot \pi \cdot R$

Si può quindi affermare che esistono dei micro-slittamenti nel punto di contatto della ruota che dissipano energia sia essa frenante o motrice.

La descrizione di questo fenomeno è affidata al parametro pseudo-slittamento longitudinale k definito come:

$$k = \frac{V - \Omega R}{V} \quad (1)$$

Lo pseudo-slittamento longitudinale k (noto anche con i nomi di scorrimento longitudinale o, semplicemente, scorrimento) è una grandezza adimensionale data dal rapporto tra velocità di scorrimento $V_s = V - \Omega R$ del punto di contatto e la velocità di avanzamento V del centro ruota.

Dalla relazione (1) si vede che:

- ❖ nel caso di coppia motrice, la velocità di scorrimento diventa negativa ossia assume segno opposto rispetto al verso di avanzamento $V_s < 0$;
- ❖ nel caso di coppia frenante, la velocità di scorrimento diventa positiva ossia concorde con la direzione di avanzamento $V_s > 0$.

In conclusione lo scorrimento longitudinale k è positivo in presenza di coppie frenanti e negativo in presenza di coppie motrici.

1.2.2 Legame forza longitudinale e pseudo-slittamento

Si valuta innanzitutto il legame tra segno della forza di contatto e segno dello pseudo-slittamento: si è visto come applicando una coppia motrice si generi una velocità di scorrimento negativa, quindi il punto di contatto si muove all'indietro rispetto alla direzione di avanzamento; al contatto nasce quindi una forza tangenziale positiva (diretta nella direzione di avanzamento e opposta alla velocità di scorrimento). Il discorso è opposto nel caso della coppia frenante.

La forza longitudinale è legata all'intensità dello scorrimento, in particolare si conclude che:

- ❖ per scorrimento nullo, la forza è nulla quindi uno pneumatico deve scorrere per generare una forza di contatto. La condizione di rotolamento senza strisciamento non risulta verificato se lo pneumatico sta scaricando a terra forze longitudinali;
- ❖ il valore massimo del modulo della forza longitudinale è minore del prodotto tra coefficiente di attrito statico e carico normale agente sulla ruota: $|F_x| < f_{st} \cdot F_Z$;
- ❖ per elevati valori di scorrimento (positivi o negativi) il modulo della forza tende al prodotto tra coefficiente di attrito radente e carico normale applicato: $|F_x| \rightarrow f_{st} \cdot F_Z$.

Dal punto di vista della deformabilità, osservando lateralmente uno pneumatico si osserva:

- ❖ nel caso di coppie motrici: una compressione nella zona di pre-impronta in ingresso sulla superficie di contatto, lo spostamento nella direzione del rotolamento della reazione normale per effetto dell'isteresi del materiale (resistenza al rotolamento), distensione nella zona di uscita dalla superficie di contatto. La forza longitudinale è diretta nella direzione di avanzamento della ruota;
- ❖ nel caso di coppie frenanti: compressione nella zona di uscita dalla superficie di contatto e distensione nella zona d'ingresso sulla superficie di contatto, la reazione normale si mantiene nella stessa posizione di prima, mentre la forza longitudinale ha verso opposto a quello di avanzamento.

Considerando uno pneumatico con coppia motrice applicata (Fig. 4), è possibile individuare due zone nell'area di contatto:

- ❖ la zona anteriore di aderenza A;
- ❖ la zona posteriore di slittamento B.

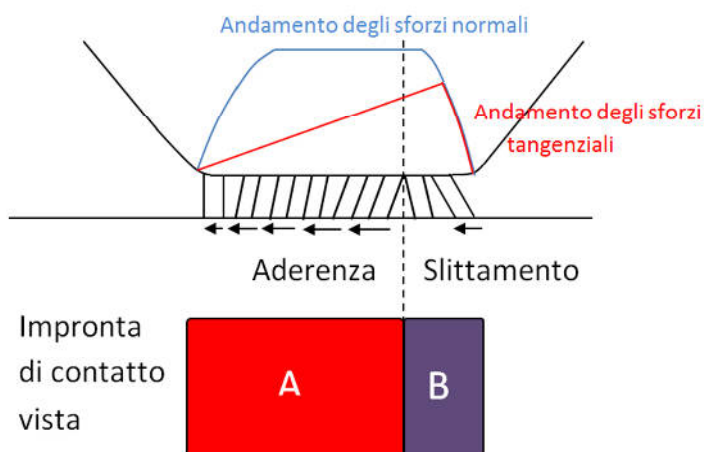


Fig. 4

1.3 Lo sviluppo di forze laterali

Lo studio della dinamica laterale è importante per prevedere il comportamento in curva, sia in termini di massima accelerazione laterale raggiungibile sia di stabilità. Per questo motivo è necessario disporre di un modello capace di descrivere la dinamica del contatto pneumatico-strada quando vengono sviluppate forze laterali, ossia forze dirette fuori dal piano di rotolamento. Il caso considerato è quello denominato di “deriva semplice”, nel quale vengono trascurati gli pseudo-slittamenti e di conseguenza non compaiono le forze longitudinali assieme a quelle laterali.

Analogamente al caso delle forze longitudinali non è possibile sviluppare forze laterali se non in presenza di uno “scorrimento” laterale, che in questo caso sarà rappresentato dall’angolo di deriva α ; considerando un veicolo nel momento in cui percorre una traiettoria rettilinea, si nota che il vettore velocità del centro ruota non giace nel piano di rotolamento delle ruote stesse e presenta una componente laterale diretta fuori dal piano di rotolamento (Fig. 5).

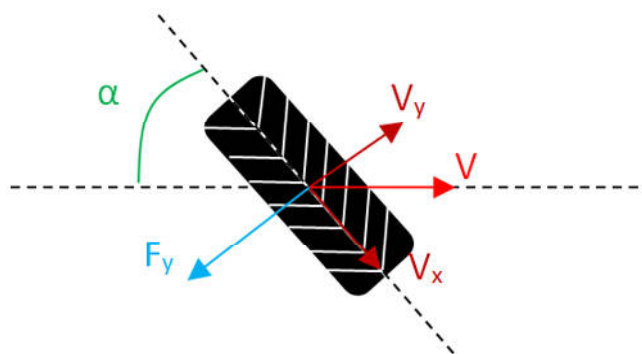


Fig. 5

L’angolo compreso tra il vettore velocità del centro ruota e il piano di rotolamento dello pneumatico viene definito appunto angolo di deriva; dal punto di vista analitico è pari all’arcotangente del rapporto tra componente laterale e longitudinale delle velocità.

$$\alpha = \arctan \frac{V_y}{V_x} \quad (2)$$

Come già detto per lo scorrimento longitudinale, anche lo scorrimento laterale non è molto marcato ed è per questo possibile valutare l’angolo di deriva come semplice rapporto tra le componenti di velocità.

La presenza di questo angolo di deriva è indispensabile per la presenza della forza laterale: la presenza dell’angolo di deriva diretto verso l’esterno curva, segnala che la ruota sta “scivolando” verso l’esterno della curva; di conseguenza nasce una forza laterale opposta, diretta verso l’interno curva.

La relazione tra forza laterale e angolo di deriva è molto simile a quella tra forza longitudinale:

- ❖ la forza laterale è nulla per angoli di deriva nulli, il che rende la sterzata cinematica irrealizzabile nella pratica perché gli pneumatici per percorrere una traiettoria rettilinea sono tenuti a generare forze laterali e dunque devono essere presenti angoli di deriva: solo in condizioni di basse accelerazioni laterali è possibile usarla.
- ❖ il valore massimo si stabilizza al di sotto del prodotto tra coefficiente di attrito statico moltiplicato per il carico normale agente sulla ruota.
- ❖ per angoli di deriva elevati il valore è pari al prodotto tra carico normale e attrito radente.

1.3.1 Calcolo della forza tangenziale in funzione dell'angolo di deriva

Poiché consideriamo una forza che si genera su una superficie, essa sarà data dall'integrale della distribuzione delle forze tangenziali per unità di lunghezza che si genera sull'area di contatto.

Si può però dire che per angoli di deriva piccoli la relazione tra forza tangenziale e angolo di deriva è lineare; a queste condizioni inoltre l'impronta è quasi interamente in aderenza e hanno maggiore influenza le forze elastiche legate alla deformazione del battistrada.

La relazione tra angolo di deriva e forza può quindi essere approssimata dall'espressione:

$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha \quad (3)$$

La grandezza C_α è denominata rigidità di deriva dello pneumatico ed è un parametro fondamentale per la caratterizzazione della risposta di uno pneumatico in laterale. Confrontando le risposte di due pneumatici aventi rigidità di deriva differenti, si osserva che quello con rigidità di deriva maggiore è più schiacciato verso l'asse delle ordinate: a parità di angolo di deriva significa che la forza laterale sviluppata è maggiore, ossia lo pneumatico scivola meno in direzione laterale per sviluppare la medesima forza. Dal punto di vista della dinamica, avere pneumatici rigidi su quell'asse consente di seguire in modo più preciso la traiettoria in curva.

Ciò detto, è bene sottolineare che uno pneumatico più "morbido" con rigidità di deriva minore è più sicuro in quanto lo scivolamento marcato di un asse comunica all'utente l'approssimarsi della condizione di forza massima sviluppabile; inoltre un incremento di scivolamento produce un aumento di forza e contribuisce pertanto alla tenuta laterale dell'asse.

Accanto a questi modelli fisici per il calcolo delle forze, esistono anche dei modelli non fisici sviluppati appunto per staccarsi dalla modellazione fisica che potrebbe diventare troppo complicata e di difficile applicazione: gli pneumatici sono modellati come scatole nere (*modello black box*) cui fornisco determinati ingressi (carico normale, scorrimento, deriva e angolo di camber) per ottenere le uscite volute (forze e momenti).

Il più famoso e diffuso è quello di Pacejka con le sue Magic Formulae [8] che mette in relazioni le forze e i momenti applicati con i relativi scorrimenti mediante l'utilizzo di opportuni coefficienti noti, ricavati da prove sperimentali.

1.4 Stato dell'arte

Data quindi l'importanza di conoscere la cornering stiffness, numerosi algoritmi di stima sono stati elaborati per ricavarne il valore. Di seguito ne vengono presentati due per sottolineare la varietà di metodologie possibili.

1.4.1 Backsteeping Observer

L'articolo [6] prevede la modellazione del veicolo come "single-track" in cui le rigidezze di deriva sia frontale sia posteriore sono uguali all'unico parametro C_E , gli angoli di deriva delle ruote (anteriori α_A e posteriori α_P) e del baricentro β sono piccoli e la velocità agente nel baricentro è simile alla velocità dell'asse posteriore v .

Si è utilizzato un modello "single-track" con le convenzioni di segno indicate in Fig. 6:

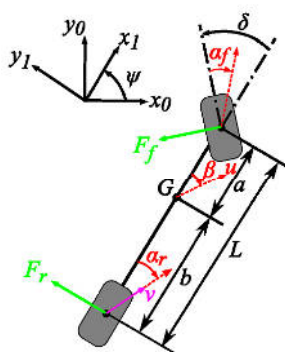


Fig. 6

In cui

- a : distanza dell'asse anteriore dal baricentro G;
- b : distanza dell'asse posteriore dal baricentro G;
- C_E : rigidezza di deriva o cornering stiffness;
- m : massa del veicolo
- I_z : momento di inerzia del veicolo rispetto l'asse verticale (*yaw moment*)
- $\dot{\psi}, \ddot{\psi}$: velocità di imbardata (*yaw rate*) e relativa accelerazione
- $\beta, \dot{\beta}$: angolo di deriva della velocità u del baricentro e relativa velocità
- δ : angolo di sterzo
- α_f : angolo di deriva della ruota anteriore
- α_r : angolo di deriva della ruota posteriore
- v : velocità del centro asse posteriore
- u : velocità del baricentro G
- F_f : forza laterale agente sulla ruota anteriore
- F_r : forza laterale agente sulla ruota posteriore

Le equazioni del moto linearizzate del modello risultano quindi essere:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = a_{11}\dot{\psi} + a_{12}\beta + b_1\delta \\ \dot{\beta} = a_{21}\dot{\psi} + a_{22}\beta + b_2\delta \end{cases} \quad (4)$$

Dove

$$a_{11} = \frac{-(a^2 + b^2)C_E}{vI_z} \quad a_{12} = \frac{(b-a)C_E}{I_z} \quad a_{21} = \frac{(b-a)C_E}{mv^2} - 1 \quad a_{22} = -\frac{2C_E}{mv}$$

$$b_1 = \frac{aC_E}{I_z} \quad b_2 = \frac{C_E}{mv}$$

Dal modello si è poi ricavato l'osservatore:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{\psi}} = a_{11}(C_E) \cdot \dot{\hat{\psi}} + a_{12}(C_E) \cdot \hat{\beta} + b_1(C_E) \cdot \delta \\ \dot{\hat{\beta}} = a_{21}(C_E) \cdot \dot{\hat{\psi}} + a_{22}(C_E) \cdot \hat{\beta} + b_2(C_E) \cdot \delta \end{cases} \quad (5)$$

in cui si nota la dipendenza dei parametri a_{ij} dalla rigidezza di deriva C_E .

Il metodo backstepping prevede di ricavare il valore dell'angolo di deriva del baricentro β e naturalmente il valore della rigidezza di deriva C_E mediante due passaggi: nel primo si considera il valore di stima $\hat{\beta}$ come un ingresso di controllo necessario affinché l'errore sulla yaw rate $\ddot{\psi}$ segua la seguente dinamica:

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi} - \ddot{\hat{\psi}} = K\dot{\hat{\psi}}, \quad K < 0 \quad (6)$$

dove $\ddot{\hat{\psi}}$ rappresenta la derivata numerica delle misure di yaw rate.

Sostituendo la (6) nella prima espressione della (5) si può ricavare la seguente espressione per il calcolo della $\hat{\beta}$ posta uguale a $\bar{\beta}$:

$$\bar{\beta} = \frac{\dot{\psi} - K\dot{\hat{\psi}} - a_{11}(C_E) \cdot \dot{\hat{\psi}} - b_1(C_E) \cdot \delta}{a_{12}(C_E)} \quad (7)$$

La stima dell'angolo di deriva del baricentro $\hat{\beta}$ può essere considerata attendibile quando il valore stimato di yaw rate è simile a quello misurato $\hat{\psi} = \psi$.

Il secondo step prevede ora di utilizzare la stessa rigidezza di deriva C_E come ingresso di controllo con lo scopo di assicurare la convergenza del $\hat{\beta}$ al β con la seguente dinamica dell'errore di velocità

$$\dot{\tilde{\beta}} = \dot{\bar{\beta}} - \dot{\hat{\beta}} = G\tilde{\beta}, \quad G < 0 \quad (8)$$

in cui $\dot{\bar{\beta}}$ è la derivata numerica di $\bar{\beta}$

Introducendo la (8) nella seconda equazione della (5) si ottiene:

$$G\tilde{\beta} = \dot{\bar{\beta}} - a_{21}(C_E) \cdot \dot{\hat{\psi}} - a_{22}(C_E) \cdot \hat{\beta} - b_2(C_E) \cdot \delta \quad (9)$$

Sostituendo quindi le espressioni dei coefficienti a_{ij} e liberando la rigidezza di deriva C_E si arriva a:

$$C_E = \frac{\dot{\bar{\beta}} + \dot{\hat{\psi}} - G\tilde{\beta}}{\frac{(b-a)\dot{\hat{\psi}}}{mv^2} - \frac{2\hat{\beta}}{mv} + \frac{\delta}{mv}} \quad (10)$$

Si nota che il valore di rigidità di deriva può essere stimato solo se la velocità è diversa da zero ($v \neq 0$) e se lo sterzo ha valore non nullo ($\delta \neq 0$), in caso contrario sia la yaw rate $\dot{\psi}$ sia l'angolo di deriva del baricentro sono zero β .

Gli autori testano l'algoritmo mediante alcune misure sperimentali.

1.4.2 Relazione cinematica-geometrica

Questo articolo [4] è particolarmente interessante perché dimostra di poter ricavare un possibile valore della rigidità di deriva C_E grazie alle caratteristiche geometriche e cinematiche del veicolo.

Anche in questo caso consideriamo un modello "single-track":

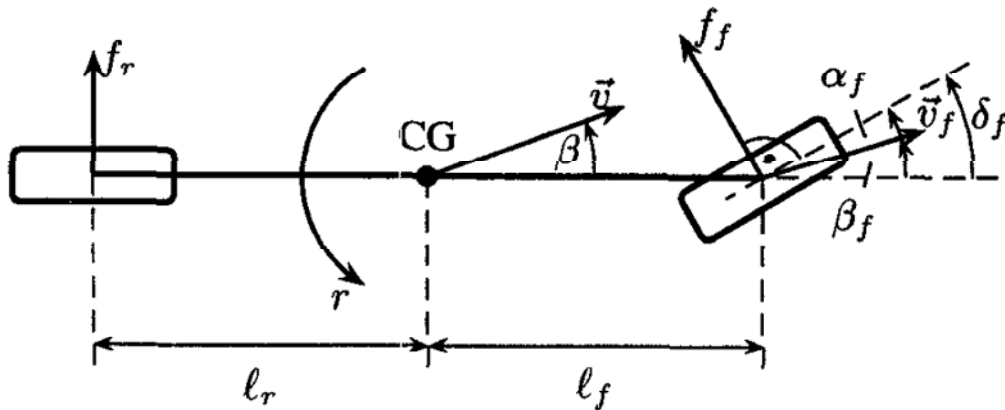


Fig. 7

Dove:

- l_f : distanza dell'asse anteriore dal baricentro G;
- l_r : distanza dell'asse posteriore dal baricentro G;
- C_E : rigidità di deriva o cornering stiffness;
- m : massa del veicolo
- I_z : momento di inerzia del veicolo rispetto l'asse verticale (*yaw moment*)
- \dot{r}, \ddot{r} : velocità di imbardata (yaw rate) e relativa accelerazione
- $\beta, \dot{\beta}$: angolo di deriva della velocità del v baricentro e relativa velocità
- δ_f : angolo di sterzo
- α_f : angolo di deriva della ruota anteriore
- α_r : angolo di deriva della ruota posteriore
- v : velocità del centro di gravità CG
- v_f : velocità della ruota anteriore
- f : forza laterale agente sulla ruota anteriore
- f_r : forza laterale agente sulla ruota posteriore

Le forze agenti sullo pneumatico vengono scomposte in forze longitudinale e laterale e con un momento intorno all'asse di imbardata perpendicolare al foglio:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \delta_f & 0 \\ \cos \delta_f & 1 \\ l_f \cos \delta_f & -l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_f(\alpha_f) \\ f_r(\alpha_r) \end{bmatrix} \quad (11)$$

La dinamica è invece rappresentata dalle seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} mv(\dot{\beta} + r) \\ m\dot{v} \\ J_z \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

Le relazioni cinematiche che intercorrono tra le grandezze sono invece:

$$- \delta_f = \alpha_f + \beta_f \quad (13)$$

$$- 0 = \alpha_r + \beta_r \quad (14)$$

Con

$$- \tan \beta_f = \tan \beta + \frac{r l_f}{v \cos \beta} \quad (15)$$

$$- \tan \beta_r = \tan \beta - \frac{r l_r}{v \cos \beta} \quad (16)$$

Sempre per ricondursi a un sistema lineare gli autori assumono costante il valore di velocità v e lineare il rapporto tra forze laterali e angolo di deriva:

$$f_f(\alpha_f) = C_{E0f} \cdot \alpha_f \quad (17)$$

$$f_r(\alpha_r) = C_{E0r} \cdot \alpha_r \quad (18)$$

Dove C_{E0f} e C_{E0r} sono i valori che si ottengono linearizzando la curva caratteristica delle forze laterali nell'origine.

Nell'articolo tuttavia si fa riferimento alla definizione di rigidità intesa come derivata della forza laterale dello pneumatico e del corrispondente angolo di deriva

$$c_f(\alpha_f) = \frac{df_f(\alpha_f)}{d\alpha_f} \quad (19)$$

Proprio partendo da questa definizione che è la più generale possibile, grazie a un espediente matematico e sfruttando le equazioni viste prima, gli autori riescono a ricavare e a dimostrare la seguente relazione:

$$c_f(\alpha_f) = \frac{df_f(\alpha_f)}{d\alpha_f} = \frac{df_f(\alpha_f)}{d\alpha_f} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\dot{f}_f}{\dot{\alpha}_f} = m \cdot \frac{l_r}{l_f + l_r} \cdot \frac{\dot{\alpha}_f}{\dot{\delta}_f - \frac{\alpha_f}{v} + r} \quad (20)$$

CAPITOLO 2

IL QUAD: DESCRIZIONE E MODELLAZIONE

In questa sezione è possibile trovare una descrizione dell'ATV considerato, in cui sono riportate le sue proprie caratteristiche, le modifiche apportate per renderlo autonomo e infine le equazioni che ne descrivono la cinematica e la dinamica.

2.1 Descrizione generale

Il veicolo su cui è basata questa tesi è un Quad commerciale, nello specifico uno Yamaha Grizzly 700, reso autonomo grazie all'aggiunta di attuatori in grado di comandare sterzo, freno ed acceleratore, sensori e sistemi di elaborazione per garantirne la movimentazione su percorsi lunghi con terreno accidentato a velocità sostenuta.



Fig. 8

Il veicolo monta un motore a benzina monocilindrico a quattro tempi a iniezione elettronica da 686 cm³, in grado di erogare una potenza di 46 CV. La trasmissione avviene tramite una frizione centrifuga automatica e un riduttore finale a due velocità (variatore). La guida può essere a trazione posteriore o integrale (4WD).

L'impianto frenante è idraulico con doppi freni a disco anteriore e posteriore mentre l'impianto elettrico è costituito da una batteria di tensione nominale 12 V e capacità 18 Ah, ricaricata da un alternatore da 35 A.

La strumentazione aggiuntiva viene alimentata con due batterie ausiliarie al piombo di tensione nominale 12 V e capacità 38 Ah, esclusivamente dedicate ad essa.

Gli pneumatici sono di tipologia tubeless, in particolare essi sono modelli Dunlop/KT421 nello standard AT25 x 8-12 per l'anteriore e Dunlop/425 nello standard AT25 x 10-12.

Dalla figura 9 si osserva che la carrozzeria del Quad è stata rimossa e inizialmente sostituita con un pianale e una scocca in lamiera di alluminio, al fine di posizionare tutte le apparecchiature elettroniche necessarie sul veicolo. In seguito il pianale è stato modificato con una nuova carrozzeria in alluminio ricoperta da una patina mimetica come è possibile osservare sempre in figura 9.



Fig. 9

Per garantire la guida automatica si è reso necessario apportare modifiche allo sterzo: si è quindi interrotta la continuità meccanica tra manubrio e ruote rimuovendo il sistema EPS, di cui è dotato il Grizzly di serie, successivamente il piantone dello sterzo è stato sostituito con un gruppo motore DC – motoriduttore (motore Intecno ND180/240 e riduttore Intecno NDP180/813), il quale aziona l'elemento, detto pitman arm, che converte il moto rotatorio dell'albero nel moto traslatorio dei braccetti.

L'acceleratore invece viene comandato mediante l'attuazione del motore stepper B&R 80MDP4.300S000-01, il quale agisce sulla manopola presente sul manubrio.

Dimensioni e peso del Quad sono caratterizzati dai seguenti valori:

- lunghezza: 2,06 m
- larghezza: 1,18 m
- altezza: 1,24 m
- altezza da terra: 0,275 m
- passo: 1,25 m
- massa: 294 kg

Il veicolo è dotato di un sistema di controllo che permette la guida secondo due differenti modalità: la teleguida e la guida automatica.

La prima è realizzata mediante un joystick (Microsoft Xbox 360 Controller for Windows) senza fili che consente all'operatore di agire sull'acceleratore, sullo sterzo e sul freno per movimentare l'ATV, oltre che esercitare un'azione di emergenza che disattiva il sistema di controllo e arresta il veicolo.

La guida automatica è realizzata invece grazie a una strategia di controllo implementata sul veicolo grazie a un opportuno sistema software su PC industriale. Tale strategia prevede il calcolo dei set point di velocità, dell'angolo di sterzo e del freno degli anelli di controllo di basso livello. Essa lavora sul tragitto definito dall'operatore e sulla posizione corrente del mezzo, ottenuta grazie a un Filtro di Kalman esteso, che riceve in ingresso i dati provenienti dal

GPS e dall'odometria del veicolo.

All'utente spetta il compito di inserire il vettore dei punti attraverso cui deve passare il veicolo (waypoint) e la velocità che deve essere raggiunta dal Quad tra le diverse coppie di waypoint.

2.2 Modellazione matematica

Prima di stendere le equazioni che descrivono il comportamento del veicolo, è bene effettuare alcune ipotesi semplificative:

- a) L'autoveicolo è assimilabile a una trave rigida che si muove su un piano a velocità V costante
- b) I due pneumatici di uno stesso asse sono fatti collassare in un unico pneumatico equivalente
(modello "single-track" o bicicletta)
- c) Si trascura la presenza delle sospensioni, i moti verticali di beccheggio e rollo nonché i trasferimento di carico associati
- d) Si trascura qualsiasi effetto determinato dalla carreggiata e dalla irregolarità stradale
- e) Angolo di sterzo δ è fissato oppure determinato da un modello di pilota (inseguitore di traiettoria)
- f) Si trascurano le forze aereeodinamiche e i momenti auto-allineanti

Per la scrittura delle equazioni di moto ci si appoggia alle convenzioni di figura 10 in cui compaiono e si considerano 2 sistemi di riferimento:

1. La terna di riferimento globale XY
2. La terna di riferimento locale X_1Y_1

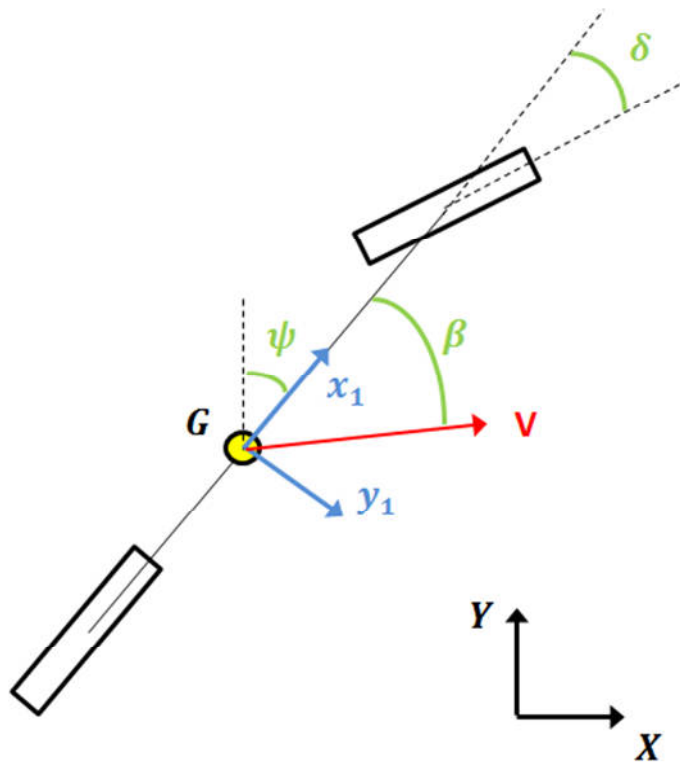


Fig. 10

Si individuano:

- L'angolo di sterzo δ
- L'angolo di deriva del veicolo β
- L'angolo di imbardata ψ

Equazioni del moto

Come rappresentato nella figura 11 si evidenziano ora le forze e momenti agenti sul veicolo e scomposte secondo il sistema di riferimento locale, così da poter poi scrivere il bilancio di forze per ciascuna direzione individuata, come base dello schema sotto:

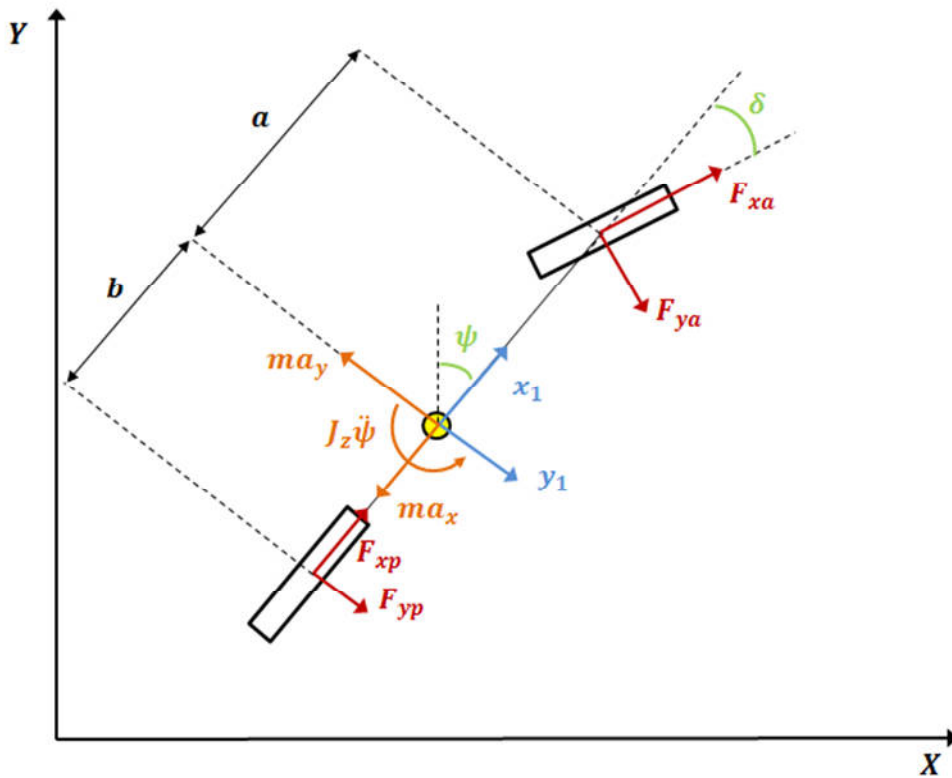


Fig. 11

Evidenziati:

- F_{xa} : forza anteriore agente sullo pneumatico in direzione longitudinale.
- F_{ya} : forza anteriore agente sullo pneumatico in direzione perpendicolare allo pneumatico.
- F_{xp} : forza posteriore agente sullo pneumatico in direzione longitudinale.
- F_{yp} : forza posteriore agente sullo pneumatico in direzione perpendicolare allo pneumatico.
- a_x : accelerazione lungo l'asse longitudinale del veicolo
- a_y : accelerazione normale rispetto la direzione longitudinale del veicolo
- a : distanza dell'asse anteriore dal baricentro pari a 0,7768 m
- b : distanza dell'asse posteriore dal baricentro pari a 0,4732 m

Si ottengono le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} F_{x_1} = ma_x = F_{xa} \cdot \cos \delta - F_{ya} \cdot \sin \delta + F_{xp} \\ F_{y_1} = ma_y = F_{ya} \cdot \cos \delta - F_{xa} \cdot \sin \delta + F_{yp} \\ J_z \ddot{\psi} = (F_{ya} \cdot \cos \delta - F_{xa} \cdot \sin \delta) \cdot a - F_{yp} \cdot b \end{cases} \quad (21)$$

Come variabili indipendenti si assumono il vettore velocità del baricentro V , l'angolo di deriva del baricentro β , lo yaw rate $\dot{\psi}$: $[V \ \beta \ \dot{\psi}]^T$. Lo scopo adesso è esplicitare i termini che compaiono nelle equazioni del moto (angoli di deriva, accelerazione del baricentro) in funzione delle coordinate libere del sistema.

Analisi cinematica

Per esprimere l'accelerazione laterale a_y e l'accelerazione longitudinale a_x in funzione delle coordinate libere del sistema è necessario innanzitutto scomporre il vettore velocità nelle sue componenti x_1 e y_1 rispetto al sistema di riferimento locale con i versori \vec{i} e \vec{j} :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad (22)$$

Da cui si ricava l'accelerazione:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = V_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{V}_x \vec{i} + V_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{V}_y \vec{j} \quad (23)$$

In cui

$$V_x = V \cdot \cos \beta \quad e \quad V_y = V \cdot \sin \beta \quad (24)$$

Ricorrendo alle relazioni di Poisson è possibile scrivere:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} = \dot{\psi} \vec{k} \wedge \vec{i} = \dot{\psi} \vec{j} \quad (25)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} = \dot{\psi} \vec{k} \wedge \vec{j} = -\dot{\psi} \vec{i} \quad (26)$$

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = V_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{V}_x \vec{i} + V_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{V}_y \vec{j} = V_x \dot{\psi} \vec{j} + \dot{V}_x \vec{i} - V_y \dot{\psi} \vec{i} + \dot{V}_y \vec{j} \\ &= (\dot{V}_x - V_y \dot{\psi}) \vec{i} + (\dot{V}_y + V_x \dot{\psi}) \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \end{aligned} \quad (27)$$

Dove

$$a_x = \dot{V}_x - V_y \dot{\psi} = \frac{d}{dt} (V \cdot \cos \beta) - \dot{\psi} V \cdot \sin \beta \quad e \quad a_y = \dot{V}_y + V_x \dot{\psi} = \frac{d}{dt} (V \cdot \sin \beta) + \dot{\psi} V \cdot \cos \beta$$

È ragionevole supporre che gli angoli descritti dal veicolo durante la marcia siano piccoli, è quindi possibile linearizzare le equazioni sopra, ottenendo:

$$a_x = \dot{V} - \dot{\psi} V \beta \quad e \quad a_y = \frac{d}{dt} (V \beta) + \dot{\psi} V \beta = \dot{V} \beta + V \dot{\beta} + \dot{\psi} V = V \dot{\beta} + \dot{\psi} V \quad (28)$$

Calcolo dell'angolo di deriva dello pneumatico anteriore

La convenzione adottata per il calcolo dell'angolo di deriva dello pneumatico anteriore è rappresentata nelle figure 12 e 13:

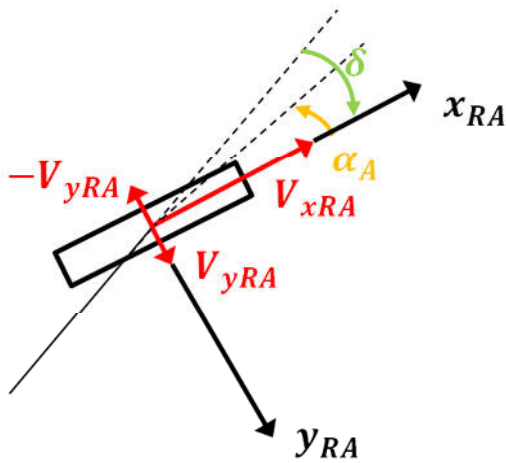


Fig. 12

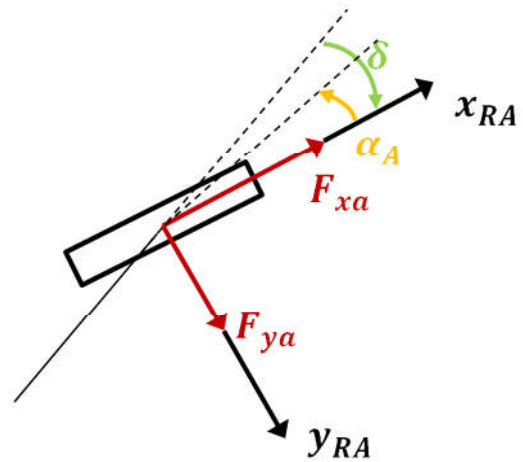


Fig. 13

La forza di contatto $F_{y\alpha}$ è positiva, se è positivo l'angolo di deriva α_A secondo la convenzione indicata e l'angolo di deriva è dato dalla relazione:

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left(-\frac{V_{yRA}}{V_{xRA}} \right) \quad (29)$$

Dove

- V_{yRA} : è la componente di velocità perpendicolare alla ruota proiettata nel sistema di riferimento locale proprio della ruota stessa x_{RA}, y_{RA} ;
- V_{xRA} : è la componente di velocità longitudinale della ruota proiettata nel sistema di riferimento locale proprio della ruota stessa x_{RA}, y_{RA} .

Considerando la figura 14 si valuta la velocità del centro ruota nel sistema di riferimento locale x_1, y_1 :

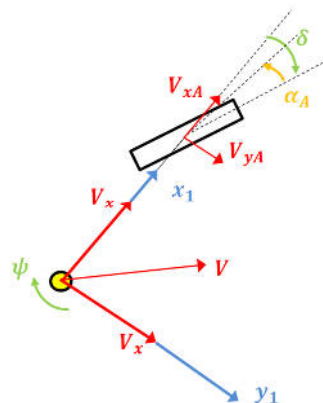


Fig. 14

Le velocità sono pari a:

$$\begin{cases} V_{xA} = V_x = V \cdot \cos \beta \\ V_{yA} = V_y + \dot{\psi}a = V \cdot \sin \beta + \dot{\psi}a \end{cases} \quad (30)$$

Proiettando le velocità nel SR locale della ruota anteriore x_{RA}, y_{RA} , secondo quanto indicato in figura 15,

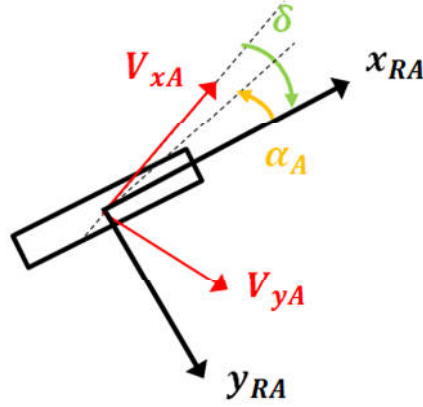


Fig. 15

si ottiene:

$$\begin{cases} V_{xRA} = V_{xA} \cdot \cos \delta + V_{yA} \cdot \sin \delta \\ V_{yRA} = V_{yA} \cdot \cos \delta + V_{xA} \cdot \sin \delta \end{cases} \quad (31)$$

Quindi sempre supponendo che il veicolo descriva angoli piccoli nel suo movimento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_A = \tan^{-1} \left(-\frac{V_{yRA}}{V_{xRA}} \right) &= \alpha_A = \tan^{-1} \left(-\frac{(V \cdot \sin \beta + \dot{\psi}a) \cdot \cos \delta + V \cdot \cos \beta \cdot \sin \delta}{V \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta + (V \cdot \sin \beta + \dot{\psi}a) \cdot \sin \delta} \right) \cong \\ &\cong -\frac{(V \cdot \sin \beta + \dot{\psi}a) \cdot \cos \delta + V \cdot \cos \beta \cdot \sin \delta}{V \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta + (V \cdot \sin \beta + \dot{\psi}a) \cdot \sin \delta} \cong -\frac{V \sin \beta + \dot{\psi}a - V \delta}{V + V \sin \beta + \dot{\psi}a \delta} \cong \\ &\cong -\frac{V \sin \beta + \dot{\psi}a - V \delta}{V} \cong \delta - \beta - \frac{\dot{\psi}}{V} a \end{aligned} \quad (32)$$

Calcolo dell'angolo di deriva dello pneumatico posteriore

La convenzione adottata per il calcolo dell'angolo di deriva dello pneumatico posteriore è rappresentata nelle figure 16 e 17:

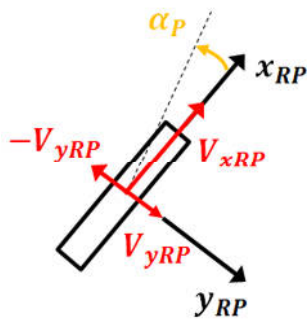


Fig. 16

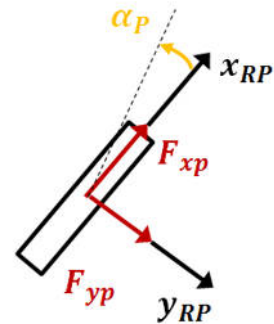


Fig. 17

La forza di contatto F_{yP} è positiva, se è positivo l'angolo di deriva α_p secondo la convenzione indicata e l'angolo di deriva è dato dalla relazione:

$$\alpha_p = \tan^{-1} \left(-\frac{V_{yRP}}{V_{xRP}} \right) \quad (33)$$

Dove

- V_{yRP} : è la componente di velocità perpendicolare alla ruota proiettata nel sistema di riferimento locale proprio della ruota stessa x_{RP}, y_{RP} ;
- V_{xRP} : è la componente di velocità longitudinale della ruota proiettata nel sistema di riferimento locale proprio della ruota stessa x_{RP}, y_{RP} .

Considerando la figura 18, si valuta la velocità del centro ruota nel sistema di riferimento locale x_1, y_1 :

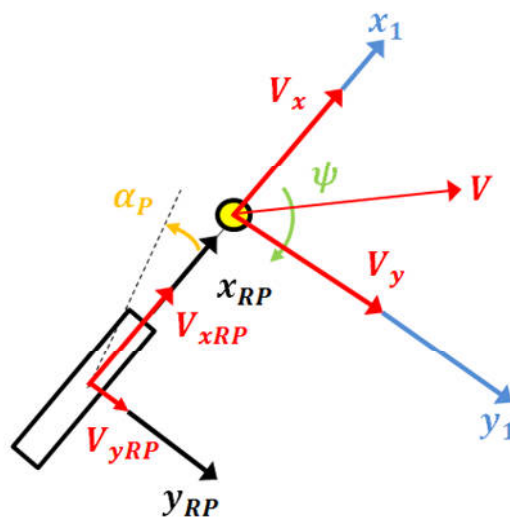


Fig. 18

Le velocità sono pari a :

$$\begin{cases} V_{xP} = V_x = V \cdot \cos \beta \\ V_{yP} = V_y + \dot{\psi}b = V \cdot \sin \beta - \dot{\psi}b \end{cases} \quad (34)$$

Essendo il sistema di riferimento locale della ruota x_{RP}, y_{RP} e il sistema di riferimento locale del veicolo nel baricentro x_1, y_1 le velocità nell'uno e nell'altro sistema di riferimento sono uguali, quindi

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \tan^{-1} \left(-\frac{V_{yRP}}{V_{xRP}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{V_{yP}}{V_{xP}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{V \cdot \sin \beta - \dot{\psi}b}{V \cdot \cos \beta} \right) \cong \\ &\cong -\frac{V \cdot \sin \beta - \dot{\psi}b}{V \cdot \cos \beta} \cong -\frac{V \cdot \beta - \dot{\psi}b}{V} \cong \frac{\dot{\psi}}{V}b - \beta \end{aligned} \quad (35)$$

Le equazioni di moto finali

Considerando le equazioni scritte sopra e la relazione lineare tra angolo di deriva e forza laterale $F_y = C_\alpha \alpha$, supponendo inoltre che il valore di rigidità di deriva sia uguale sia per l'asse anteriore sia per quello posteriore $C_\alpha = C_{\alpha A} = C_{\alpha P}$, le forze longitudinali siano trascurabili, il bilancio di forza risulta pari a:

$$\begin{cases} F_{x_1} = ma_x = m(\dot{V} - \dot{\psi}V\beta) = -F_{y_a} \cdot \sin \delta \\ F_{y_1} = ma_y = m(V\dot{\beta} + \dot{\psi}V) = F_{y_a} \cdot \cos \delta + F_{y_p} \\ J_z \ddot{\psi} = F_{y_a} \cdot \cos \delta \cdot a - F_{y_p} \cdot b \end{cases} \quad (36)$$

Sostituendo $F_{y_a} = C_\alpha \alpha_A$ e $F_{y_p} = C_\alpha \alpha_P$ e linearizzando lo sterzo, si ottiene:

$$\begin{cases} m(\dot{V} - \dot{\psi}V\beta) = -C_\alpha \alpha_A \cdot \delta \\ m(V\dot{\beta} + \dot{\psi}V) = C_\alpha \alpha_A + C_\alpha \alpha_P \\ J_z \ddot{\psi} = C_\alpha \alpha_A \cdot a - C_\alpha \alpha_P \cdot b \end{cases} \quad (37)$$

Sostituendo le relazioni degli angoli di deriva:

$$\begin{aligned} \alpha_P &\cong \frac{\dot{\psi}}{V}b - \beta \\ \alpha_A &\cong \delta - \beta - \frac{\dot{\psi}}{V}a \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} m(\dot{V} - \dot{\psi}V\beta) = -C_\alpha \left(\delta - \beta - \frac{\dot{\psi}}{V}a \right) \cdot \delta \\ m(V\dot{\beta} + \dot{\psi}V) = C_\alpha \left(\delta - \beta - \frac{\dot{\psi}}{V}a \right) + C_\alpha \left(\frac{\dot{\psi}}{V}b - \beta \right) \\ J_z \ddot{\psi} = C_\alpha \left(\delta - \beta - \frac{\dot{\psi}}{V}a \right) \cdot a - C_\alpha \left(\frac{\dot{\psi}}{V}b - \beta \right) \cdot b \end{cases} \quad (38)$$

CAPITOLO 3

FILTRO DI KALMAN

Il Filtro di Kalman è un potente algoritmo sviluppato nell'analisi dei sistemi dinamici per l'osservazione di grandezze incognite. Dopo una necessaria premessa sulle grandezze randomiche, si vedrà il Filtro di Kalman come filtro ottimo, il Filtro di Kalman a Regime e il Filtro di Kalman Esteso per la stima dei parametri.

3.1 Grandezze random

Per caratterizzare un processo stocastico generico è necessario conoscere le funzioni di densità di probabilità $p(x, t_1)$ da cui estrarre le grandezze che servono per caratterizzare il processo che normalmente sono

- valor medio:

$$\mu_x(t_1) = E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, t_1) \cdot dx \quad (39)$$

- valor quadratico medio

$$\Psi_x^2(t_1) = E[x(t_1)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x, t_1) \cdot dx \quad (40)$$

- varianza

$$\sigma_x^2(t_1) = E[(x(t_1) - \mu_x(t_1))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x, t_1) \cdot dx \quad (41)$$

Tutte le relazioni matematiche sopra esposte sono funzione dell'istante di tempo considerato.

A esse si aggiungono le funzioni di probabilità congiunte tra due processi x e y a due differenti istanti di tempo t_1 e t_2 . Sono le funzioni di correlazione che:

- se riferite a processi stocastici differenti si parla di cross-correlazione

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} x(t_1) \cdot y(t_2) \cdot p(x, t_1, y, t_2) \cdot dx \cdot dy \quad (42)$$

- se riferite al medesimo processo si parla invece di funzione di auto-correlazione

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot p(x, t_1, x, t_2) \cdot dx \cdot dx \quad (43)$$

Si menzionano anche:

- funzione di cross-covarianza

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu_x(t_1))(x(t_2) - \mu_y(t_2))] \quad (44)$$

- funzione di auto-covarianza

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu_x(t_1))(x(t_2) - \mu_x(t_2))] \quad (45)$$

La caratterizzazione del processo viene svolta di solito sperimentalmente perché non si conoscono a priori le funzioni di probabilità delle varie variabili statistiche che costituiscono il processo, ma solo una serie di realizzazioni del processo stesso; quindi si calcolano le grandezze caratteristiche facendo le medie sulle realizzazioni:

- Valore medio

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (46)$$

- Valore quadratico medio

$$\Psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t_1) \quad (47)$$

- Varianza

$$\sigma_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k(t_1) - \mu_x(t_1))^2 \quad (48)$$

- Funzione di auto-correlazione

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_2) \quad (49)$$

- Funzione di auto-covarianza

$$C_{xx}(t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k(t_1) - \mu_x(t_1))(x_k(t_2) - \mu_x(t_2)) \quad (50)$$

Al tendere all'infinito del numero di medie fatte N si ottengono gli stessi valori che si sarebbero ottenuti dalle funzioni di densità di probabilità.

Un'altra possibilità che si può avere per analizzare un processo stocastico è usare ciascuna singola realizzazione, svolgendo delle medie nel tempo.

La singola realizzazione temporale del processo stocastico viene caratterizzata con lo stesso tipo di grandezze usate per caratterizzare il processo stocastico nel suo complesso ma questa volta le grandezze non dipendono dal tempo ma dalla particolare realizzazione che consideriamo:

- valor medio

$$\mu_x(k) = E[x_k] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot dt \quad (51)$$

- valor quadratico medio

$$\Psi_x^2(k) = E[x_k^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k^2(t) \cdot dt \quad (52)$$

- RMS

$$RMS_x = \sqrt{\Psi_x^2} \quad (53)$$

- Varianza

$$\sigma_x^2(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_k(t) - \mu_x(k))^2 dt \quad (54)$$

- Deviazione Standard

$$\sigma_x(k) = \sqrt{\sigma_x^2(k)} \quad (55)$$

In corrispondenza delle funzioni di cross- e auto- correlazione si ha per ciascuna una corrispondente funzione R nel dominio temporale dipendente dall'intervallo di tempo τ ovvero dalla differenza dei due istanti di tempo che sono considerati:

- Funzione di auto-correlazione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) \cdot dt \quad (56)$$

Proprietà

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t) \cdot dt = \Psi_x^2 \quad (57)$$

$$R_{xx}(\tau) \geq R_{xx}(0) \quad (58)$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (59)$$

- Funzione di cross-correlazione

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot y_j(t + \tau) \cdot dt \quad (60)$$

Proprietà

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (61)$$

Anche per la varianza passando nel dominio temporale abbiamo due funzioni corrispondenti, dipendenti anch'esse dal solo intervallo temporale:

- Funzione di covarianza

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_k(t) - \mu_{xk}) \cdot (x_k(t + \tau) - \mu_{xk}) \cdot dt \quad (62)$$

Proprietà

$$C_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_k(t) - \mu_{xk}) \cdot (x_k(t) - \mu_{xk}) \cdot dt = \sigma_x^2(k) \quad (63)$$

- Funzione cross-covarianza

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_k(t) - \mu_{xk}) \cdot (y_j(t + \tau) - \mu_{yj}) \cdot dt \quad (64)$$

Siccome è considerata una grandezza che varia nel tempo ossia la singola realizzazione di un processo stocastico, è possibile caratterizzare questo segnale nel tempo anche attraverso il dominio delle frequenze, in particolare si definisce Densità di Potenza Spettrale la trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

$$S_{xx}(f) = \int_0^T R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau = 2 \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau \quad (65)$$

Caratteristiche

- l'integrale della Densità di Potenza Spettrale è pari al valore quadratico medio del segnale considerato

$$\int_0^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot df = \Psi_x^2 \quad (66)$$

- PSD è una funzione reale, quindi si perde un'informazione sulla fase del segnale, ed è sempre maggiore di zero

$$S_{xx}(f) \geq 0 \quad (67)$$

Si introducono ulteriori ipotesi grazie alle quali un processo stocastico definito da una serie di realizzazioni $x_i(t)$ si definisce *stazionario in senso ampio*, se valor medio e valor quadratico medio sono indipendenti dall'istante di tempo considerato e la funzione di autocorrelazione di un segnale non dipende più dai due istanti di tempo di un segnale, ma dipende solo dalla differenza degli istanti di tempo considerati:

- Valore medio

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) = \mu_x(t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_2) = \mu_x \quad (68)$$

- Valore quadratico medio

$$\Psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t_1) = \Psi_x^2(t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t_2) = \Psi_x^2 \quad (69)$$

- Funzione di autocorrelazione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_2) x_k(t_2 + \tau) \quad (70)$$

Un processo stazionario è definito ergodico se le grandezze statistiche calcolate sulla singola storia temporale coincidono con le medie sulle realizzazioni che sono costanti in quanto il processo è stazionario. Quindi:

- Valore medio

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) = \mu_x(k) = E[x_k] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot dt = \mu_x \quad (71)$$

- Valore quadratico medio

$$\Psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t_1) = \Psi_x^2(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k^2(t) \cdot dt = \Psi_x^2 \quad (72)$$

- Funzione di autocorrelazione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) \cdot dt \quad (73)$$

A questo punto il processo può essere caratterizzato con un solo valor medio, con un solo valore quadratico medio, con una sola funzione di autocorrelazione oppure, equivalentemente, con la PSD del segnale nel dominio delle frequenze.

Il rumore bianco ha:

- funzione di autocorrelazione di tipo impulsivo e ciò significa che il segnale è imprevedibile quando ci spostiamo da un tempo t_1 a t_2 , ossia non è assolutamente correlato con se stesso al di fuori dell'istante $\tau=0$;
- PSD costante su tutte le frequenze: quindi il rumore bianco ha uno spettro con contributo su tutte le frequenze con la stessa ampiezza.

Per caratterizzare il rumore bianco per le simulazioni con il Filtro di Kalman è necessario quindi avere:

- valor medio nullo

$$E\{\underline{v}(t)\} = \underline{0} \quad (74)$$

- la varianza o il valore quadratico medio coincidenti in questo caso corrispondenti all'intensità del motore

$$E\{\underline{v}(t)\underline{v}(t)\} = [V] \quad (75)$$

- la funzione di autocorrelazione impulsiva o in modo equivalente la densità di potenza spettrale costante.

Data la seguente relazione tra valor medio, valor quadratico medio e varianza:

$$\mu_x^2 + \sigma_x^2 = \Psi_x^2 \quad (76)$$

il valore dell'autocorrelazione per τ nullo è pari al valore quadratico medio Ψ_x^2 e, poiché il valor medio μ_x è nullo, è pari quindi anche alla varianza σ_x del segnale; a questo punto il rumore bianco è caratterizzato solo da due parametri: la sua varianza (o intensità) e il suo valor medio (nullo).

Generalmente si trattano vettori di rumori bianchi con valor medio nullo e caratterizzati da una matrice di covarianza sulla cui diagonale principale si trova la varianza dei singoli segnali che rappresenteranno l'intensità dei rumori e sui termini extra-diagonali si ha la covarianza dei segnali.

La covarianza dei segnali indica che tipo di correlazione c'è tra i diversi segnali: genericamente si incontrano processi stocastici che sono indipendenti tra di loro ossia il rumore che agisce su un certo strumento di misura è in generale indipendente da quello che agisce su un altro strumento di misura: quindi tratteremo matrici di covarianza di tipo diagonale. Sono quindi da definire solo le intensità dei rumori presenti nel sistema di controllo ossia gli elementi della diagonale principale della matrice di covarianza.

3.2 Filtro di Kalman come filtro ottimo

È un filtro perché a partire da misure soggette a rumore è in grado di estrarre lo stato; è definito anche "ottimo" perché in funzione di opportuni pesi che stiamo dando all'osservatore troveremo il ricostruttore ottimo dello stato in grado cioè di minimizzare l'errore tra stato reale e stimato in presenza di disturbi: è bene sottolinearlo per evidenziare il fatto che il Filtro di Kalman non funziona se non c'è rumore.

I pesi sono i valori di varianza dati al rumore presente nel segnale sia di controllo sia di misura: si stima a priori quanto è ampio il rumore presente.

Viene anche utilizzato per identificare i parametri, oltre che per ricostruire lo stato.

Lo scopo del Filtro di Kalman è quindi restituire una stima ottima dello stato del sistema considerato, partendo da un modello del sistema stesso e da misure su di esso, supponendo che sul sistema agiscano rumori e disturbi di natura differente (rumori sulla misura, sul modello e direttamente sullo stato).

Le equazioni del sistema da controllare sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + [B]\underline{u}_c(t) + \underline{v}(t) \\ \underline{y}(t) = [C]\underline{x}(t) + [D]\underline{u}_c(t) + \underline{w}(t) \end{cases} \quad (77)$$

Si nota come l'equazione di stato è affetta dal rumore $\underline{v}(t)$ sullo stato mentre l'equazione di osservazione è affetta dal rumore $\underline{w}(t)$ sulle misure.

Per la progettazione ottima dell'osservatore è necessario conoscere le caratteristiche statistiche dei rumori che sono ipotizzati come rumori bianchi gaussiani, a valor medio nullo e quindi caratterizzati dalle loro matrici di varianza:

- $[V] = E\{\underline{v}\underline{v}^T\}$
matrice quadrata di covarianza del rumore (bianco) sullo stato di dimensione pari al numero di stati n presenti
- $[R] = E\{\underline{w}\underline{w}^T\}$
matrice quadrata di covarianza del rumore (bianco) di misura di dimensione pari al numero di uscite p

L'osservatore di stato relativo al sistema in esame ha quindi la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}} = [A]\hat{\underline{x}} + [B]\underline{u}_c + [K](y - \hat{y}) \\ \hat{y} = [C]\hat{\underline{x}} + [D]\underline{u}_c \end{cases} \quad (78)$$

dove:

- $\hat{\underline{x}}$ è la stima del vettore delle variabili di stato
- $\hat{\underline{y}}$ è la stima del vettore delle uscite

Lo schema a blocchi complessivo del modello è quello sotto rappresentato

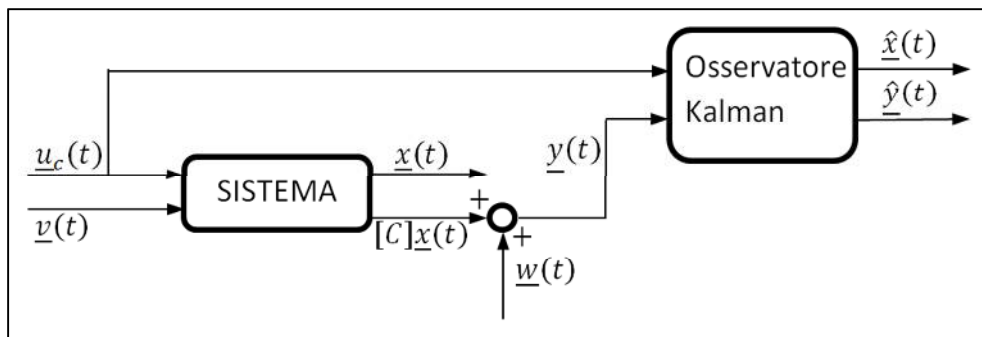


Fig. 19

Dalla prima equazione del modello del sistema e dell'osservatore si ricava l'equazione dell'errore di stima dello stato:

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{\hat{x}}} = \left([A]\underline{x} + [B]\underline{u}_c + \underline{v}(t) \right) - \left([A]\underline{\hat{x}} + [B]\underline{u}_c + [K] \left(y - \underline{\hat{y}} \right) \right)$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = [A]\underline{\varepsilon} + \underline{v} - [K]([C]\underline{x} + \underline{w} - [C]\underline{\hat{x}})$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = ([A] - [K][C])\underline{\varepsilon} + \underline{v} - [K]\underline{w} \quad (79)$$

È possibile affermare che utilizzando il Filtro di Kalman la dinamica dell'errore di stima dello stato non tende a zero perché compaiono due termini dipendenti da rumore $\underline{v}(t)$ e $[K]\underline{w}(t)$ accanto alla matrice dinamica $([A] - [K][C])$ dell'errore: compito del Filtro di Kalman è sintetizzare la matrice di guadagno $[K]$ in grado di ottimizzare e minimizzare questa espressione.

Nel caso in esame si vuole minimizzare l'errore quadratico medio di stima integrato nel tempo tra l'istante iniziale t_0 e l'istante finale t_f :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \right)^T \cdot \left(\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \right) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_f} \underline{\varepsilon}(t)^T \cdot \underline{\varepsilon}(t) \cdot dt \quad (80)$$

Dalla minimizzazione della cifra di merito J , si ottiene la matrice di guadagno $[K]$ per l'osservatore ottimo pari a:

$$[K] = [P(t)][C]^T [R]^{-1} \quad (81)$$

dove:

- $[R]$ è la matrice di varianza dell'errore di misura ;
- $[P(t)] = E\{\underline{\varepsilon}(t)\underline{\varepsilon}(t)^T\}$

la matrice di varianza dell'errore di stima dello stato, soluzione dell'equazione differenziale di Riccati:

$$[\dot{P}] = [A][P] - [P][C]^T [R]^{-1} [C][P] + [Q] + [P][A]^T \quad (82)$$

In cui $[Q]$ è la matrice di varianza del rumore sullo stato che nel caso di solo rumore sulla attuazione risulta pari a:

$$[Q] = E\{\underline{v}v^T\} = E\{\underline{v}(t)\underline{v}(t)^T\} = [V] \quad (83)$$

La matrice $[Q]$ dipende dalla matrice degli ingressi $[B]$ e dalla matrice di varianza del rumore sull'ingresso $[V]$

L'equazione di Riccati viene integrata avanti nel tempo partendo dalla condizione iniziale della matrice $[P]$ definita come la matrice al tempo t_0 ed è il valore atteso del prodotto dell'errore al tempo zero per il medesimo trasposto

$$[P_0] = [P(t_0)] = E\{\underline{\varepsilon}(0)\underline{\varepsilon}(0)^T\} = E\left\{\left(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0)\right) \cdot \left(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0)\right)^T\right\} \quad (84)$$

La matrice $[P_0]$ rappresenta quindi una stima dell'incertezza con cui si ritiene di conoscere lo stato iniziale del sistema:

- se si ritiene di conoscere perfettamente lo stato iniziale del sistema, si utilizzerà una $[P_0]$ bassa;
- se si ritiene di avere una grossa incertezza sul valore iniziale del sistema, si opterà per una $[P_0]$ alta.

3.3 Filtro di Kalman a regime

L'utilizzo del Filtro di Kalman nella sua forma completa di osservatore ottimo è oneroso dal punto di vista computazionale perché si è costretti a integrare un'equazione differenziale; è stata quindi sviluppata la versione del Filtro di Kalman a regime: anziché utilizzare la matrice $[P(t)]$ che varia nel tempo (e di conseguenza anche la matrice dei guadagni $[K(t)]$), la matrice $[P]$ è una matrice di costanti che si ottengono dall'equazione algebrica di Riccati:

$$[0] = [A][P] - [P][C]^T[R]^{-1}[C][P] + [Q] + [P][A]^T \quad (85)$$

In conseguenza di ciò, anche la matrice $[K] = [P][C]^T[R]^{-1}$ sarà una matrice di costanti; utilizzare il Filtro di Kalman a regime al posto di quella completa comporta una approssimazione e quindi un errore perché in sostanza non viene integrato il transitorio dal valore iniziale a quello di regime: il filtro è sub-ottimo nella condizione di transitorio e ottimo nella condizione di regime (fig. 20).

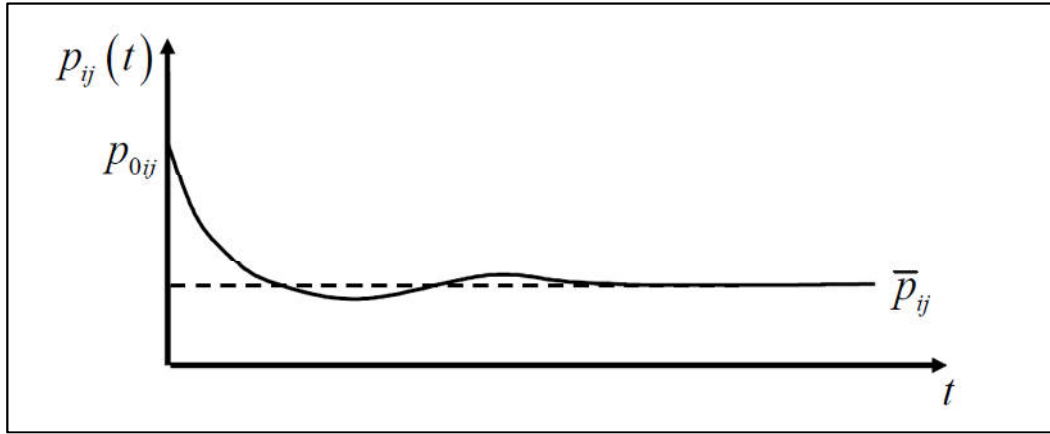


Fig. 20

3.4 Filtro di Kalman Esteso

Supponiamo ora di avere un sistema non lineare caratterizzato dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}, t) \\ \underline{y}(t) = h(\underline{x}, \underline{w}, t) \end{cases} \quad (86)$$

I rumori che compaiono in essi sono sempre rumori bianchi gaussiani in-correlati a valor medio nullo:

- Rumore sullo stato: $E\{\underline{v}(t)\} = \underline{0}$, $E\{\underline{v}(t)\underline{v}(t)\} = [V]$
- Rumore sulla misura: $E\{\underline{w}(t)\} = \underline{0}$, $E\{\underline{w}(t)\underline{w}(t)\} = [R]$
- In-correlati tra loro: $E\{\underline{v}(t)\underline{w}(t)\} = \underline{0}$

In generale sui sistemi non lineari non esistono formule di soluzioni uniche e in particolare il problema della trattazione rigorosa del problema di filtraggio ottimo di un sistema non lineare è complesso e non ha soluzione generale: esistono però delle soluzioni approssimate che sono sempre più complicate come l'EKF che è un modo per linearizzare il sistema non lineare e ottenere una funzione approssimata.

Per costruire l'EKF dato il sistema non lineare si replica il modello dell'osservatore:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) = f(\hat{\underline{x}}, \underline{u}_c, 0, t) + [K] (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \\ \hat{\underline{y}}(t) = h(\hat{\underline{x}}, 0, t) \end{cases} \quad (87)$$

Si ha la medesima funzione f per l'osservatore che sarà funzione dello stato osservato, degli ingressi noti, il valore atteso del rumore bianco e il tempo cui si aggiunge il fattore correttivo dipendente dalla matrice dei guadagni $[K]$ e dall'errore tra misure date \underline{y} e misure osservate $\hat{\underline{y}}$.

Analogamente le misure dipenderanno dalla stessa funzione non lineare h , calcolata nello stato stimato con il rumore nullo del valore atteso e il tempo.

La matrice dei guadagni $[K]$ viene calcolata linearizzando le equazioni del sistema nell'intorno di una condizione nominale definita da $\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{w}_0$:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_0(t) = f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) \\ \underline{y}_0 = h(\underline{x}_0, \underline{w}_0, t) \end{cases} \quad (88)$$

L'equazione di stato linearizzata è:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}}(t) &\cong f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_0 \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right|_0 \cdot (\underline{u} - \underline{u}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right|_0 \cdot (\underline{v} - \underline{v}_0) \\ \underline{\dot{x}}(t) &\cong f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) + [A] \cdot \Delta \underline{x} + [B] \cdot \Delta \underline{u} + [G] \cdot \Delta \underline{v}\end{aligned}\quad (89)$$

Mentre l'equazione di osservazione diventa:

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &\cong h(\underline{x}_0, \underline{w}_0, t) + \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right|_0 \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{w}} \right|_0 \cdot (\underline{w} - \underline{w}_0) \\ \underline{y}(t) &\cong h(\underline{x}_0, \underline{w}_0, t) + [C] \cdot \Delta \underline{x} + [H] \cdot \Delta \underline{w}\end{aligned}\quad (90)$$

Abbiamo ottenuto delle matrici di costanti $[A]$, $[B]$, $[G]$, $[C]$, $[H]$ perché le derivate sono valutate nelle condizioni nominali.

Si osserva che non è la trattazione più generale possibile perché manca la dipendenza diretta dall'azione di controllo.

Introduciamo ora alcune ipotesi semplificative

- Il valore del rumore istante per istante non è possibile calcolarlo sulla base dei valori noti precedentemente; la migliore approssimazione che posso dare al rumore è il suo valore atteso, media nulla dunque:

$$\underline{v}_0 = 0 \rightarrow \Delta \underline{v} = \underline{v} - \underline{v}_0 = \underline{v} \quad (91)$$

$$\underline{w}_0 = 0 \rightarrow \Delta \underline{w} = \underline{w} - \underline{w}_0 = \underline{w} \quad (92)$$

- L'azione di controllo è ipotizzata nota a ogni istante di tempo e quindi l'azione di controllo alle condizioni nominali coincide con l'azione di controllo e quindi si annulla la differenza:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \rightarrow \Delta \underline{u} = (\underline{u} - \underline{u}_0) = \underline{0} \quad (93)$$

Si definisce la deviazione dallo stato nominale e dalla misura nominale:

$$\Delta \underline{\dot{x}}(t) = \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}_0 = \underline{\dot{x}} - f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) \quad (94)$$

$$\Delta \underline{y}(t) = \underline{y} - \underline{y}_0 = \underline{y} - h(\underline{x}_0, \underline{w}_0, t) \quad (95)$$

Il sistema linearizzato è quindi retto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \Delta \underline{\dot{x}}(t) = [A] \cdot \Delta \underline{x} + [G] \cdot \Delta \underline{v} = [A] \cdot \Delta \underline{x} + [G] \cdot \underline{v} & \text{con } \Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0 \\ \Delta \underline{y}(t) = [C] \cdot \Delta \underline{x} + [H] \cdot \Delta \underline{w} = [C] \cdot \Delta \underline{x} + [H] \cdot \underline{w} & \text{con } \Delta \underline{y}(t) = \underline{y} - \underline{y}_0 \end{cases} \quad (96)$$

Si ha un nuovo sistema lineare con stato $\Delta \underline{x}$ e misure $\Delta \underline{y}$ soggette a valori bianchi gaussiani a valor medio nullo; per questo tipo di sistema si è in grado di costruire un osservatore di stato perché è il medesimo sistema lineare soggetto a rumore sullo stato: è il classico osservatore che replica il modello del sistema in cui elimino il rumore e in più inserisco il termine correttivo associato alla differenza $(\Delta \underline{y} - \Delta \hat{\underline{y}})$

$$\begin{cases} \Delta \hat{\underline{x}}(t) = [A] \cdot \Delta \hat{\underline{x}} + [K] \cdot (\Delta \underline{y} - \Delta \hat{\underline{y}}) & \text{con } \Delta \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{x}} - \underline{x}_0 \\ \Delta \hat{\underline{y}} = [C] \cdot \Delta \hat{\underline{x}} & \text{con } \Delta \hat{\underline{y}}(t) = \hat{\underline{y}} - \underline{y}_0 \end{cases} \quad (97)$$

Il calcolo della $[K]$ è affidato alle solite equazioni dinamiche dove ci sono $[\tilde{R}]$ (per la misura) e $[\tilde{Q}]$ (per lo stato):

$$[K] = [P(t)][C]^T[\tilde{R}]^{-1} \quad (98)$$

Con

$$[\dot{P}] = [A][P] - [P][C]^T[\tilde{R}]^{-1}[C][P] + [\tilde{Q}] + [P][A]^T \quad (99)$$

In cui

$$\begin{aligned} [P] &= E\{(\Delta \underline{x} - \Delta \hat{\underline{x}}) \cdot (\Delta \underline{x} - \Delta \hat{\underline{x}})^T\} \\ [\tilde{Q}] &= E\{G\underline{v}(t)\underline{v}(t)^T G^T\} = GE\{\underline{v}(t)\underline{v}(t)^T\}G^T = [G][V][G]^T \\ [\tilde{R}] &= E\{H\underline{w}(t)\underline{w}(t)^T H^T\} = HE\{\underline{w}(t)\underline{w}(t)^T\}H^T = [H][W][H]^T \end{aligned} \quad (100)$$

La matrice $[\tilde{Q}]$ dipende dalla matrice $[G]$ attraverso cui entrano i rumori sull'equazione di stato e la matrice di varianza $[V]$ (matrice di varianza del rumore di stato associata all'equazione sopra), mentre $[\tilde{R}]$ è funzione della matrice $[H]$ con cui entrano i rumori sulla misura e la matrice di varianza $[W]$ associata al rumore sulla misura.

Ora è possibile dare un valore stimato alla nostra variabile di stato \underline{x} :

1. si linearizza il sistema attorno alla traiettoria nominale definendo le matrici $[A]$, $[G]$, $[C]$, $[H]$:

$$[A] = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_0 \quad [G] = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right|_0 \quad [C] = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right|_0 \quad [H] = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{w}} \right|_0 \quad (101)$$

2. si calcolano quindi le matrici di varianza $[\tilde{Q}]$ e $[\tilde{R}]$:

$$[\tilde{Q}] = [G][V][G]^T \quad [\tilde{R}] = [H][W][H]^T \quad (102)$$

3. si definisce la differenza tra la misura presa dal sistema e la misura nominale:

$$\Delta \underline{y}(t) = \underline{y} - \underline{y}_0 \quad (103)$$

4. si integra l'equazione del Filtro di Kalman con Riccati le cui matrici sono calcolate al passo per ottenere la matrice $[K]$

$$\begin{aligned} [\dot{P}] &= [A][P] - [P][C]^T[\tilde{R}]^{-1}[C][P] + [\tilde{Q}] + [P][A]^T \\ [K(t)] &= [P(t)][C]^T[\tilde{R}]^{-1} \\ \Delta \hat{\underline{x}}(t) &= [A] \cdot \Delta \hat{\underline{x}} + [K] \cdot (\Delta \underline{y} - \Delta \hat{\underline{y}}) \end{aligned} \quad (104)$$

5. si definisce infine lo stato stimato nella forma

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{x}_0 + \Delta \underline{\hat{x}} \quad (105)$$

Il problema dell'applicazione precedente risiede nella definizione della traiettoria nominale del sistema attorno alla quale linearizzare il sistema; data infatti la traiettoria nominale $\dot{\underline{x}}_0(t) = f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t)$ e l'osservatore di Kalman linearizzato dello stato stimato $\Delta \underline{\hat{x}}(t) = [A] \cdot \Delta \underline{\hat{x}} + [K] \cdot (\Delta \underline{y} - \Delta \underline{\hat{y}})$, la stima dello stato del sistema non lineare diviene quindi:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(t) &= \dot{\underline{x}}_0 + \Delta \underline{\hat{x}} = f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) + [A] \cdot \Delta \underline{\hat{x}} + [K] \cdot (\Delta \underline{y} - \Delta \underline{\hat{y}}) \\ \underline{\hat{x}}(t) &= f(\underline{x}_0, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) + [A] \cdot (\underline{\hat{x}} - \underline{x}_0) + [K] \cdot (\underline{y} - \underline{y}_0 - [C] \cdot (\underline{\hat{x}} - \underline{x}_0)) \end{aligned} \quad (106)$$

Si vede come man mano che lo stato effettivo si allontana dalla traiettoria nominale, il controllo non riesce a recuperarla a causa delle non linearità, di conseguenza anche l'osservatore sarà meno preciso.

La genialità del Filtro di Kalman Esteso risiede nel definire come traiettoria nominale proprio lo stato stimato del sistema

$$\underline{\hat{x}} = \underline{x}_0 \quad (107)$$

perché dipendendo da quanto successo negli istanti precedenti, lo scostamento non potrà essere grande; quindi dato il sistema non lineare generico si ha che il Filtro Esteso di Kalman è una replica del modello del sistema calcolato nello stato stimato più il termine correttivo lineare $[K] \cdot (\underline{y} - \underline{\hat{y}})$. Rispetto a prima l'unica differenza è che le matrici $[A]$, $[G]$, $[C]$, $[H]$ ottenute dalla linearizzazione dell'equazione di stato e di osservazione sono calcolate in corrispondenza dello stato stimato. Come risultato finale si ha una semplificazione dell'equazione di stima dello stato non-lineare, ottenendo:

$$\begin{cases} \underline{\hat{x}}(t) = f(\underline{\hat{x}}, \underline{u}_0, \underline{v}_0, t) + [K] \cdot (\underline{y} - \underline{\hat{y}}) \\ \underline{\hat{y}}(t) = h(\underline{\hat{x}}, \underline{w}_0, t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\hat{x}}(t) = f(\underline{\hat{x}}, \underline{u}_c, 0, t) + [K] \cdot (\underline{y} - \underline{\hat{y}}) \\ \underline{\hat{y}}(t) = h(\underline{\hat{x}}, 0, t) \end{cases} \quad (108)$$

La stima dello stato del sistema non lineare si ottiene quindi secondo questi passaggi:

a) si linearizza il sistema attorno allo stato stimato definendo le matrici $[A]$, $[G]$, $[C]$, $[H]$:

$$[A] = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{\hat{x}}} \quad [G] = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right|_{\underline{\hat{x}}} \quad [C] = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{\hat{x}}} \quad [H] = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{w}} \right|_{\underline{\hat{x}}} \quad (109)$$

b) si calcolando quindi le matrici di varianza $[\tilde{Q}]$ e $[\tilde{R}]$:

$$[\tilde{Q}] = [G][V][G]^T \quad [\tilde{R}] = [H][W][H]^T \quad (110)$$

c) si integra l'equazione del Filtro di Kalman

$$\begin{aligned} [\dot{P}] &= [A][P] - [P][C]^T[\tilde{R}]^{-1}[C][P] + [\tilde{Q}] + [P][A]^T \\ [K(t)] &= [P(t)][C]^T[\tilde{R}]^{-1} \\ \hat{\underline{x}}(t) &= f(\hat{\underline{x}}, u, 0, t) + [K] \cdot (\underline{y} - h(\hat{\underline{x}}, 0, t)) \end{aligned} \quad (111)$$

Supponendo di avere un sistema lineare le cui matrici di stato dipendono da un vettore di parametri costanti \underline{p} incogniti la teoria dell'EKF può essere utilizzata per stimare i parametri incogniti stessi, sulla base delle misure y fatte sul sistema

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [A(\underline{p})]\underline{x}(t) + [B(\underline{p})]\underline{u}_c(t) + [G(\underline{p})]\underline{v}(t) \\ \underline{y}(t) = [C]\underline{x}(t) + \underline{w}(t) \end{cases} \quad (112)$$

Per stimare il parametro, definiamo un vettore dello stato aumentato \underline{x}_a in cui inseriamo sia il vettore degli stati del sistema \underline{x} sia il vettore dei parametri incogniti e di conseguenza avremo anche una diversa equazione di stato del sistema aumentato che ne deriva:

$$\begin{aligned} \underline{x}_a &= \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{bmatrix} \\ \dot{\underline{x}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A(\underline{p})]\underline{x}(t) + [B(\underline{p})]\underline{u}_c(t) + [G(\underline{p})]\underline{v}(t) \\ \underline{0} + \underline{v}_p(t) \end{bmatrix} = f(\underline{x}_a, \underline{u}_c, \underline{v}, \underline{v}_p) \end{aligned} \quad (113)$$

Intuitivamente si capisce che il parametro non è tempo-variante su una scala di tempo relativamente piccola; si può quindi affermare che la sua derivata è nulla, c'è però bisogno di aggiungere una certa quantità di rumore sul parametro perché altrimenti il filtro non funziona. Il sistema da lineare è passato a non lineare e di conseguenza utilizzerò il Filtro di Kalman Esteso.

Per ricavare il parametro lo inseriamo nello stato, formando quindi uno stato esteso comprendente parametro e stato vecchio. Intuitivamente si capisce che il parametro non è tempo-variante su una scala di tempo piccola.

La derivata del parametro allora è zero anche se devo aggiungere una certa quantità di rumore sul parametro per far funzionare il filtro.

Il sistema diventa allora non lineare perché le matrici dipendono dallo stato esteso: si utilizzerà quindi il Filtro di Kalman esteso.

3.5 Filtro di Kalman Esteso EKF per modello "single-track"

Si parte dalle equazioni [36] e [37]:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \left(\frac{-b^2 - a^2}{J_z V} C_\alpha \right) \cdot \dot{\psi} + \left(\frac{b - a}{J_z} C_\alpha \right) \cdot \beta + \left(\frac{a}{J_z} C_\alpha \right) \cdot \delta \\ \dot{\beta} = \left(\frac{b - a}{mV^2} C_\alpha - 1 \right) \cdot \dot{\psi} + \left(-\frac{2C_\alpha}{mV} \right) \cdot \beta + \left(\frac{C_\alpha}{mV} \right) \cdot \delta \end{cases} \quad (114)$$

Si riscrivono nella forma classica per i sistemi lineari $\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + [B]\underline{u}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-b^2 - a^2}{J_z V} C_\alpha & \frac{b - a}{J_z} C_\alpha \\ \frac{b - a}{mV^2} C_\alpha - 1 & -\frac{2C_\alpha}{mV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{J_z} C_\alpha \\ \frac{C_\alpha}{mV} \end{bmatrix} \delta \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \delta = \\ &= [A]\underline{x}(t) + [B]\delta \end{aligned} \quad (115)$$

Lo stato aumentato risulta essere:

$$\underline{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \beta \\ C_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Il sistema aumentato è quindi:

$$\dot{\underline{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{C}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-b^2 - a^2}{J_z V} x_3 \right) \cdot x_1 + \left(\frac{b - a}{J_z} x_3 \right) \cdot x_2 + \left(\frac{a}{J_z} x_3 \right) \cdot \delta + v \\ \left(\frac{b - a}{mV^2} x_3 - 1 \right) \cdot x_1 + \left(-\frac{2x_3}{mV} \right) \cdot x_2 + \left(\frac{x_3}{mV} \right) \cdot \delta + v \\ v_p(t) \end{bmatrix} = f(\underline{x}_a, \delta, v) \quad (117)$$

Le matrici linearizzate risultano:

$$\begin{aligned} \diamond [A_a] &= \left. \frac{df}{d\underline{x}_a} \right|_{\underline{x}_a} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-b^2 - a^2}{J_z V} x_3 & \left(\frac{b-a}{J_z} x_3\right) & \left(\frac{-b^2 - a^2}{J_z V}\right) \cdot x_1 + \left(\frac{b-a}{J_z}\right) \cdot x_2 + \left(\frac{a}{J_z}\right) \cdot \delta \\ \left(\frac{b-a}{mV^2} x_3 - 1\right) & \left(-\frac{2x_3}{mV}\right) & \frac{b-a}{mV^2} \cdot x_1 - \frac{2}{mV} \cdot x_2 + \left(\frac{1}{mV}\right) \cdot \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (118)$$

$$\diamond [G_a] = \left. \frac{df}{d\underline{v}_a} \right|_{\underline{x}_a} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dv} & \frac{df_1}{dv_p} \\ \frac{df_2}{dv} & \frac{df_2}{dv_p} \\ \frac{df_3}{dv} & \frac{df_3}{dv_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (119)$$

Per l'equazione di osservazione si passa da:

$$\underline{y} = [C]\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \beta \end{bmatrix} + w(t) \quad a \quad \underline{y} = [C_a]\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \beta \\ C_a \end{bmatrix} + w(t) \quad (120)$$

dove $w(t)$ è il rumore sulle misure.

L'osservatore dello stato aumentato risulta infine essere pari a:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_a(t) &= f(\hat{\underline{x}}_a, \delta, 0) + [K](\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-b^2 - a^2}{J_z V} \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 + \frac{b-a}{J_z} \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_2 + \frac{a}{J_z} \hat{x}_3 \cdot \delta \\ \left(\frac{b-a}{mV^2} \hat{x}_3 - 1\right) \cdot \hat{x}_1 + \left(-\frac{2\hat{x}_3}{mV}\right) \cdot \hat{x}_2 + \left(\frac{\hat{x}_3}{mV}\right) \cdot \delta \\ v_p(t) \end{bmatrix} + [K](\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \end{aligned} \quad (121)$$

CAPITOLO 4 SIMULAZIONI

Le simulazioni sono state svolte in questo ordine:

- Verifica della corretta scrittura del modello matematico, imponendo delle traiettorie note il cui comportamento del veicolo sia intuitivamente prevedibile e quindi coerente con i risultati numerici
- Verifica della corretta scrittura del Filtro di Kalman
- Introduzione al Filtro di Kalman Esteso di dati reali restituiti dai sensori presenti sul quadrivio al fine di ricavare il valore reale della rigidità di deriva

4.1 VERIFICA DEL MODELLO "SINGLE-TRACK"

Per verificare la corretta scrittura del modello matematico ci avvaliamo di alcune manovre di sterzo sperimentali che, così come prescritto in [12], sono state compiute da un comune veicolo stradale:

- DOUBLE LANE CHANGE: il veicolo effettua un cambio di corsia per poi ritornare alla corsia precedente (Fig. 21)
- STEERING PAD: l'angolo di sterzo del veicolo aumenta progressivamente, facendo compiere al veicolo una traiettoria a spirale (Fig. 23)
- SLALOM: l'angolo di sterzo oscilla intorno al valore nullo da valori positivi a valori negativi, per cui il veicolo sembra evitare degli ostacoli. (Fig. 25)
- SWEEP: l'angolo di sterzo oscilla a una frequenza maggiore intorno al valore nullo e il veicolo si trova a procedere lungo una determinata direzione con cambi repentini di direzione a destra e a sinistra. (Fig. 27)

I dati del veicolo usato nei test sono i seguenti:

- Massa: 1880 kg
- Distanza dell'asse anteriore dal centro di gravità: 1,235 m
- Distanza dell'asse posteriore dal centro di gravità: 1,465 m
- Momento di inerzia: 2.873 kgm²
- Coefficienti Magic Formula (Avantreno):

$$B_f = -12,5; C_f = 1,503; D_f = 8837$$

Coefficienti Magic Formula (Retrotreno):

$$B_r = -12,598; C_r = 1,503; D_r = 7.663$$

Nel modello da verificare non compare la Formula di Pacejka, tuttavia dai coefficienti dati possiamo ricavare il valore della rigidità di deriva K_{corn} grazie alla relazione:

$$K_{corn} = -B \cdot C \cdot D \rightarrow K_{corn}^{ant} = 166.030 \frac{N}{rad} \quad e \quad K_{corn}^{post} = 145.100 \frac{N}{rad}$$

Avendo ora tutti i dati è possibile testare il nostro modello fornendogli in ingresso le traiettorie precedentemente citate, ciascuna con un suo proprio profilo di velocità, e verificando quindi se gli andamenti dell'angolo di assetto β e lo yaw rate $\dot{\psi}$ in uscita ottenuti risolvendo le equazioni differenziali, hanno andamenti simili a quelli restituiti dai sensori.

Dalle prove effettuate si ottengono i risultati rappresentati:

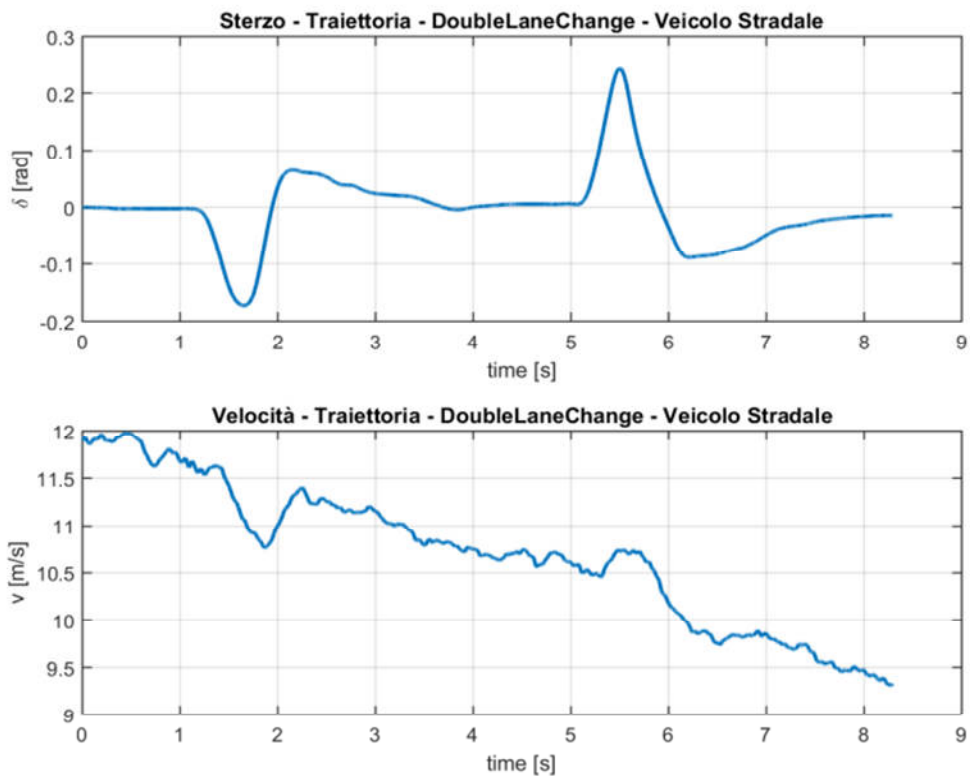


Fig. 21

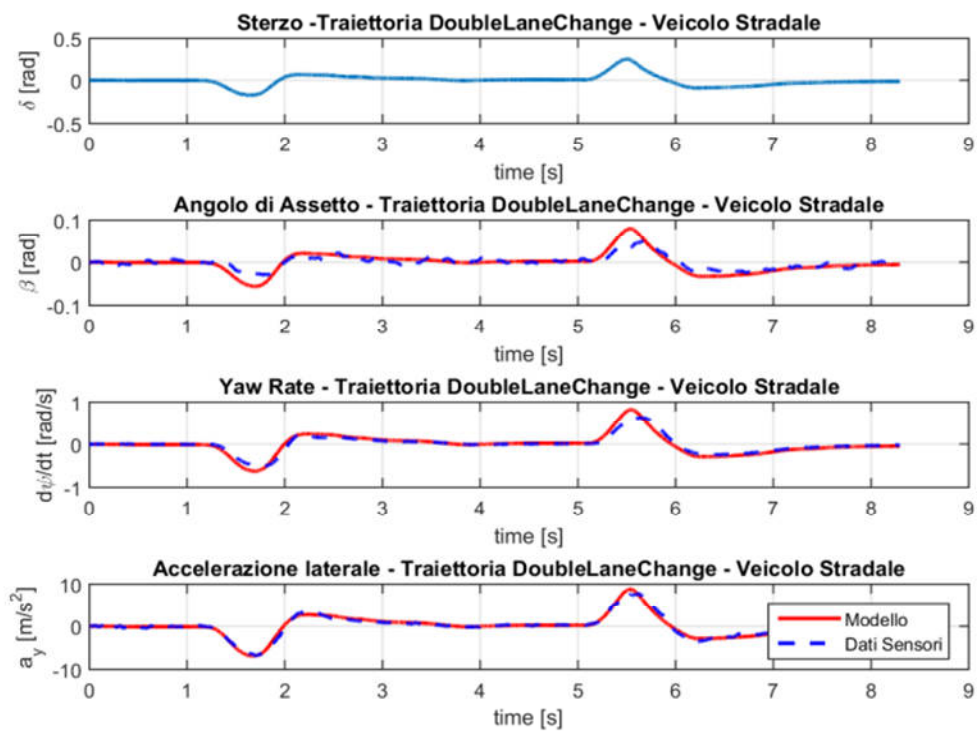


Fig. 22

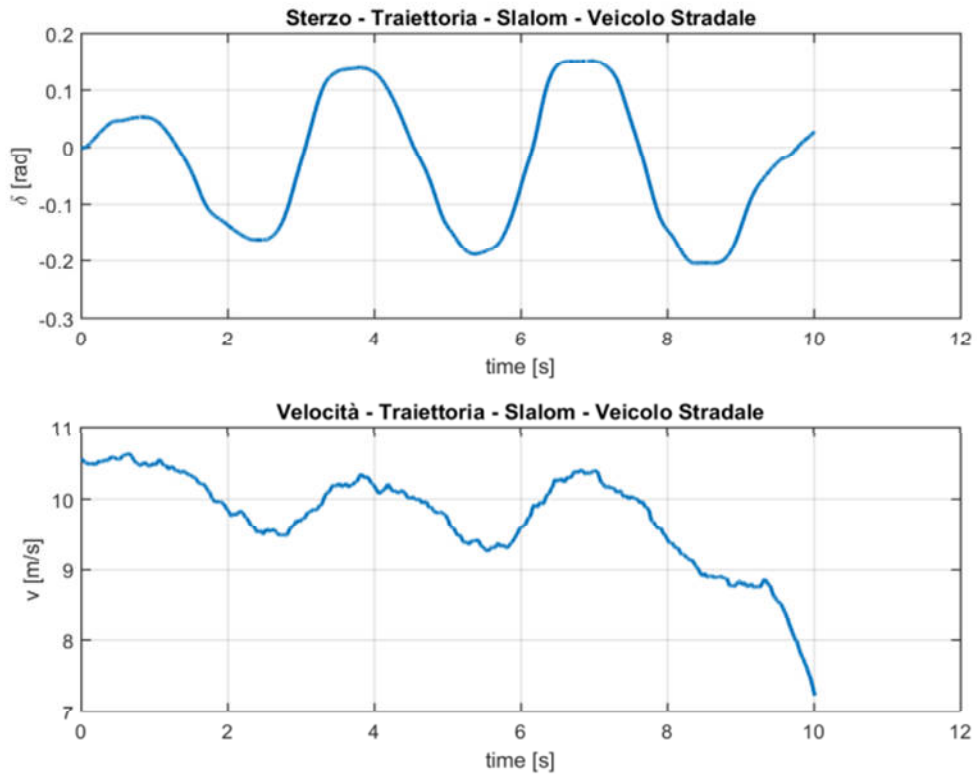


Fig. 23

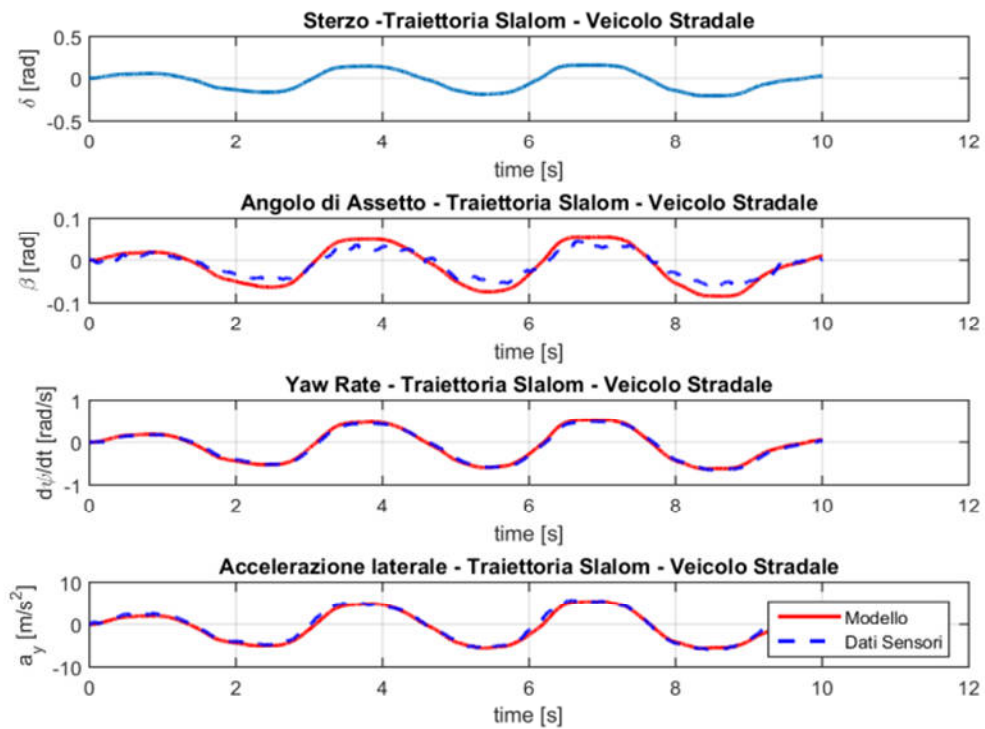


Fig. 24

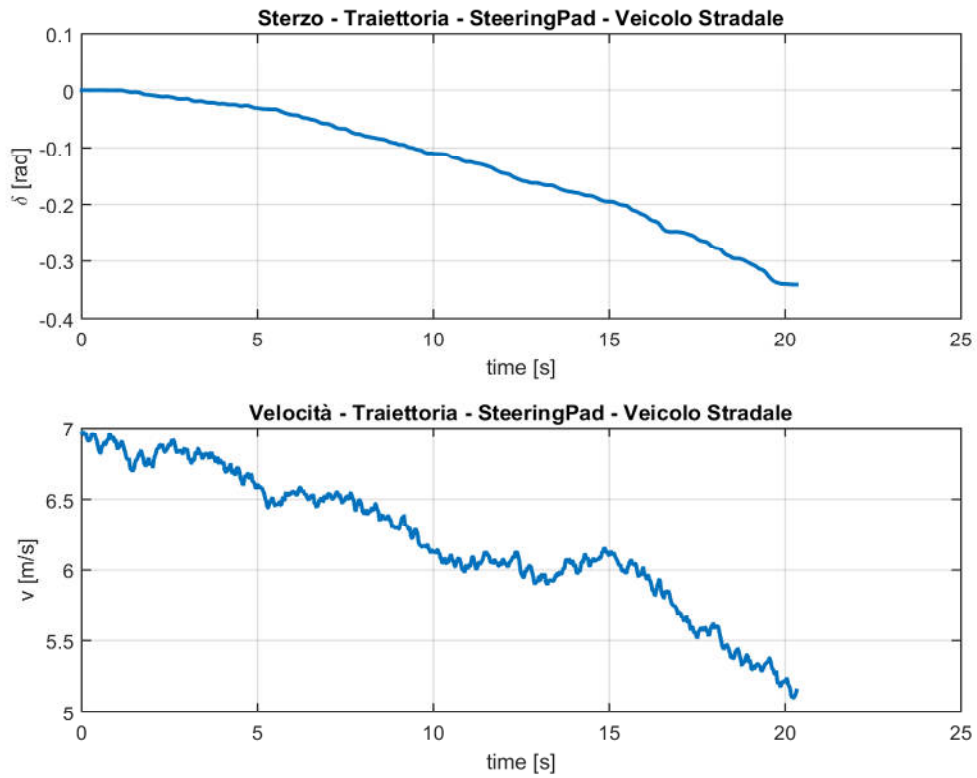


Fig. 25

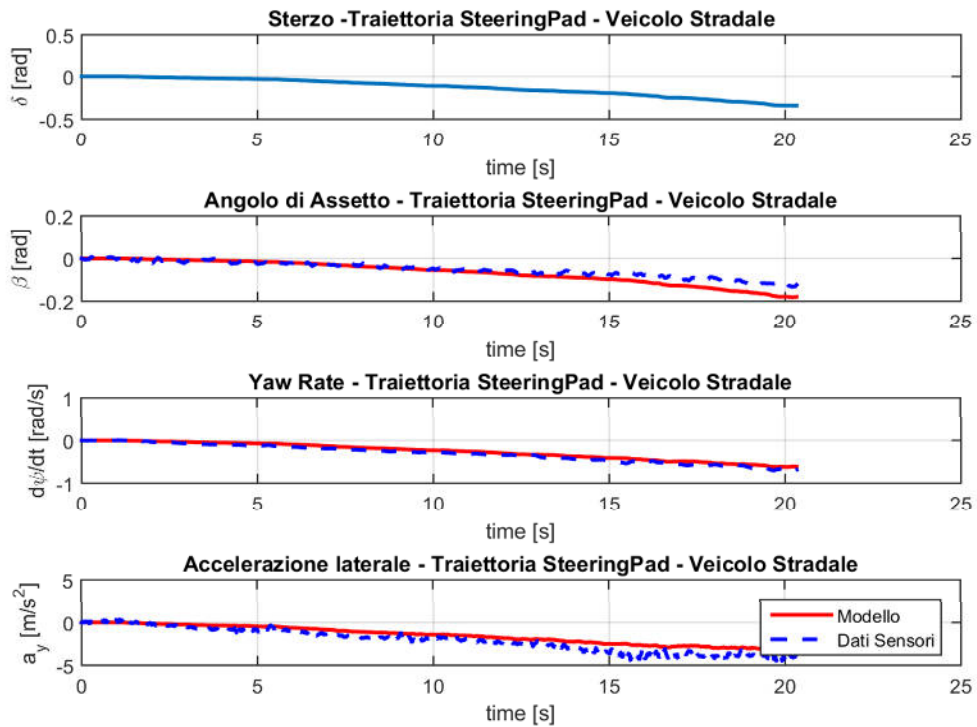


Fig. 26

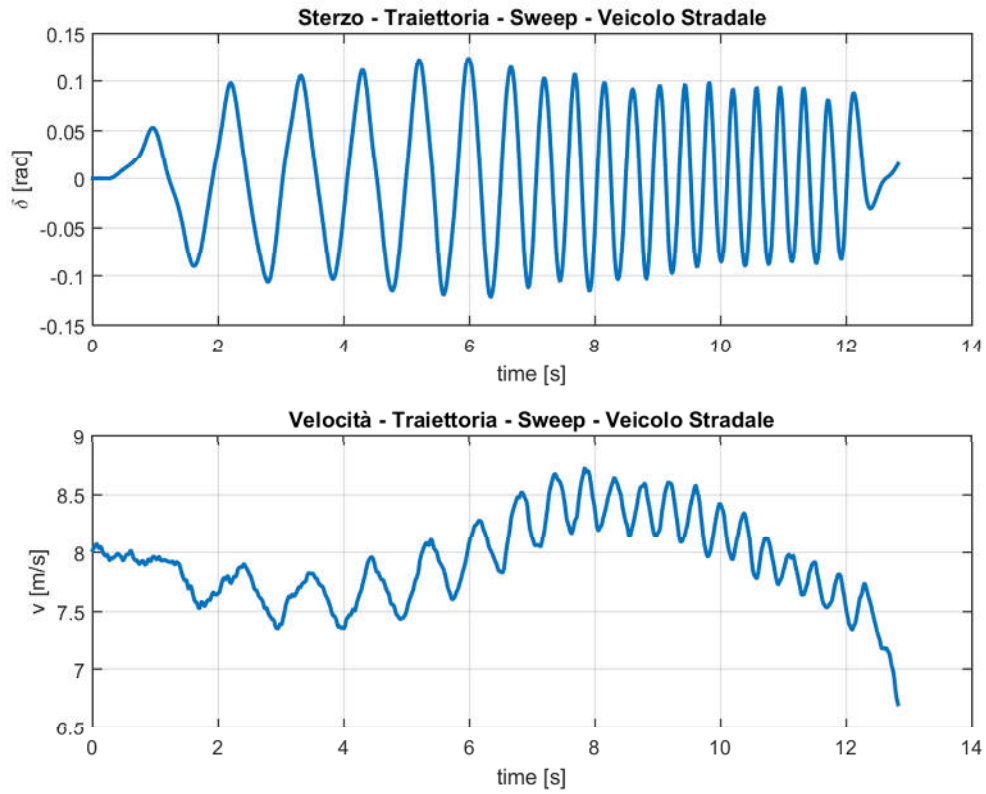


Fig. 27

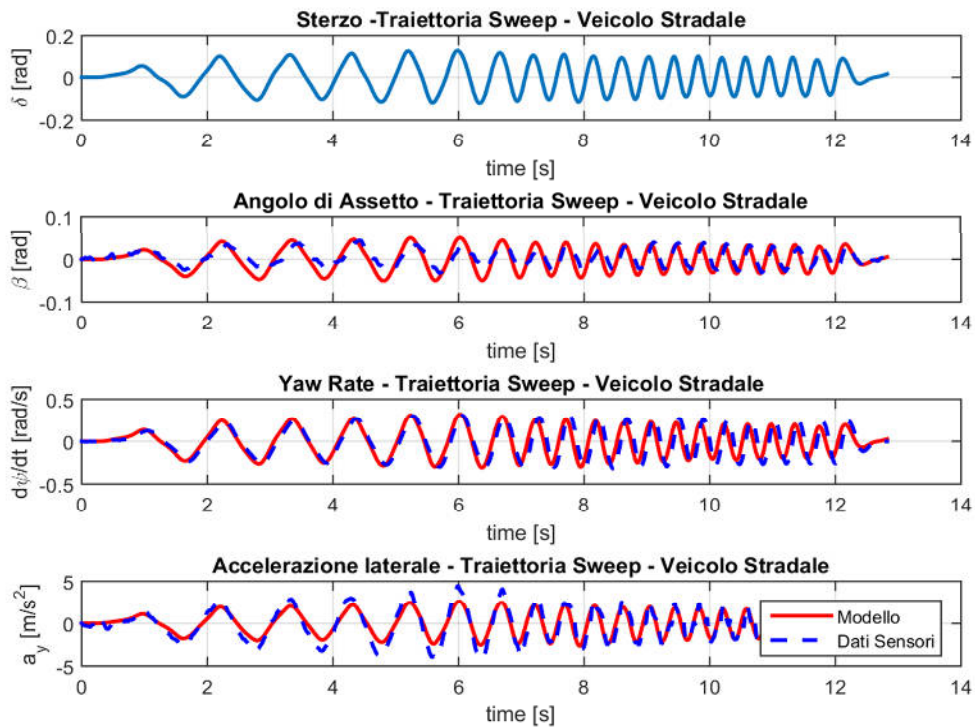


Fig. 28

Dal confronto tra dati sperimentali e uscite del modello matematico rappresentati nelle Fig. 22-24-26-28, si evince che per ogni traiettoria vista c'è buona sovrapposizione tra le due serie di dati.

A questo punto vale la pena ripetere le simulazioni sostituendo ai dati del veicolo stradale quelli relativi al Quad per vedere se nonostante le dimensioni diverse è possibile ottenere dei risultati coerenti o almeno simili con quelli dei sensori:

- Massa: 348,5 kg
- Distanza dell'asse anteriore dal centro di gravità: 0,7768 m
- Distanza dell'asse posteriore dal centro di gravità: 0,4732 m
- Momento di inerzia: 40,45 kgm²

Ipotizziamo che le condizioni dello pneumatico e le condizioni di contatto ruota-asfalto del Quad siano molto simili a quello del veicolo dunque a tal punto da far rimanere invariati i coefficienti della Magic Formula

- Coefficienti Magic Formula (Avantreno):

$$B_f = -12,5; C_f = 1,503; D_f = 8837$$

- Coefficienti Magic Formula (Retroreno):

$$B_r = -12,598; C_r = 1,503; D_r = 7.663$$

Nel fare ciò dobbiamo scartare le prove che sono state effettuate a velocità superiore ai 30 km/h in quanto il Quad non può raggiungere tali velocità, ci limitiamo quindi alle sole traiettorie di "Steering Pad" e "Sweep":

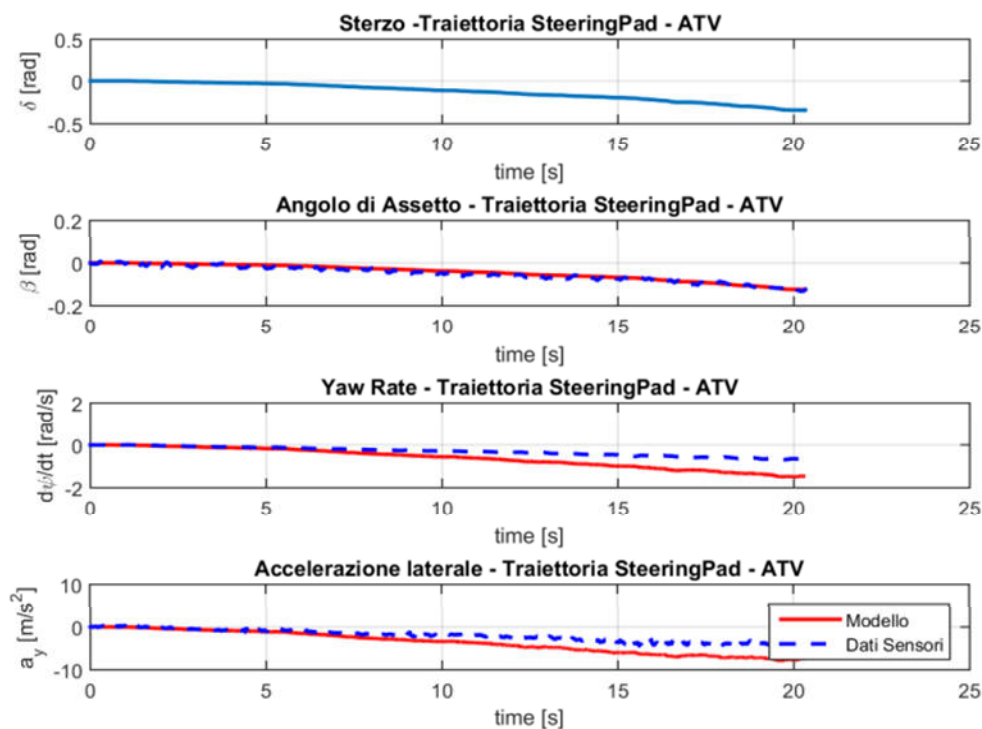


Fig. 29

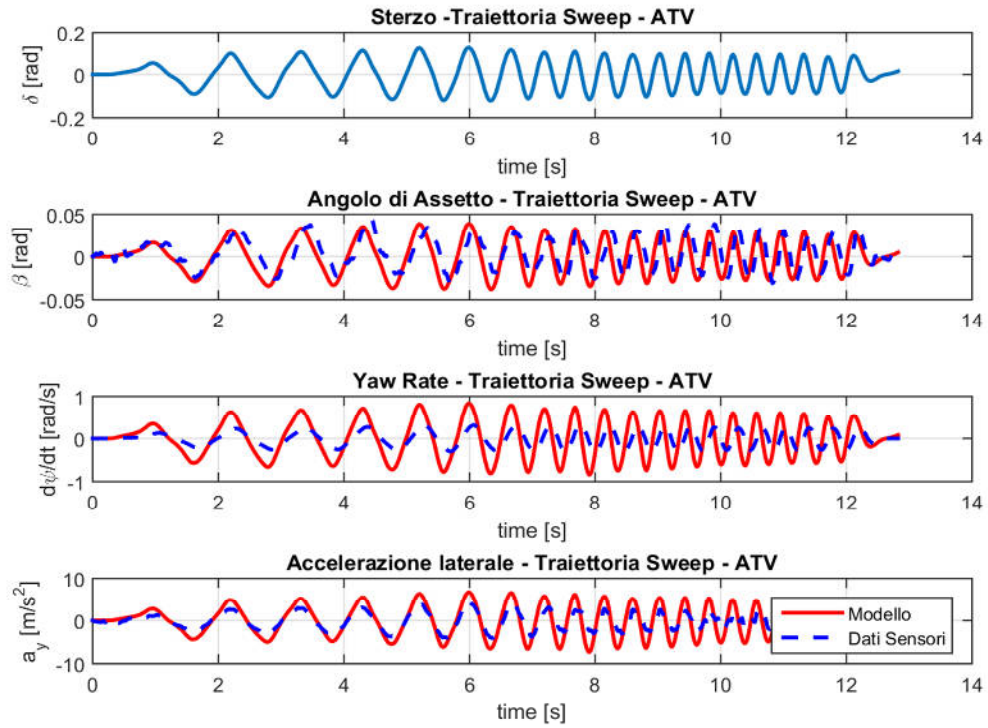


Fig. 30

Da quanto rappresentato nelle Fig. 29-30 si osservano discrepanze maggiori rispetto ai dati dei sensori anche se gli andamenti sono comunque simili; alla luce delle simulazioni fatte si può quindi concludere che le equazioni del moto sono state scritte in modo corretto.

4.2 VERIFICA DEL FILTRO DI KALMAN ESTESO

Si vuole ora verificare la corretta costruzione del Filtro di Kalman Esteso, dando sempre in ingresso al sistema matematico le traiettorie già viste nel paragrafo precedente.

- ❖ DOUBLE LANE CHANGE – Veicolo Stradale
 - Varianza del rumore di Misura: 10^{-4}
 - Varianza del rumore sullo Stato: 10^{-5}
 - Varianza del parametro incognito: $5 \cdot 10^8$
 - Valore iniziale del parametro: $3 \cdot 10^5$
 - Condizioni Iniziali del sistema matematico: $[0 \ 0]$
 - Matrice di covarianza (errore): $diag([10^{-03} \ 10^{-03} \ 5 \cdot 10^7])$
 - Condizioni Iniziali del Filtro di Kalman: $[0 \ 0]$

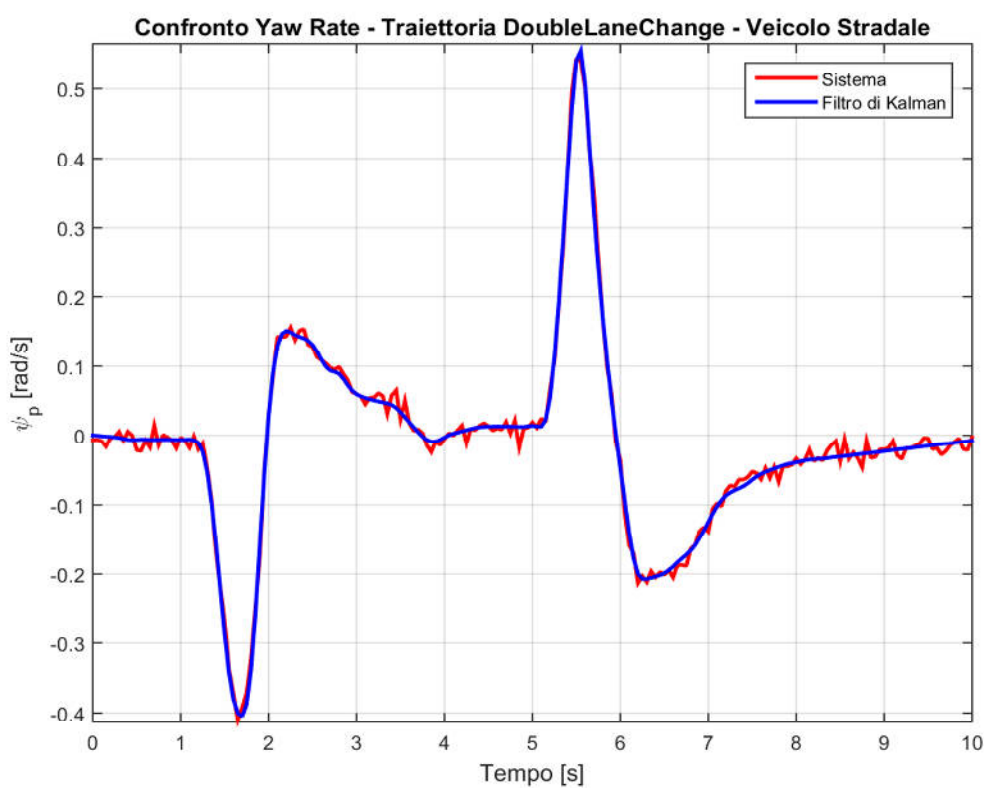


Fig. 31

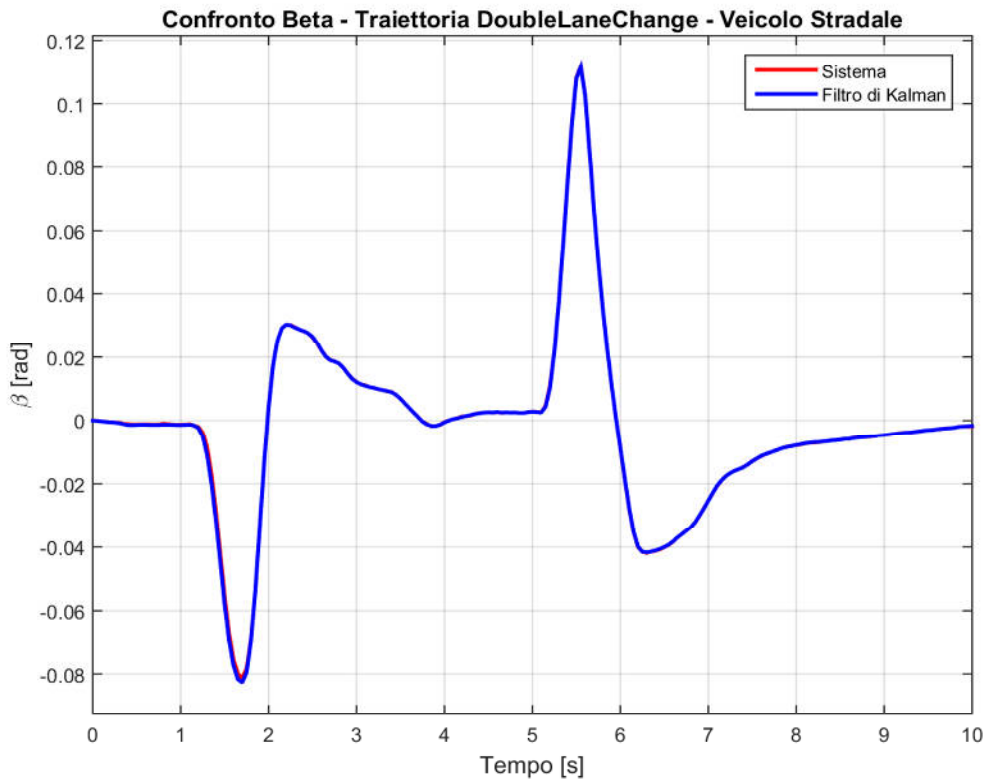


Fig. 32

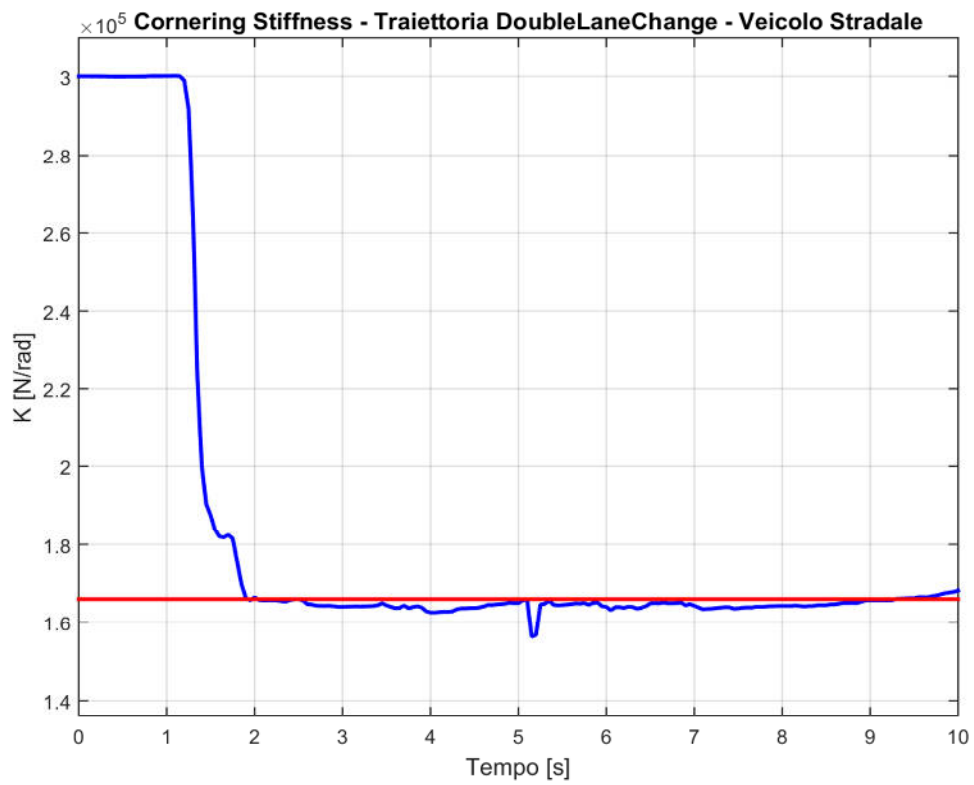


Fig. 33

❖ SLALOM – Veicolo Stradale

Varianza del rumore di Misura: 10^{-4}

Varianza del rumore sullo Stato: 10^{-5}

Varianza del parametro incognito: $5 \cdot 10^8$

Condizioni Iniziali del sistema matematico: $[0 \ 0]$

Matrice di covarianza (errore): $diag([10^{-03} \ 10^{-03} \ 5 \cdot 10^7])$

Condizioni Iniziali degli stati originali Filtro di Kalman: $[0 \ 0 \ 3 \cdot 10^5]$

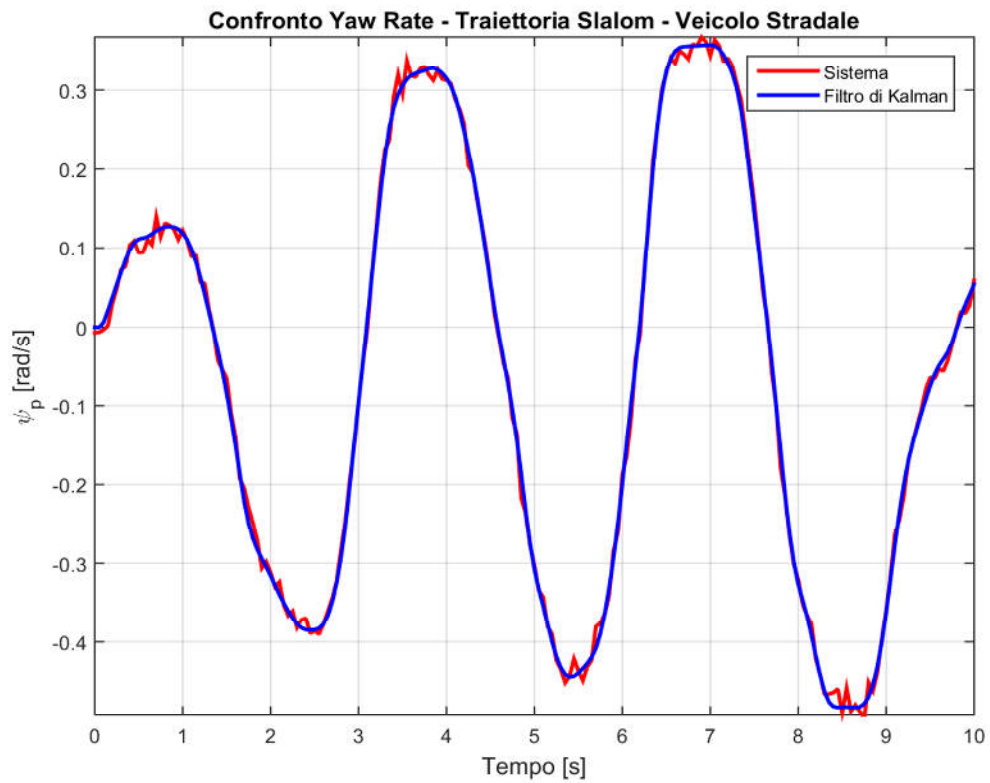


Fig. 34

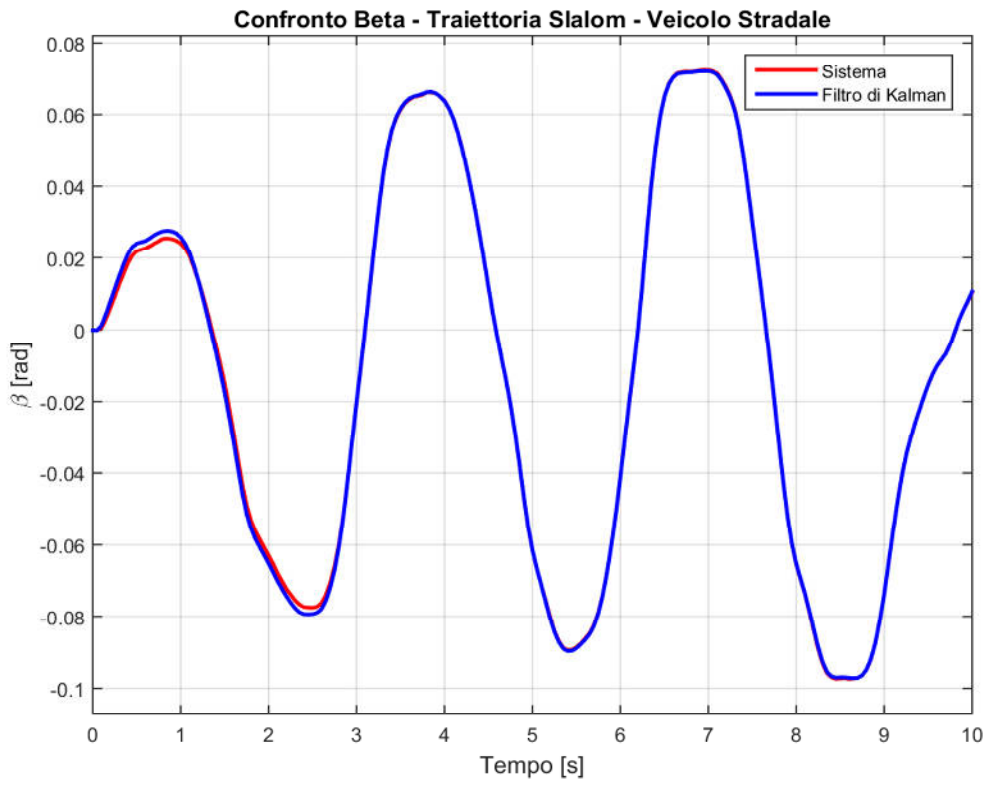


Fig. 35

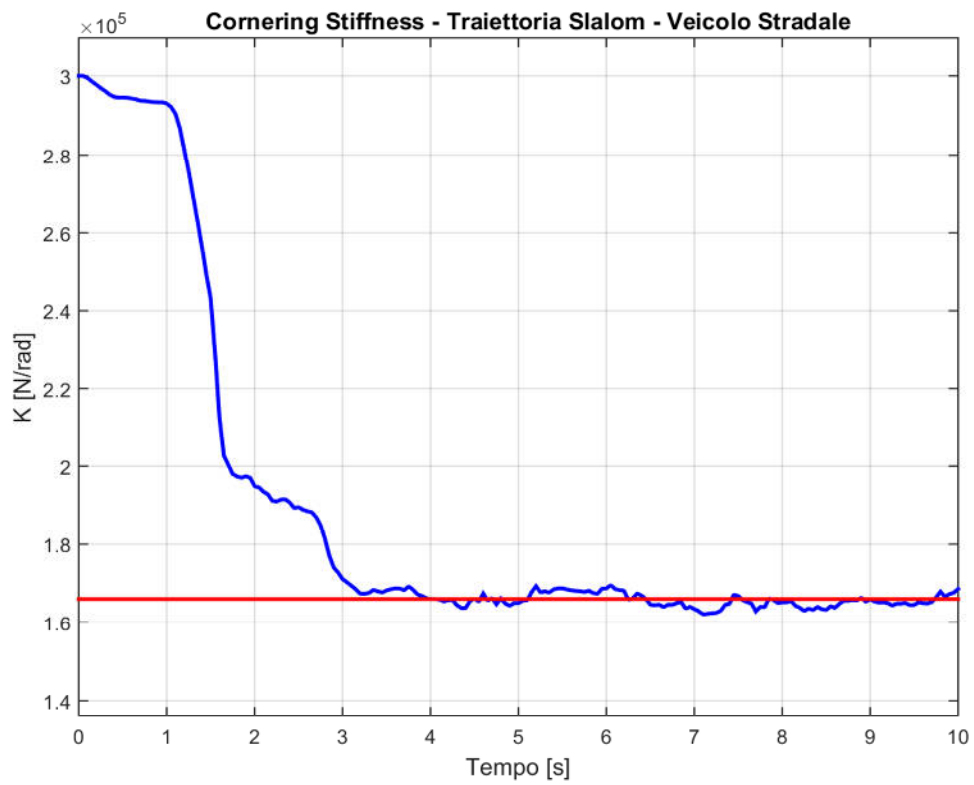


Fig. 36

❖ STEERING PAD – Veicolo Stradale

Varianza del rumore di Misura: 10^{-5}

Varianza del rumore sullo Stato: 10^{-7}

Varianza del parametro incognito: $5 \cdot 10^{10}$

Condizioni Iniziali del sistema matematico: $[0 \ 0]$

Matrice di covarianza (errore): $diag([10^{-03} \ 10^{-03} \ 5 \cdot 10^5])$

Condizioni Iniziali del Filtro di Kalman: $[0 \ 0 \ 3 \cdot 10^5]$

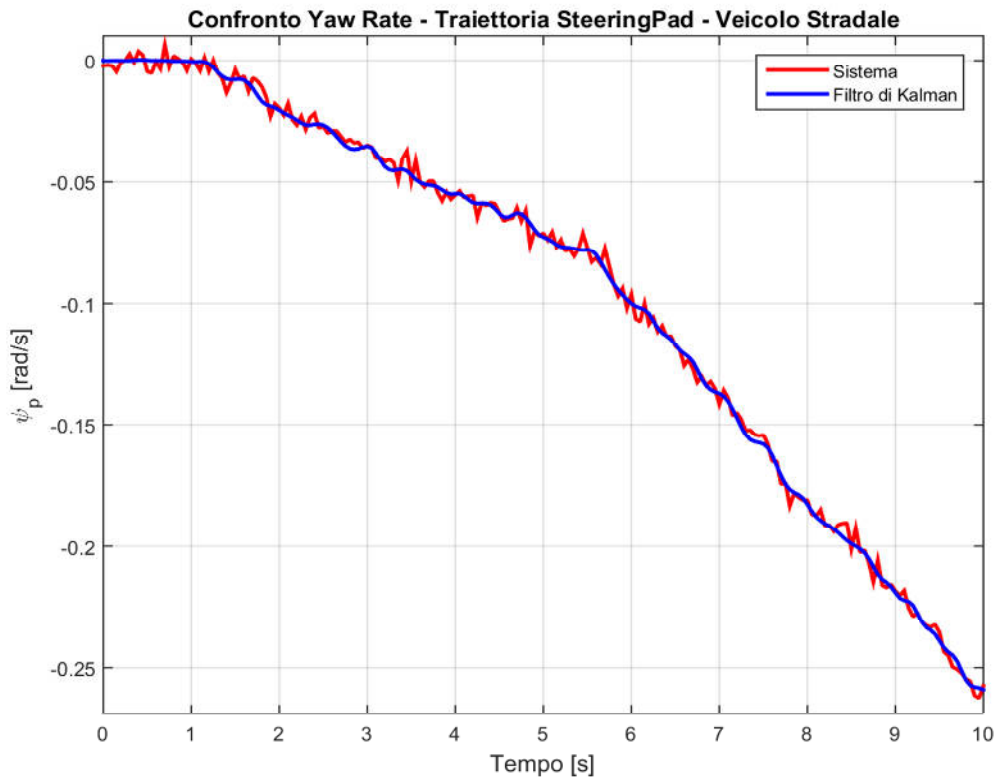


Fig. 37

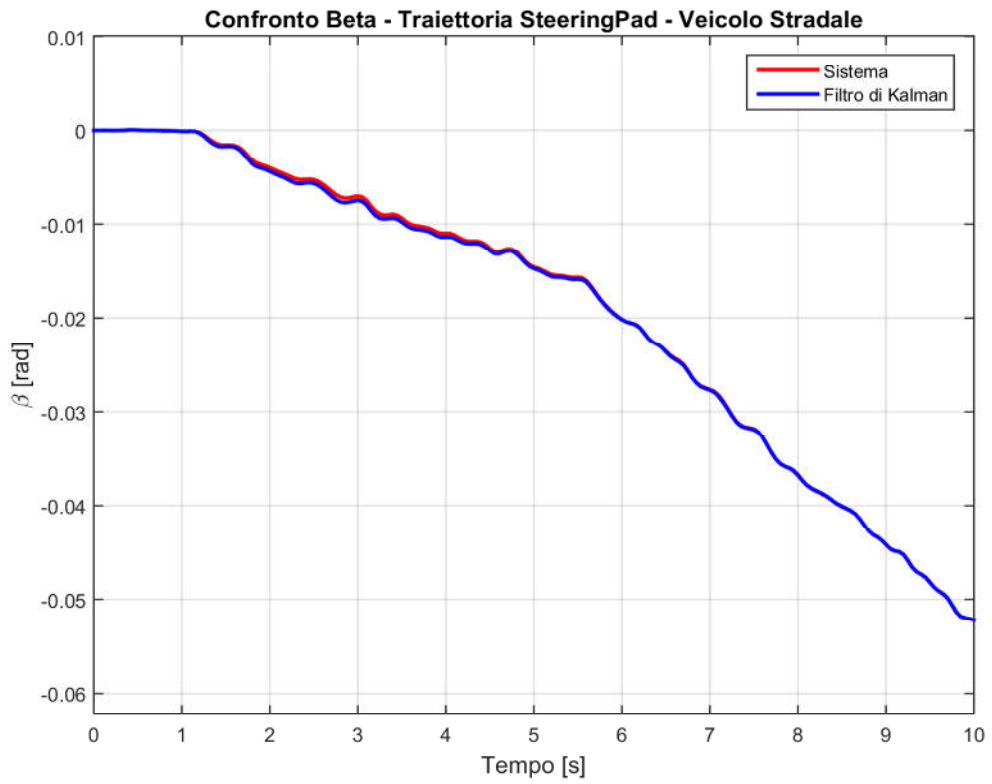


Fig. 38

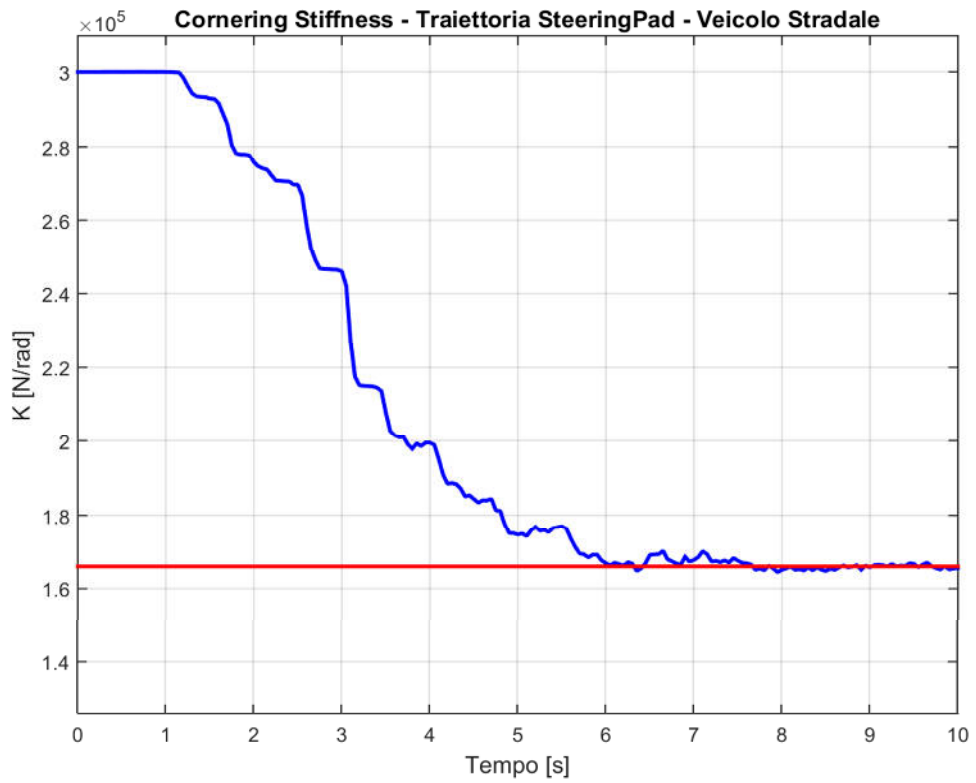


Fig. 39

❖ SWEEP – Veicolo Stradale

Varianza del rumore di Misura: 10^{-4}

Varianza del rumore sullo Stato: 10^{-5}

Varianza del parametro incognito: $5 \cdot 10^8$

Condizioni Iniziali del sistema matematico: $[0 \ 0]$

Matrice di covarianza (errore): $\text{diag}([10^{-03} \ 10^{-03} \ 5 \cdot 10^3])$

Condizioni Iniziali del Filtro di Kalman: $[0 \ 0 \ 3 \cdot 10^5]$

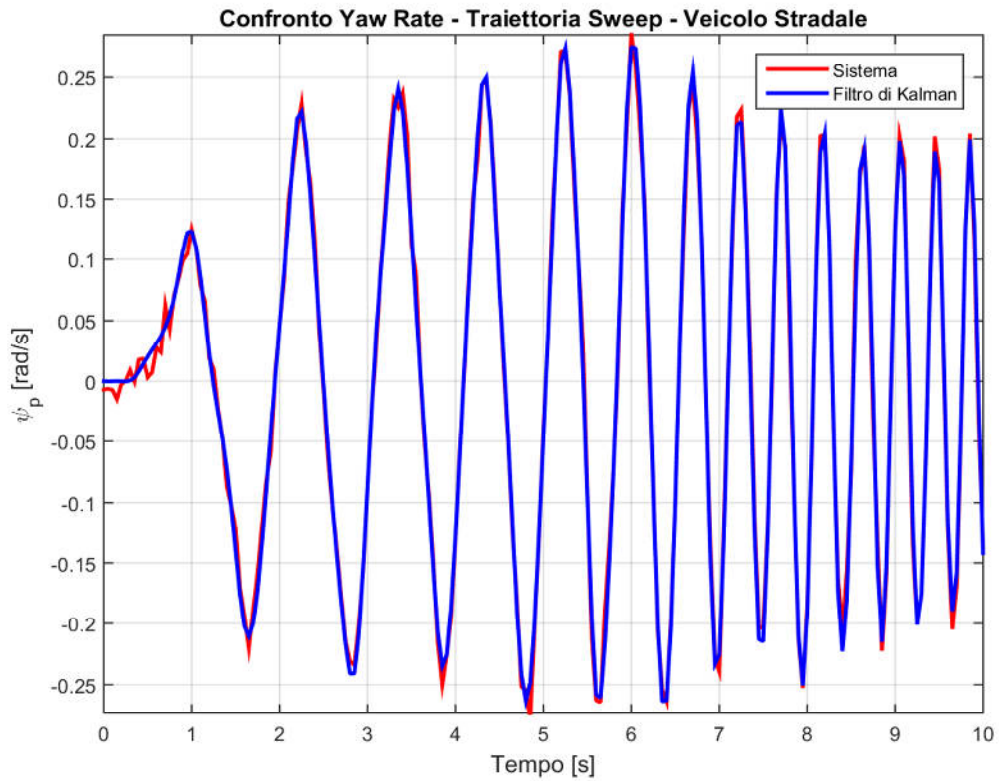


Fig. 40

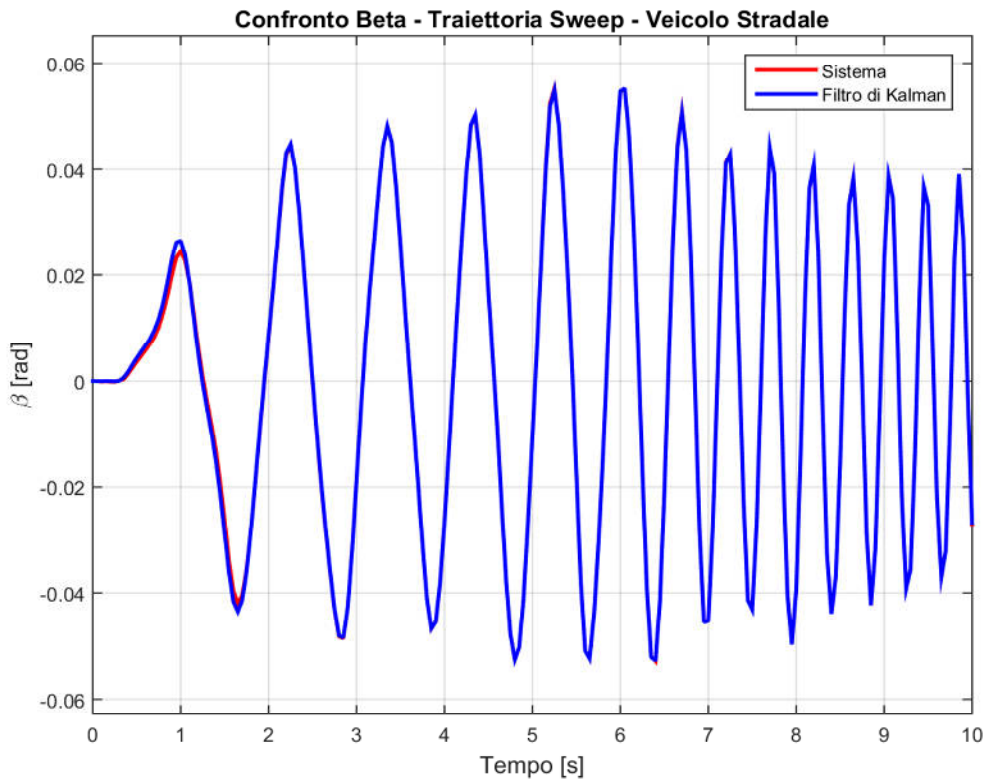


Fig. 41

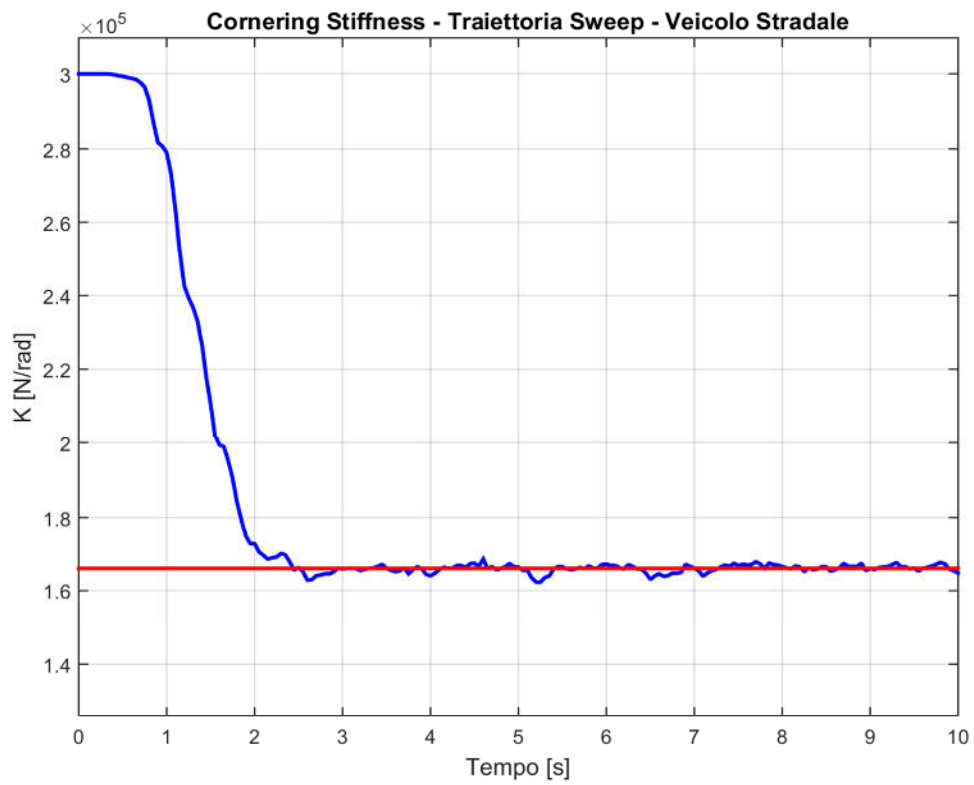


Fig. 42

Sulla base di quanto è possibile osservare da Fig. 31 a Fig. 42, si può concludere che lo stimatore con un'opportuna scelta dei parametri va a convergenza e quindi è stato costruito in modo corretto.

4.3 APPLICAZIONE DEL FILTRO DI KALMAN ESTESO

A questo punto è possibile passare al Filtro di Kalman Esteso alcune manovre di sterzo rappresentate da Fig. [43] compiute dal Quad, oggetto della tesi, al fine di ricavare un probabile valore di cornering.

Le manovre di sterzo e le traiettorie compiute dal Quad sono diverse e quelle passate allo stimatore sono le seguenti, ciascuna con la propria traiettoria di sterzo e andamento di velocità:

✓ 'fail_eps07_gamma05'

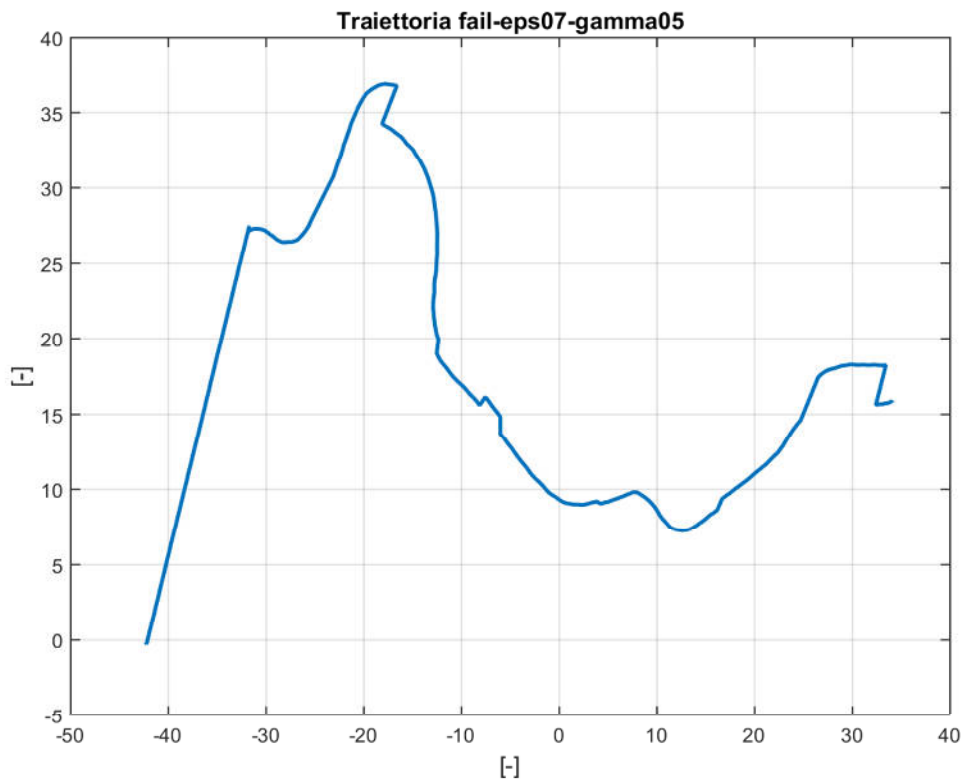


Fig. 43

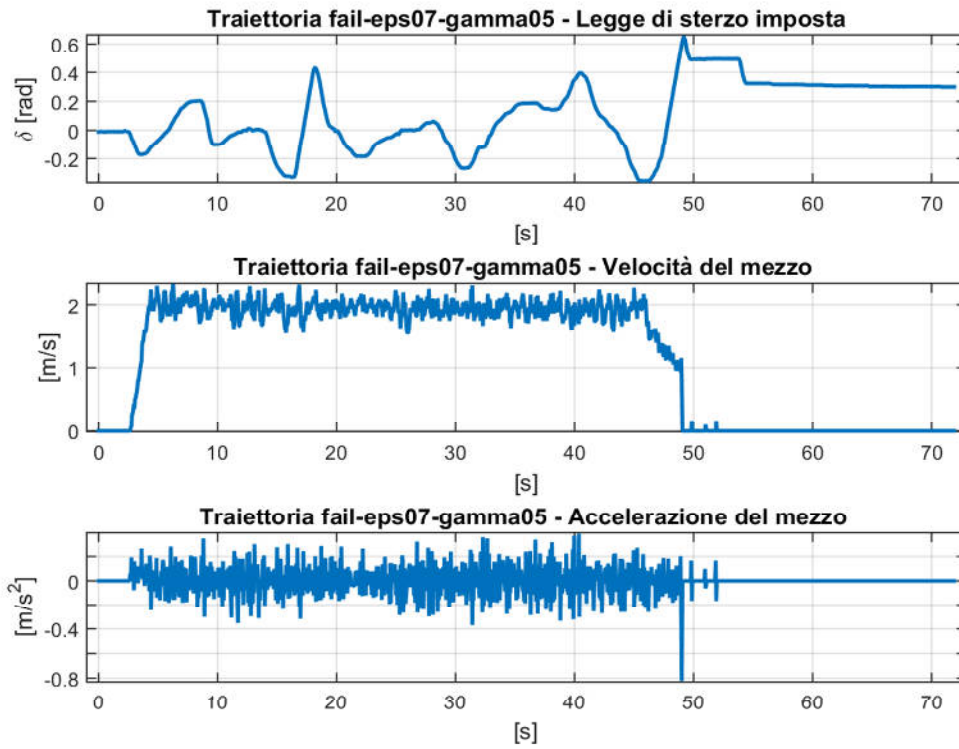


Fig. 44

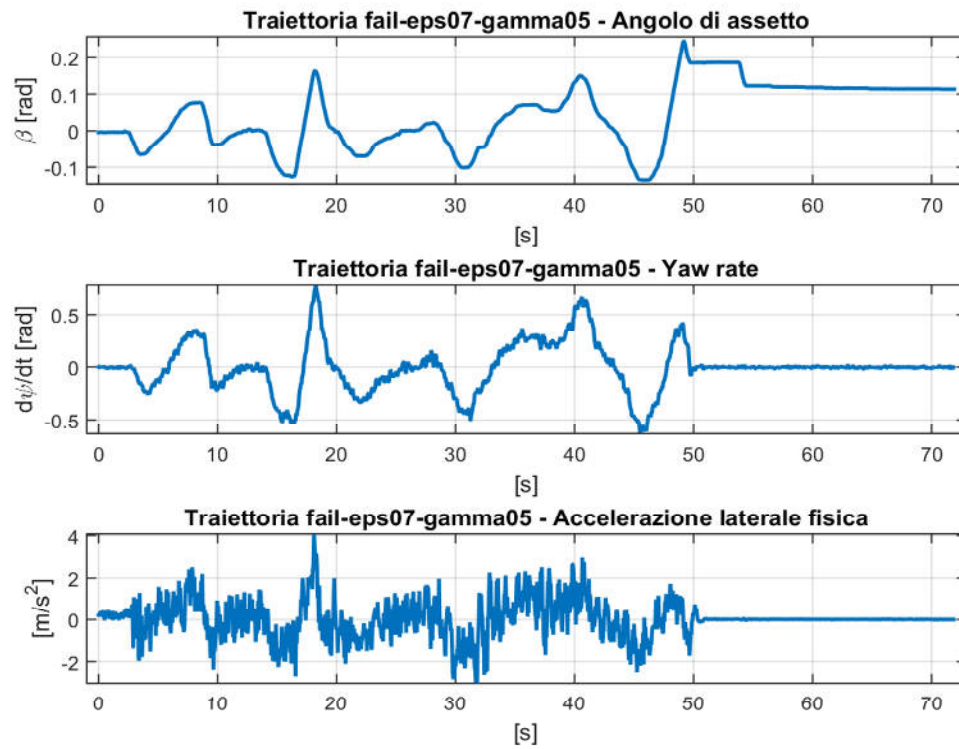


Fig. 45

✓ 'fail_eps09_gamma05'

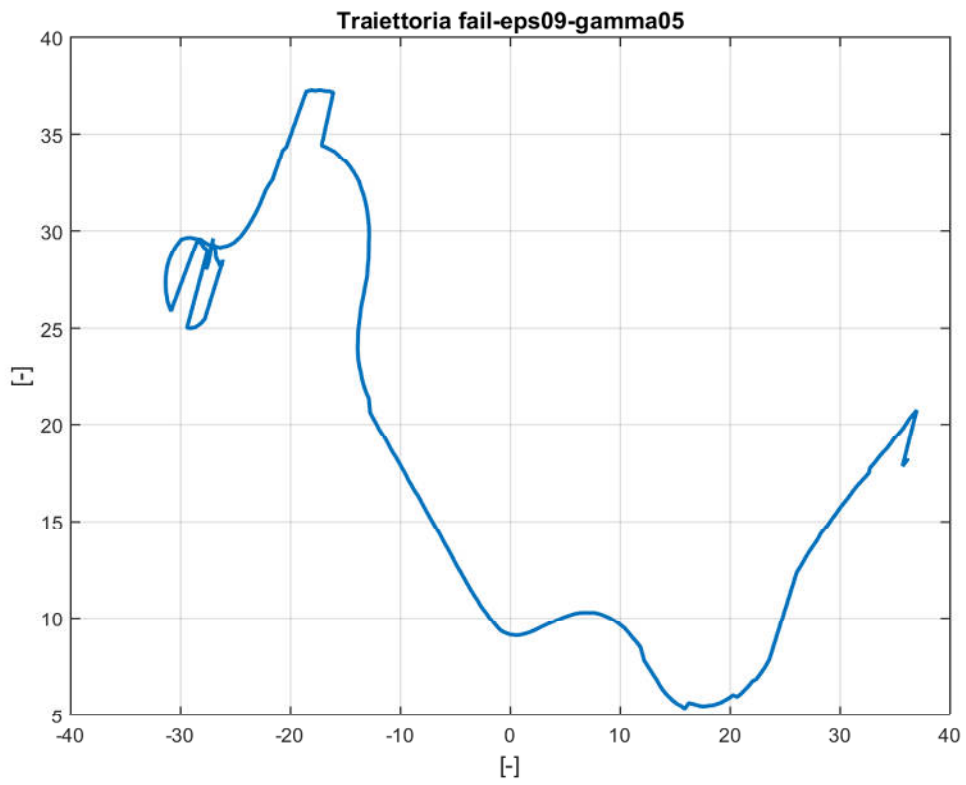


Fig. 46

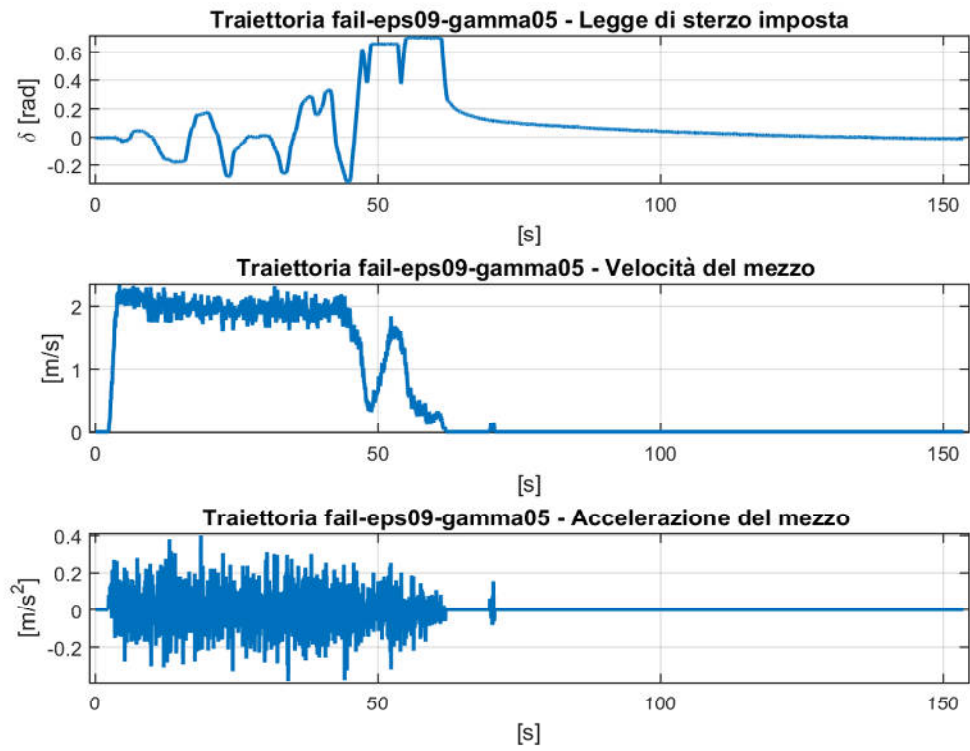


Fig. 47

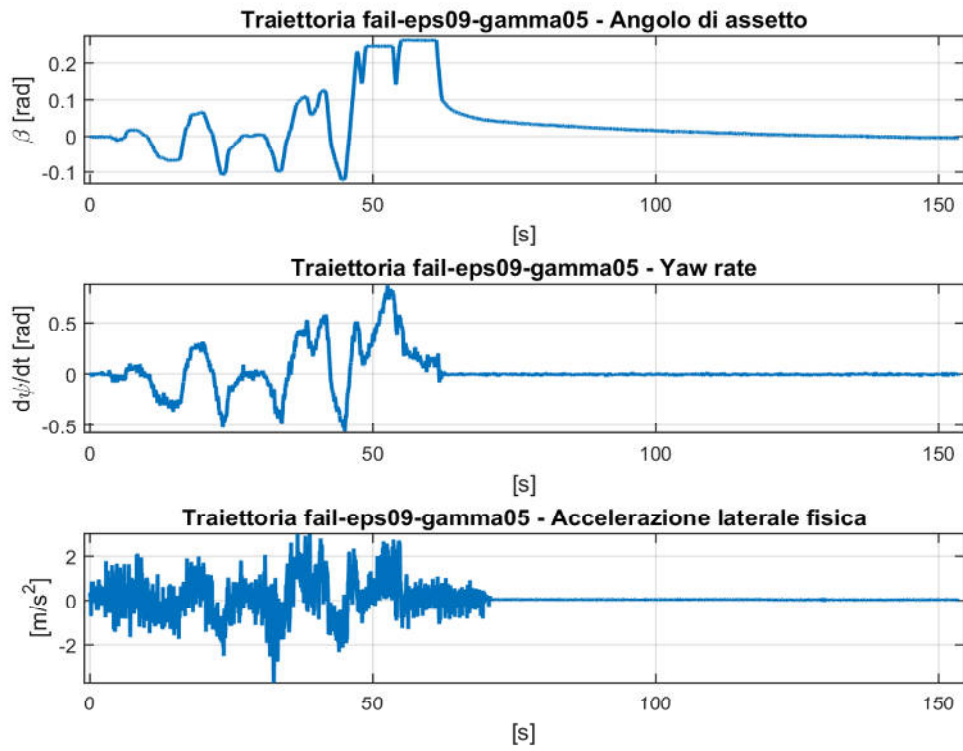


Fig. 48

✓ 'fail_8'

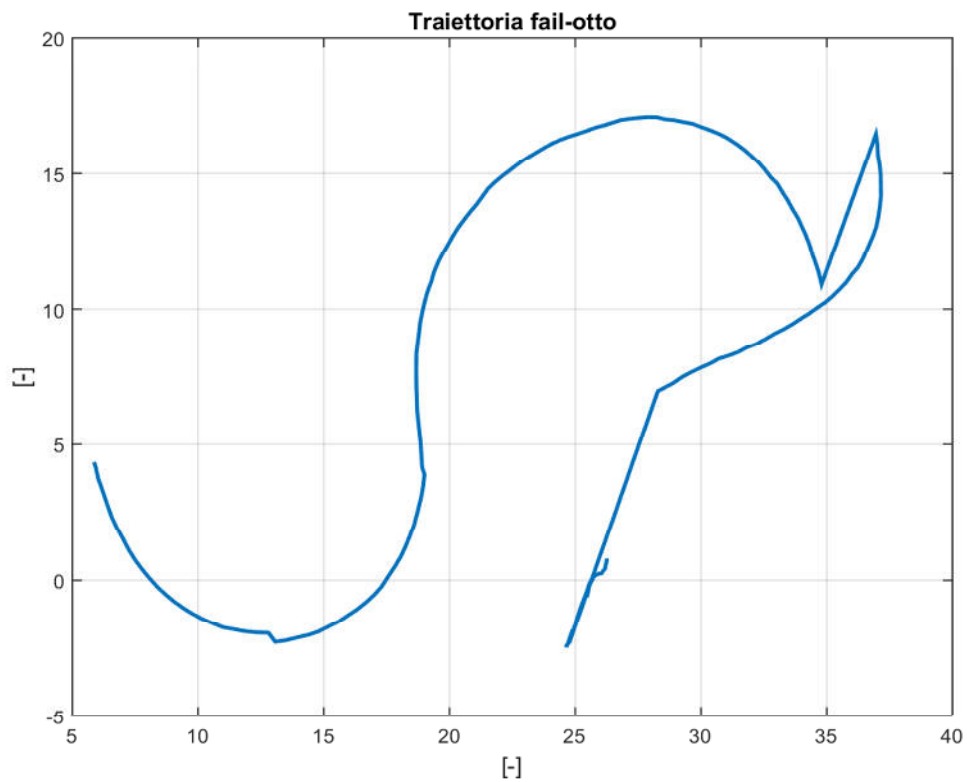


Fig. 49

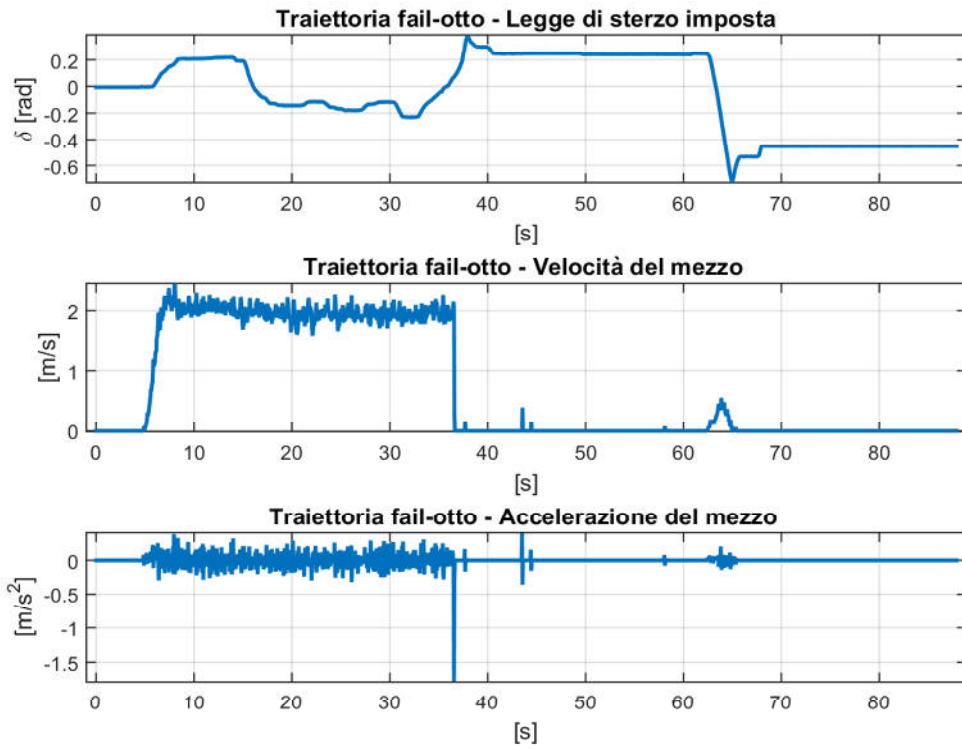


Fig. 50

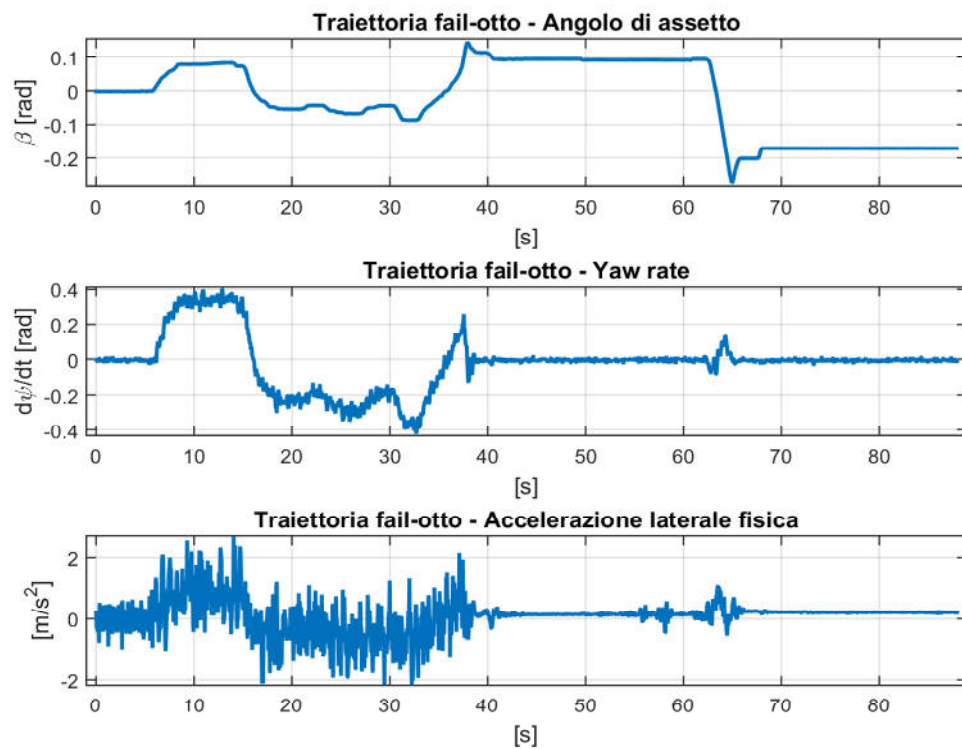


Fig. 51

✓ 'fail8fast'

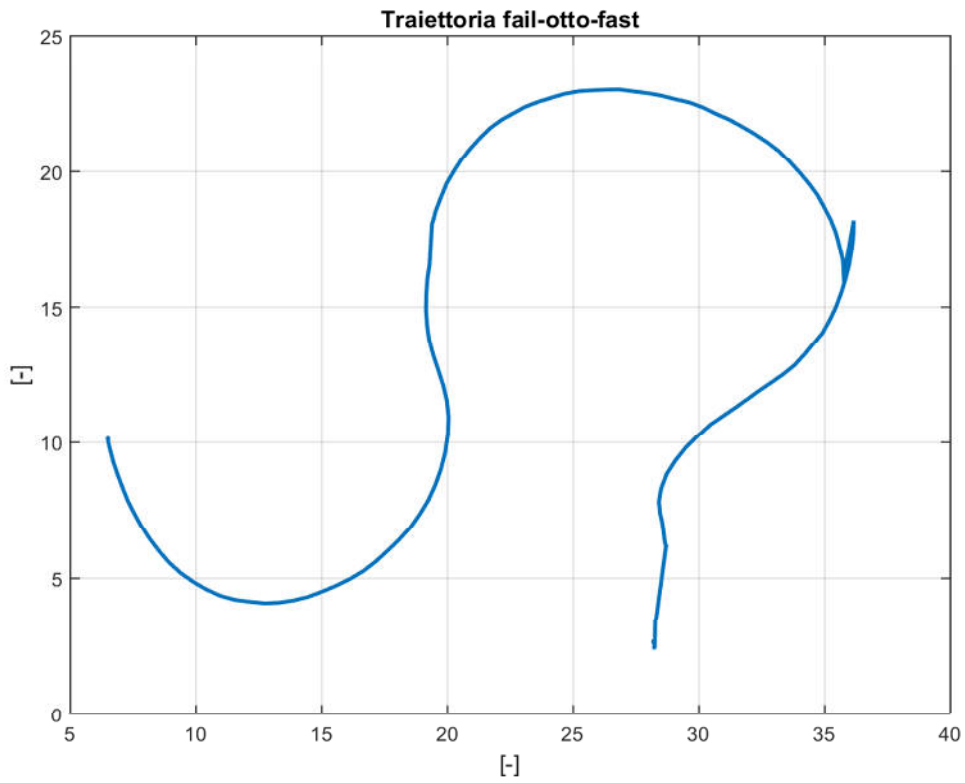


Fig. 52

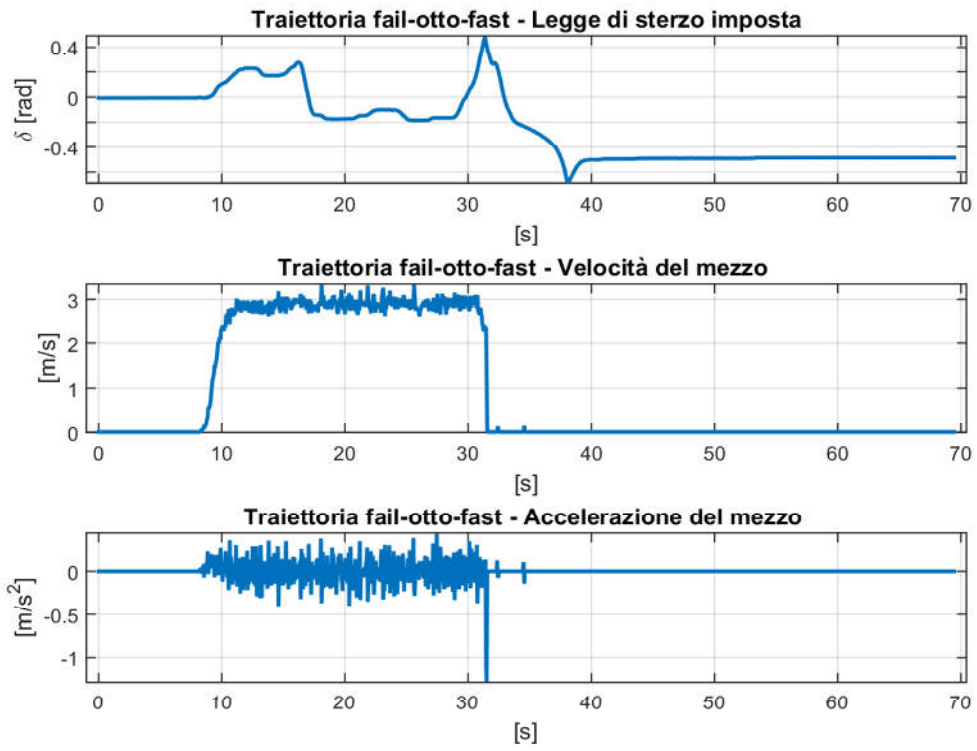


Fig. 53

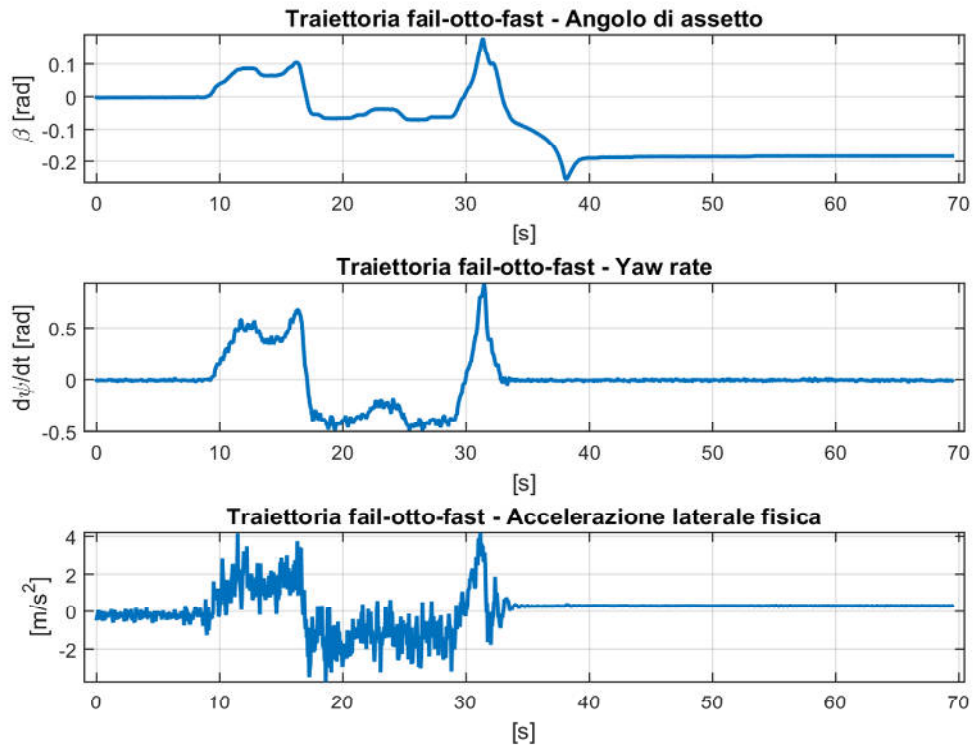


Fig. 54

✓ 'falsofast8'

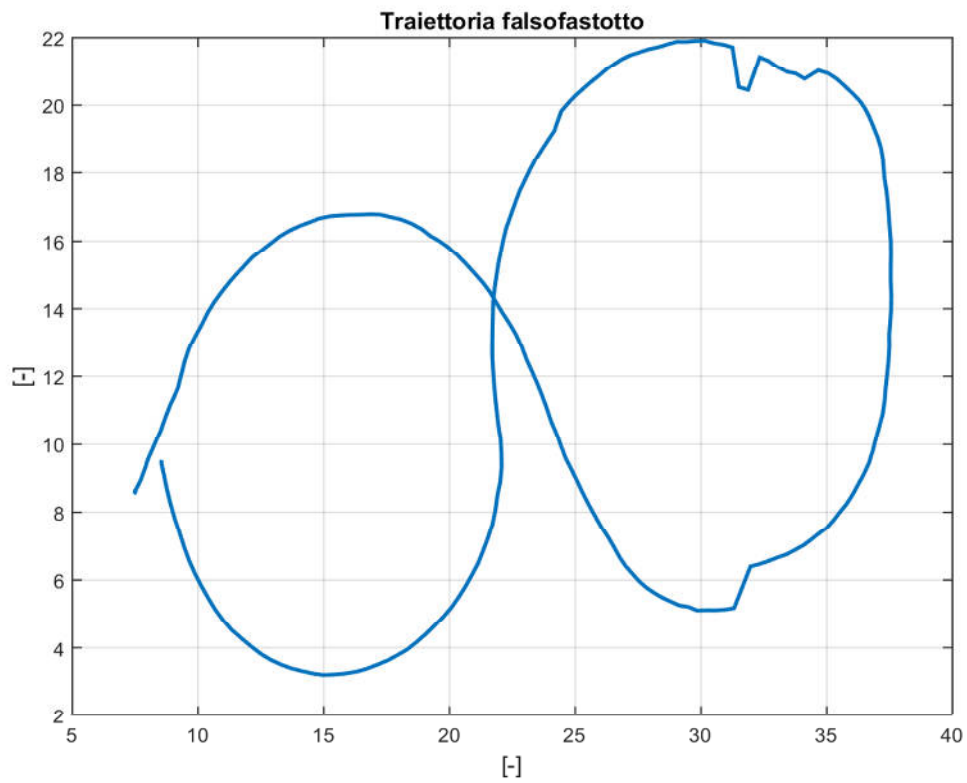


Fig. 55

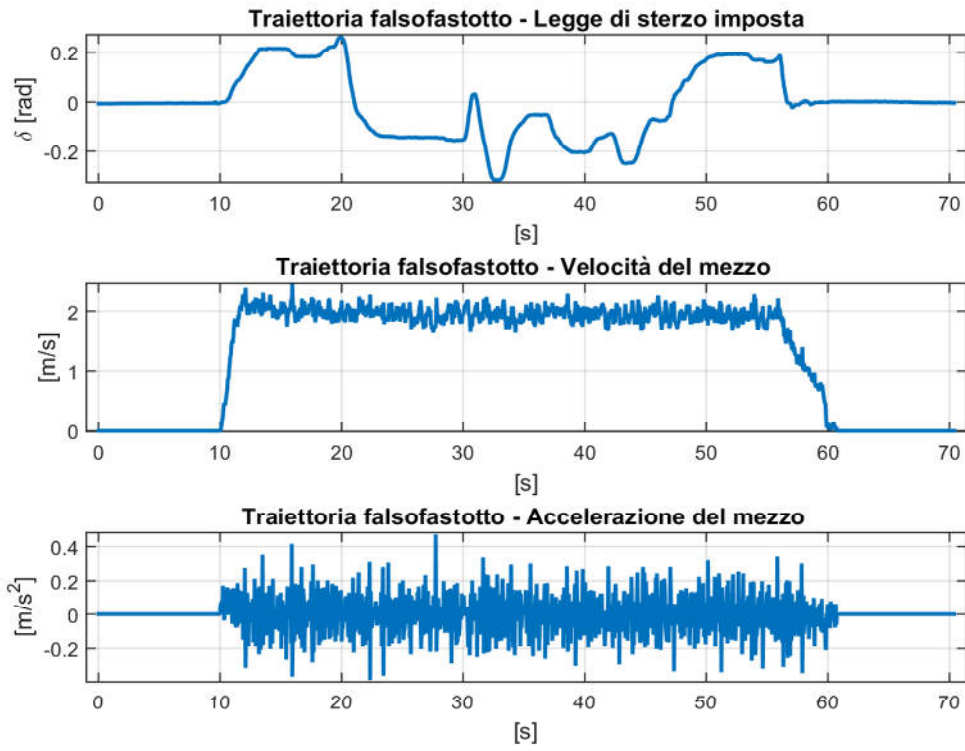


Fig. 56

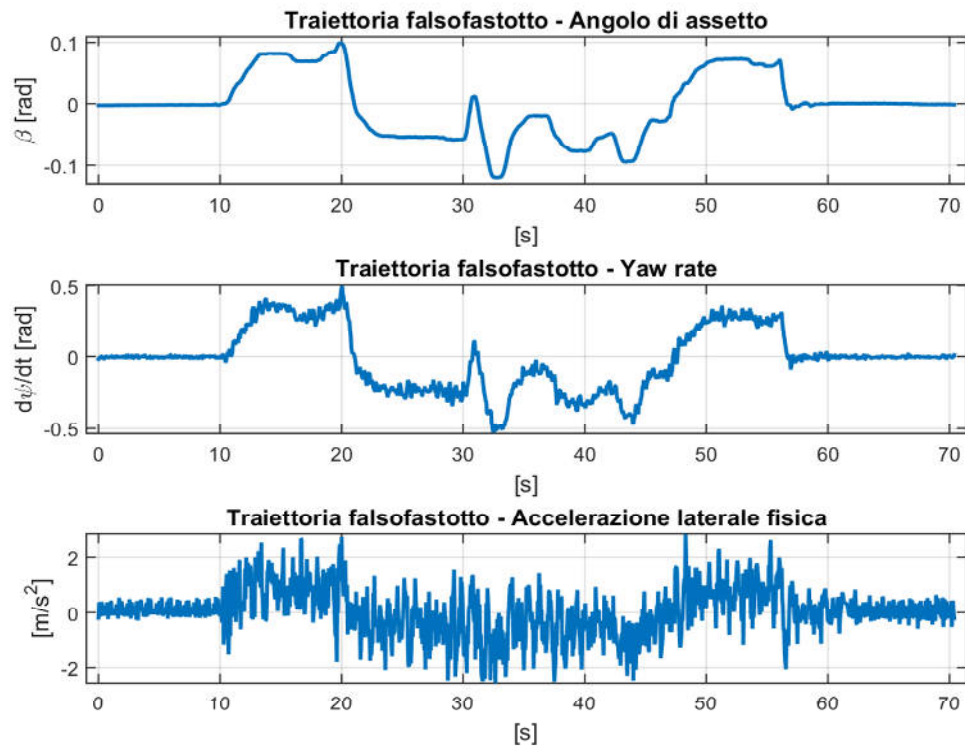


Fig. 57

✓ 'fast_boh'

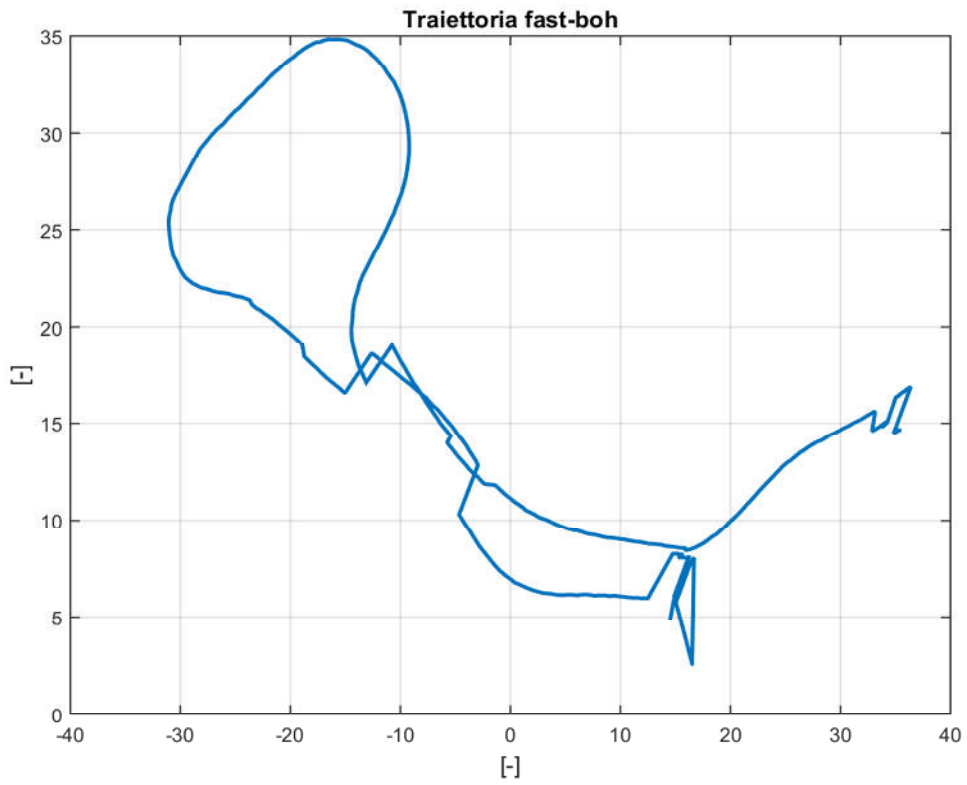


Fig. 58

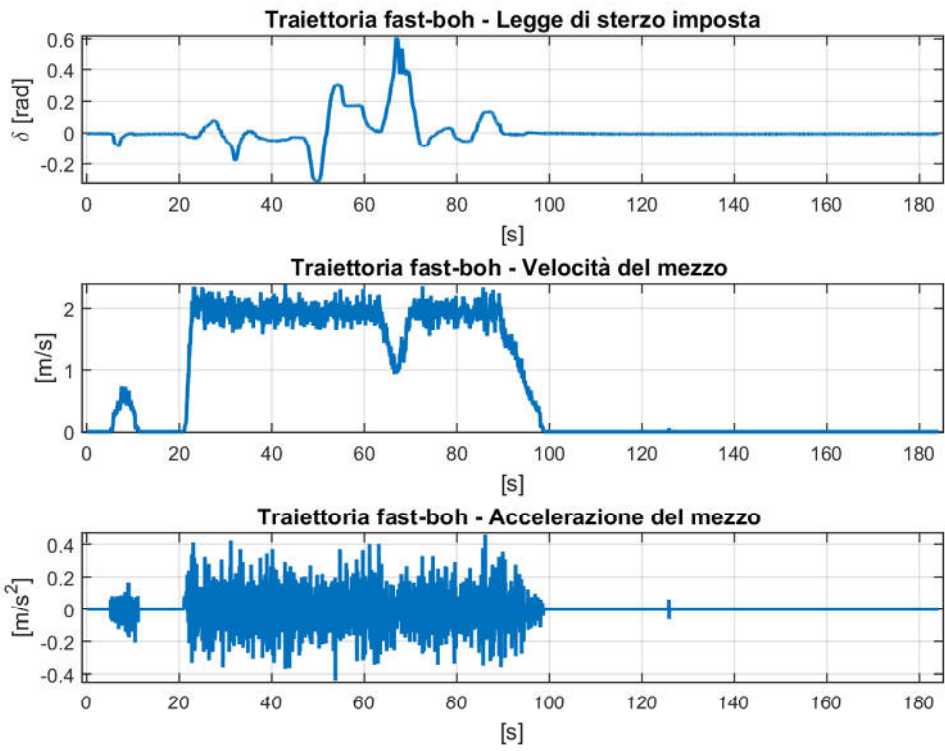


Fig. 59

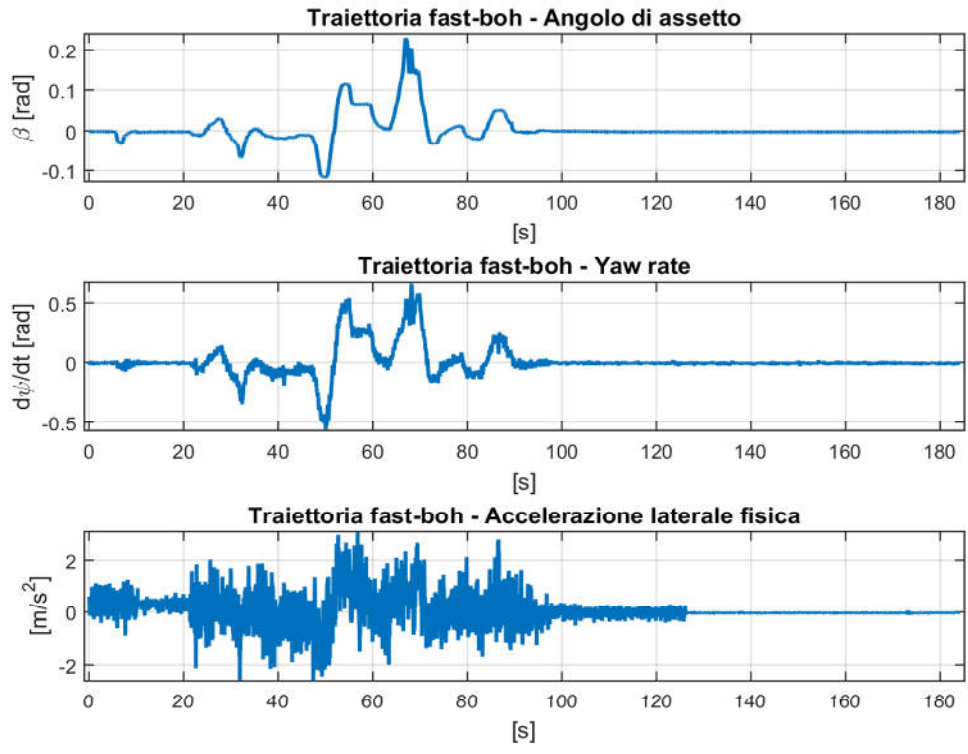


Fig. 60

✓ 'fast82'

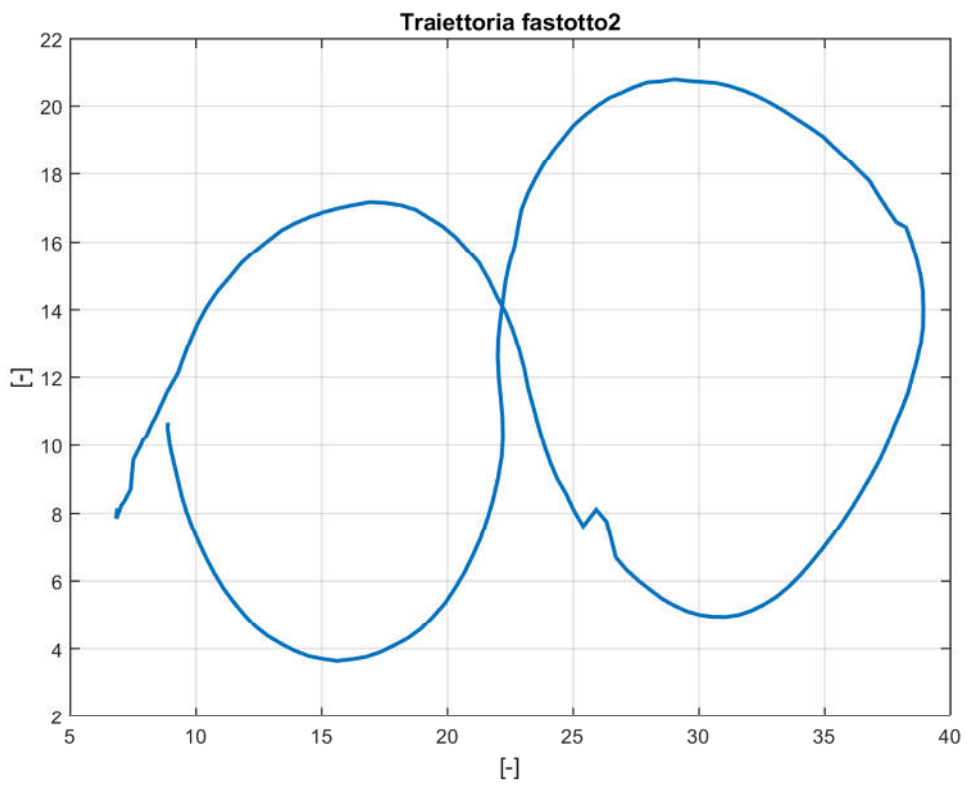


Fig. 61

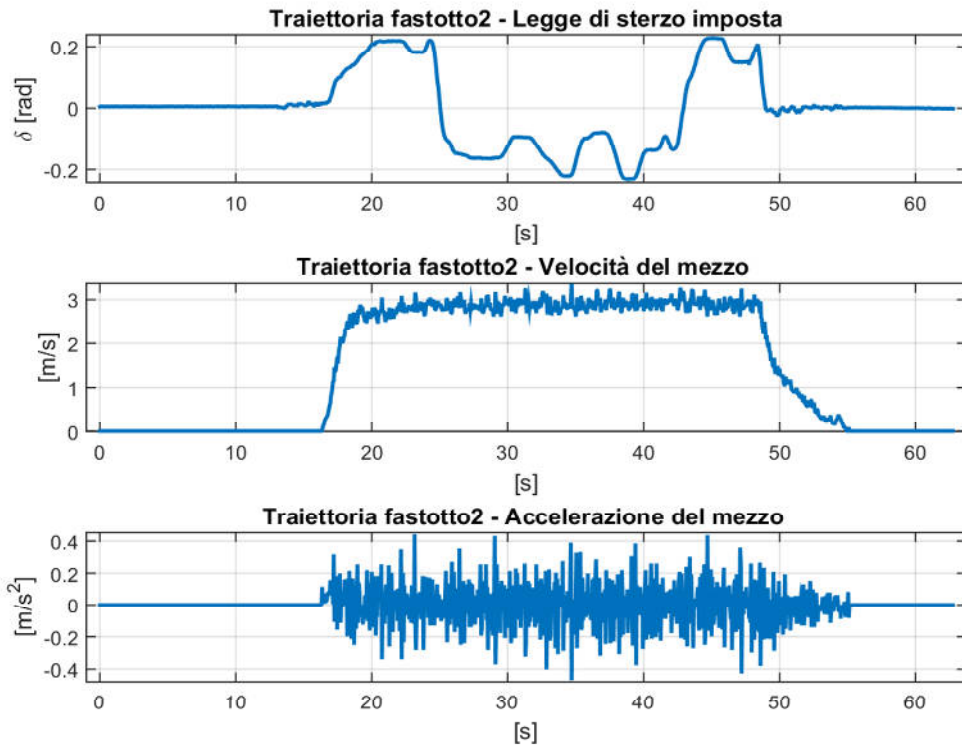


Fig. 62

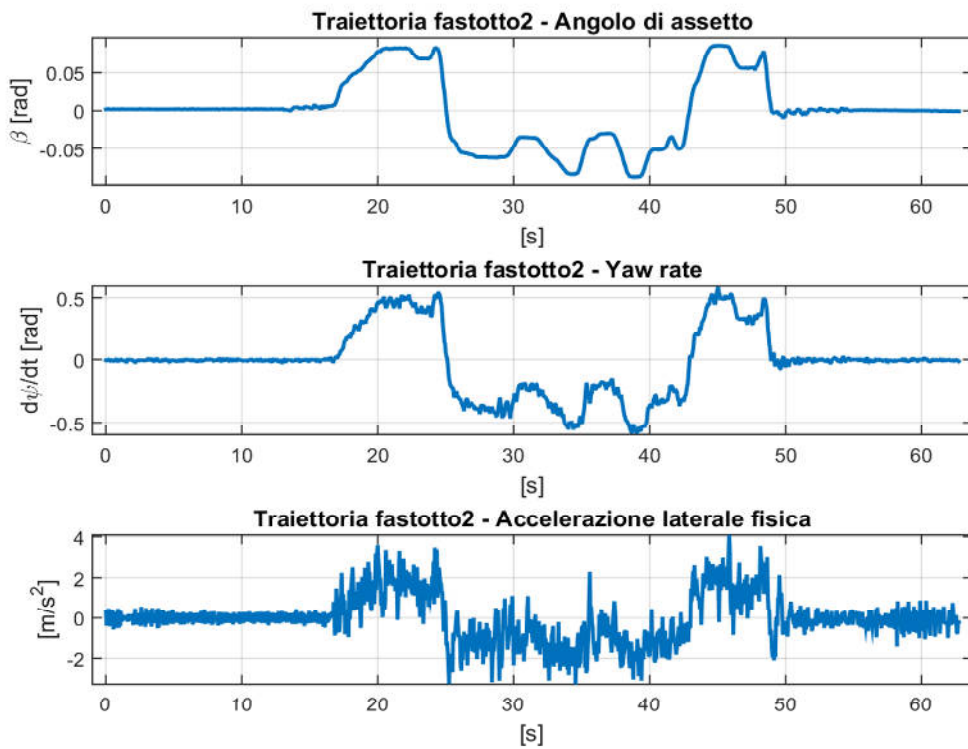


Fig. 63

✓ 'fast8'

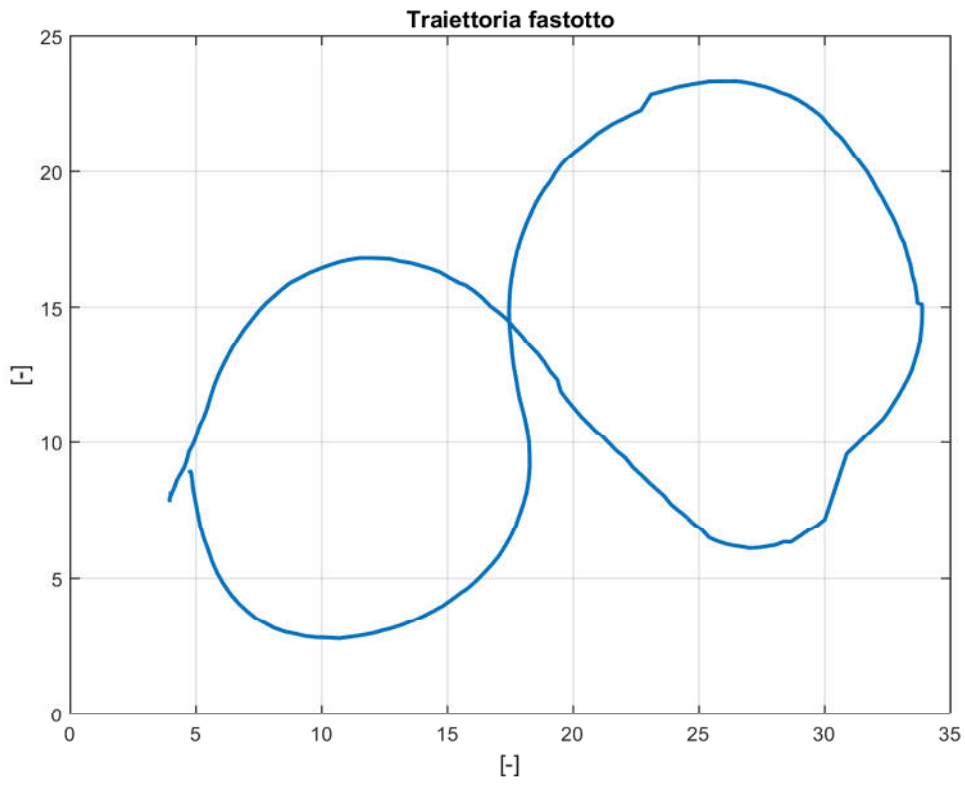


Fig. 64

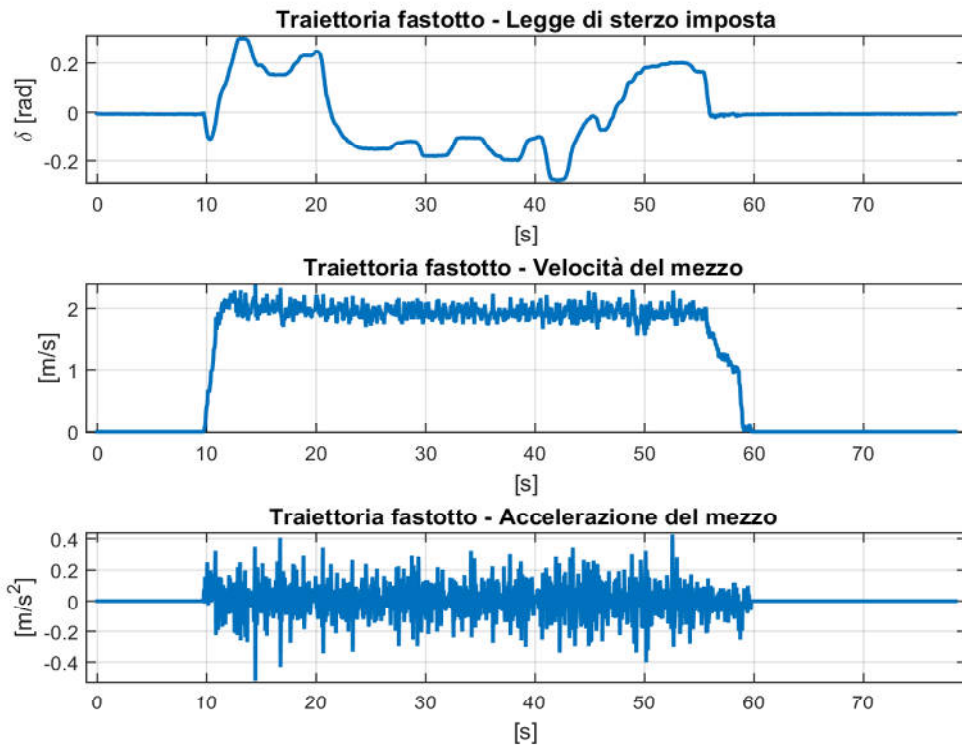


Fig. 65

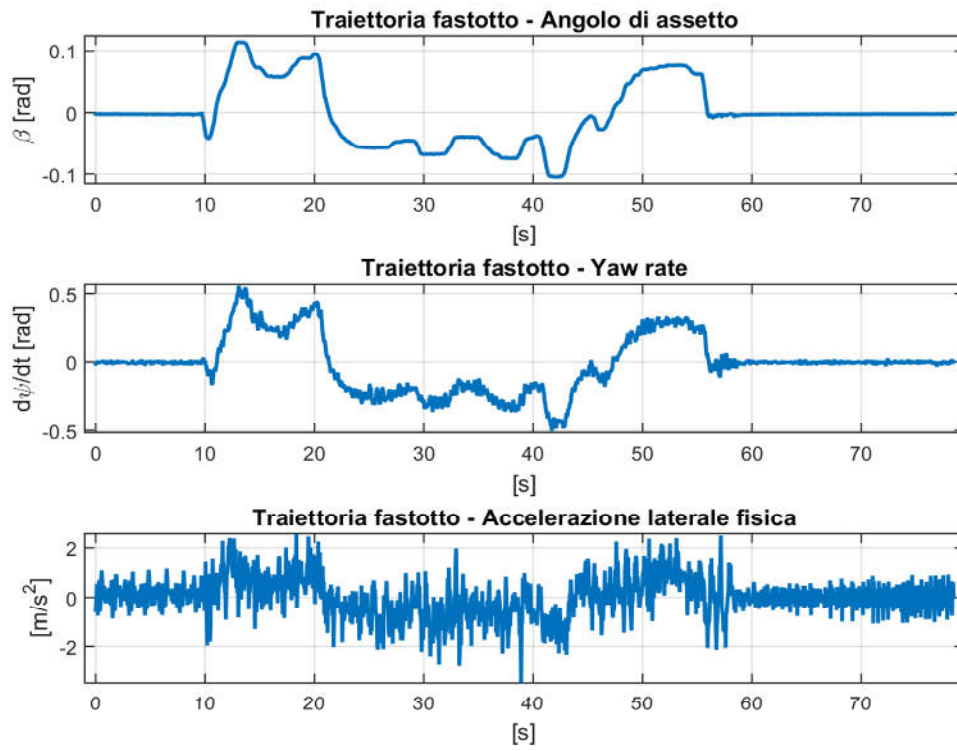


Fig. 66

✓ 'giro15'

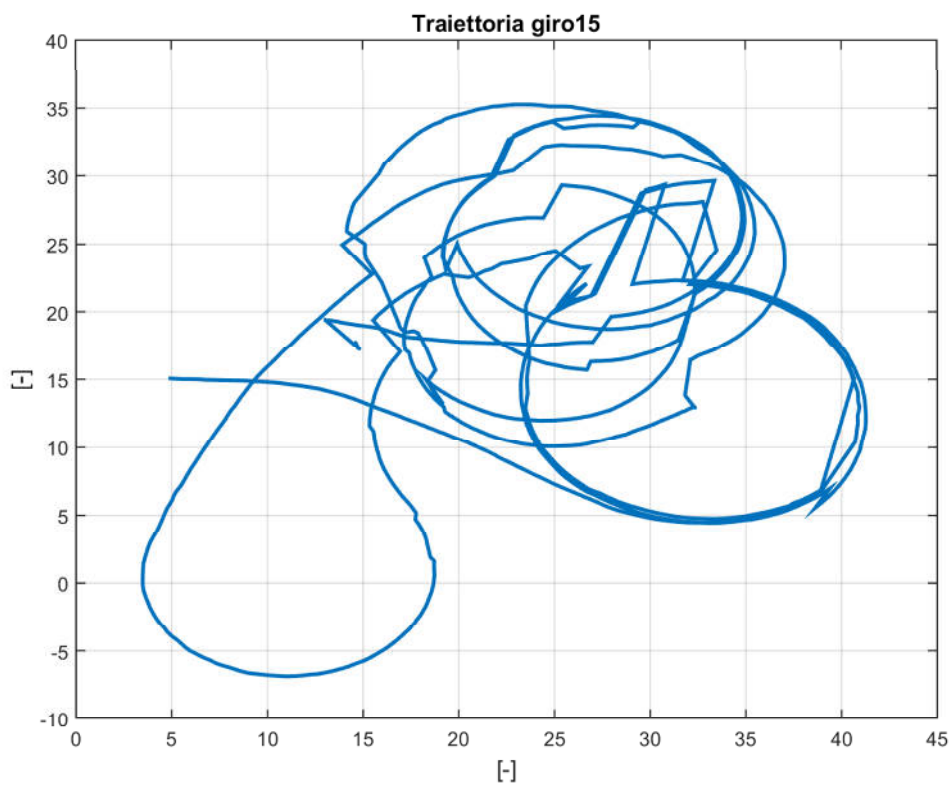


Fig. 67

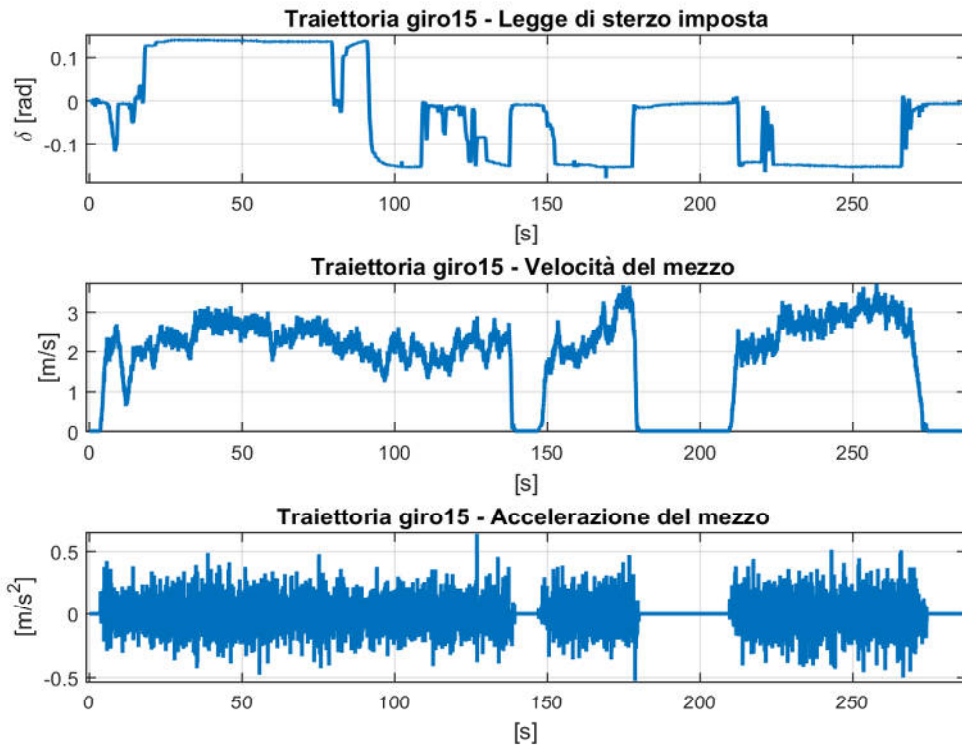


Fig. 68

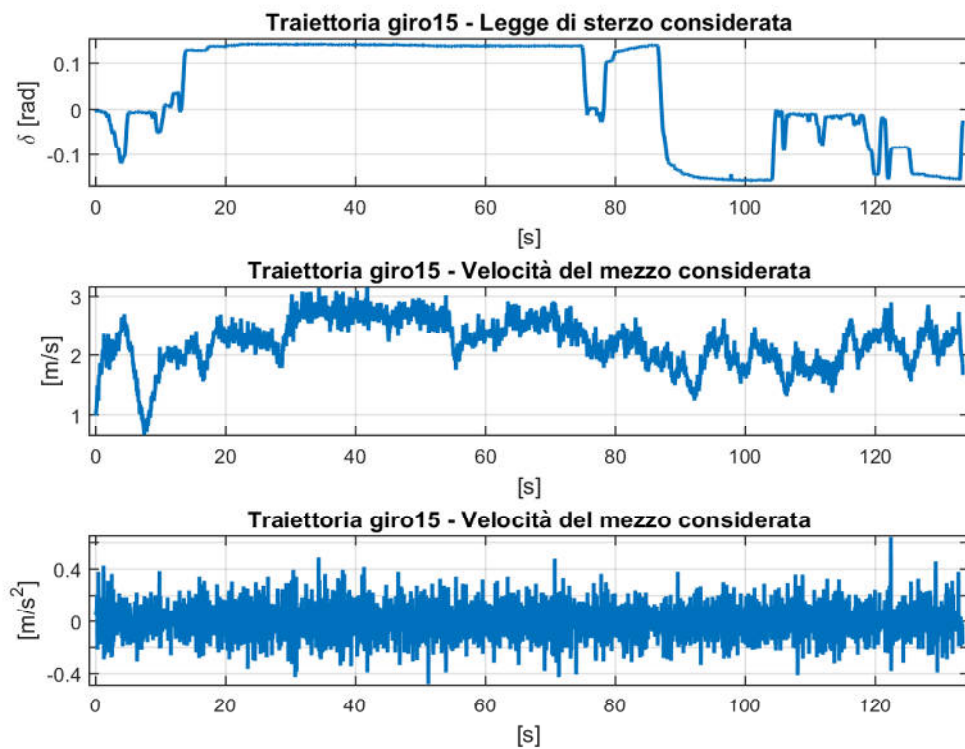


Fig. 69

✓ 'giro30'

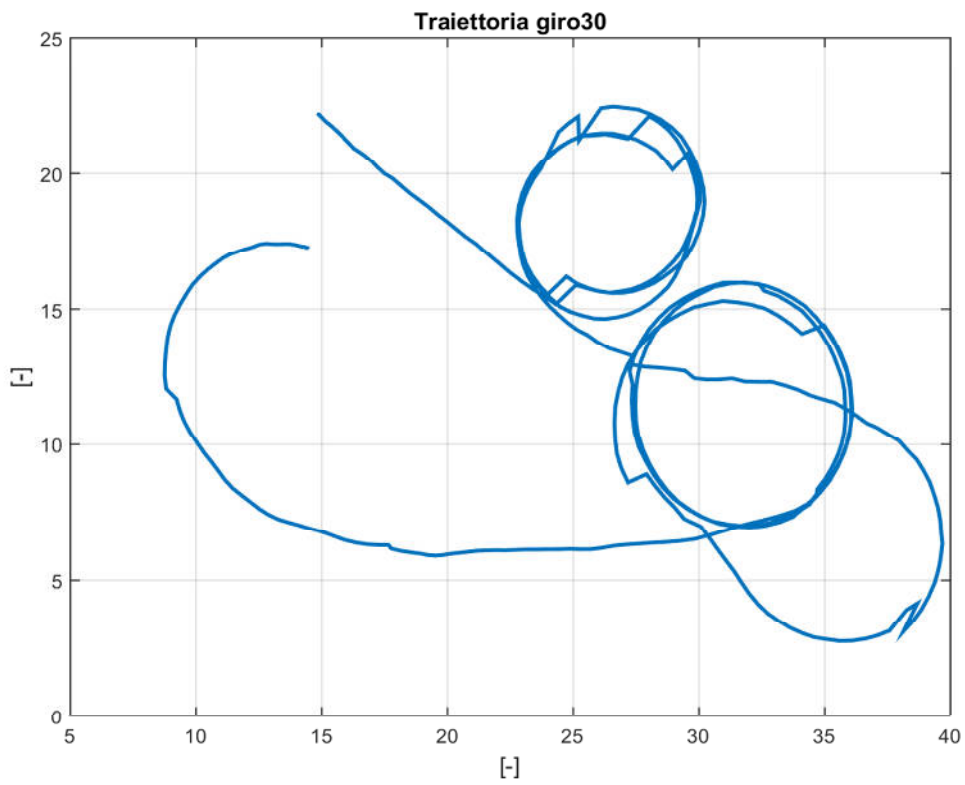


Fig. 70

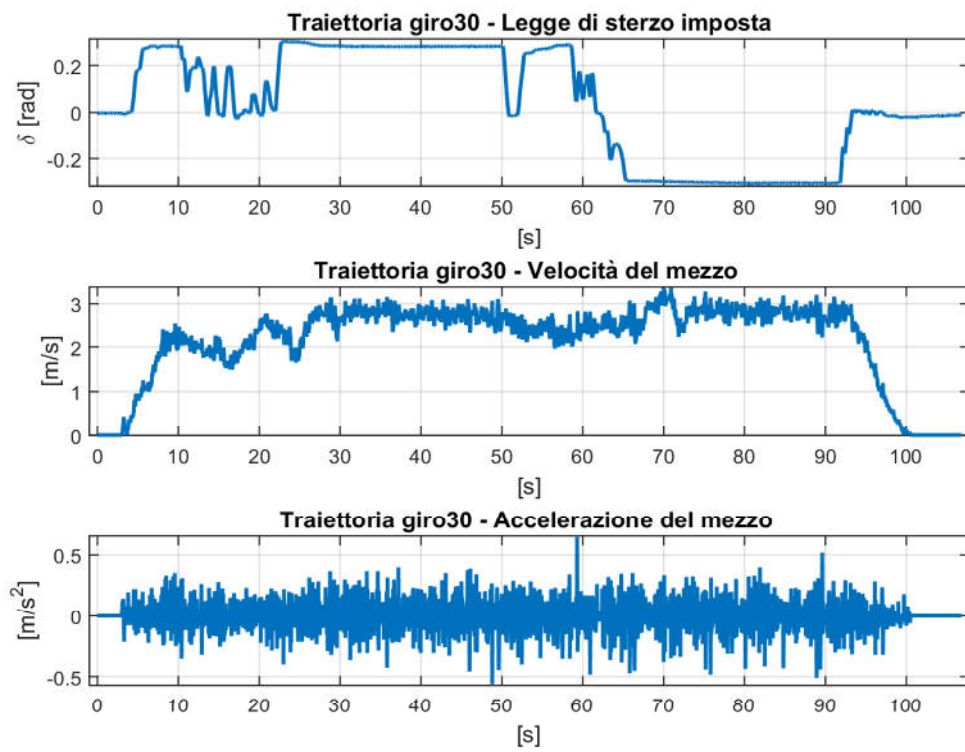


Fig. 71

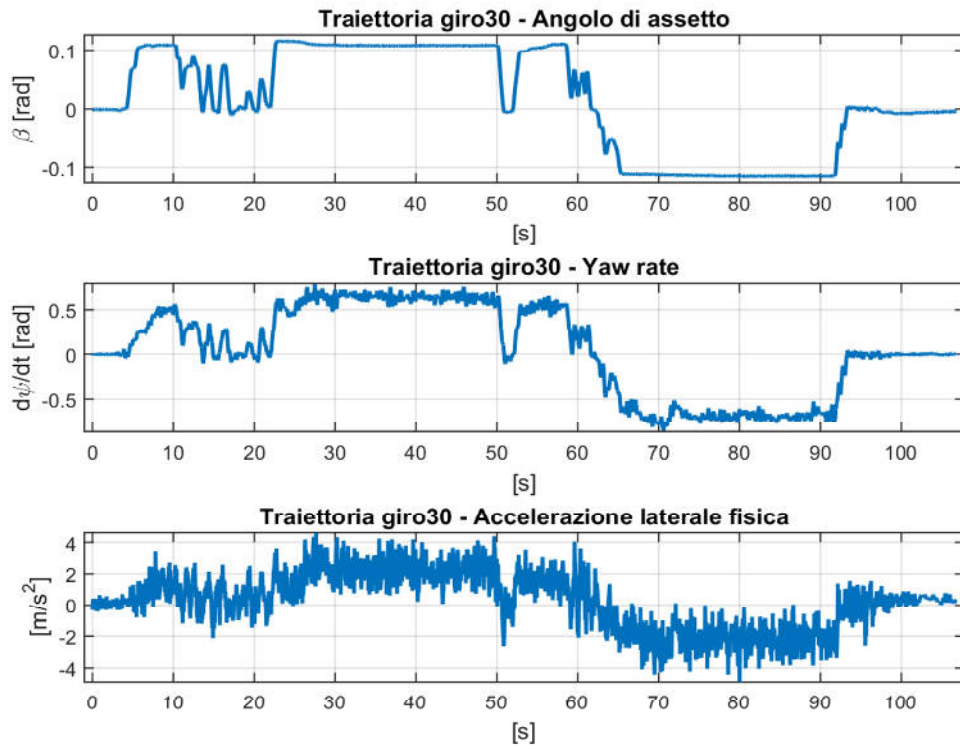


Fig. 72

✓ 'giro40'

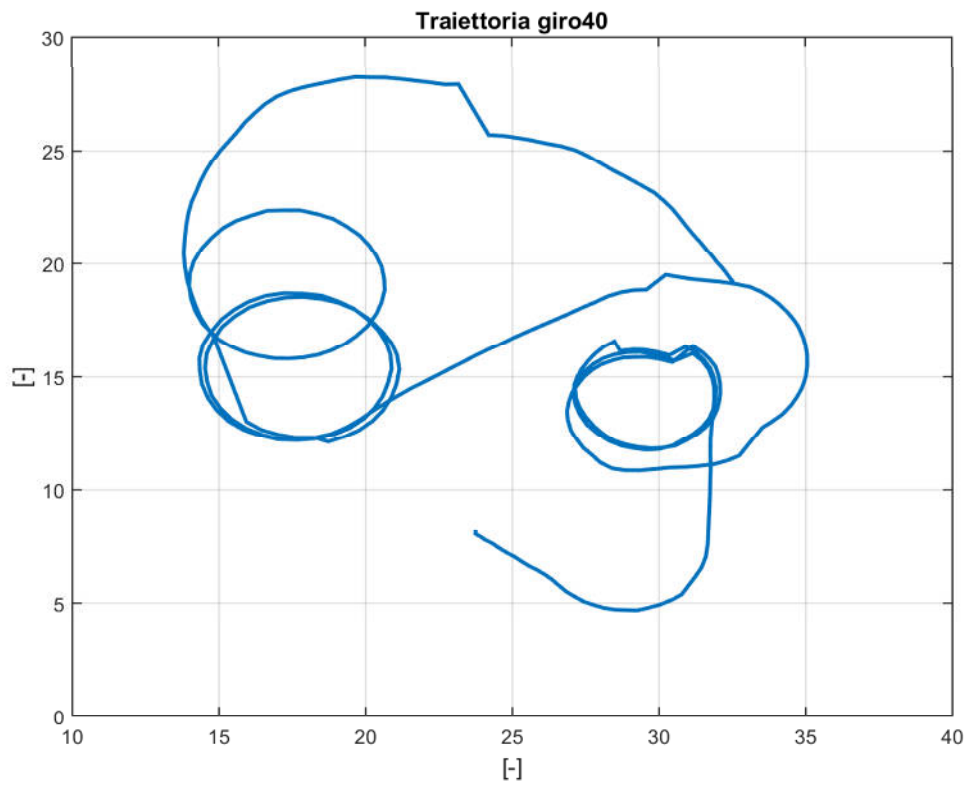


Fig. 73

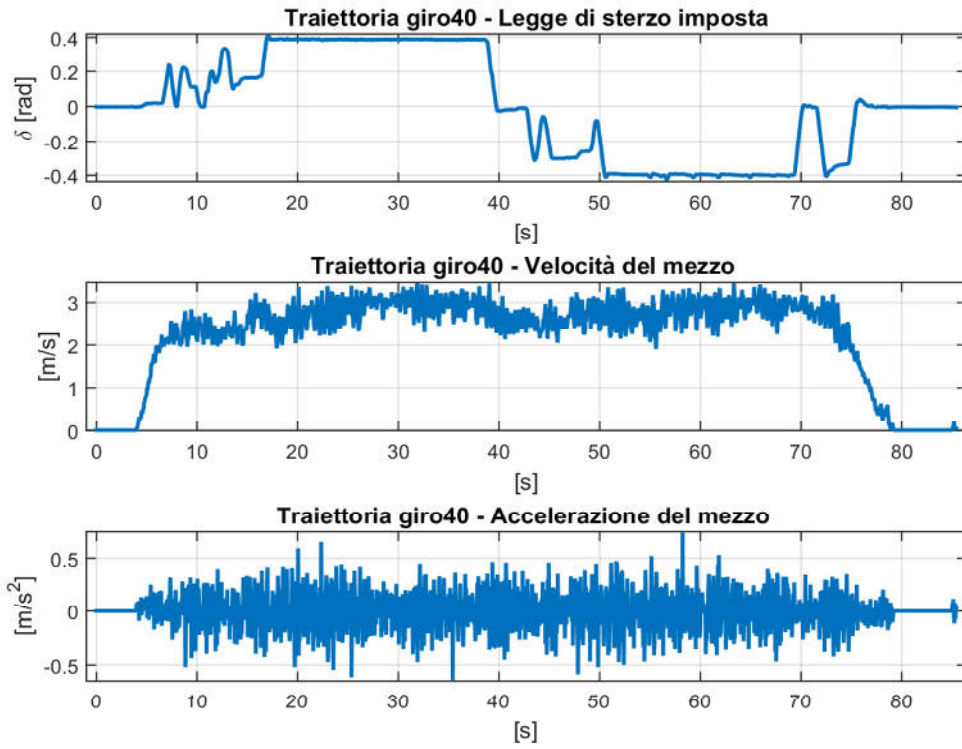


Fig. 74

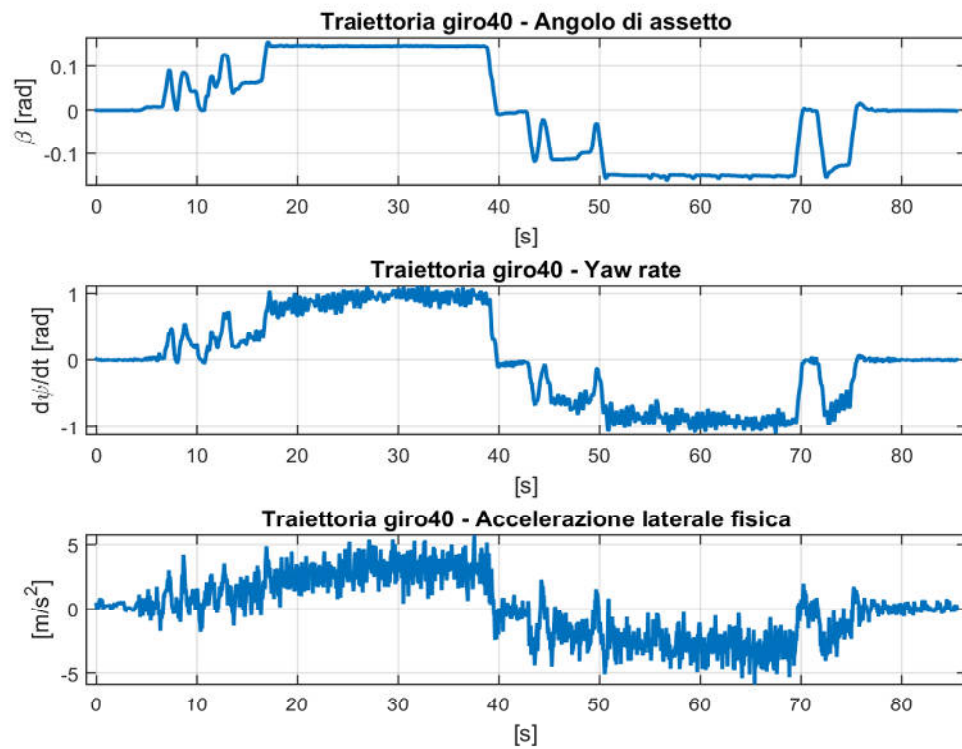


Fig. 75

✓ 'perimetro'

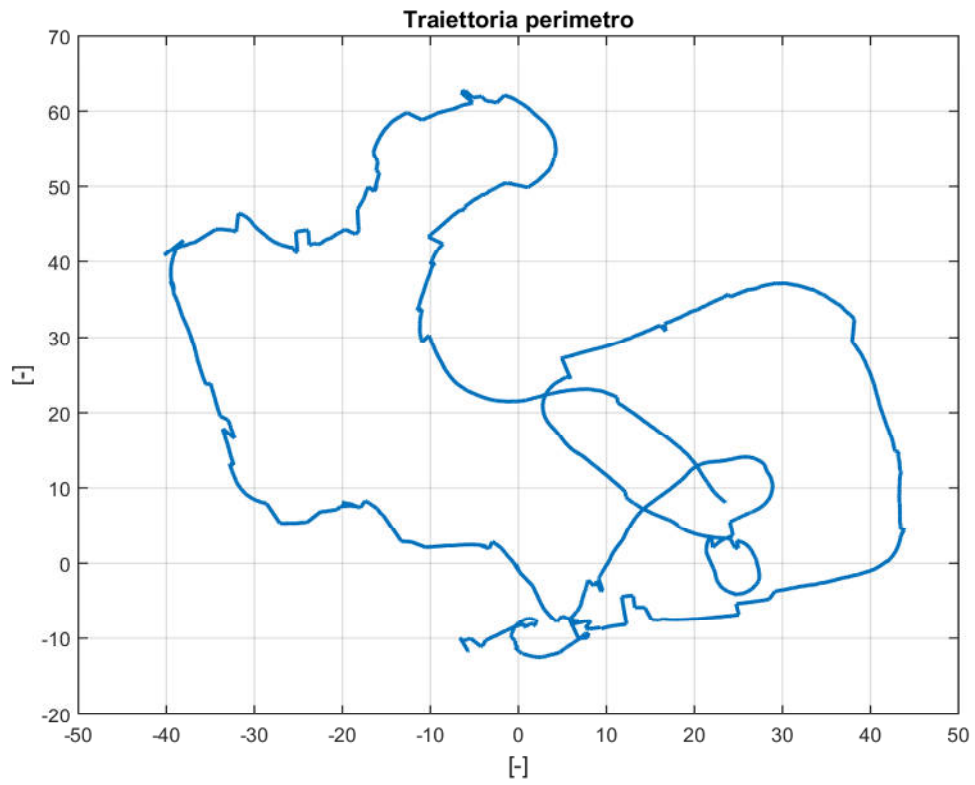


Fig. 76

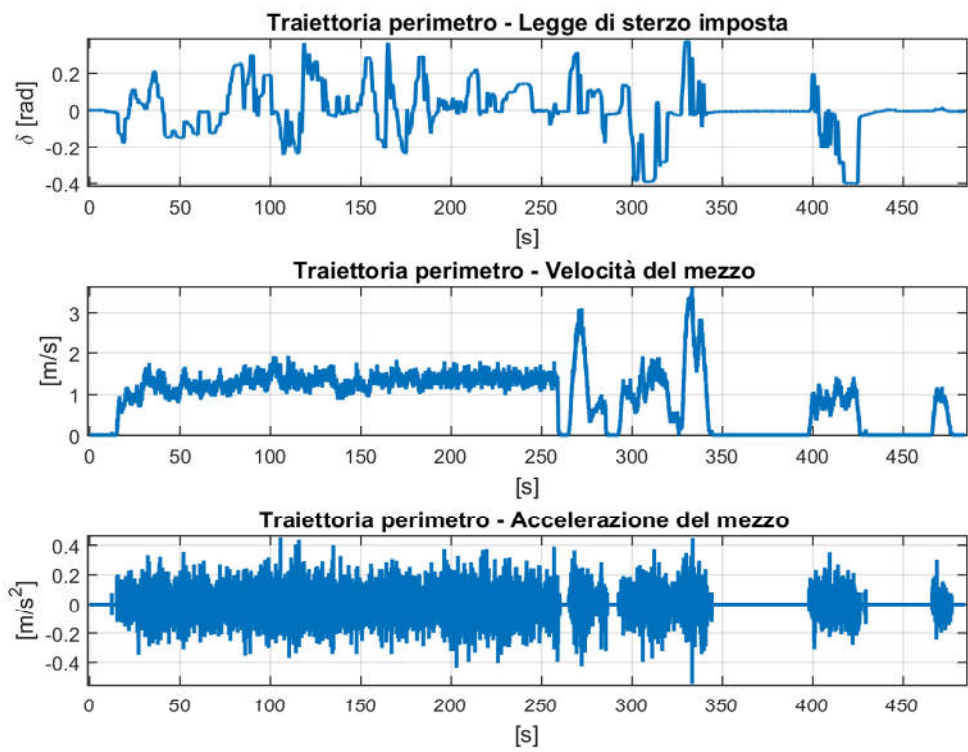


Fig. 77

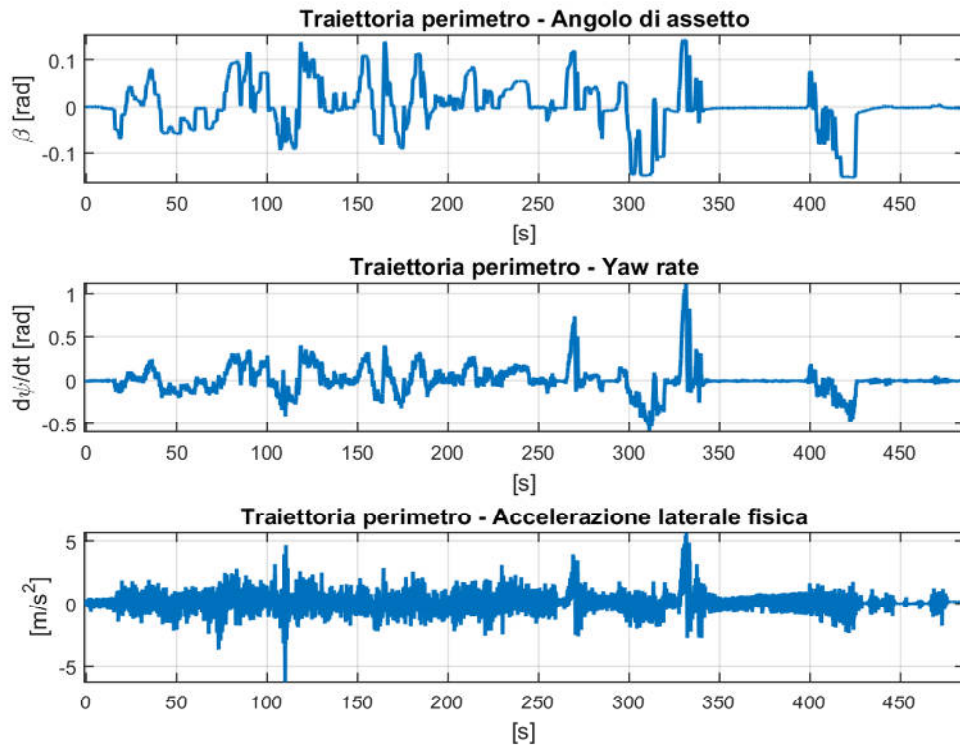


Fig. 78

✓ 'primo_8'

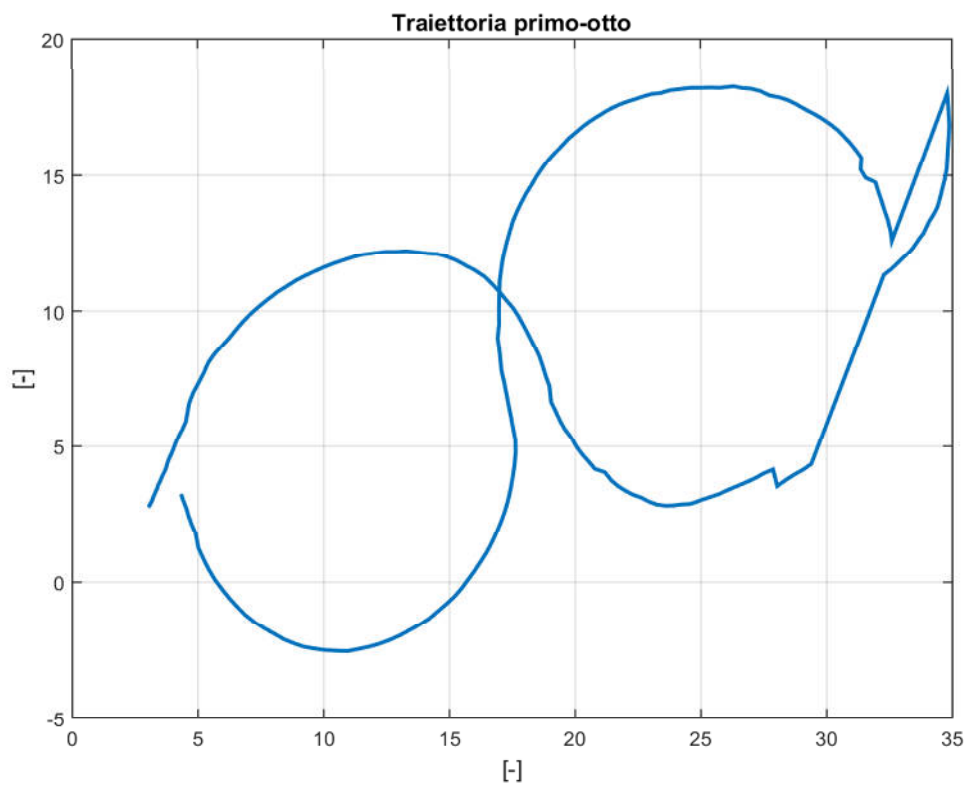


Fig. 79

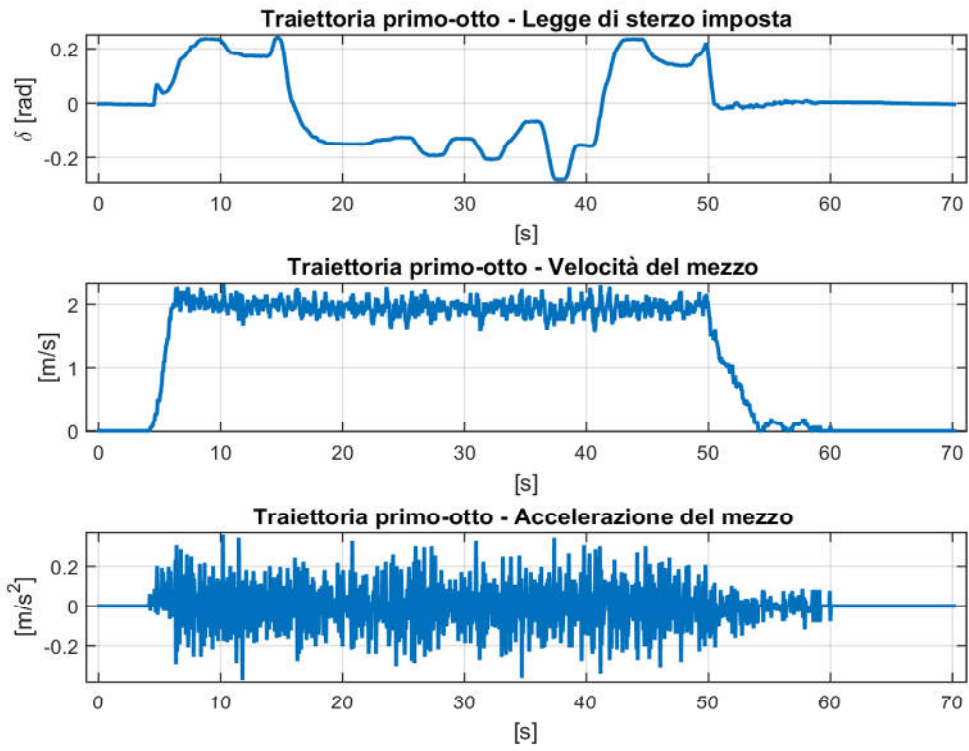


Fig. 80

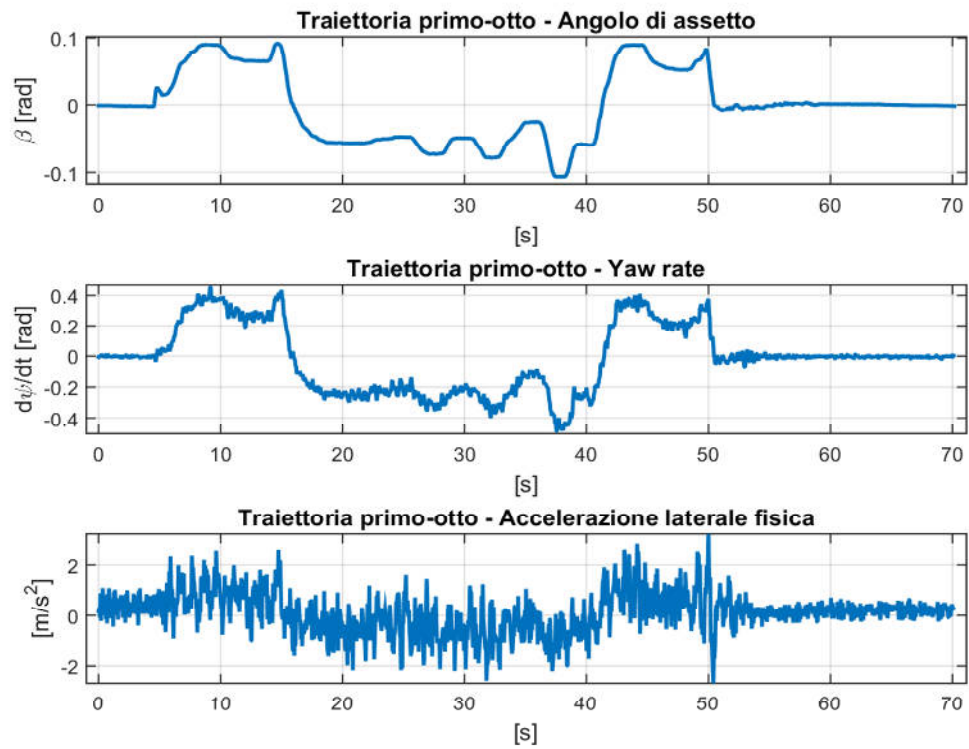


Fig. 81

✓ 'primo_fast8'

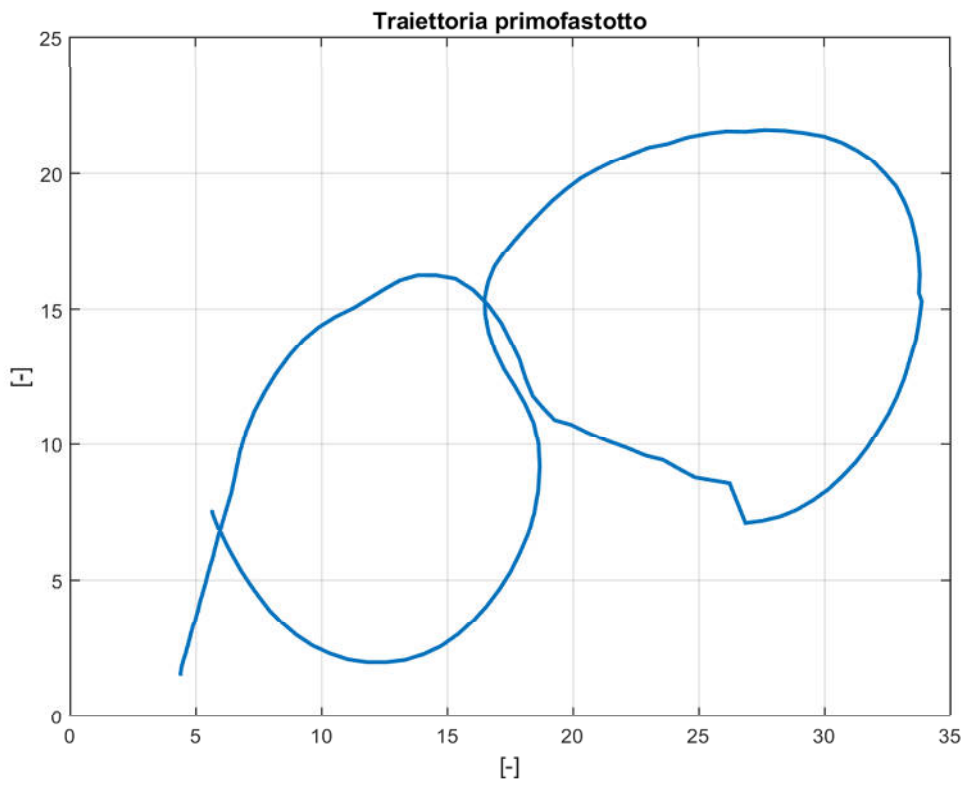


Fig. 82

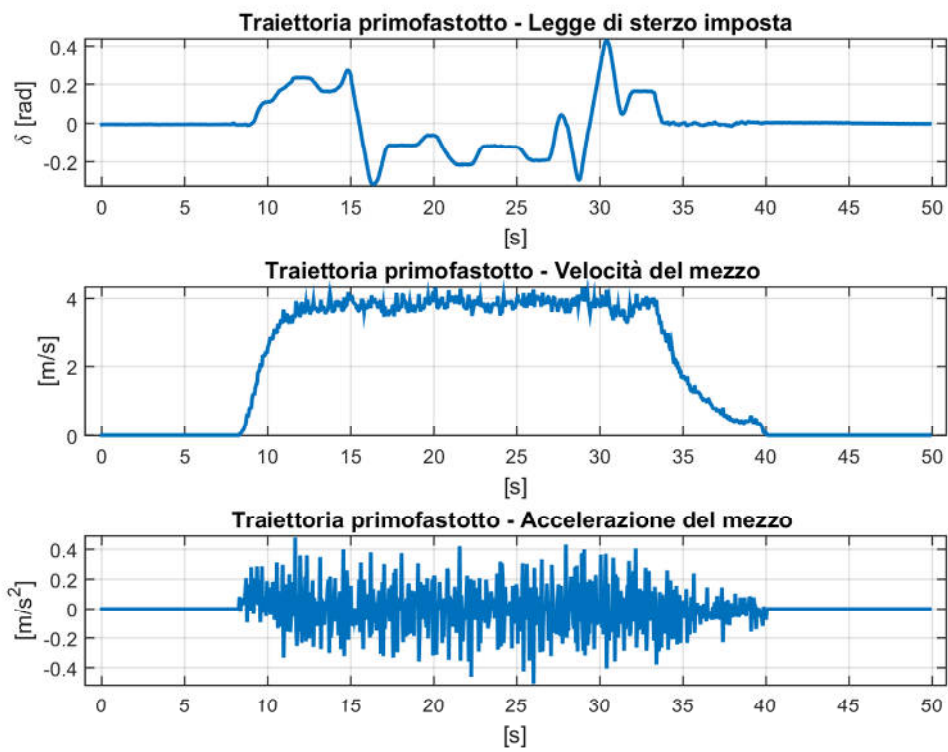


Fig. 83

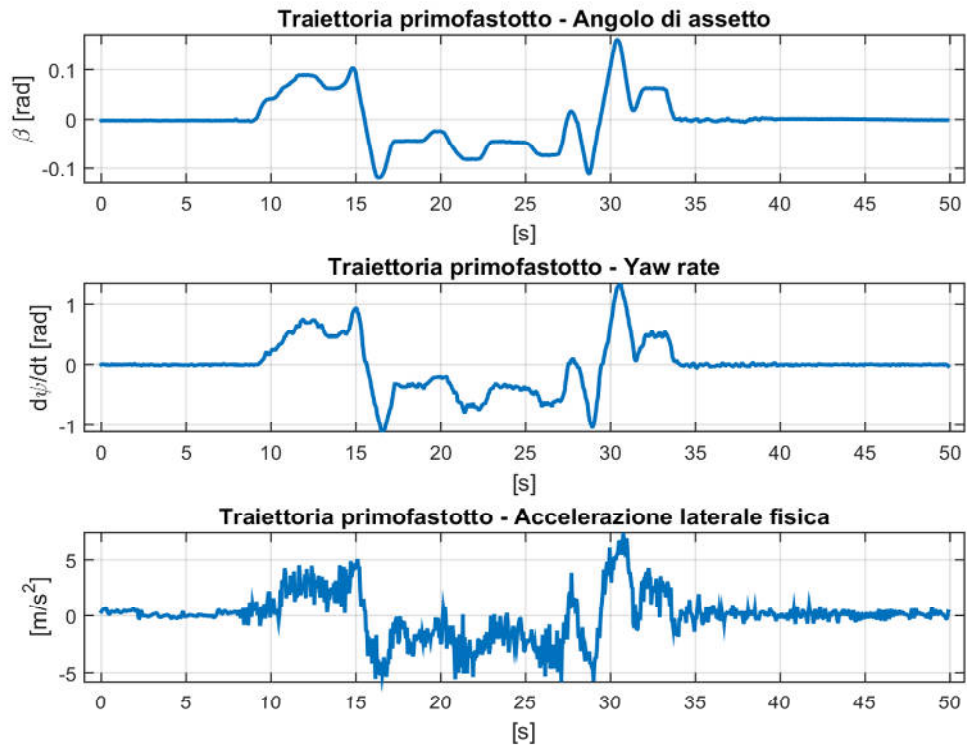


Fig. 84

✓ 'secondo8'

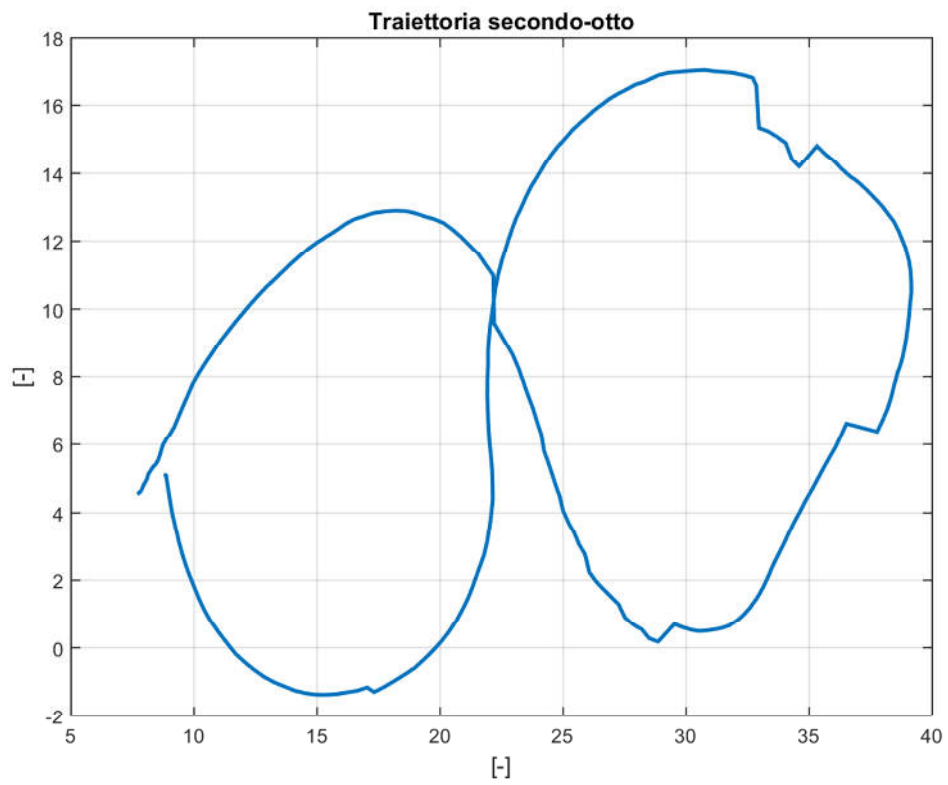


Fig. 85

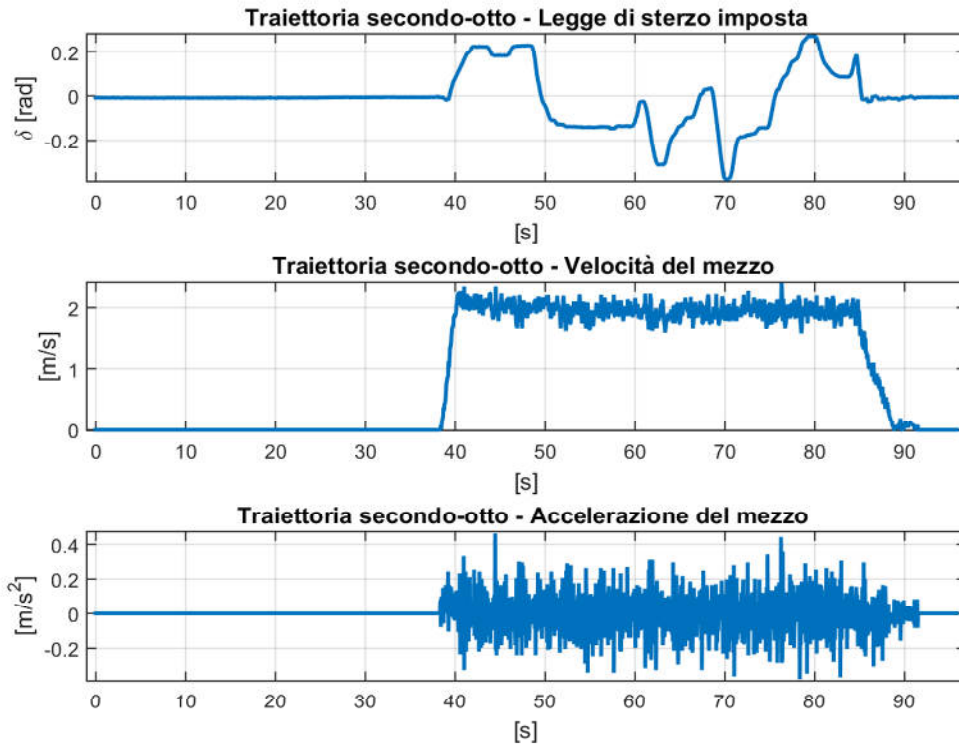


Fig. 86

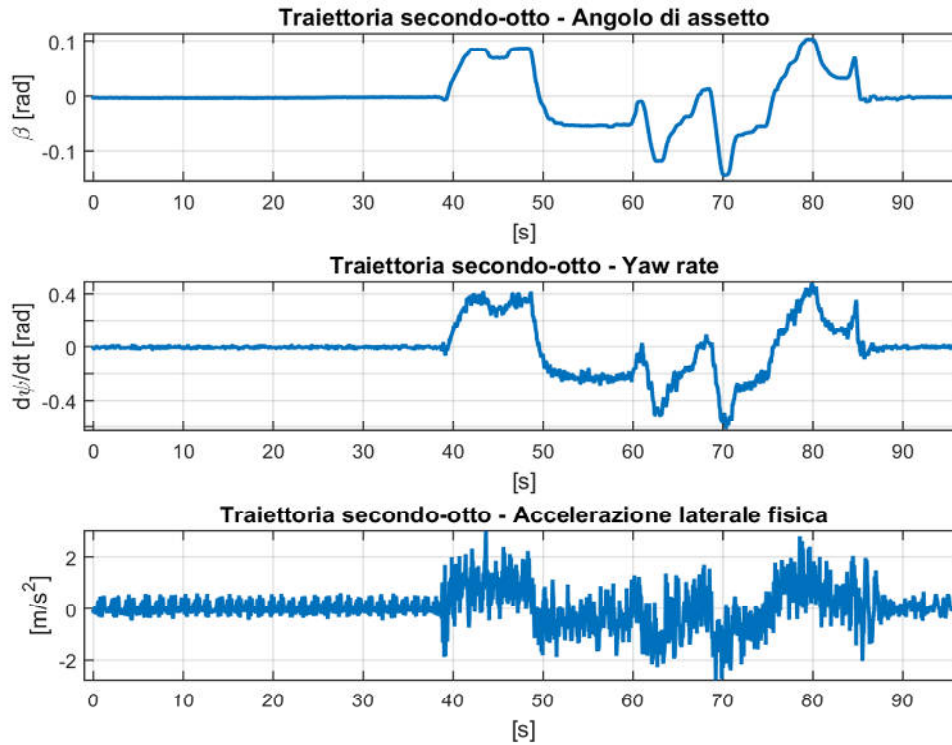


Fig. 87

✓ 'terzo_8'

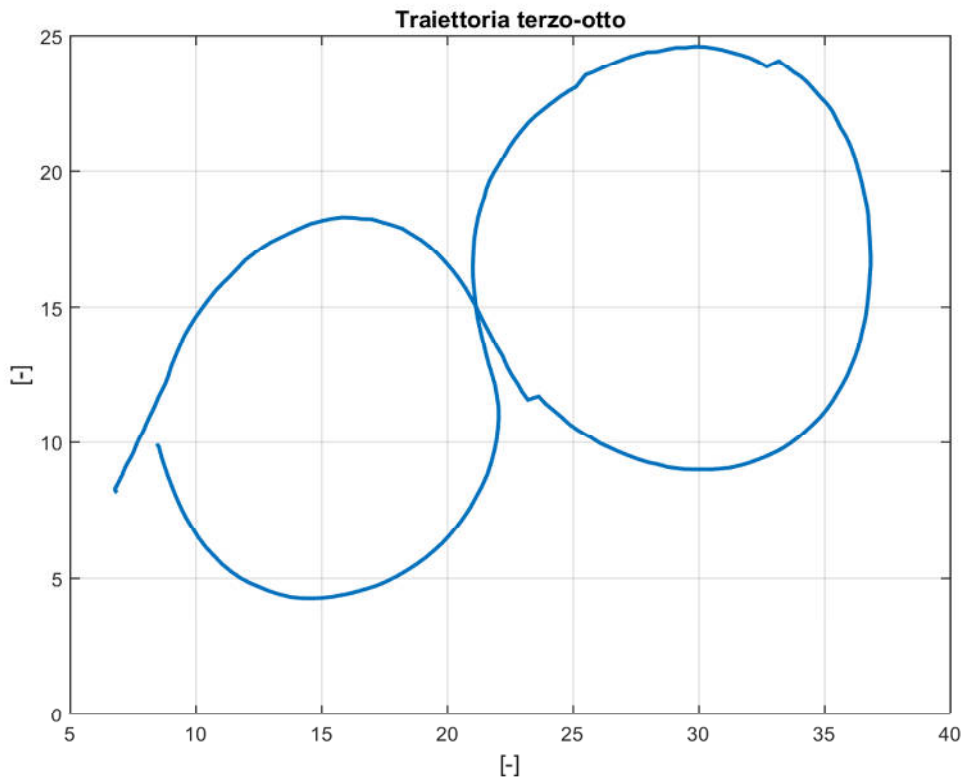


Fig. 88

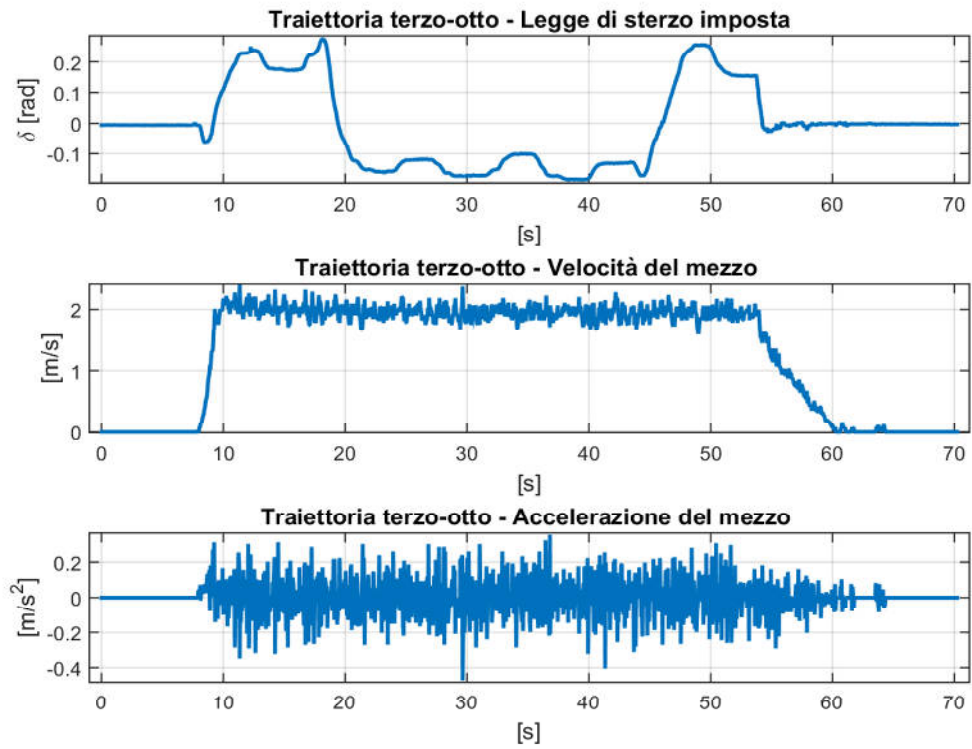


Fig. 89

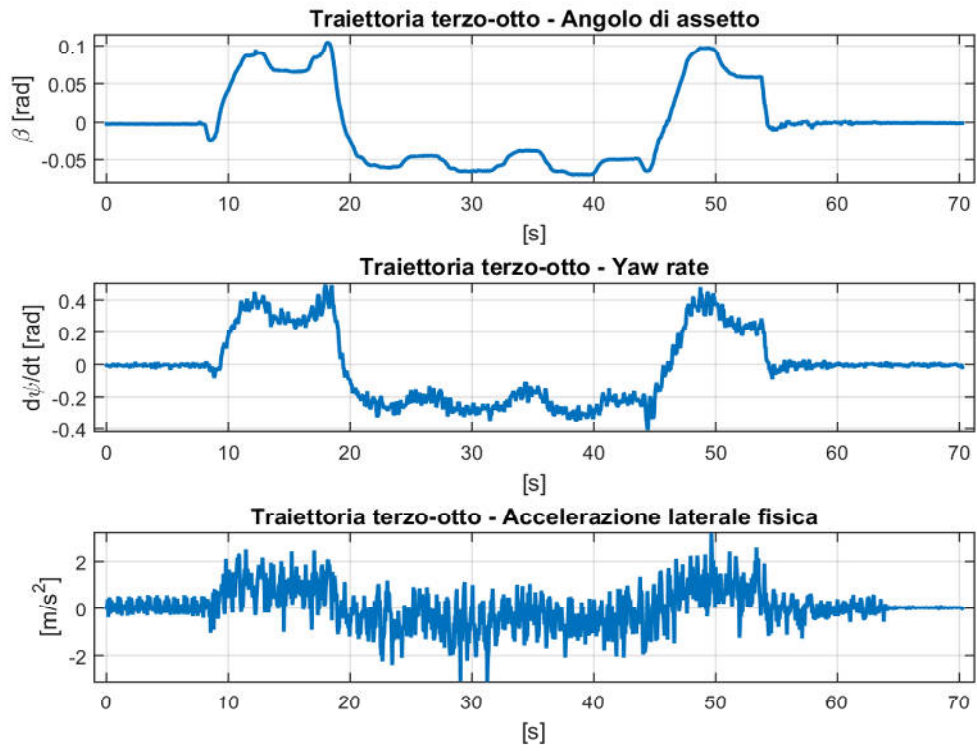


Fig. 90

✓ 'successo1'

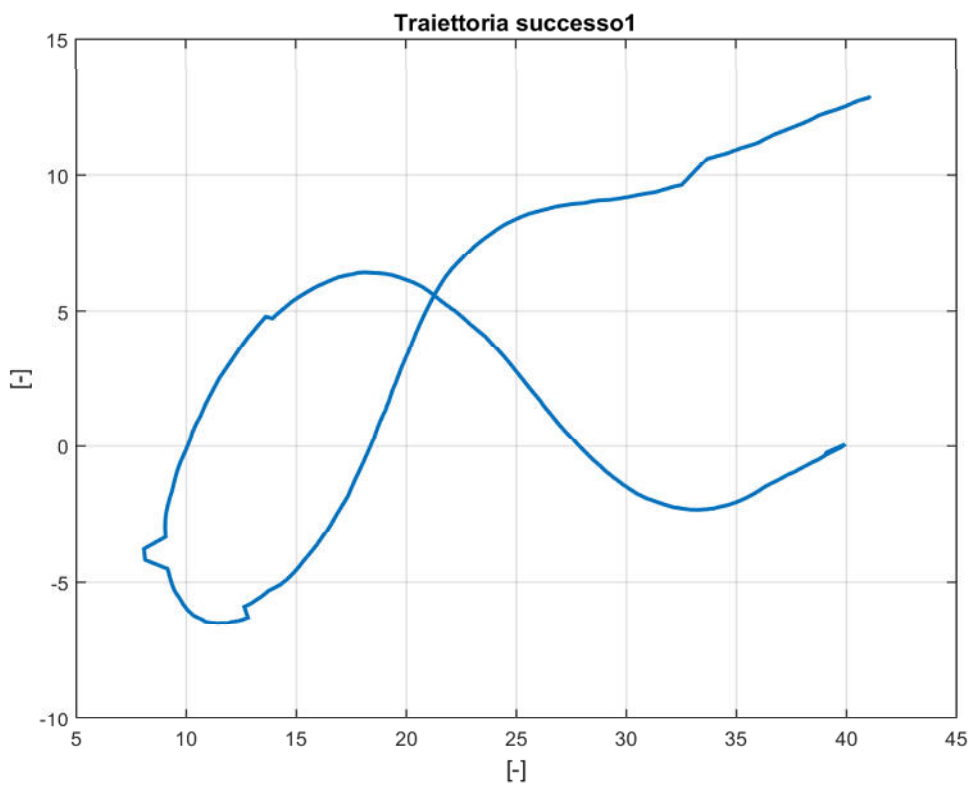


Fig. 91

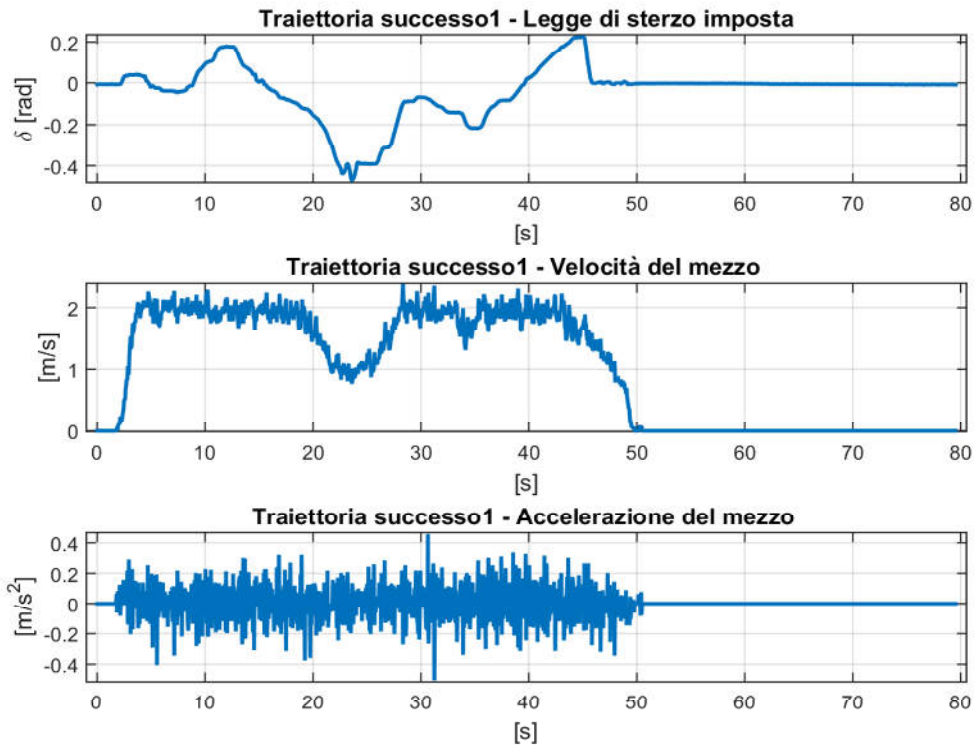


Fig. 92

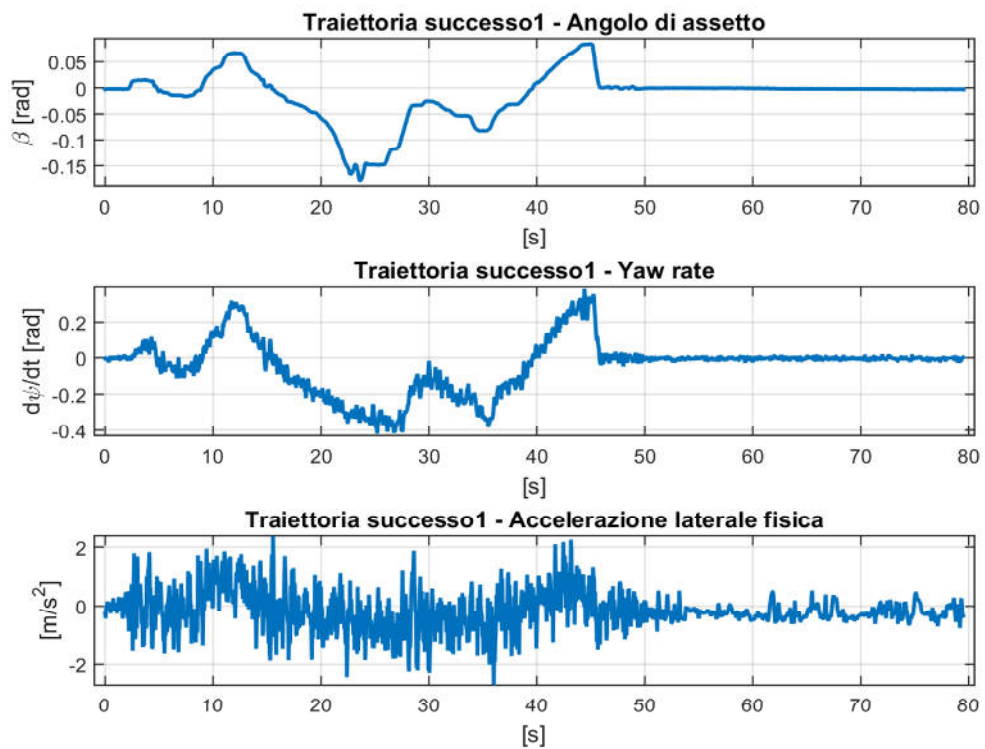


Fig. 93

✓ 'successo2'

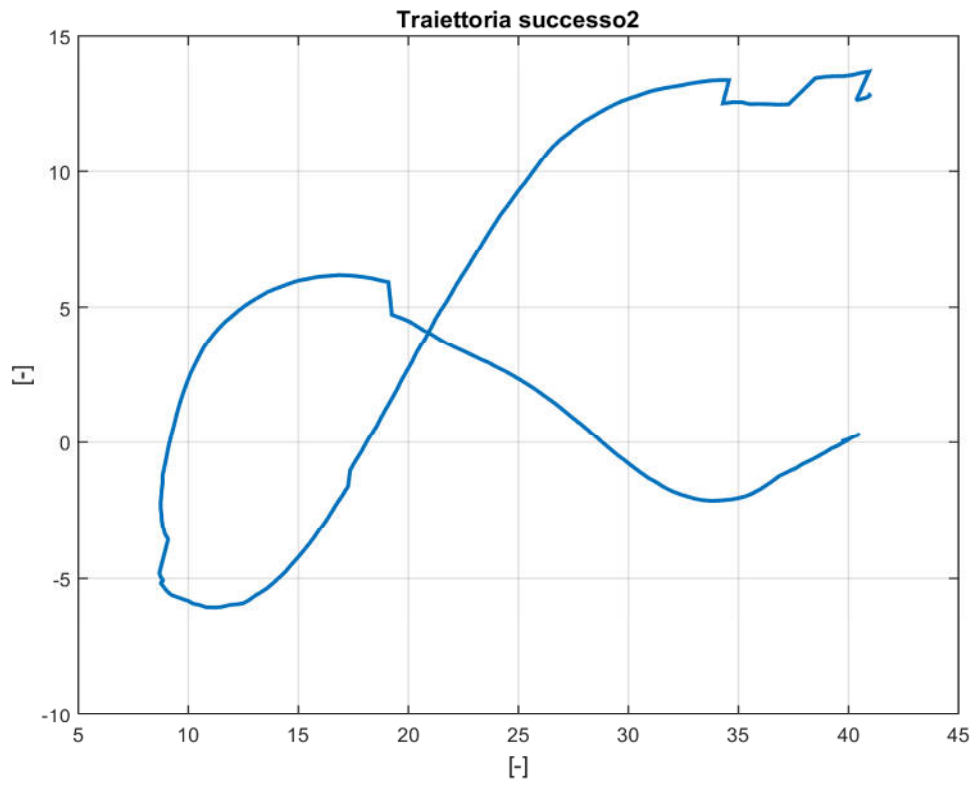


Fig. 94

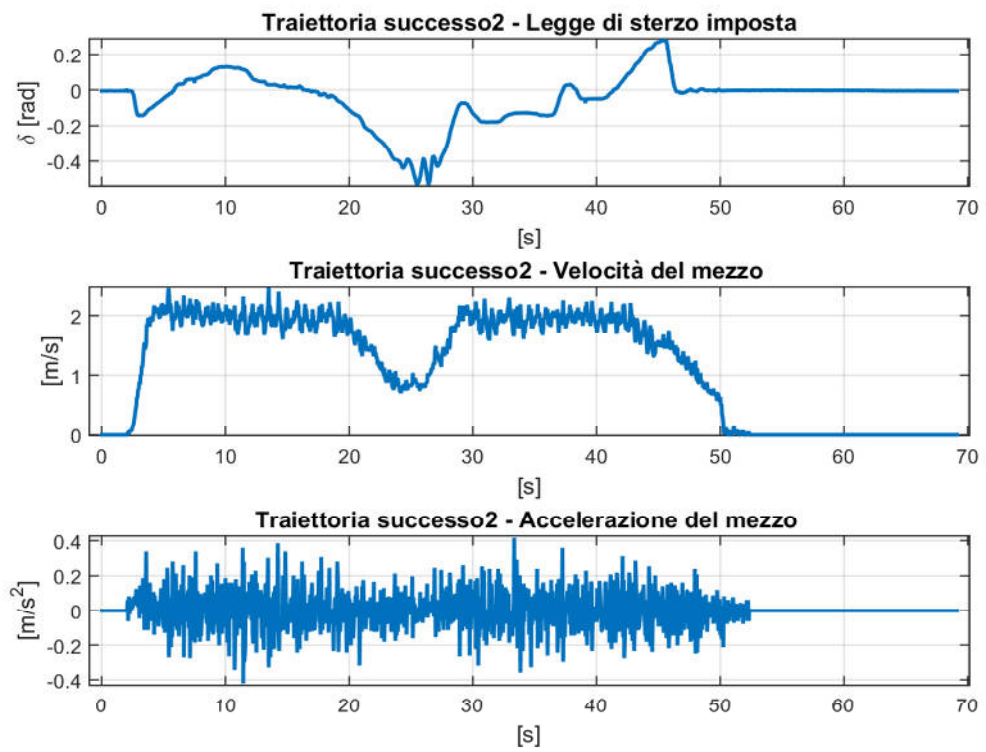


Fig. 95

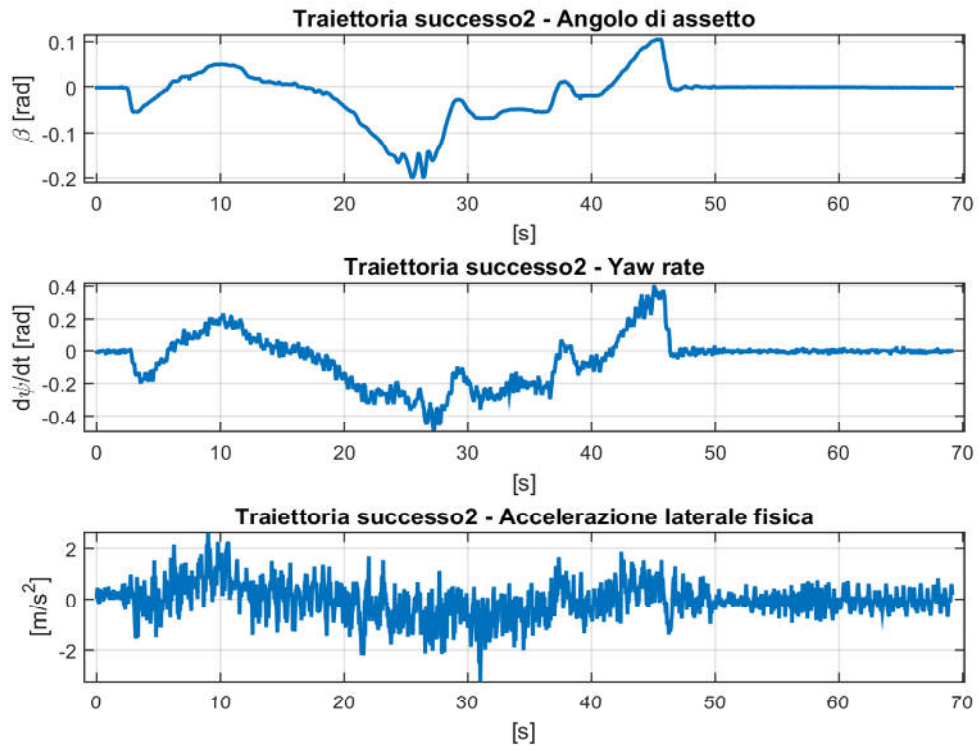


Fig. 96

✓ 'successo3'

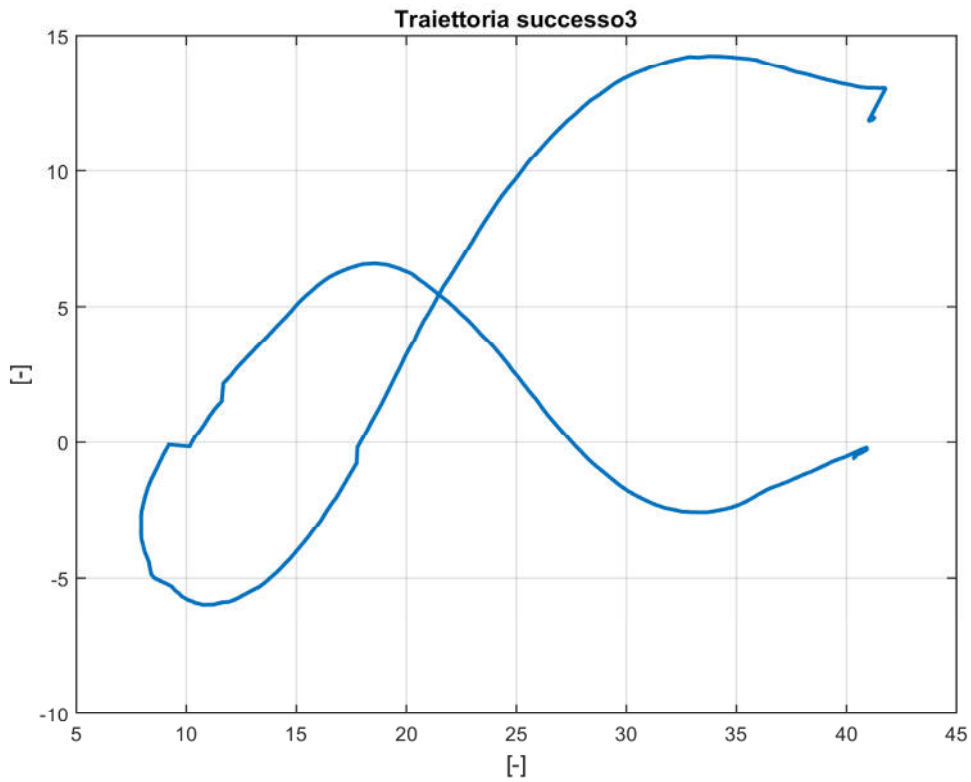


Fig. 97

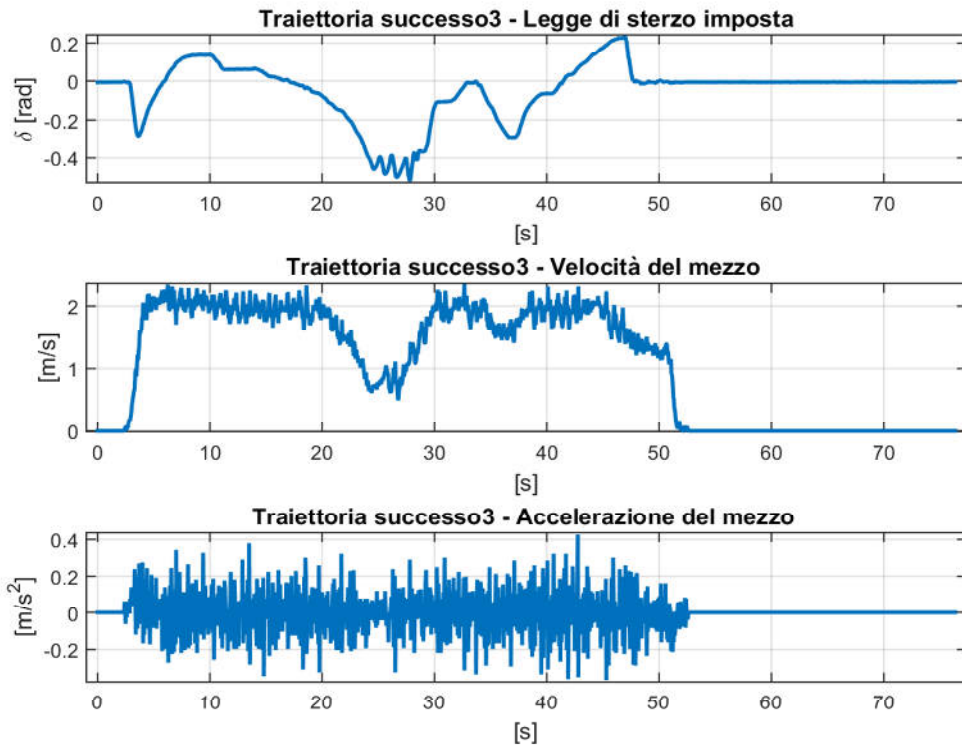


Fig. 98

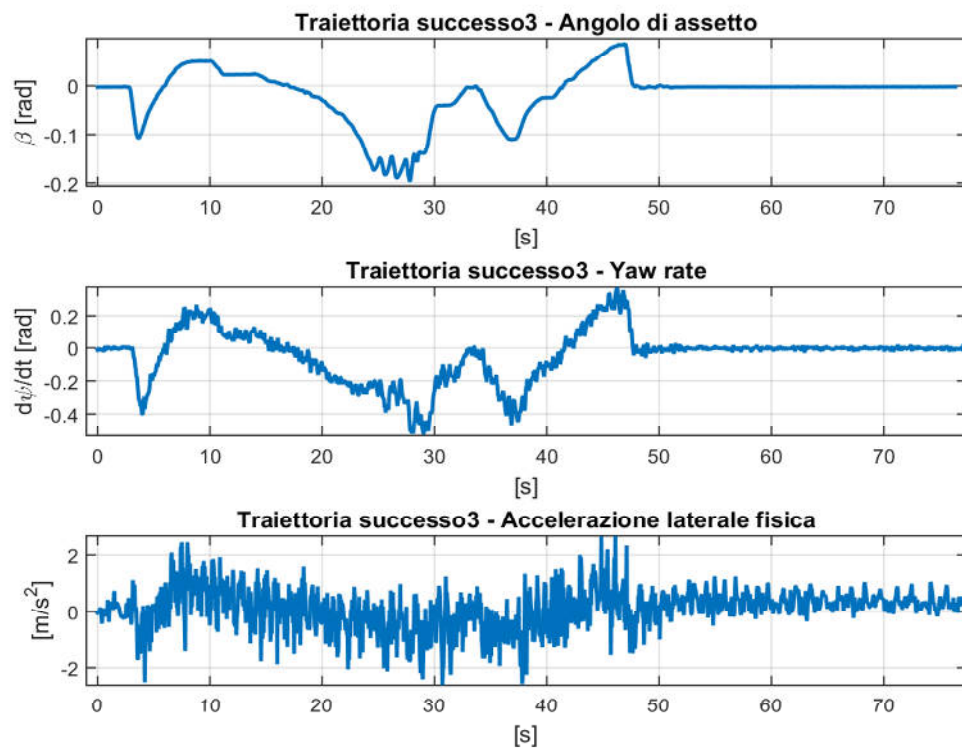


Fig. 99

Sono tutte traiettorie tra loro molto diverse sia per manovra di sterzo compiuta sia per velocità del mezzo e durata della prova stessa; lo scopo è verificare se una determinata traiettoria è migliore di un'altra al fine di ricavare il valore della rigidità di deriva.

Tali traiettorie non possono essere considerate nella loro interezza in quanto i tratti a velocità nulla, oltre che essere di nessuna rilevanza, porterebbero lo stimatore a divergere in quanto si trova al denominatore delle equazioni dell'osservatore. Un secondo aspetto da considerare è la durata della simulazione, certamente una prova di durata maggiore darà maggiore sicurezza circa la capacità di stima del Filtro di Kalman Esteso.

Premesse queste considerazioni si conclude che la traiettoria più idonea ai nostri scopi è quella identificata con il nome "Perimetro" che per quanto si renda necessaria tagliarla a 250 s, il tratto che si viene quindi a considerare è comunque di durata notevole e di gran lunga superiore a tutte le altre.

Svolgendo delle prove al fine di determinare una corretta combinazione delle varianze dei rumori di misura, dello stato e del parametro incognito si è arrivati a un primo set possibile di combinazione dei valori capaci di fornire risultati accettabili o comunque di un certo interesse caratterizzato dai seguenti valori:

🚩 Valore iniziale del parametro incognito per lo stimatore $K_{in}: 9 \cdot 10^4$

🚩 Varianza del parametro incognito $v_p : 5 \cdot 10^6$

🚩 Matrice di varianza dell'errore P_0 :

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Come ordini di grandezza non sono esattamente gli stessi che si sono usati per validare il Filtro di Kalman, ma sono comunque valori con ordine di grandezza notevole.

Per i rumori sullo stato e sulla misura, mantenendo costanti quelli precedenti si è arrivati a stilare la seguente tabella dei valori sostituiti:

		RUMORE SULLO STATO v_a										
		10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
RUMORE SULLA MISURA w_s	10^0	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow
	10^{-1}	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow
	10^{-2}	Yellow	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
	10^{-3}	Yellow	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
	10^{-4}	Red	Red	Red	Green	Green	Green	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-5}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-6}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-7}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-8}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-9}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red
	10^{-10}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Red

Tab. 1

Dalle prove effettuate si può concludere che:

- ✓ nelle parti contrassegnate in GIALLO, lo stimatore non si discosta molto dal valore iniziale che gli viene assegnato, secondo l'andamento illustrato in figura 100.

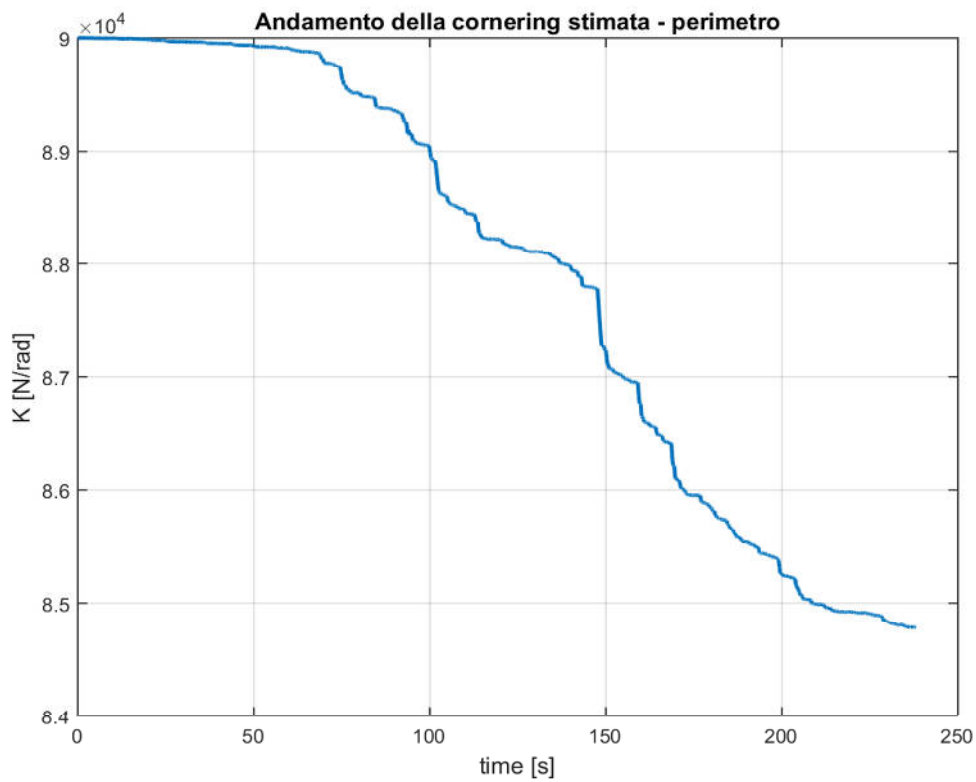


Fig. 100

- ✓ Per i valori in AZZURRO allo scadere della simulazione, lo stimatore non ha raggiunto un valore di convergenza e continua scendere a un valore più basso

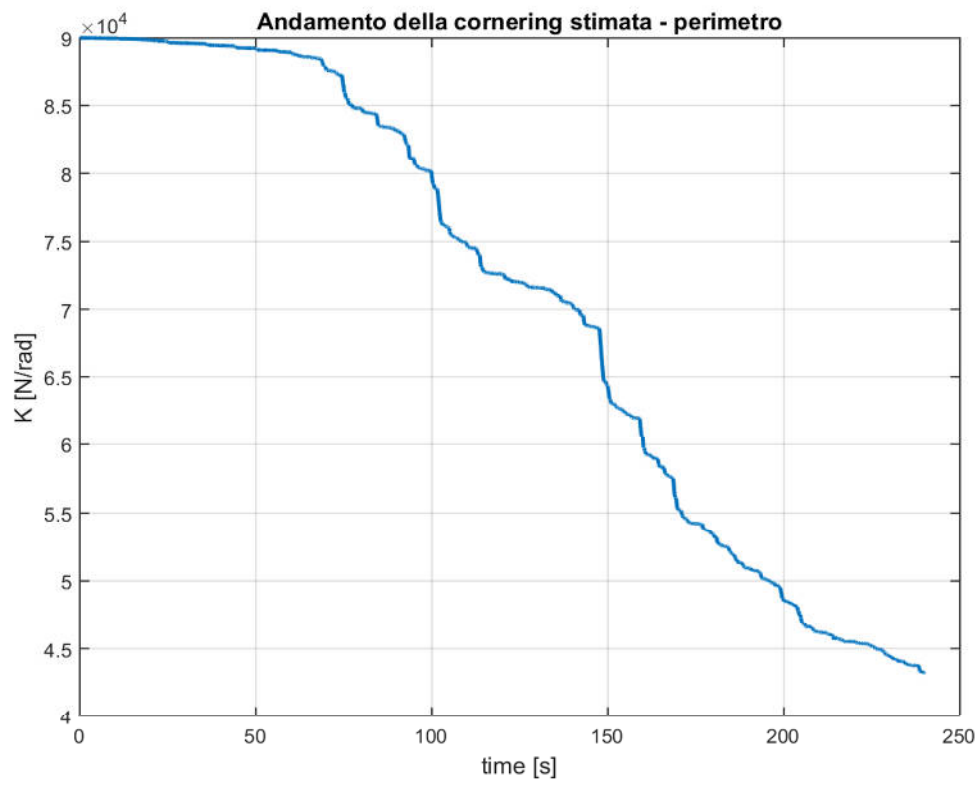


Fig. 101

- ✓ Per i valori in VERDE lo stimatore, continua a oscillare entro un range di valori dell'ordine di 10^4 senza però tendere a un valore specifico

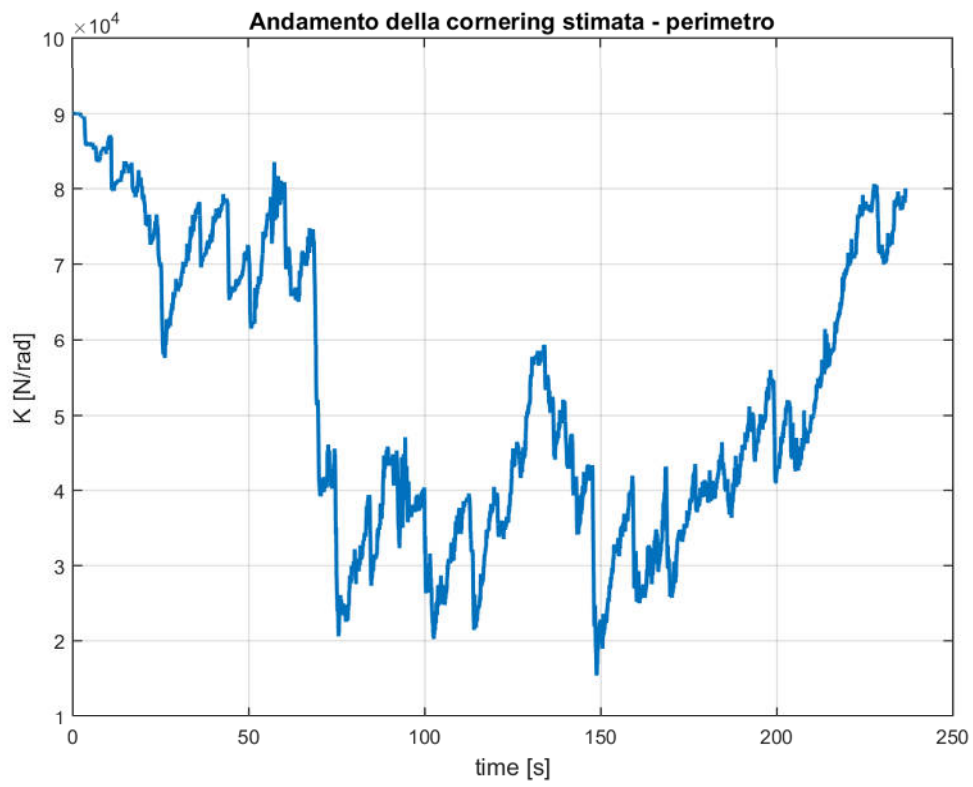


Fig. 102

Per tutti i casi precedenti, la stima dello stato è comunque buona, con andamento ben rappresentato in fig. 103:

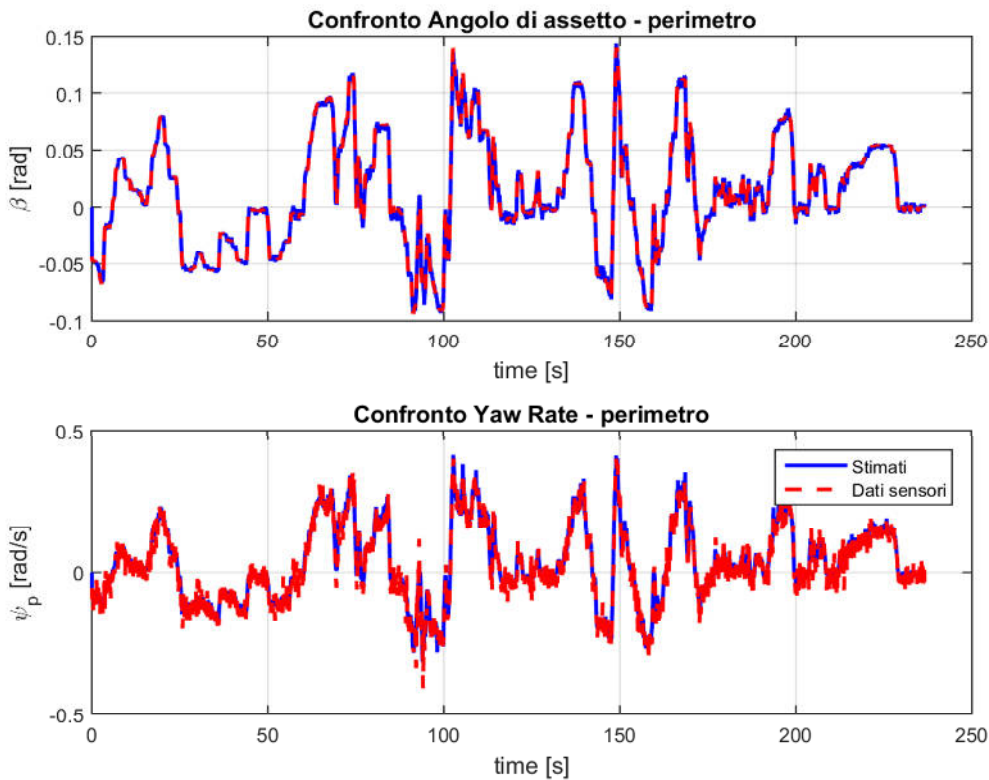


Fig. 103

- ✓ Per i valori in ROSSO lo stimatore diverge, provocando il conseguente arresto della simulazione stessa.
- ✓ Per i valori in NERO non si è proceduto a verifica dei valori presumendo la divergenza (poi verificata) dello stimatore

Tale comportamento dello stimatore si manifesta per tutte le traiettorie utilizzate e relativa manovra di sterzo adottata e laddove le prove sono di durata particolarmente breve, si è provveduto a replicare la traiettoria di sterzo considerata in istanti temporali in cui il valore di sterzo fosse uguale così da evitare discontinuità. Tutte le simulazioni fatte confermano un andamento oscillatorio per valori dell'ordine di 10^4 .

Non si è quindi trovato un determinato valore di convergenza, ma un range entro cui la stima del parametro continua a variare, garantendo comunque – è bene sottolinearlo - un confronto ottimo tra stati stimati e dati dei sensori. A ulteriore verifica di ciò si ripete una simulazione della zona "Verde" impostando come valore iniziale della simulazione un valore relativamente basso: lo stimatore dovrà andare comunque a convergenza e si dovrebbe osservare una qualche modifica nella stima degli stati.

Prova con $K_{in} = 90000 \frac{N}{rad}$

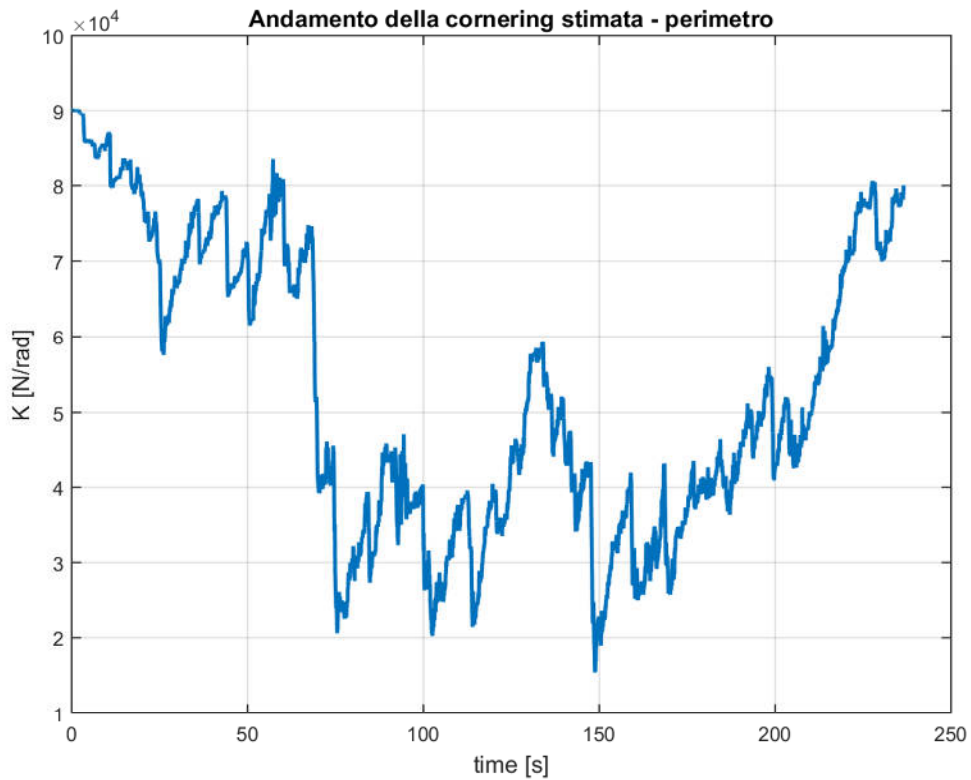


Fig. 104

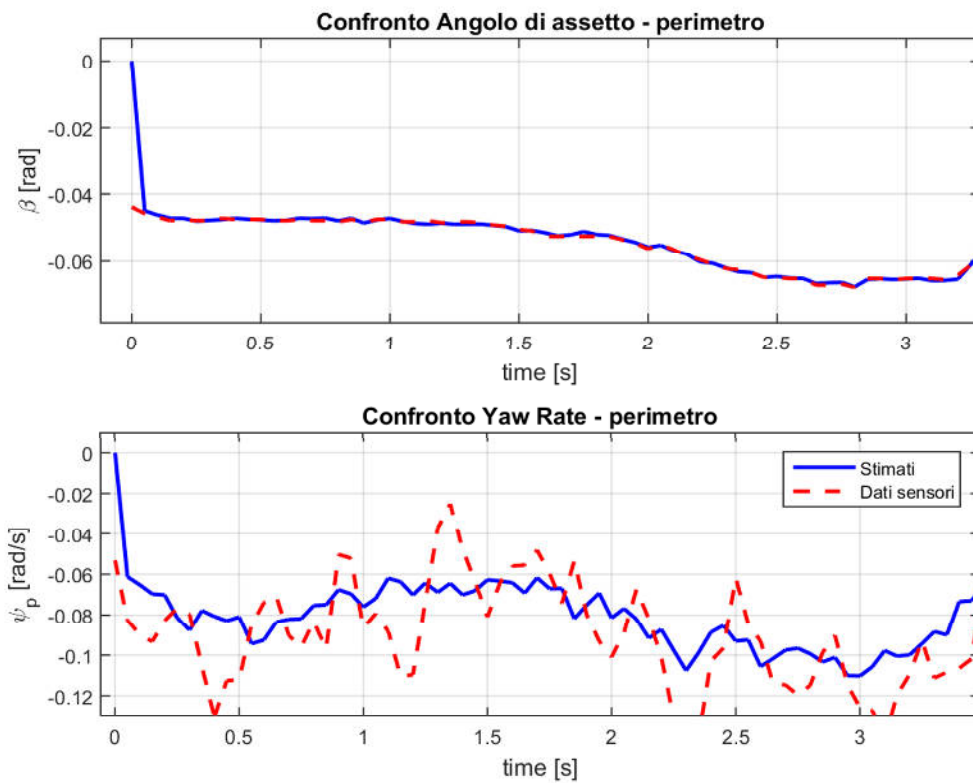


Fig. 105

Prova con $K_{in} = 2000 \frac{N}{rad}$

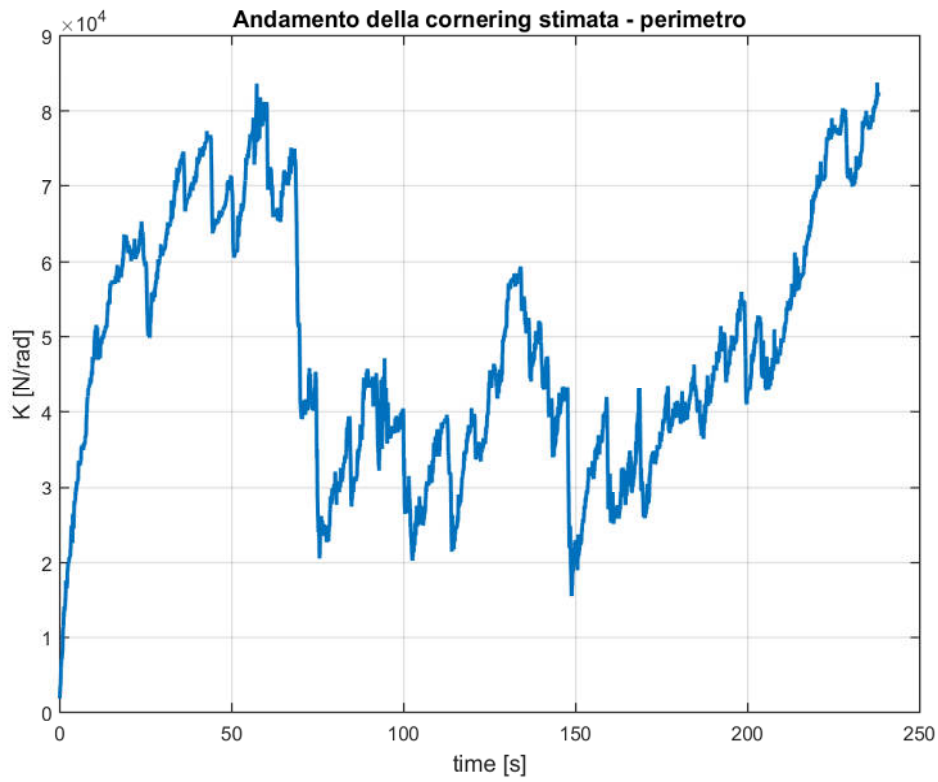


Fig. 106

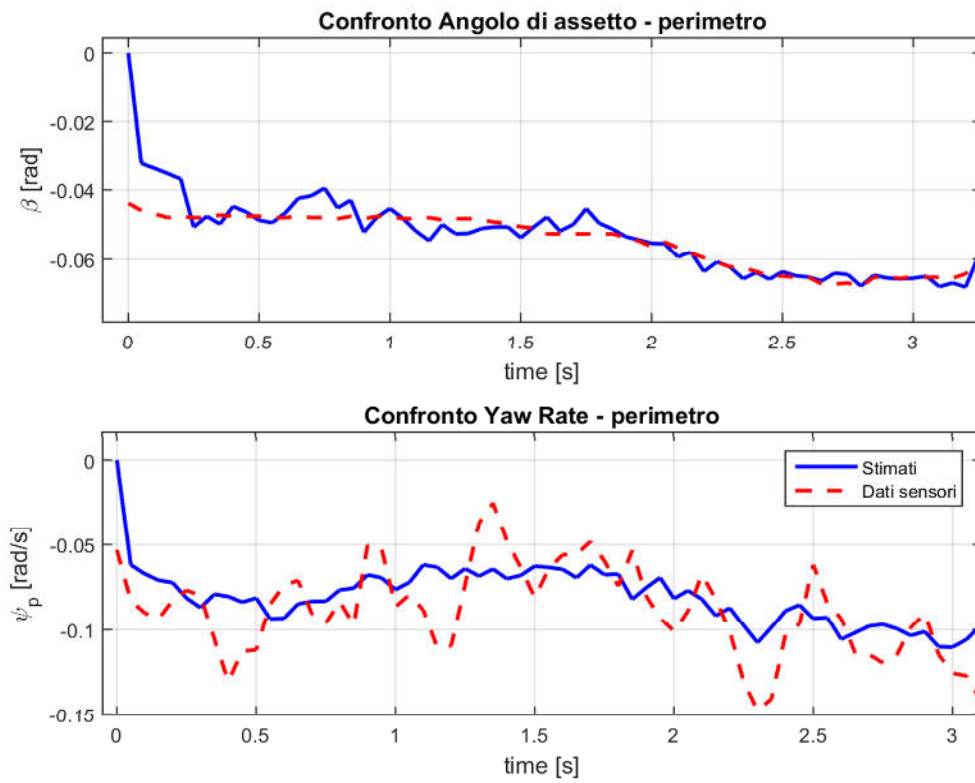


Fig. 107

Si vede in fig. 107 che lo stimatore ci mette 3 s per andare a convergenza mentre in fig. 105, la convergenza è quasi istantanea; nelle fig. 104 e 106 si può notare in entrambi i casi il comportamento oscillante dello stimatore.

Sebbene individuato un range di valori possibili ma comunque validi, si vuole affinare la ricerca del parametro cercando di ridurre l'intervallo di variazione: si ricorda che nel processo di validazione del Filtro di Kalman è presente una oscillazione, ma certamente più contenuta di questa; si procede allora mantenendo costanti la varianza del rumore sullo stato e sulle misure e variando invece la varianza del parametro v_{par} e il termine relativo al parametro incognito presente nella matrice di covarianza dell'errore P_0 ; abbiamo alla fine questi altri set di valori con i relativi risultati:

- ✚ Varianza del rumore sullo stato $v_a : 10^{-3}$
- ✚ Varianza del rumore sulla misura $w_s : 10^{-5}$
- ✚ Valore iniziale del parametro incognito per lo stimatore $K_{in} : 9 \cdot 10^4$
- ✚ Varianza del parametro incognito $v_p : 5 \cdot 10^4$
- ✚ Matrice di varianza dell'errore P_0 :

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^2 \end{bmatrix}$$

Si ottengono i risultati presenti in Fig. 108 e 109:

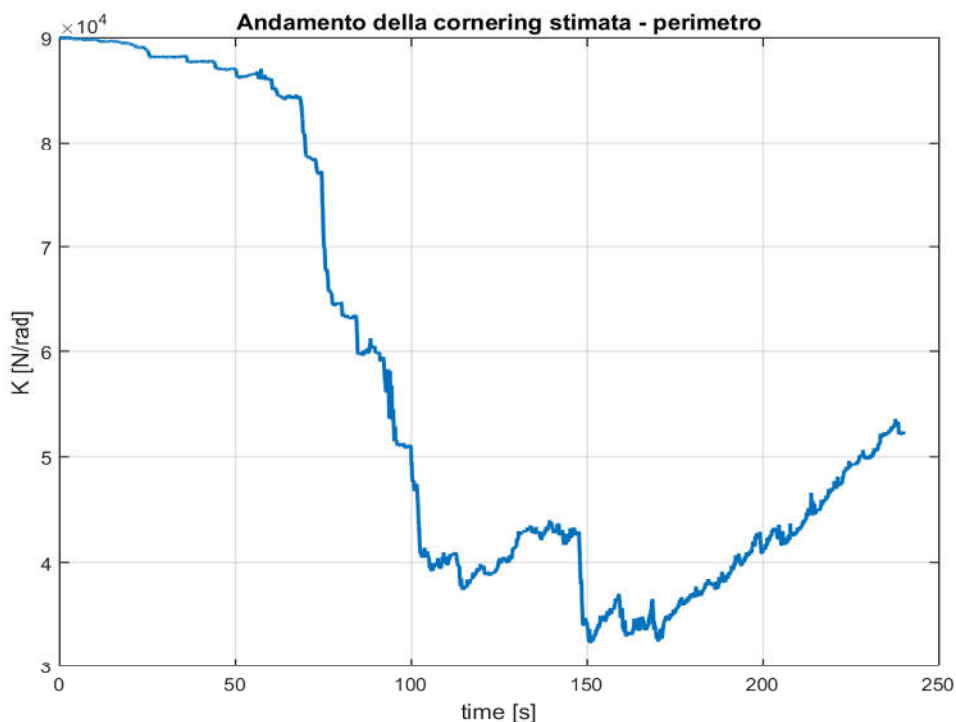


Fig. 108

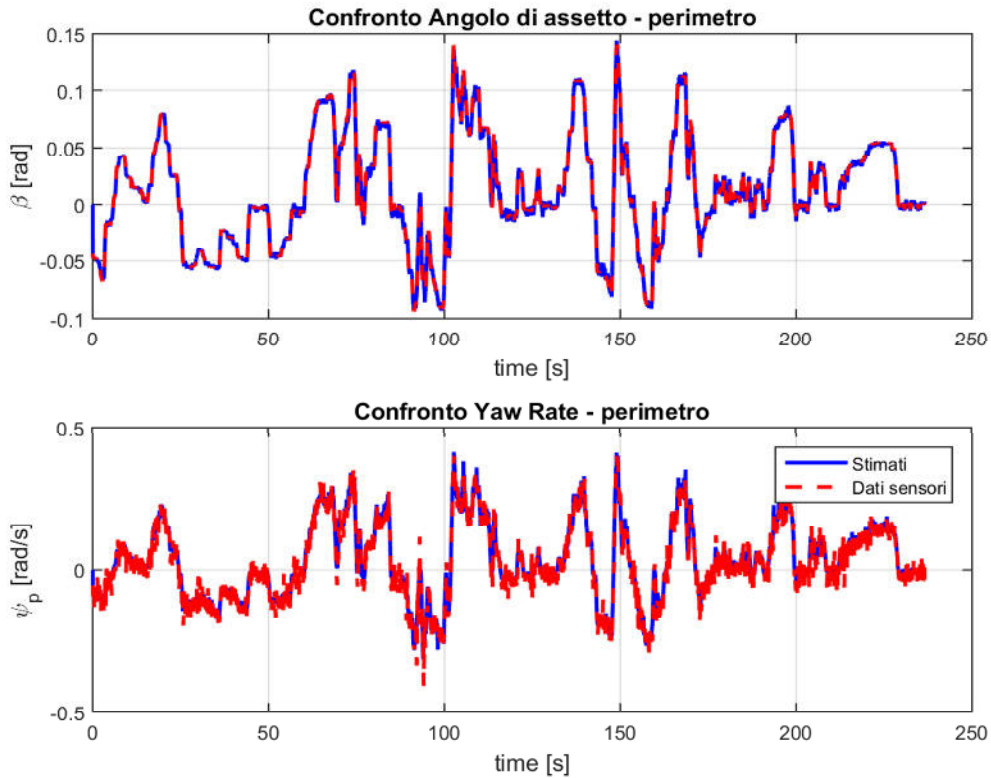


Fig. 109

- ✚ Valore iniziale del parametro incognito per lo stimatore $K_{in}: 9 \cdot 10^4$
- ✚ Varianza del parametro incognito $v_p : 5 \cdot 10^4$
- ✚ Matrice di varianza dell'errore P_0 :

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^2 \end{bmatrix}$$

Individuato un range più o meno esteso di valori possibili per la cornering stiffness si opta per passare la traiettoria di sterzo considerata a un modello matematico "single-track" imponendo come valore per le rigidzze di deriva prima il valore più basso del range individuato e poi quello più alto: si vuole indagare l'errore tra i due dati matematici. Nel nostro caso consideriamo $20.000 \frac{N}{rad}$ e $60.000 \frac{N}{rad}$ come valori limite.

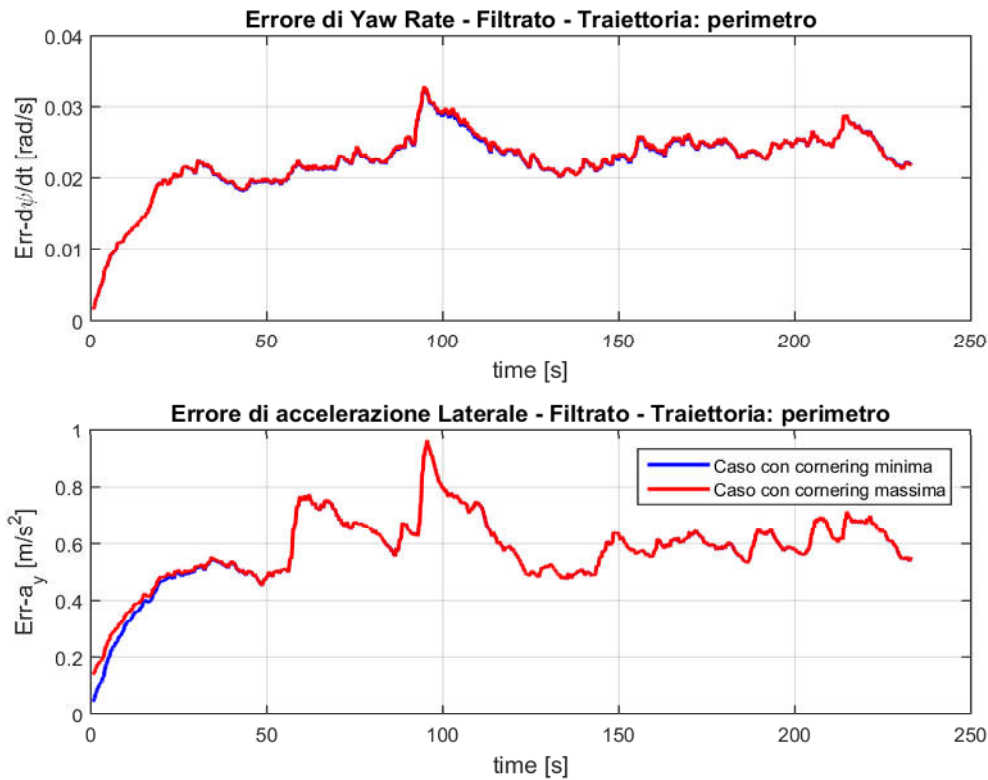


Fig. 110

Come si nota dalla figura sopra l'errore è basso, dunque l'aver individuato questo range di valori può essere considerato più che soddisfacente.

5. CONCLUSIONI

In tutti i casi esaminati, lo stimatore non è stato in grado di convergere a un valore univoco di rigidità di deriva, tuttalpiù si è riusciti a individuare un intervallo di probabilità all'interno del quale si troverà il valore corretto; l'estensione dell'intervallo può essere relativamente controllata agendo sui parametri dello stimatore stesso (varianza del rumore sullo stato v_a , varianza del rumore sulle misure w_s , varianza del parametro incognito v_{par} e matrice di covarianza dell'errore allo stato iniziale P_0).

Ciò detto è bene ricordare che la costruzione del Filtro di Kalman deriva da un modello "single-track" in cui si è assunto che non vi sia differenza di valore tra rigidità di deriva anteriore e posteriore, e già questo è fonte di errore intrinseca all'interno dello stimatore in quanto non fedele alla realtà fisica del mezzo.

Alla luce di ciò, un primo passo per avere una stima migliore del parametro prevedrebbe la modellazione del Quad come veicolo "single-track" in cui si distinguono le rigidità di deriva anteriore e posteriore, per arrivare infine alla modellazione con un modello 4-wheels certamente più aderente alle realtà fisica di un mezzo a quattro ruote, in cui compaiono tutti e quattro i differenti valori di cornering stiffness da ricavare (2 anteriori e 2 posteriori).

Delle migliorie possono essere apportate anche sulle ipotesi di costruzione del Filtro di Kalman stesso in cui anziché considerare un rumore agente direttamente sullo stato stesso si considera un rumore che agisce sullo stato passando attraverso l'attuazione, anche se ciò farebbe cadere l'ipotesi di incorrelazione tra rumore agente sullo stato e rumore agente sulla misura andando così a modificare il metodo di calcolo della matrice dei guadagni $[K]$ dello stimatore.

Oltre alle considerazioni matematiche, acquistano importanza anche le condizioni del terreno in cui si sono svolte le prove che non saranno le stesse in ciascun punto.

Bibliografia

1. Slide e appunti delle lezioni ed esercitazioni del corso di Sistemi Meccatronici e Laboratorio A del Prof. Francesco Braghin AA 2013-2014
2. Slide e appunti delle lezioni ed esercitazioni del corso di Dinamica e Controllo dei Veicolo del Prof. Federico Cheli AA 2013-2014
3. Giancarlo Genta *"Motor Vehicle Dynamics"* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd -2006
4. Wolfgang Siene *"Estimation of the tire cornering stiffness and its application to Active Car Steering"* Proceedings of the 36th Conference on decision, IEEE Xplore Digital Library
5. Guillaume Baffet , Ali Charara, Daniel Lechner *"Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness"*, ResearchGate
6. Nicolas Bouton, Roland Lenain, Benoit Thuilot, Philippe Martinet *"A rollover indicator based on a tire stiffness backstepping observer: Application to an All-Terrain Vehicle"*, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems
7. Lukas Haffner, Martin Kozek, Jingxin Shi, and H. Peter Jorgl *"Estimation of the maximum friction coefficient for a passenger vehicle using the instantaneous cornering stiffness"*, IEEE Xplore Digital Library
8. Hans B. Pacejka, Egbert Bakker, Lars Nyborg *"Tyre modelling for use in vehicle dynamics studie"*, Sae International
9. Alberto Cavallo, Roberto Setola, Francesco Vasca *"La nuova guida Matlab, Simulink e Control Toolbox"*, Liguori Editori
10. Quadrivio, Manuale tecnico, revisione novembre 2012, M. Zago.
11. Iso 7401:2011, *"Road vehicles - Lateral transient response test methods - Open-loop test methods"*