

**POLITECNICO DI MILANO**  
**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica**  
**Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione**  
**Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali**



**Analisi delle fratture intralaminari  
nella matrice dei materiali compositi  
mediante tecniche di modellazione  
bi-fasiche**

**Relatore: Prof. Alessandro AIROLDI**

**Tesi di Laurea di:  
Lucia PRINCIPITO,  
matricola 800566**

**Anno Accademico 2013-2014**



*Le cose belle della vita, non sono cose.  
Alle cose belle.*





## Sommario

Tra i materiali più innovativi in campo aeronautico e automobilistico compaiono senz'altro i materiali compositi, la cui importanza è dovuta alla loro elevata efficienza strutturale rispetto ai materiali tradizionali. Particolare difficoltà viene però incontrata nel tentativo di predire, simulare e studiare i meccanismi di propagazione del danno all'interno di essi. Ad oggi sono stati eseguiti molti studi per cercare di valutare la propagazione di difetti nei materiali compositi, con particolare attenzione ai fenomeni di *delaminazione* e di *transverse matrix cracking*. Lo scopo principale di questa tesi è stato adattare un modello numerico precedentemente sviluppato ed in grado di simulare entrambi le tipologie di propagazione del danno. Le modifiche apportate sono finalizzate alla rimozione della parte di modellazione di fenomeni interlaminari. Si è dimostrato che il modello così rielaborato presenta il vantaggio di una notevole riduzione dei tempi di calcolo con pari capacità di rappresentazione del fenomeno fisico. Allo scopo di validare la tecnica utilizzata si sono confrontati i risultati ottenuti dalle analisi ad elementi finiti con quelli sperimentali presenti in letteratura. La correlazione è stata verificata sia per provini monodimensionali che bidimensionali di laminati *cross-ply*. La seconda parte del lavoro è stata invece concentrata su un notevole problema che si presenta nella simulazione numerica dei compositi ossia la propagazione delle cricche in direzioni differenti da quelle trasversali e longitudinali. Con i modelli ad ora disponibili non è infatti possibile effettuare una simulazione numerica della nascita e sviluppo del fenomeno in una direzione qualsiasi, cosa di fondamentale importanza per l'analisi di laminati *angle-ply*. Si è dimostrato che il codice sviluppato in questa tesi è in grado di simulare correttamente anche questo aspetto rendendolo interessante anche da un punto di vista applicativo. I possibili sviluppi futuri potrebbero essere, ad esempio, la possibilità di considerare anche gli effetti di bordo e il passaggio interlaminare del difetto, sia per laminati *cross-ply* che *angle-ply*.

**Parole chiave** : materiali compositi, meccanica del danno, propagazione frattura, transverse matrix cracking, modellazione frattura angle-ply.



## Abstract

Among the most innovative materials in aeronautical and automotive industry there are composite materials, their importance is due to their high structural efficiency with respect to traditional materials. Nevertheless, there are some difficulties in predicting, simulating and studying the damage propagation mechanisms which occur inside them. So far a lot of studies were made to try to estimate the defects' propagation inside composite materials, with attention to *delamination* and *transverse matrix cracking* phenomena. The main goal of this thesis is to adapt a numerical model built previously and make it able to simulate both damage propagation types. The changes made aim at removing the part about modeling interlaminar phenomena. It's demonstrated that the new model presents the advantage of a good computation times reduction keeping the same capability of representing physical phenomenon. The results of the finite elements analysis are compared with the experimental ones to improve the used technique. The correlation is verified both for monodimensional *cross-ply* laminate specimens and bidimensional ones. The second part of the work is focused on a well known problem that is present in composite numerical simulations that is the cracks propagation into directions different from transversal and longitudinal ones. In fact with the available models is not impossible to make a numerical simulation of the phenomena birth and growth in any directions, which is very important for *angle-ply* laminates analysis. Future works should consider the possibility of taking into account also side effects and interlaminar passage of cracks, both for *cross-ply* and *angle-ply* laminates.

**Keywords** : composite materials, damage mechanic, fracture propagation, transverse matrix cracking, fracture modeling angle-ply.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>19</b>
Obiettivi . . . . .	20
<b>1 Formazione del <i>Transverse Matrix Cracking</i></b>	<b>21</b>
<b>2 Modellazione del <i>Transverse Matrix Cracking</i> (TMC)</b>	<b>31</b>
2.1 Scelta del metodo di modellazione . . . . .	31
2.2 Tecnica di modellazione bi-fasica . . . . .	33
2.3 Decomposizione del materiale . . . . .	35
2.3.1 Legge costitutiva per la fase matrice . . . . .	39
2.3.2 Introduzione del danno intralaminare . . . . .	40
2.4 Assegnazione proprietà del materiale . . . . .	44
2.5 Validazione subroutine Vumat modificata . . . . .	47
<b>3 Validazione del modello</b>	<b>53</b>
3.1 Applicazione a provini mono-elemento . . . . .	53
3.1.1 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a 0.3 mm . . . . .	55
3.1.2 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a 0.2 mm . . . . .	58
3.1.3 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a 0.125 mm . . . . .	61
3.1.4 Conclusioni . . . . .	62
3.2 Applicazione a provini reali . . . . .	68
3.2.1 Caso random . . . . .	69
3.2.2 Caso con proprietà uguali per file . . . . .	70
3.2.3 Caso con proprietà diverse tra file . . . . .	75
3.2.4 Conclusioni . . . . .	75
<b>4 Applicazione a laminati angle-ply</b>	<b>79</b>
4.0.5 Caso random . . . . .	80
4.0.6 Caso con proprietà uguali per diagonali . . . . .	83
4.0.7 Caso con proprietà diverse tra diagonali . . . . .	83
4.0.8 Conclusioni . . . . .	86

<b>5 Conclusioni</b>	<b>89</b>
5.1 Sviluppi futuri . . . . .	89

## Elenco delle figure

1.1	Componenti di sforzo intralaminare nelle lamine . . . . .	22
1.2	Componenti di sforzo interlaminare nelle lamine . . . . .	23
1.3	Evoluzione del danneggiamento [1] . . . . .	23
1.4	Transverse matrix cracking in un laminato cross-ply . . . . .	24
1.5	Schema “first ply failure” in un laminato cross-ply . . . . .	25
1.6	TMC in una prova quasi statica . . . . .	26
1.7	Sviluppo del danno nei compositi . . . . .	26
1.8	Microfrattura della matrice in laminati <i>Cross-ply</i> . . . . .	27
1.9	Andamento degli sforzi in laminati con ply a 90° danneggiati . . .	27
1.10	Densità cricca - sforzo medio per laminati in carbonio . . . . .	28
1.11	Rigidezza rigidezza-densità di cricca per laminati in fibra di carbonio . . . . .	29
1.12	Rigidezza rigidezza-densità di cricca per laminati in fibra di vetro	29
2.1	Equilibrio di un sub-laminato in materiale composito . . . . .	33
2.2	Rappresentazione fasi <i>UP</i> e <i>DOWN</i> della matrice . . . . .	39
2.3	Rappresentazione <i>increased strain softening</i> . . . . .	46
2.4	Rappresentazione <i>reduced strain softening</i> . . . . .	47
2.5	Laminato <i>cross-ply T300 – 934</i> reale e decomposto . . . . .	48
2.6	Rappresentazione della deformazione $NE_{11}$ nell’istante in cui si verifica il danno . . . . .	49
2.7	Rappresentazione della deformazione $NE_{11}$ al termine della prova	49
2.8	Rappresentazione della variabile di danno negli elementi centrali .	50
2.9	Rappresentazione dello sforzo lungo $x$ negli elementi centrali . . .	51
2.10	Rappresentazione della deformazione lungo $x$ degli elementi centrali . . . . .	51
3.1	$d_{mt}$ -tempo, caso con mesh da 0.3 mm . . . . .	56
3.2	$NE_{11}$ -tempo, caso con mesh da 0.3 mm . . . . .	57
3.3	Densità cricca - sforzo medio con mesh da 0.3 mm . . . . .	58
3.4	$d_{mt}$ -tempo, caso con mesh da 0.2 mm . . . . .	59
3.5	$NE_{11}$ -tempo, caso con mesh da 0.2 mm . . . . .	60

3.6	Densità cricca - sforzo medio con mesh da 0.2 mm . . . . .	61
3.7	$d_{mt}$ -tempo, caso con mesh da 0.125 mm . . . . .	62
3.8	$NE_{11}$ -tempo, caso con mesh da 0.125 mm . . . . .	63
3.9	Densità cricca - sforzo medio con mesh da 0.125 mm . . . . .	63
3.10	Densità cricca - sforzo medio corretto con mesh da 0.125 mm . .	66
3.11	Densità cricca - sforzo medio corretto con mesh da 0.125 mm . .	67
3.12	Densità cricca - sforzo medio corretto con mesh da 0.125 mm . .	67
3.13	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>RANDOM</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$ . . .	71
3.14	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>RANDOM</i> cross-ply con $n = 3$ e $k_{\varepsilon_f} = 8$ . . .	72
3.15	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD UGUALI</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$	73
3.16	$d_{mt}$ -tempo, caso <i>CARD UGUALI</i> cross-ply con $n = 3$ e $k_{\varepsilon_f} = 8$ . .	74
3.17	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD SFALZATE</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$	76
3.18	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD SFALZATE</i> cross-ply con $n = 3$ e $k_{\varepsilon_f} = 8$	77
4.1	Laminato T300-934 <i>angle-ply</i> . . . . .	80
4.2	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>RANDOM</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$ . . .	81
4.3	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>RANDOM</i> cross-ply con $n = 3$ e $k_{\varepsilon_f} = 8$ . . .	82
4.4	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD UGUALI</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$	84
4.5	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD UGUALI</i> cross-ply con $n = 3$ e $k_{\varepsilon_f} = 8$	85
4.6	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD SFALZATE</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$	87
4.7	$d_{mt}$ - tempo, caso <i>CARD SFALZATE</i> cross-ply con $n = 1$ e $k_{\varepsilon_f} = 1$	88



# Elenco delle tabelle

2.1	Dati laminato T300-934 Carbon Epoxy [2]	37
3.1	Dimensioni dei provini modellati	53
3.2	Parametri utilizzati	54
3.3	Tempi di calcolo provini mono-elemento	68
3.4	Tempi di calcolo sui provini <i>cross-ply</i>	78
4.1	Tempi di calcolo sui provini <i>angle-ply</i>	86



# Elenco degli acronimi

**CDS** *Characteristic Damage State*

**FE** *Finite Element*

**TMC** *Transverse Matrix Cracking*

**DCB** *Double Cantilever Beam*

**SBT** *Short Beam Test*



## **Ringraziamenti**

Sarò breve per non rendere troppo pesante la lettura di questa piccola sezione dedicata ai ringraziamenti.

Il primo grandissimo grazie va ai miei genitori, per avermi sempre permesso di scegliere con la mia testa e per avermi dato sempre, anche quando non sembrava, la massima fiducia. Grazie per il tifo del papà e per il sorriso della mamma che percepivo al superamento di ogni esame, erano il primo incentivo ad andare avanti. Tanti grandi grazie a Miki per essermi stato vicino sempre, per avermi sopportata e supportata nei week-end di intenso studio. Soprattutto grazie per avermi fatto capire quanto insignificante sia un esame rispetto alla grandezza della vita.

Grazie a Sara e a Lorena, perché nonostante la distanza abbia provato spesso ad allontanarci ci siamo ricordate che “la distanza non sempre vuol dire assenza” e nella mia camera, ovunque andrò, ci sarà sempre quel fiorellino rosso a ricordarmi di voi.

Grazie a Cod, al Gila, allo Ste e alla Sere perché senza di voi questi anni sarebbero stati un vero tormento.

Grazie a *V&V* per esserci sempre e per essere entrati nella mia vita, grazie per tutti momenti trascorsi ( e che trascorreremo) insieme e grazie per aver alleggerito con la vostra presenza le domeniche di studio e di partenze.

Grazie a Bruce per i consigli e le chiacchierate nei momenti di difficoltà, grazie per aver creduto in me quando io per prima non l’avrei fatto.

Grazie a “nonna” Pina, per i pranzi che mi ricordavano casa e gli abbracci che mi ricordavano affetto, per i consigli e per i sorrisi, sempre presenti a ricordarmi che la vita bisogna guardarla col sole nel cuore.

Altro grande grazie a tutte le persone che ho incontrato in questi anni perchè tutte loro, nel bene o nel male, mi hanno insegnato qualcosa che mi servirà nella vita quanto questi sei anni di preparazione universitaria.

Infine ringrazio immensamente il Prof. Airoidi per avermi guidata in questo lavoro con molta attenzione e per tutto il tempo che mi ha dedicato. Grazie per non avermi mai permesso di abbattermi, anche se spesso ci provavo, aiutandomi così ad arrivare alla fine.

Grazie.



# Introduzione

I materiali compositi si scelgono spesso in alternativa ai materiali tradizionali per la loro efficienza strutturale, cioè per il notevole risparmio in peso che comportano a parità di rigidità e resistenza. Tali materiali però presentano una legge costitutiva ortotropa e questo provoca difficoltà nello studio della nucleazione e propagazione di difetti all'interno di essi con meccanismi di danno differenti da quelli dei materiali tradizionali.

Ad oggi molti ricercatori si sono occupati di come modellare i meccanismi di frattura di questi innovativi materiali, ottenendo però risultati non soddisfacenti dal punto di vista computazionale e di correlazione con i dati sperimentali. Una delle tecniche usate è quella che prevede l'utilizzo degli elementi coesivi per connettere le lamine che compongono il materiale. Per simulare il processo di rottura coesiva si definiscono due superfici differenti, rappresentanti i bordi liberi della cricca, e si vincolano con una *penalty stiffness* che si modifica nel momento in cui ha inizio il danneggiamento, introdotto attraverso una variabile di danno. Tale tecnica è stata adoperata da diversi studiosi ([3], [4], [5]) per modellare un processo di rottura misto in elementi a spessore nullo.

Il costo computazionale e i problemi numerici che la modellazione con elementi coesivi comporta ha portato, nel tempo, allo sviluppo di altri metodi di rappresentazione del materiale. Negli anni precedenti, presso il dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali del Politecnico di Milano, sono state messe a punto diverse tecniche per studiare i fenomeni di rottura dei laminati compositi. Tra queste si sceglie di usare la tecnica di *decomposizione bi-fasica* per modellare il fenomeno del *transverse matrix cracking* nel laminato. Uno dei motivi per cui la si utilizza è che essa permette di scindere la fase matrice dalla fase fibra, in modo da assegnare le proprietà separatamente e da poter individuare i ruoli di entrambe quando il componente è soggetto a sollecitazioni esterne assegnate e quindi note. Inoltre consente di inserire una legge di danno apposita all'interno delle relazioni costitutive delle due fasi (matrice e fibra) per valutare la propagazione e nucleazione delle cricche nel materiale.

Il *transverse matrix cracking* è il primo meccanismo di rottura (intralaminare) che si manifesta e si verifica per valori di deformazione molto piccoli, dell'ordine dei *microepsilon*, sviluppandosi poi in fenomeni di più larga scala. Per tali ragioni è

di importanza fondamentale riuscire a simulare numericamente il suo manifestarsi all'interno di un laminato composito. Per simulare la propagazione del danno intralaminare quindi si userà una subroutine, implementata in Fortran<sup>®</sup>, che è stata già validata su alcune tipologie di provini in un precedente lavoro di tesi [6].

Si modificherà tale subroutine per adattarla alla modellazione del solo *transverse matrix cracking* e se ne effettuerà la validazione. In ultimo si dimostrerà che con tale tecnica si riesce a simulare numericamente il fenomeno non solo in laminati *cross-ply* ma anche in laminati *angle-ply*, che rimangono tra i più difficili da indagare dal punto di vista della meccanica della frattura.

## Obiettivi

Il lavoro è stato svolto utilizzando la tecnica di modellazione bifasica, dimostrandone l'utilità nello studio della nucleazione e propagazione di danni e concentrandosi sul fenomeno del *transverse matrix cracking*. L'introduzione del danno nelle due fasi avviene modificando le loro leggi costitutive. Primo obiettivo del lavoro è stato dimostrare che con questa tecnica si riesce a simulare la comparsa e successiva propagazione di un difetto nel materiale non solo per strisce monoelemento (come già dimostrato in [6]), approssimabili ad oggetti monodimensionali, ma anche per provini dimensionalmente simili a quelli effettivamente usati durante le prove di trazione. Riuscendo anche a simulare la predisposizione dei difetti a propagare dal bordo. Validato il modello effettuando il confronto con i dati sperimentali disponibili [7] per provini monoelemento, si passa ad indagarne l'applicabilità a laminati con lamine orientate con angolazione qualsiasi, concentrandosi sul caso di laminati con all'interno ply a  $\pm 45^\circ$ . Anche in questi materiali l'apertura della cricca nella matrice avviene, ovviamente, sempre parallelamente alle fibre di rinforzo, e sarà orientata dunque a  $45^\circ$ . Il problema, rimasto irrisolto usando tecniche tradizionali con elementi coesivi, è appunto che la propagazione del difetto con un modello *Finite Element* (FE) si può simulare solo in direzione parallela o perpendicolare ai lati lunghi del provino. Attraverso la tecnica di modellazione bi-fasica, invece, si dimostrerà che è possibile modellare ad elementi finiti la propagazione della cricca a  $45^\circ$ . Si mostrerà dunque, come obiettivo ultimo, che con questo metodo si riesce a simulare la propagazione della cricca nella matrice, parallelamente alle fibre, comunque esse siano orientate. Prescindendo dunque dalla mesh.



# Capitolo 1

## Formazione del *Transverse Matrix Cracking*

Per lo studio di fenomeni di rottura nei materiali tradizionali la meccanica della frattura ha portato all'identificazione di leggi per studiare la velocità di propagazione delle cricche e per individuare i limiti di rottura (statica e a fatica) del materiale. Quindi in generale si riesce a valutarne il comportamento sotto l'azione di sollecitazioni cicliche o meno. Si è visto, invece, che i materiali compositi presentano modalità di frattura differenti con propagazione istantanea del difetto e perdita catastrofica del componente.

Spesso accade che un pezzo arrivi a rottura anche in assenza di difetti rilevabili o permanenti al suo interno. Non è possibile quindi, per questi materiali, definire un andamento della cricca e il collasso del componente non è prevedibile. La soluzione che si è deciso di adottare per i materiali compositi coincide infatti con la filosofia *Damage Tolerance*.

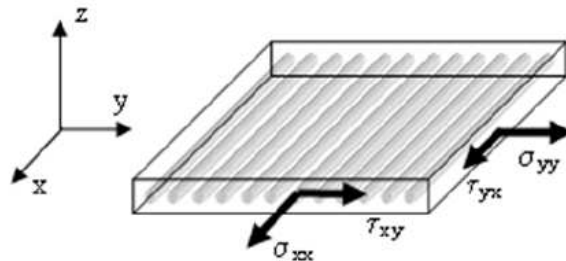
Si progetta cioè il componente in modo che la sua perdita non provochi quella di tutta la struttura. Solitamente per le analisi sperimentali sui materiali compositi si utilizzano provini molto semplici e si prova il materiale in un buon numero di condizioni operative (condizioni ambientali, di sollecitazione e di danno), valutandone il comportamento e considerandone ogni modalità di rottura e cedimento. In questa trattazione si lavorerà seguendo proprio tale metodologia che è detta *Building Block*. Le simulazioni numeriche riportate nell'ultimo capitolo riguarderanno provini di dimensioni standard usati nelle prove di trazione. I processi di danneggiamento devono essere integrati nell'approccio *Building Block* ma questo non è ancora totalmente avvenuto proprio per la difficoltà incontrata nella rappresentazione dei meccanismi di danno che si possono verificare in questi materiali. I compositi si distinguono, infatti, per la particolare modalità di propagazione e nucleazione del danno all'interno di essi che si manifesta non in modo netto ma in maniera diffusa e progressiva. Si individuano quindi quattro modalità di frattura

tipiche:

- danneggiamento progressivo della matrice
- danneggiamento dell'interfaccia fibra-matrice
- rottura delle fibre a trazione e a compressione
- fenomeni di delaminazione.

Mentre si distingue, dal punto di vista pratico, tra fenomeni di danno che evolvono progressivamente senza portare al cedimento completo e fenomeni che, una volta innescati, provocano la perdita totale della capacità di sostenere il carico e quindi il collasso della struttura stessa.

I primi tre meccanismi elencati sono di tipo *intralaminare* e cioè relativi a meccanismi di danno che si sviluppano all'interno dello spessore della singola lamina, i quali sono dovuti alla presenza di componenti di sforzo nel piano della lamina stessa Figura 1.1. Fenomeni di delaminazione, invece, sono meccanismi di danno *interlaminare* che vengono attivati da componenti di sforzo agenti fuori dal piano della lamina Figura 1.2.



**Figura 1.1:** Componenti di sforzo intralaminare nelle lamine

Le modalità di danneggiamento presentate possono interagire tra loro o manifestarsi in modo individuale, questo dipenderà dalla sequenza di laminazione considerata e dai materiali che costituiscono il laminato stesso. In [1] viene mostrato un tipico caso di origine e diffusione del danno in un laminato composito soggetto a trazione Figura 1.3.

Delle modalità di rottura elencate si tratterà in questo lavoro solo la prima. Si è infatti dimostrato che, tipicamente, per un laminato in composito soggetto a

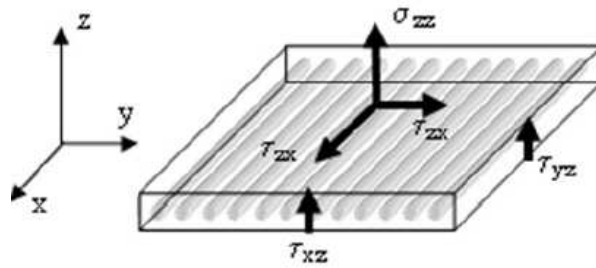


Figura 1.2: Componenti di sforzo interlaminare nelle lamine

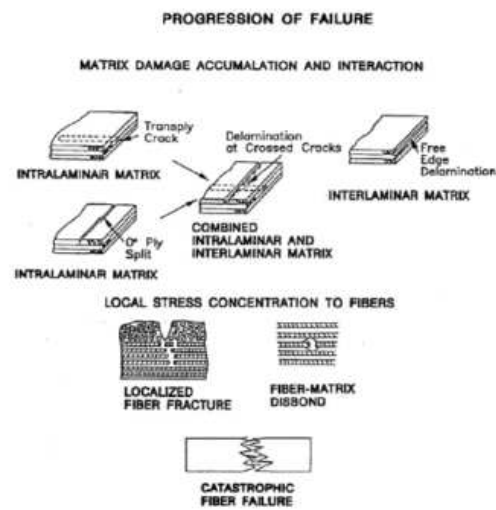


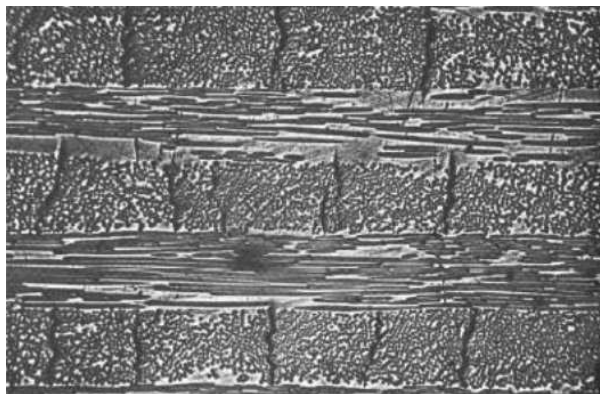
Figura 1.3: Evoluzione del danneggiamento [1]

trazione le fratture intralaminari della matrice sono i primi meccanismi di danno che si manifestano. In seguito la frattura si propaga in direzione parallela alle fibre della lamina, tale meccanismo di propagazione del danno va sotto il nome di *transverse matrix cracking*.

Questo può manifestarsi in qualsiasi laminato composito. In tutti i casi la frattura nella matrice si ha parallelamente alle fibre di rinforzo nei plies orientati trasversalmente al carico.

Ciò significa che nel caso di laminati *cross-ply* per un carico in direzione  $x$  (in assi laminato) la rottura si ha nelle lamine orientate a  $90^\circ$ . Esse infatti sono sollecitate da uno sforzo  $\sigma_{22}$  in assi lamina che agisce esattamente nella direzione della matrice, dove le proprietà di resistenza del materiale composito sono molto ridotte a causa dell'assenza di fibre di rinforzo. Questo provoca la nascita del danno nella matrice stessa, parallelamente alle fibre.

La Figura 1.4 mostra il fenomeno del TMC in un laminato *cross-ply*, con sequenza di laminazione data da soli ply orientati a  $0^\circ$  ed a  $90^\circ$  rispetto all'asse  $x$  (in assi laminato).



**Figura 1.4:** Transverse matrix cracking in un laminato cross-ply

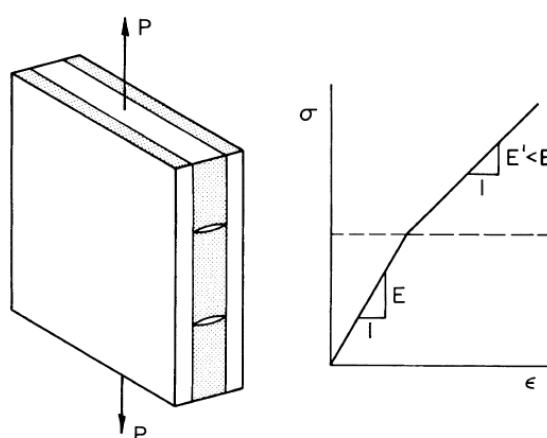
Nel caso di laminati *angle-ply*, considerando sempre un carico orientato in direzione globale  $x$ , la rottura della matrice si manifesta a causa della presenza delle due componenti di sforzo  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  e avviene sempre in direzione parallela alle fibre come precedentemente enunciato.

Questo meccanismo di danno è uno dei primi che viene attivato in prove cicliche o quasi-statiche di laminati a trazione e si manifesta molto in anticipo rispetto alla rottura del laminato stesso.

L'accumulo di danno riduce le caratteristiche di rigidità delle lamine nelle direzioni in cui tali proprietà sono dominate dalla fase matrice. Sarà proprio così che verrà simulato il meccanismo di frattura nel materiale: andando a degradare le

caratteristiche di rigidità con una variabile di danno che sarà diversa dal valore nullo nel momento in cui il danno stesso si attiva. Infatti di questa cosa si dovrà tenere conto nell'implementazione della *subroutine* usata per il calcolo delle variabili di danno (ed altre variabili di stato ad esso dovute) e per la modellazione del *transverse matrix cracking*.

In Figura 1.5 è rappresentata la conseguenza dell'applicazione di un carico quasi statico ad un laminato composito. Si nota che, dopo il verificarsi del *first ply failure*, la rigidità del laminato viene diminuita a seguito della riduzione di rigidità dei diversi ply.



**Figura 1.5:** Schema “first ply failure” in un laminato cross-ply e riduzione di rigidità associata [8]

Il *transverse matrix cracking* è il primo fenomeno di danno che si manifesta e procede in modo progressivo. Da ispezioni fatte sperimentalmente sulla densità di cricca si vede che l'evoluzione di questo fenomeno tende ad uno stato di saturazione, oltre il quale non si ha più accumulo di danno. Lo stato di saturazione a cui tende la densità delle cricche viene detto *Characteristic Damage State (CDS)*. Come esplicito in [8] superato un certo “livello di accumulo”, durante la prova a fatica, si ha la rottura delle fibre nel laminato che cede quindi, solitamente, di schianto.

Come si può notare in Figura 1.10 il valore di densità di cricca tende ad assestarsi tra 0.6 e 0.8 cricche per millimetro. La Figura 2.46 mostra chiaramente che superato il valore di CDS si passa a fenomeni di frattura di interfaccia (fenomeni di delaminazione) che porteranno a rottura il materiale.

Lo sviluppo di danni all'interno della matrice ha un'importanza rilevante. Infatti le zone in cui essa è danneggiata rappresentano punti di forte sollecitazione per le fibre e punti di innesco di un'eventuale rottura dell'interfaccia fibra-matrice. Tale fenomeno riduce la capacità della matrice stessa di trasferire il carico alle

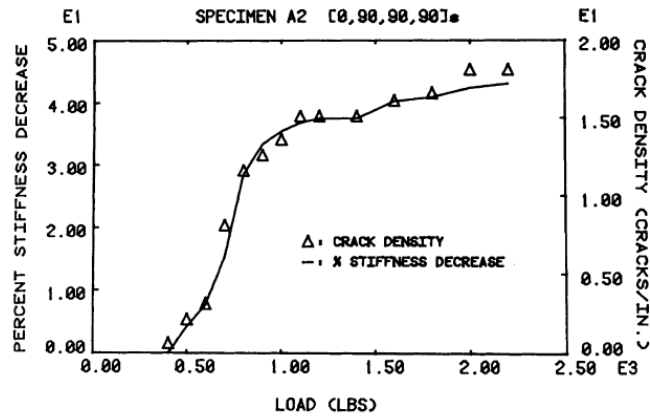


Figura 1.6: Evoluzione del transverse matrix cracking in una prova quasi-statica [8]

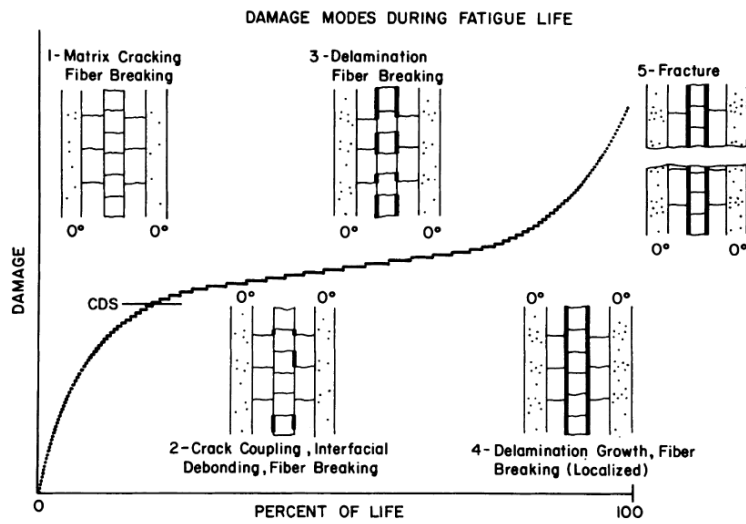
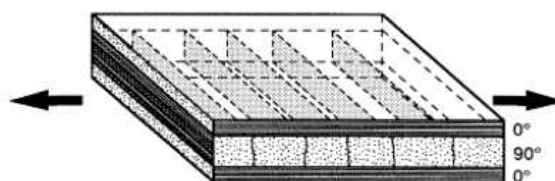


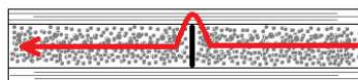
Figura 1.7: Schematizzazione dello sviluppo del danno durante la vita a fatica di laminati compositi [8]



**Figura 1.8:** Microfrattura della matrice in laminati *Cross-ply*

fibre integre. Per tale motivo il fenomeno del *transverse matrix cracking* e il fenomeno di distacco tra fibra e matrice sono di rilevante importanza. Prima del cedimento però si può osservare come evolve la densità delle cricche all'interno del materiale.

Come detto essa tende ad uno stato di saturazione oltre il quale non è più osservabile accumulo di danno [7], [9]. La densità della cricca viene riportata solitamente in funzione dello sforzo applicato o del livello di deformazione nel materiale. La rottura può spesso avvenire prima che lo sforzo raggiunga il valore limite di cedimento. Si può notare in Figura 1.9 quale sia l'andamento dello sforzo in laminati  $[0/90]_s$  con un danno presente negli strati a  $90^\circ$ , per una sollecitazione diretta come in Figura 1.8.

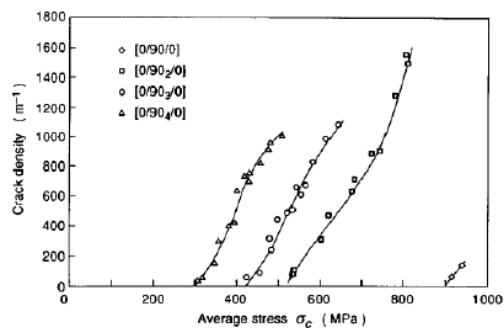


**Figura 1.9:** Andamento degli sforzi in laminati con ply a  $90^\circ$  danneggiati

Si è verificato con prove sperimentali che la distanza tra le cricche aumenta, e quindi la densità di cricche si riduce, quando aumenta lo spessore degli strati a  $90^\circ$  che sono quelli orientati perpendicolarmente rispetto alla direzione di applicazione del carico. I risultati di tali prove sono riportati in [7] ed illustrati in Figura 1.10 dove si nota che effettivamente per laminati  $[0/90_4]$  la densità di cricche è notevolmente più bassa che negli altri casi. Inoltre si è notato che il livello

di sforzo a cui compare la prima cricca dipende dallo spessore totale dell'insieme di lamine orientate perpendicolarmente all'applicazione del carico.

Le cricche per il fenomeno del *transverse matrix cracking* iniziano sul bordo e si estendono poi in tutta la larghezza del pezzo. Esse hanno origine solitamente da zone in cui si vengono a formare difetti, vuoti o, all'opposto, eccessi di resina. Lo sforzo residuo nella struttura dipende quindi dallo spessore dell'interlamina e dall'energia disponibile per la propagazione della cricca stessa.

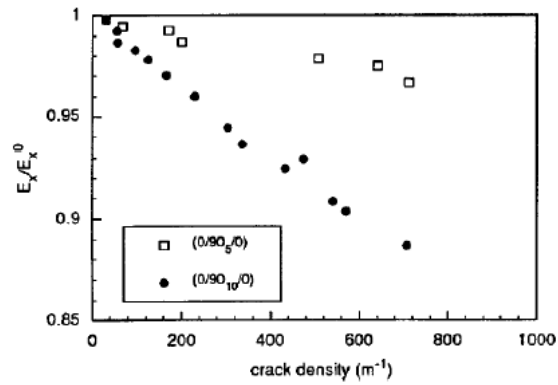


**Figura 1.10:** Andamento della densità di cricca con lo sforzo applicato per laminati  $[0/90]_s$  in carbonio [7]

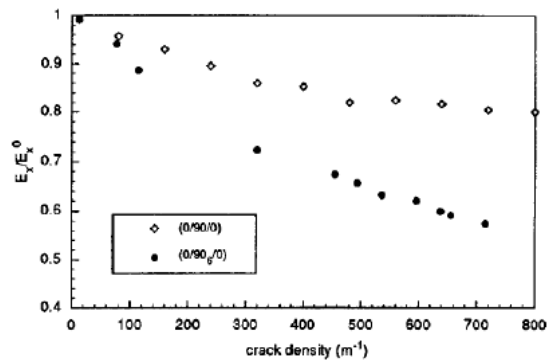
Come già visto un altro aspetto molto importante è la riduzione di rigidità in funzione dell'aumento della densità di cricca [7]. Per il carbonio però, come si può notare nelle Figura 1.11 e Figura 1.12, la diminuzione del modulo di Young è ridotta rispetto al vetro. Questo per via del contributo che la rigidità della sola fase matrice ha sulla rigidità totale del laminato.

Nel caso delle fibre di carbonio, infatti, il rinforzo dà un contributo in rigidità nettamente superiore a quello della matrice. Di conseguenza la presenza di un difetto all'interno di quest'ultima ha un effetto poco significativo sulla risposta complessiva del laminato. Le fibre di vetro sono molto meno rigide di quelle di carbonio e di conseguenza la rigidità globale del laminato risente maggiormente della presenza di danni all'interno della matrice.





**Figura 1.11:** Riduzione della rigidezza in funzione della densità di cricca in laminati in fibra di carbonio con sequenze  $[0/90_5/0]$  e  $[0/90_{10}/0]$  [7]



**Figura 1.12:** Riduzione della rigidezza in funzione della densità di cricca in laminati in fibra di vetro con sequenze  $[0/90/0]$  e  $[0/90_6/0]$  [7]



## Capitolo 2

# Modellazione del *transverse matrix cracking*

### 2.1 Scelta del metodo di modellazione

Una tecnica efficiente ed innovativa per l'analisi dei fenomeni di rottura nei materiali compositi è quella della *modellazione bi-fasica*. Si è scelto di usarla per modellare il fenomeno del *transverse matrix cracking* in alternativa alla modellazione classica con elementi coesivi. Con la tecnica di modellazione bi-fasica la rigidità nel piano e quella fuori dal piano del laminato sono rappresentate da fasi di materiale differenti. Il laminato viene visto come una somma di sub-laminati modellati con elementi finiti FE bidimensionali che sono rappresentativi del comportamento nel piano del materiale. I sub-laminati sono connessi con elementi solidi tridimensionali che invece rappresentano il comportamento fuori dal piano del laminato e tengono conto del valore di rigidità a taglio.

Se si usassero gli elementi coesivi si riuscirebbe a rappresentare il danno interlaminare senza usare elementi di connessione. I modelli a zone coesive sono utili per predire l'inizio del difetto e per l'analisi della propagazione di danni interlaminari e delaminazioni in strutture di materiale composito, incluse analisi da impatto.

Gli elementi coesivi di interfaccia però sono noti per causare difficoltà ed inefficienze numeriche. Infatti la rappresentazione di processi di frattura con l'utilizzo di questi elementi in un modello FE richiede l'introduzione di gradi di libertà che rimangono inattivi fino alla delaminazione del materiale. Prima di tale meccanismo di rottura gli spostamenti relativi all'interfaccia sono inibiti, per evitare accoppiamenti indesiderati, con l'uso di una rigidità molto alta.

D'altro canto però le inefficienze numeriche che si riscontrano sono proprio attribuibili a questi eccessivi valori di rigidità associati agli elementi di interfaccia. I problemi ad essa legati dunque sono visti come il motivo principale che ha portato

allo sviluppo di metodi alternativi, tra cui questo della decomposizione bi-fasica e quello della modellazione ibrida.

Quest'ultima è caratterizzata dall'unione della tecnica bi-fasica all'utilizzo di elementi coesivi ed è stata inizialmente verificata su prove *Double Cantilever Beam* (DCB) e *Short Beam Test* (SBT), utilizzate solitamente per caratterizzare rispettivamente la tenacità a frattura interlaminare di modo I e la resistenza interlaminare a taglio.

La tecnica di modellazione bi-fasica utilizzata, invece, non prevede la presenza di zone coesive nel modello e verrà validata, in questo lavoro di tesi, per la rappresentazione del fenomeno del *transverse matrix cracking*. Viene scelta perché, rispetto all'uso convenzionale degli elementi coesivi, presenta principalmente i seguenti vantaggi:

- non si hanno gradi di libertà aggiuntivi né perdita di rigidità
- si riesce a simulare la rigidità fisica fuori dal piano
- il modello bi-fasico è adatto alla simulazione esplicita quasi-statica per studiare la propagazione (stabile e instabile) di cricca
- aumento del tempo di incremento stabile, fino a due ordini di grandezza superiore usando l'approccio bi-fasico rispetto a quello convenzionale

Le leggi costitutive delle due fasi (fibra, rappresentata da elementi 2D, e matrice, rappresentata da elementi 3D) saranno quindi differenti, di conseguenza altrettanto sarà per le loro proprietà meccaniche. Del laminato si conoscono, in letteratura, le proprietà globali e quelle di fibra e matrice separatamente, però queste non sono utilizzabili direttamente.

Non si possono assegnare agli elementi tridimensionali le sole proprietà della matrice trascurando la presenza della fase fibra.

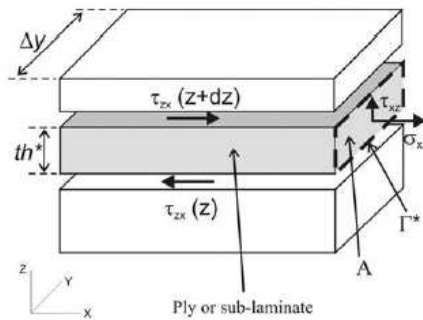
Si necessita quindi di un algoritmo di decomposizione per estrarre dalle proprietà del laminato completo quelle della fase fibra e della fase matrice da modellare con la tecnica bi-fasica. Tale algoritmo è stato sviluppato e ampiamente spiegato nel lavoro di tesi di [6], di conseguenza si riporteranno nel Capitolo 2.3 solo gli aspetti principali che hanno portato all'estrazione delle caratteristiche meccaniche delle due fasi.

La spiegazione è necessaria anche per esplicitare i contenuti della subroutine *Vumat* utilizzata per modellare il fenomeno del *transverse matrix cracking* e le modifiche ad essa effettuate.

## 2.2 Tecnica di modellazione bi-fasica

Questa tecnica di modellazione è basata sui diversi ruoli strutturali che giocano le componenti di sforzo nel piano e fuori dal piano in un laminato composito. Per tale ragione è necessario valutare gli sforzi all'interno del componente.

Si prenda un laminato reale, schematizzabile come in Figura 2.1, l'equilibrio lungo l'asse  $x$  viene analizzato con uno stato di sforzo semplificato senza variazioni lungo la direzione  $y$ . L'analisi viene riferita ad un sub-laminato generico senza una sequenza specifica dei ply. Ogni sub-laminato può considerarsi rappresentativo di una singola lamina.



**Figura 2.1:** Equilibrio di un sub-laminato in materiale composito

Guardando alla Figura 2.1 si scrive l'equazione 2.1 che è quella di equilibrio in direzione  $x$ .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -div(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.1)$$

Dove  $\boldsymbol{\tau}$  è lo sforzo di taglio nella sezione di area  $A^*$  (che è indicata con  $A$  in Figura 2.1) e normale  $x$  (assi laminato) che è quella del sub-laminato della figura a cui si sta facendo riferimento, le cui altre dimensioni sono spessore  $th^*$  e  $\Delta y$ . Tale sforzo di taglio è scomponibile lungo le direzioni  $x$  ed  $y$  e riscrivibile in forma vettoriale come in equazione 2.2.

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} \quad (2.2)$$

Applicando il *teorema di Green* è possibile integrare l'equazione 2.1 sulla sezione  $A^*$  del sub-laminato (equazione 2.3).

$$\int_{A^*} div \boldsymbol{\tau} dA^* = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{A^*} \sigma_{xx} dA^* = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{th^*} \sigma_{xx} \Delta y dth^* \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{\Gamma^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^*} d\Gamma^* = -\frac{\partial N^*_{xx}}{\partial x} \quad (2.4)$$

Dove  $N^*_{xx}$  è la risultante degli sforzi nel piano per unità di lunghezza,  $\Gamma^*$  è il contorno della sezione rettangolare considerata con normale  $\mathbf{n}_{\Gamma^*}$ .

L'equazione 2.4 indica come varia la componente risultante dello sforzo nel piano in direzione  $x$ . Questa non è altro che la forza membranale trasmessa dalle lamine che è equilibrata dallo sforzo di taglio fuori dal piano, trasmesso invece attraverso le interfacce con i sub-laminati adiacenti. Con questa tecnica di modellazione, dunque, le risultanti degli sforzi e le rigidezze dei plies nel piano vengono trasportate dagli elementi bidimensionali. Infatti ogni sub-laminato vede le sue proprietà nel piano tutte rappresentate dagli elementi 2D, che simuleranno la fase fibra del laminato stesso.

Questi sono connessi con elementi tridimensionali che trasmettono le componenti di sforzo fuori dal piano e caratterizzano la rigidezza fisica del laminato nella stessa direzione. Tali elementi di connessione legano le componenti di sforzo fuori dal piano ai valori di spostamento relativo tra due sub-laminati adiacenti.

Stesso discorso si può ripetere per la scrittura dell'equilibrio in direzione  $y$ , dove la connessione tra gli elementi bidimensionali trasmette sia le componenti  $\tau_{xz}, \tau_{zx}$  che  $\tau_{zy}, \tau_{yz}$ . Per la simmetria dei sub-laminati le componenti di sforzo interlaminare vengono trasmesse al piano medio degli elementi 2D sia in direzione  $x$  che in direzione  $y$ .

In presenza di un generico stato di sforzo con variazioni in tutte le direzioni, la variazione dello sforzo di taglio, espressa nell'equazione 2.1, è assolutamente da tenere in considerazione. La componente di sforzo risultante  $N_{xy}$  agente sulla sezione del sub-laminato è una componente dello stato di sforzo membranale trasportato dagli elementi bidimensionali. Quindi l'equilibrio degli elementi 2D dipenderà anche dall'azione di taglio trasmessa dagli elementi adiacenti.

La tecnica di modellazione proposta prevede l'utilizzo di due tipologie differenti di elementi finiti per rappresentare le fasi *nel piano* e *fuori dal piano*. Nel dettaglio si tratta di elementi bidimensionali a quattro nodi con integrazione ridotta, membrane *M3D4R* o shell *S4R*, per la parte *nel piano*. Mentre si utilizzano elementi tridimensionali ad otto nodi *C3D8R*, sempre con integrazione ridotta, per la zona di connessione rappresentante il comportamento fuori dal piano. Si possono vedere schematizzati in Figura 2.5b indicati rispettivamente come "*PLATE<sub>ij</sub>*" e "*SOLID<sub>i</sub>*", dove  $i$  e  $j$  cambiano per ogni strato. Lo stato di deformazione negli elementi di connessione rappresenta lo stato di sforzo medio tra i sub-laminati.

Il legame costitutivo degli elementi bidimensionali, descritto nell'equazione 2.5, è rappresentativo dello stato di sforzo piano.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Per quanto riguarda gli elementi tridimensionali di connessione, rappresentanti la fase matrice, la legge costitutiva del materiale andrà modificata inserendovi la variabile di danno, di valore nullo finchè questo non viene attivato.

La tecnica di modellazione ibrida prevede che la forma generale della legge costitutiva attribuita agli elementi di connessione tridimensionali sia quella espressa in equazione 2.6.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix} (1 - d) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Dove la variabile di danno  $d$  viene usata per simulare la nascita e la propagazione del danno interlaminare stesso.

Per la tecnica di modellazione bi-fasica la fase matrice non può prescindere dalla fase fibra e di conseguenza si renderà necessario riformulare le leggi costitutive delle due fasi e procedere alla decomposizione del materiale, come spiegato nel Capitolo 2.3.

## 2.3 Decomposizione del materiale

L'utilizzo del modello bifasico permette di separare il fenomeno di nascita di una cricca all'interno della matrice da quello di rottura delle fibre. Un approccio simile a quello utilizzato viene descritto in [10], dove si modella il laminato usando due tipologie diverse di elementi per descrivere le fasi del materiale. Con la tecnica di modellazione bi-fasica le due fasi vengono modellate separatamente, come spiegato nel Capitolo 2.2.

Si sottolinea però che la fase rappresentante la matrice non avrà le proprietà della sola matrice stessa perchè essa in realtà contiene le fibre di rinforzo, la cui presenza non è trascurabile. Per quanto riguarda queste ultime, invece, le proprietà ad esse relative non tengono conto della presenza della matrice. Si è reso necessario quindi utilizzare l'algoritmo di decomposizione implementato e spiegato in [6] per estrarre le caratteristiche meccaniche delle due fasi.

Per poter applicare tale algoritmo il materiale deve però rispettare alcuni requisiti:

- i materiali che si ottengono da tale decomposizione devono essere fisicamente ammissibili e caratterizzabili con leggi costitutive diverse se considerati separatamente

- deve valere la semplificazione che le deformazioni nel composito unidirezionale soggetto ad uno stato di sforzo monoassiale in direzione del rinforzo siano le stesse per sia per la fibra che per la matrice

Partendo da queste ipotesi si possono quindi calcolare le rigidezze  $E_1$  ed  $E_2$  corrispondenti rispettivamente a quelle nelle direzioni  $x$  ed  $y$  nel laminato. Per il calcolo di  $E_1$  si ipotizza che la deformazione  $\varepsilon_1$ , in assi globali, sia la stessa per la fibra e per la matrice e che il comportamento sia lineare-elastico per entrambe le fasi, con sforzi definibili come in equazione 2.7.

$$\sigma_F = E_F \varepsilon_1 \quad \sigma_M = E_M \varepsilon_1 \quad (2.7)$$

E' possibile quindi ricavare facilmente il valore di rigidezza in direzione delle fibre  $E_1$ . Se si sta considerando la direzione del rinforzo, infatti, l'interazione fibra-matrice si può modellare come un sistema di molle in parallelo con rigidezze  $K_F$  e  $K_M$  dove  $K_F \cong K_M$ , ottenendo il valore di  $E_1$  espresso in equazione 2.8. Dove con  $V_F$  e  $V_M$  si indicano le frazioni volumetriche rispettivamente di *fibra* e *matrice*,  $A$  è l'area totale dell'elemento,  $A_F$  è l'area dovuta alla somma delle sezioni delle fibre presenti nel volume ed  $A_M$  è l'area occupata dalla fase matrice.

$$E_1 = E_F \frac{A_F}{A} + E_M \frac{A_M}{A} = E_F V_F + E_M V_M = K_F + K_M \quad (2.8)$$

Analogamente per il calcolo di  $E_2$  il sistema può essere assimilabile ad un sistema di molle, stavolta poste in serie dato che si sta considerando la direzione trasversale alle fibre di rinforzo. L'ipotesi in questo caso è che lo sforzo agente in direzione 2 del laminato sia lo stesso sulle fibre e sulla matrice, e pari a  $\sigma_2$ . Di conseguenza è possibile scrivere le deformazioni come in equazione 2.9, dove la deformazione  $\varepsilon_F$  è relativa al volume  $wV_F$  mentre  $\varepsilon_M$  al volume  $wV_M$ , con  $w$  spessore totale del laminato.

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_F} \quad \varepsilon_M = \frac{\sigma_2}{E_M} \quad (2.9)$$

Essendo  $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2$ , analogamente a prima, è possibile calcolare il valore di  $E_2$  come illustrato in equazione 2.10.

$$E_2 = \frac{E_F E_M}{V_F E_M + V_M E_F} \quad (2.10)$$

Risulta evidente quindi che per il calcolo delle rigidezze delle due fasi non si può prescindere dal considerare l'interazione tra le fasi stesse di fibra e matrice. Se non si considerasse per la matrice il contributo di rigidezza dovuto alla fibra



isolata si rischierebbe di ottenere un valore di rigidità negativo, non ammissibile, per la fase matrice stessa. L'algoritmo di decomposizione illustrato in [6] fornisce caratteristiche fisicamente ammissibili per la regione matrice, cioè essa avrà una matrice di rigidità definita positiva. Per l'ammissibilità fisica, in un materiale ortotropo, essa deve soddisfare altri requisiti che verranno successivamente descritti.

Dopo le considerazioni fatte è possibile dire che lo stato di sforzo a cui è sottoposto il laminato può considerarsi come la somma di due contributi. Uno dovuto allo stato di deformazione che agisce sulle fibre ed uno dovuto alla presenza della fase matrice. L'algoritmo [6] è stato utilizzato per la decomposizione di diversi materiali.

Quello utilizzato nelle analisi numeriche in questo lavoro di tesi è il materiale composito in fibra di carbonio e matrice epossidica T300 – 934, le cui proprietà compressive vengono riportate in Tabella 2.1.

$E_{11}$	148000 MPa
$E_{22}$	9650 MPa
$E_{33}$	9650 MPa
$G_{12}$	4550 MPa
$G_{13}$	4550 MPa
$G_{23}$	3712 MPa
$\nu_{12}$	0.3
$\nu_{13}$	0.3
$\nu_{23}$	0.3
$v_1$	0.6
$v_2$	0.0
$E_F$	230000 MPa

**Tabella 2.1:** Dati laminato T300-934 Carbon Epoxy [2]

Dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le frazioni volumetriche di fibre isolate rispettivamente in direzione 1 e 2 del laminato. Il risultato della decomposizione per tale materiale [6] è riportato di seguito.

$$\begin{aligned}
[C^F] &= \begin{bmatrix} 131966.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[C^M] &= \begin{bmatrix} 11357.08 & 4206.24 & 4206.24 \\ 4206.24 & 10721.93 & 3298.86 \\ 4206.24 & 3298.86 & 10721.93 \end{bmatrix} \\
K_{bifasico} &= 1.0085 \\
E_1^F &= 231944.4 \text{ MPa} \\
E_{11}^M &= 8333.336 \text{ MPa} \\
E_{22}^M &= 8333.336 \text{ MPa} \\
E_{33}^M &= 8333.336 \text{ MPa} \\
\nu_{12}^M &= \nu_{21}^M = 0.3 \\
\nu_{23}^M &= \nu_{32}^M = 0.19 \\
\nu_{13}^M &= \nu_{31}^M = 0.3
\end{aligned}$$

Il contributo della fase matrice viene quindi calcolato come differenza tra il comportamento complessivo del laminato e quello della fase fibra, in equazione 2.11 ed equazione 2.12 viene mostrato il calcolo dei due contributi.

$$C_{ij}^F = \begin{cases} c_i^F E_{cont}^F \delta_{ij}, & \text{nella direzione del rinforzo} \\ 0, & \text{nelle altre direzioni} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$C_{ij}^M = C_{ij}^C - C_{ij}^F \quad (2.12)$$

Si fa notare che la componente  $C_{11}^M$  non è direttamente la rigidezza  $E_{11}^M$  ma questa moltiplicata per una funzione che dipende dai coefficienti di Poisson. Analogo discorso vale per le componenti  $C_{22}^M$  e  $C_{33}^M$  rispettivamente con le rigidezze  $E_{22}^M$  e  $E_{33}^M$ .

È quindi spiegata la differenza tra i termini  $C_{11}^M$ ,  $C_{22}^M$  e  $C_{33}^M$  nonostante le rigidezze corrispondenti  $E_{11}^M$ ,  $E_{22}^M$  e  $E_{33}^M$  siano uguali tra loro. Infatti la matrice  $C^M$  è dipendente dalle costanti del materiale equivalente, come espresso nella relazione 2.13.

$$C_{ij}^M = f(E_{ii}^M, G_{ij}^M, \nu_{ij}^M) \quad (2.13)$$

Dove  $i = 1 : 3$ ,  $j = 1 : 3$ , ed  $i \neq j$ .

### 2.3.1 Legge costitutiva per la fase matrice

Poichè si è scelto di usare la tecnica di modellazione bi-fasica, bisogna ricavare la legge costitutiva da attribuire agli elementi solidi della fase matrice. Questo è stato già fatto nel lavoro [6], se ne riportano perciò soltanto i passaggi base per capirne il funzionamento. Il processo illustrato è quanto implementato nella subroutine *Vumat* utilizzata per i calcoli sul *transverse matrix cracking*.

Tale algoritmo è stato modificato opportunamente per simulare il suddetto fenomeno. Si è proceduto all'eliminazione, all'interno della subroutine, di diversi parametri inutilizzati e alla rimozione del calcolo di alcune variabili di stato non più necessarie.

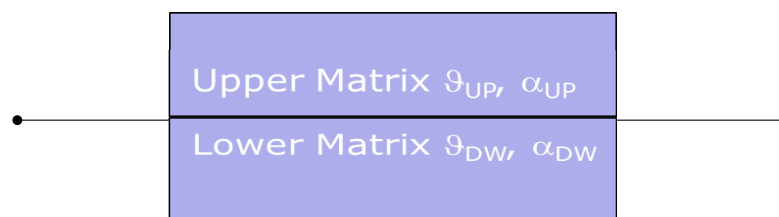
A seguito di questo processo di sfoltoimento si è riusciti ad avere un codice in grado di funzionare molto più rapidamente producendo tutti i risultati di interesse.

Sono state eliminate dalla subroutine tutte le variabili di stato riguardanti puramente il fenomeno della delaminazione, lasciando solo la variabile di danno e le altre variabili necessarie per modellare il *transverse matrix cracking*.

Per sapere come viene introdotta la nascita del difetto nel materiale bisogna però spiegare come cambia la sua legge costitutiva, essendo le due cose strettamente collegate. In tutta la trattazione si farà riferimento ad una "semi-matrice" *DOWN* ed una "semi-matrice" *UP*, la prima è relativa alla zona che collega il ply a  $0^\circ$  inferiore con lo strato centrale rappresentante tutti e tre gli strati a  $90^\circ$  mentre la seconda comprende la zona che collega quest'ultimo con il ply superiore a  $0^\circ$ . Lo spessore totale  $th$  della zona modellata a solidi sarà quindi dato dallo spessore delle due semi-matrici, come si può vedere in eq. 2.14.

$$th = \frac{th_{UP} + th_{DW}}{2} \quad (2.14)$$

Dove  $th_{UP}$  e  $th_{DW}$  sono gli spessori, rispettivamente, della zona superiore e di quella inferiore. Facendo riferimento alla Figura 2.2 si indicano con  $\theta_{UP}$  e  $\theta_{DW}$  le orientazioni delle tue metà e con  $\alpha_{UP}$  ed  $\alpha_{DW}$  le relative frazioni nello spessore.



**Figura 2.2:** Rappresentazione fasi *UP* e *DOWN* della matrice

All'interno dello stesso elemento, nello spessore, si modellano le fasi matrice relative alle due lamine collegate all'elemento solido.

I valori ricavati in [6] relativi alle rigidzze equivalenti del laminato sono riportati nelle equazioni 2.15, 2.16 e 2.17, dove  $G$  sono le rigidzze a taglio.

$$E_{zz}^{EQ} = \frac{E_{33}^{UP} E_{33}^{DW}}{\alpha_{UP} E_{33}^{DW} + \alpha_{DW} E_{33}^{UP}} \quad (2.15)$$

$$G_{zx}^{EQ} = \frac{G_{31}^{UP} G_{31}^{DW}}{\alpha_{UP} G_{31}^{DW} + \alpha_{DW} G_{31}^{UP}} \quad (2.16)$$

$$G_{zy}^{EQ} = \frac{G_{32}^{UP} G_{32}^{DW}}{\alpha_{UP} G_{32}^{DW} + \alpha_{DW} G_{32}^{UP}} \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Introduzione del danno intralaminare

A seguito dell'apertura di una cricca nel materiale le sue proprietà di rigidzza risultano ridotte. Per degradare le rigidzze fuori dal piano della parte di materiale che rappresenta la fase matrice si inserisce una variabile di danno interlaminare  $d_{M0}$ . Per la tecnica utilizzata di modellazione bi-fasica, presentata in [11] e [12], tale danno dipende solo dagli spostamenti relativi  $\Delta$  (equazione 2.18) tra i piani medi dei sub-laminati connessi con elementi solidi.

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_I \\ \Delta_{II} \\ \Delta_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_z^+ - U_z^- \\ U_x^+ - U_x^- \\ U_y^+ - U_y^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} t_k \quad (2.18)$$

Tale legge è basata sull'ipotesi di piccole deformazioni, che può considerarsi verificata durante la fase di apertura della cricca. Il valore del parametro di danno al tempo  $t_i$  viene calcolato in funzione di alcuni parametri, come indicato in equazione 2.19 dove l'espressione di  $d_{m0}(t_i)$  è solo una rappresentazione simbolica dell'algorithm di danneggiamento implementato nelle versioni precedenti della legge di danno.

Il parametro  $d_{mt}$  è la variabile di danno intralaminare che serve per la modellazione del *transverse matrix cracking* e che viene presentata nel seguito del paragrafo.

$$d_{m0}(t_i) = f(\{\varepsilon_{zz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}^T, E_{zz}^{EQ}, G_{zx}^{EQ}, G_{zy}^{EQ}, d_{mt}^{UP}(t_{i-1}), d_{mt}^{DW}(t_{i-1})) \quad (2.19)$$

La variabile  $d_{m0}$  di danno interlaminare influisce, di conseguenza, sui moduli equivalenti fuori dal piano, riportati nelle equazioni 2.20, 2.21 e 2.22.

$$E'_{zz}{}^{EQ} = E_{zz}{}^{EQ}(1 - d_{m0}) \quad (2.20)$$

$$G'_{zx}{}^{EQ} = G_{zx}{}^{EQ}(1 - d_{m0}) \quad (2.21)$$

$$G'_{zy}{}^{EQ} = G_{zy}{}^{EQ}(1 - d_{m0}) \quad (2.22)$$

Le deformazioni in assi laminato della semi-matrice superiore e inferiore ( $\varepsilon_{11}^{UP,DW}$ ,  $\varepsilon_{22}^{UP,DW}$ ,  $\gamma_{12}^{UP,DW}$ ) sono calcolate ruotando nel piano le componenti di deformazione degli elementi solidi della matrice. Tali valori di deformazione permettono di ricavare anche gli sforzi corrispondenti, come mostrato nell'equazione 2.23.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{M^{UP,DW}} \\ \sigma_{22}^{M^{UP,DW}} \\ \tau_{12}^{M^{UP,DW}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{M^{UP,DW}} & C_{12}^{M^{UP,DW}} & C_{13}^{M^{UP,DW}} & 0 \\ C_{21}^{M^{UP,DW}} & C_{22}^{M^{UP,DW}} & C_{23}^{M^{UP,DW}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{M^{UP,DW}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{UP,DW} \\ \varepsilon_{22}^{UP,DW} \\ \gamma_{12}^{UP,DW} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Ruotando opportunamente tali valori si ricavano gli sforzi per le due semi-matrici espressi in assi lamina ( $\sigma_{xx}^{M^{UP,DW}}$ ,  $\sigma_{yy}^{M^{UP,DW}}$ ,  $\tau_{xy}^{M^{UP,DW}}$ ). Di conseguenza è possibile calcolare i valori di sforzo complessivi per la fase matrice espressi in assi laminato semplicemente pesando tali parametri con la frazione nello spessore, come mostrato nelle relative equazioni 2.24, 2.25 e 2.26.

$$\sigma_{xx}^M = \alpha^{UP} \sigma_{xx}^{M^{UP}} + \alpha^{DW} \sigma_{xx}^{M^{DW}} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{yy}^M = \alpha^{UP} \sigma_{yy}^{M^{UP}} + \alpha^{DW} \sigma_{yy}^{M^{DW}} \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy}^M = \alpha^{UP} \tau_{xy}^{M^{UP}} + \alpha^{DW} \tau_{xy}^{M^{DW}} \quad (2.26)$$

La variabile di danno  $d_{m0}$  modella una frattura discreta e non un danno diffuso nel volume occupato allo stato attuale dalla matrice, è quindi necessario applicare delle correzioni. La rigidezza  $E_{33}^{UP,DW}$  usata nelle leggi costitutive nel piano non è influenzata dalla variabile di danno suddetta. Il parametro  $\alpha^{UP,DW}$  viene invece corretto in base al gradiente di deformazione locale, di conseguenza si può effettuare una valutazione approssimata della deformazione  $\varepsilon_{33}^{UP,DW}$  partendo da  $\varepsilon_{zz}$ , come mostrato in equazione 2.27.

$$\varepsilon_{33}^{UP,DW} \simeq \frac{E_{33}^{UP,DW}}{E_{zz}{}^{EQ}(1 - d_{m0})} \iff d_{m0} = 0 \quad (2.27)$$

Il parametro  $d_{m0}$  si è visto dipendere dalla variabile  $d_{mt}$  che è quella che inte-

ressa realmente ai fini dello studio del *transverse matrix cracking*. Per il calcolo di tale valore si ricorre ai potenziali energetici, in quanto il processo di danneggiamento [13] è fortemente dissipativo.

Si definiscono dunque tali potenziali, da cui si ricavano inoltre le leggi di stato in modo diretto. Nell'approccio agli sforzi si usa solitamente il potenziale di Gibbs (espresso in equazione 2.28) dipendente dai tensori di sforzo  $\underline{\underline{\sigma}}$  e di rigidità  $\underline{\underline{D}}$ . La dipendenza da  $\underline{\underline{D}}$  è legata all'energia libera di Helmotz  $\psi$ .

$$\Phi = \Phi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{D}}) \quad (2.28)$$

Il potenziale di Gibbs è quindi l'energia complementare di deformazione che permette di ricondursi alle leggi costitutive. Le equazioni di stato sono direttamente ricavabili dal potenziale di stato derivando quest'ultimo rispetto alle variabili indipendenti  $\underline{\underline{D}}$  ed  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , come illustrato in equazione 2.29. Dove la variabile  $Y$  è energeticamente coniugata alla variabile di danno  $d_{mt}$  ed è una densità di energia che rappresenta la forza guida per lo sviluppo del danneggiamento.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \Phi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad Y = \frac{\partial \Phi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}})}{\partial \underline{\underline{D}}} \quad (2.29)$$

Ogni parametro di danno (legato direttamente ad  $Y$ ) è associato al singolo termine del tensore di rigidità, sia per la fase fibra che per la fase matrice.

Il modello è infatti formulato partendo dall'espressione del potenziale dove alcuni termini si degradano in funzione delle variabili di danno ad essi associati.

Con la formulazione proposta in questo lavoro di tesi si effettuano le seguenti considerazioni:

- il danno nel piano delle fibre sarà attribuito solo alla fase fibra
- il danno dovuto alla degradazione del modulo a taglio *NON* viene considerato
- sarà presente solo il danno dovuto al *transverse matrix cracking*, modellato con un approccio termodinamicamente consistente

Per rispettare l'ultimo dei tre punti elencati si fa in modo che il parametro di danno intralaminare dipenda dalla variabile termodinamica  $Y$ . Usando infatti variabili termodinamiche associate il processo sarà sicuramente termodinamicamente consistente e fisicamente ammissibile.

L'energia potenziale  $e_d$  legata a questo modello di danneggiamento è espressa in equazione 2.30, da questa è possibile visualizzare quali sono i termini che vengono degradati in funzione delle variabili di danno ad essi associati.

$$2e_d = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} \\ \frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}(1-d_{mt})} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}(1-d_{mt})} \\ \frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}(1-d_{mt})} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Sviluppandone i termini si ottiene l'equazione 2.31, che derivata permette di ottenere la variabile termodinamica  $Y$  associata a quel determinato tipo di danneggiamento, espressa in equazione 2.32.

$$\begin{aligned} 2e_d = & \frac{\sigma_{11}^2}{E_{11}} - \nu_{21} \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{E_{33}} - \nu_{31} \frac{\sigma_{11}\sigma_{33}}{E_{33}} - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}\sigma_{11}}{E_{11}} \\ & + \frac{\sigma_{22}^2}{E_{22}(1-d_{mt})} - \nu_{32} \frac{\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_{33}(1-d_{mt})} - \nu_{13} \frac{\sigma_{11}\sigma_{33}}{E_{11}} \\ & - \nu_{23} \frac{\sigma_{33}\sigma_{22}}{E_{22}(1-d_{mt})} + \frac{\sigma_{33}^2}{E_{33}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$Y = \frac{\partial e_d}{\partial d_{mt}} = -\frac{\sigma_{22}^2}{E_{22}(1-d_{mt})^2} + \nu_{32} \frac{\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_{33}(1-d_{mt})^2} + \nu_{23} \frac{\sigma_{33}\sigma_{22}}{E_{22}(1-d_{mt})^2} \quad (2.32)$$

Detti sforzi efficaci i valori  $\sigma_{22}^*$  e  $\sigma_{33}^*$ , espressi come in equazione 2.33, è possibile riscrivere la variabile termodinamica  $Y$  in funzione di questi (equazione 2.34).

$$\sigma_{22}^* = \frac{\sigma_{22}}{(1-d_{mt})} \quad \sigma_{33}^* = \frac{\sigma_{33}}{(1-d_{mt})} \quad (2.33)$$

$$Y = -\frac{\sigma_{22}^{*2}}{E_{22}} + \nu_{32} \frac{\sigma_{22}^* \sigma_{33}^*}{E_{33}} + \nu_{23} \frac{\sigma_{33}^* \sigma_{22}^*}{E_{22}} \quad (2.34)$$

Noti dunque gli sforzi efficaci è possibile ricavare direttamente la variabile termodinamica da cui far dipendere la legge di danno, dipendente a sua volta direttamente da  $Y$  (2.35).

$$d_{mt} = d_{mt}(Y) \quad (2.35)$$

## 2.4 Assegnazione proprietà del materiale

Si è visto che per modellare il *transverse matrix cracking* è necessario introdurre una legge di danno basata sul parametro  $d_{mt}$  che però è definibile per ognuna delle due semi-matrici e cioè si hanno i parametri  $d_{mt}^{UP}$  e  $d_{mt}^{DW}$ .

Le variabili di stato  $d_{mt}^{UP,DW}$  dipendono dallo sforzo nell'elemento in direzione 2, assi globali, e quindi dalle deformazioni corrispondenti.

$$d_{mt}^{UP,DW} = d_{mt}^{UP,DW}(\varepsilon_{22}^{UP,DW}) \quad (2.36)$$

Per l'evoluzione della legge di danno viene scelta una risposta iniziale bilineare dove l'area del diagramma rappresenta il rateo di energia di realizzazione di una nuova superficie libera per la propagazione della cricca trasversale nello spessore. Prima necessità è collegare tale area con la resistenza del materiale facendo riferimento alla teoria di *Dvorak and Laws* [14] (con riferimento agli esperimenti di [15] e [16]) rielaborata da *Davila e Van der Mehr* [17]. Da cui discende il legame tra  $G_{IC}$  e lo sforzo in direzione globale 2 di ogni elemento rappresentato in equazione 2.37.

$$\sigma_{22} = \sqrt{\frac{8G_{IC}}{\pi t_{90} \Lambda_{22} \xi}} \quad (2.37)$$

Dove  $\xi$  è posta pari ad 1 per semplicità,  $t_{90}$  è lo spessore totale delle tre lamine a  $90^\circ$  e  $\Lambda_{22}$  è dimensionalmente l'inverso di una rigidezza esprimibile come in equazione 2.38.

$$\Lambda_{22} = 2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) \quad (2.38)$$

Dall'equazione 2.37 si riesce a ricavare il valore di tenacità a frattura, per il I modo, di ogni elemento, che viene espresso nell'equazione 2.39.

$$G_{IC} = \frac{\pi t_{90} \Lambda_{22} \xi}{8} \sigma_{22}^2 \quad (2.39)$$

Dove il valore di  $\sigma_{22}$  per ogni elemento viene assegnato seguendo una distribuzione di Weibull della densità di cricca con lo sforzo medio [6]. Si è già detto che  $G_{IC}$  è l'energia necessaria per la propagazione della cricca in direzione trasversale, di conseguenza si può riscrivere come in equazione 2.40. Da tale relazione è possibile quindi ricavare il valore di  $\varepsilon_f$ , parametro necessario per definire la legge di danno, semplicemente invertendo la relazione 2.41.



$$G_{IC} = \frac{1}{2} \varepsilon_f \sigma_{22} l_{el} \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_f = \frac{2G_{IC}}{\sigma_{22} l_{el}} \quad (2.41)$$

Si può quindi ricavare il valore di  $\varepsilon_0$  (equazione 2.42) che è quello corrispondente allo sforzo massimo  $\sigma_0$  per il legame bilineare di sforzo-deformazione. Noto  $\varepsilon_f$  si riesce a calcolare anche il valore di deformazione  $\varepsilon_{f1}$ , ovvero il nuovo valore da inserire nella legge di danno di descritta nel Capitolo 2.3.1. Il parametro  $\varepsilon_{f1}$  fa sì che la degradazione totale dell'elemento sia per un valore vicino a quello calcolato per *strain softening*. L'espressione viene inoltre modificata in modo che il danno parta dal valore nullo per  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{22}}{E_2} \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{f1} = k_{\varepsilon_f} \varepsilon_f \quad (2.43)$$

Modificando  $k_{\varepsilon_f}$  si agisce direttamente sul valore di  $\varepsilon_{f1}$ , facendo variare così l'andamento del legame sforzi-deformazioni da *increased strain softening* a *reduced strain softening* o viceversa. La legge di danno implementata, infatti, ha come base il legame  $\sigma - \varepsilon$  (riportato in equazione 2.44) per uno *strain softening* lineare. Da questa relazione è possibile ricavare il valore dello sforzo in funzione della deformazione come riportato in equazione 2.45.

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \quad (2.44)$$

$$\sigma = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \varepsilon + \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} + \sigma_0 \quad (2.45)$$

Definendo la variabile di danno come in equazione 2.46 e sostituendovi l'espressione dello sforzo è possibile giungere alla sua espressione finale, riportata in equazione 2.47, che produce uno *strain-softening* lineare.

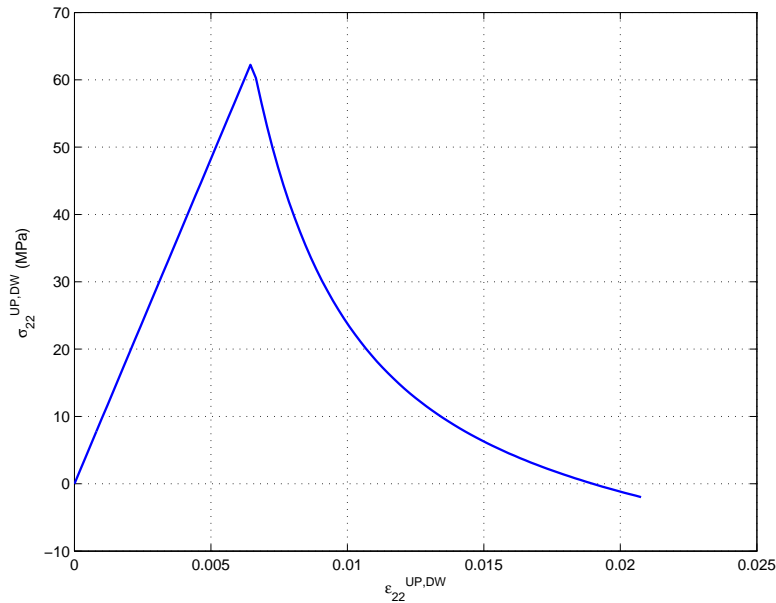
$$d = 1 - \frac{\sigma}{E\varepsilon} \quad (2.46)$$

$$d = 1 + \frac{\sigma_0}{E(\varepsilon_f - \varepsilon_0)} - \frac{1}{E\varepsilon} \left( \frac{\sigma_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} + \sigma_0 \right) \quad (2.47)$$

Alla legge di danno così espressa si effettuano delle modifiche, si aggiunge un esponente  $n$  e si sostituisce la deformazione finale  $\varepsilon_f$  con una nuova deformazione

$\varepsilon_{f1}$  tale che la completa degradazione dell'elemento avvenga per un valore simile a quello per *strain softening* lineare. Dove  $\varepsilon_{f1}$  è legato alla deformazione finale  $\varepsilon_f$  tramite il parametro  $k_{\varepsilon_f}$  come espresso nella relazione 2.43. Di conseguenza variando i valori di  $n$  e  $k_{\varepsilon_f}$  si modifica il legame  $\sigma - \varepsilon$ :

- se  $n > 1$  si parla di *increased strain softening* Figura 2.3
- se  $n < 1$  si parla di *reduced strain softening* Figura 2.4

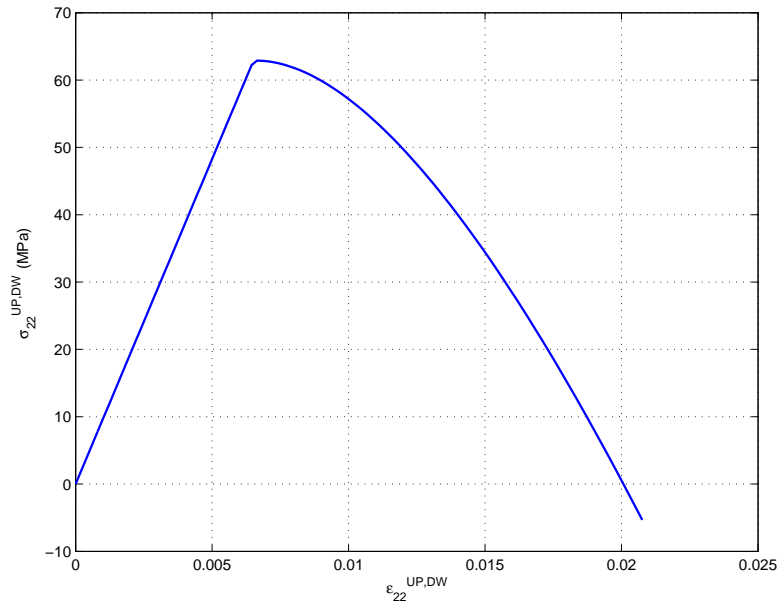


**Figura 2.3:** Rappresentazione legge di danno con  $n = 3$  e  $k_{\varepsilon_f} = 8$ , caso di *increased strain softening*

L'espressione della legge di danno diventa quindi quella riportata in equazione 2.48, dove si nota la dipendenza della variabile  $d$  dal parametro  $n$  e dalla nuova deformazione finale  $\varepsilon_f$ , direttamente collegata con  $k_{\varepsilon_f}$ .

$$d = 1 + \frac{\sigma_0}{E(\varepsilon_{f1} - \varepsilon_0)}\varepsilon - \frac{\varepsilon_0^{n-1}}{\varepsilon^n} \left( \frac{\sigma_0\varepsilon_0}{\varepsilon_{f1} - \varepsilon_0} + \sigma_0 \right) \frac{1}{E} \quad (2.48)$$

Quindi  $n$  e  $\varepsilon_f$  sono i due parametri che modificano la legge di danno dando luogo ad andamenti diversi della curva degli sforzi. Per avere il caso di legge perfettamente triangolare si impone  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$ , dopo di che si procede al calcolo di tutte le suddette variabili che verranno inserite tra le proprietà del materiale ed usate dalla subroutine *Vumat* per il calcolo delle variabili di stato richieste. Tra le quali non va dimenticata la variabile termodinamica  $Y_d$  (equazione 2.49) che regola il danno dal momento in cui si innesta.



**Figura 2.4:** Rappresentazione legge di danno con  $n = 0.2$  e  $k_{\epsilon_f} = 0.405$ , caso di *reduced strain softening*

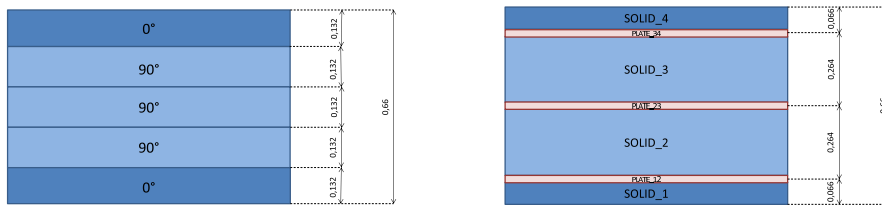
$$Y_d = \frac{1}{2} E_2 \epsilon_0^2 \quad (2.49)$$

Questi parametri sono stati calcolati con un opportuno script implementato in *Matlab*<sup>®</sup> ed assegnati agli elementi del modello rappresentanti la fase matrice degli strati a  $90^\circ$ . Questo è stato possibile grazie alla subroutine implementata che permette di definire il materiale inserendone tutte le caratteristiche, viste in questo paragrafo, derivanti dall'assegnazione degli sforzi per ogni elemento della mesh. Nel seguito della trattazione si spiegherà come sono stati assegnati questi valori a tali elementi in modo da simulare l'apertura delle cricche parallelamente alle fibre di tali strati. Si sottolinea, infatti, che il calcolo di questi valori parte dalla conoscenza dello sforzo  $\sigma_{22}$ , espresso in equazione 2.37, che deriva dall'aver ipotizzato per esso andamento probabilistico.

## 2.5 Validazione subroutine Vumat modificata

Come preannunciato la subroutine *Vumat* è stata opportunamente modificata per studiare il solo fenomeno del *Transverse Matrix Cracking*, ne va quindi verificata la sua funzionalità. Per farlo si utilizza un piccolo provino di laminato  $[0/90_3/0]$ , materiale T300 – 934, con uno spessore totale di  $0.66 \text{ mm}$  e quindi  $0.132 \text{ mm}$  per ogni ply come illustrato in Figura 2.5a. Si sceglie di modellare

l'oggetto con elementi solidi  $C3D8R$  per quel che riguarda la fase matrice ed elementi membranali  $M3D4R$  per la fase fibra. Gli elementi hanno tutti lunghezza pari a  $0.2 \text{ mm}$ . Il modello è quindi quello risultante dalla decomposizione del laminato e riportato in Figura 2.5b, dove i nomi delle varie fasi sono quelli dei set utilizzati nella modellazione. Questi rimarranno sempre gli stessi in quanto si tratterà il materiale per cui è stata effettuata la decomposizione riportata nel Capitolo 2.3 con la stessa stratificazione, che cambierà nell'analisi di laminati *angle-ply*.



(a) Laminato  $[0/90_3/0]$  reale .

(b) Decomposizione laminato e nomenclatura.

**Figura 2.5:** Laminato T300 – 934 reale e decomposto (tutte le grandezze riportate sono in millimetri).

Per quel che riguarda la legge di danno si è scelto di porre il parametro  $n$  pari a 3, in modo da incentivare la propagazione del difetto nel materiale.

Il pezzo su cui viene svolta l'analisi per una prima valutazione del corretto funzionamento della subroutine ha lunghezza pari ad  $1 \text{ mm}$ , cioè è composto da soli 5 elementi lungo  $x$  (assi globali). Questo provino viene usato soltanto per una prima validazione dopo le modifiche effettuate ed è rappresentato in Figura 2.6, la quale mostra il valore della deformazione, in direzione  $x$ , nell'elemento nel momento in cui il danno si verifica. Mentre in Figura 2.7 è rappresentato il valore di tale deformazione quasi al termine dell'analisi.

Dalla simulazione sono stati ricavati i valori della variabile di danno  $d_{mt}^{UP,DW}$ , dello sforzo  $\sigma_{xx}^{UP,DW}$  in direzione  $x$  e della deformazione  $\varepsilon_{xx}$ , sempre lungo  $x$ . Questi valori sono stati poi riportati rispettivamente nei grafici di Figura 2.8, Figura 2.9 e Figura 2.10, dove si vedono i tre andamenti che risultano identici a quelli ottenuti con la vecchia subroutine e riportati in [18]. I suddetti valori si riferiscono agli elementi centrali  $3_{a,b}$ , ai primi due elementi subito a sinistra  $2_{a,b}$  retrocedendo sull'asse  $x$  e a quelli vicini  $1_{a,b}$ , indicando con  $a$  e  $b$  gli elementi inferiore e superiore rispettivamente. Sia dai grafici che dalle figure si può vedere chiaramente che gli elementi in cui si innesca il danno sono proprio quelli centrali

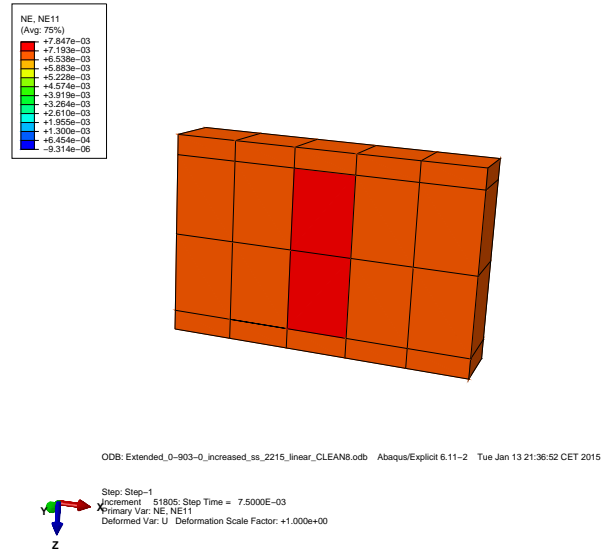


Figura 2.6: Rappresentazione della deformazione  $NE_{11}$  nell'istante in cui si verifica il danno

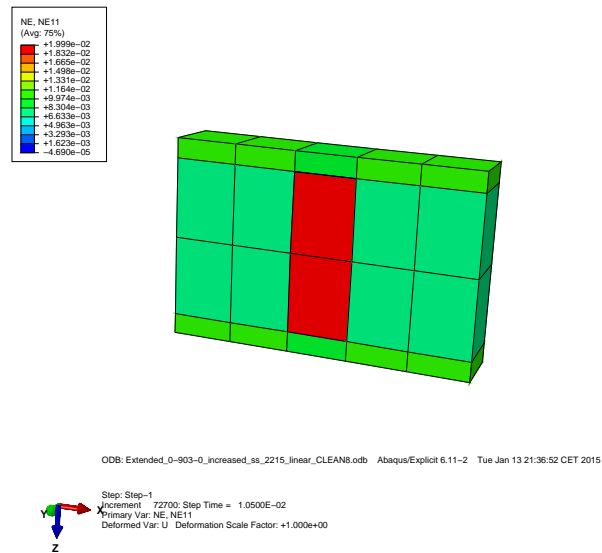
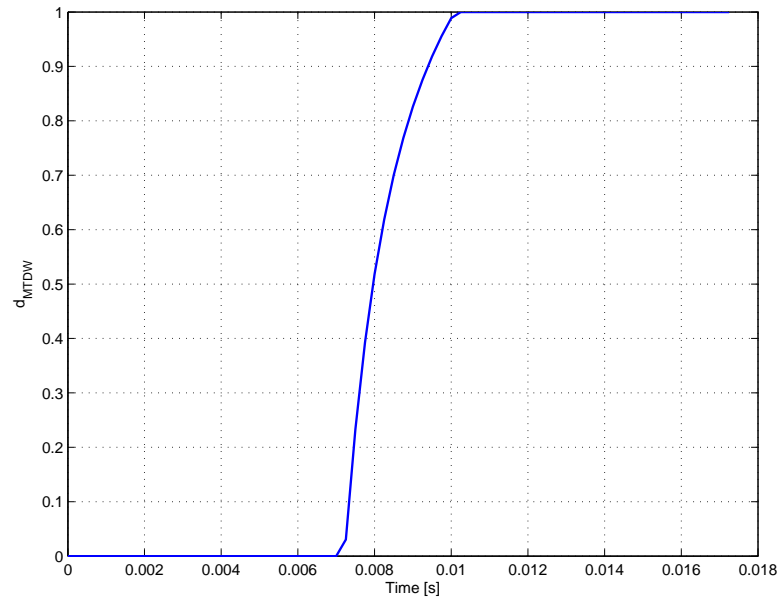


Figura 2.7: Rappresentazione della deformazione  $NE_{11}$  al termine della prova

$\mathfrak{z}_{a,b}$ , superiore ed inferiore. Infatti per essi i valori di deformazione e di sforzo sono molto più alti che negli altri. Come ci si aspettava quindi il danno si verifica nelle lamine trasversali rispetto alla direzione del carico, la subroutine riesce a modellare il fenomeno. Nel Capitolo3 si verifica la funzionalità del modello su oggetti di dimensioni maggiori correlando i risultati con quelli sperimentali.



**Figura 2.8:** Rappresentazione della variabile di danno negli elementi centrali

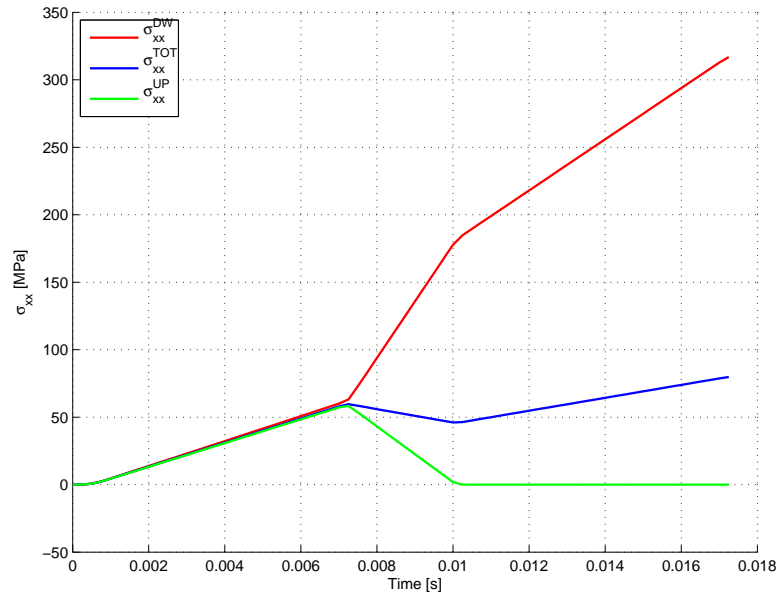


Figura 2.9: Rappresentazione dello sforzo lungo  $x$  negli elementi centrali

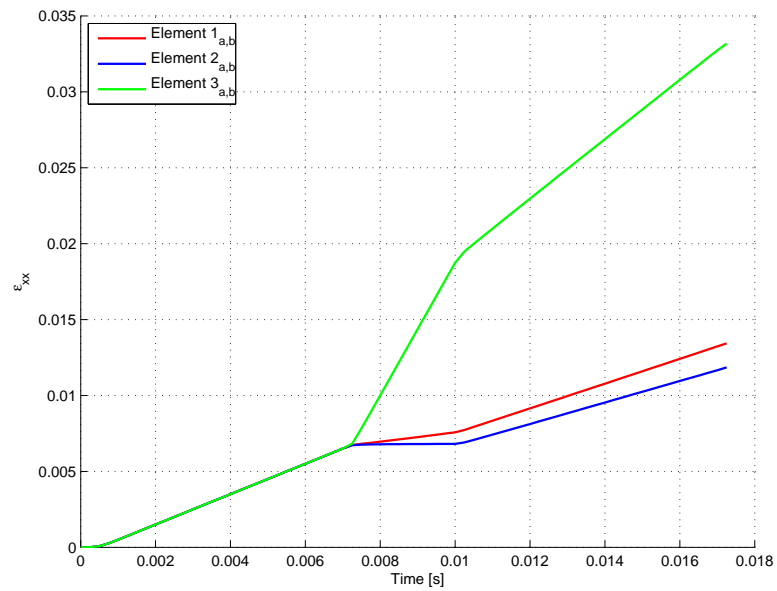


Figura 2.10: Rappresentazione della deformazione lungo  $x$  degli elementi centrali





# Capitolo 3

## Validazione del modello

Si è visto che il modello funziona perfettamente su oggetti molto piccoli, cioè il danno parte dagli elementi centrali che sono quelli rappresentanti le lamine a  $90^\circ$ . Nella realtà però i provini usati per le prove sperimentali hanno dimensioni notevolmente maggiori, di conseguenza è interessante riuscire a simulare il fenomeno del *transverse matrix cracking* per modelli più vicini alla realtà. Si analizzano dunque i casi descritti in Tabella 3.1, dove vengono riportate anche le dimensioni dei provini analizzati.

	Lunghezza (mm)	Larghezza (mm)	Spessore (mm)	Dimensione elementi (mm)
Provino mono-elemento	100	0.125	0.66	0.125
	100	0.2	0.66	0.2
	100	0.3	0.66	0.3
Provino reale	30	12.5	0.66	0.3

**Tabella 3.1:** Dimensioni dei provini modellati

### 3.1 Applicazione a provini mono-elemento

In questo capitolo si modella il fenomeno del *transverse matrix cracking* per provini mono-elemento. Questi possono considerarsi monodimensionali, in quanto hanno solo una grandezza molto maggiore delle altre. I risultati vengono poi confrontati con quelli sperimentali riportati in [7] per verificare che il modello funzioni correttamente. Si utilizzano, per l'analisi, laminati  $[0/90_3/0]$  di materiale T300 – 934 aventi tutti la stessa lunghezza e lo stesso spessore ma con dimensioni

differenti della mesh. La tecnica di modellazione usata è quella bi-fasica spiegata in precedenza. Per simulare il danno con il codice ad elementi finiti Abaqus® si utilizza la subroutine *Vumat* già menzionata.

Con questo metodo le proprietà del materiale vengono definite attraverso la card *\*USER MATERIAL*, che richiama la suddetta subroutine che definisce la legge costitutiva del materiale. Alcune delle proprietà da inserire nella card derivano dalla tenacità a frattura che, come visto nel Capitolo 2.3.2, è direttamente collegata allo sforzo in direzione globale 2 nel laminato. Per poter quindi ricavare tali caratteristiche è necessario ipotizzare il valore di  $\sigma_{22}$ , cosa che non viene fatta in modo totalmente casuale. Come ampiamente spiegato in [6], si ipotizza che lo sforzo medio nel laminato rispetti la funzione densità di probabilità di cricca statistica di tipo Weibull.

La quale viene generata su una popolazione pari al numero di elementi di tutta la fila. Sotto questa ipotesi vengono generate le card di materiale rappresentanti la fase matrice dei plies a  $90^\circ$ , usando un opportuno script implementato in Matlab®. I parametri della simulazione cambiano per ogni caso.

In tutti i casi però il provino viene vincolato alle estremità. I nodi dell'estremo più vicino all'origine rimangono fermi e sono tutti collegati ad un nodo ausiliario chiamato *NODE<sub>1</sub>* mentre i nodi dell'estremità opposta vengono collegati ad un altro nodo ausiliario, *NODE<sub>2</sub>*, a cui viene imposto uno spostamento in direzione globale  $x$ . Questo per simulare una prova di trazione. Tale spostamento viene assegnato con la card Abaqus *\*EQUATION* imponendo una velocità al *NODE<sub>2</sub>* e la durata dell'analisi necessaria per raggiungere una deformazione percentuale pari a 0.002.

Si riportano in Tabella 3.2 i valori scelti per ogni prova.

	Dimensione elementi (mm)	Velocità (mm/s)	Durata prova (s)
$n = 1 \quad k_{\varepsilon_f} = 1$	0.125	0.07	2.85
	0.2	0.3	1.5
	0.3	0.7	0.3
$n = 3 \quad k_{\varepsilon_f} = 8$	0.125	0.07	2.85
	0.2	0.03	6.67
	0.3	0.03	6.67

**Tabella 3.2:** Parametri utilizzati

Questi sono diversi per ogni prova perché varia la mesh utilizzata e di conseguenza la larghezza del provino che è costituito da un solo elemento lungo questa dimensione. Per evitare quindi la propagazione di onde di sforzo nel materiale ai

provini con area di estremità minore andrà imposta una velocità ai nodi più piccola che negli altri casi.

Si valuteranno dunque i risultati al variare dei parametri  $n$  e  $k_{\varepsilon_f}$  della legge di danno, rispettivamente si indagheranno i casi di :

- *triangular law*:  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$
- *increased strain softening*:  $n = 3$  e  $k_{\varepsilon_f} = 8$

Si riportano, di seguito, i risultati ottenuti per ogni caso e confrontati con quelli ottenuti da [7]. Le immagini estratte da Abaqus si riferiscono, per tutti i casi, ad uno zoom sulla zona interessata, non risulterebbe comprensibile l'immagine se si provasse a mostrare tutto il provino intero senza poter avvicinare l'area di inizio del difetto.

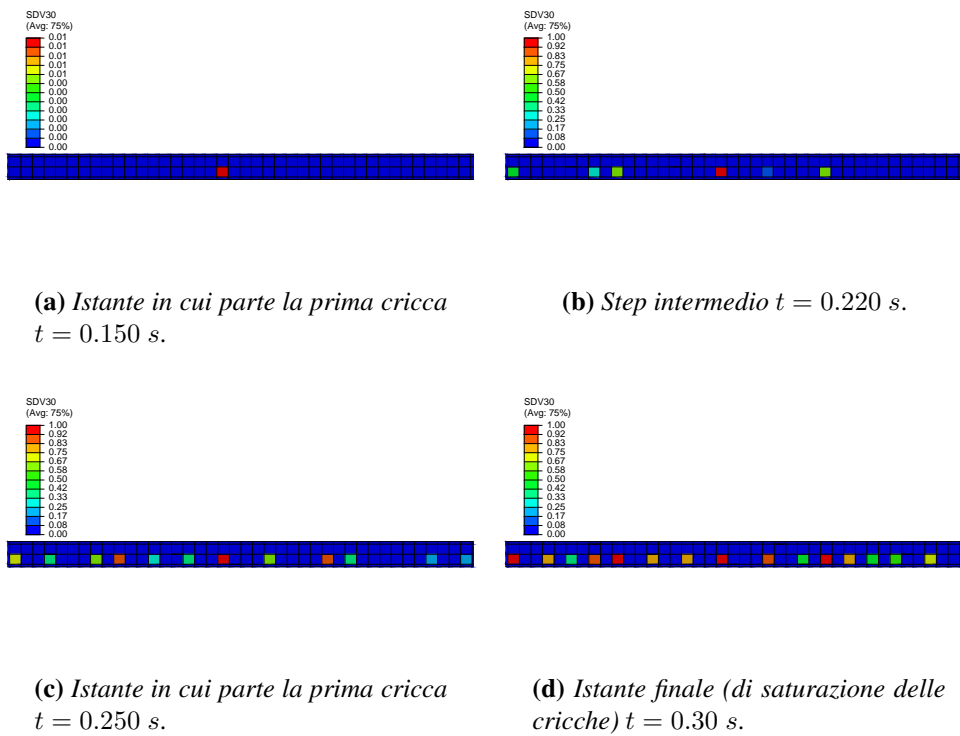
### 3.1.1 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a 0.3 mm

Per questa prova si riscontra un primo danneggiamento nella parte iniziale Figura 3.1a, vicino alla zona vincolata. La propagazione avviene parallelamente alle fibre negli strati a  $90^\circ$  ma il provino è monodimensionale, i difetti dovrebbero estendersi nella dimensione che viene trascurata, motivo per cui non se ne vede la propagazione ma solo la nascita di nuove cricche.

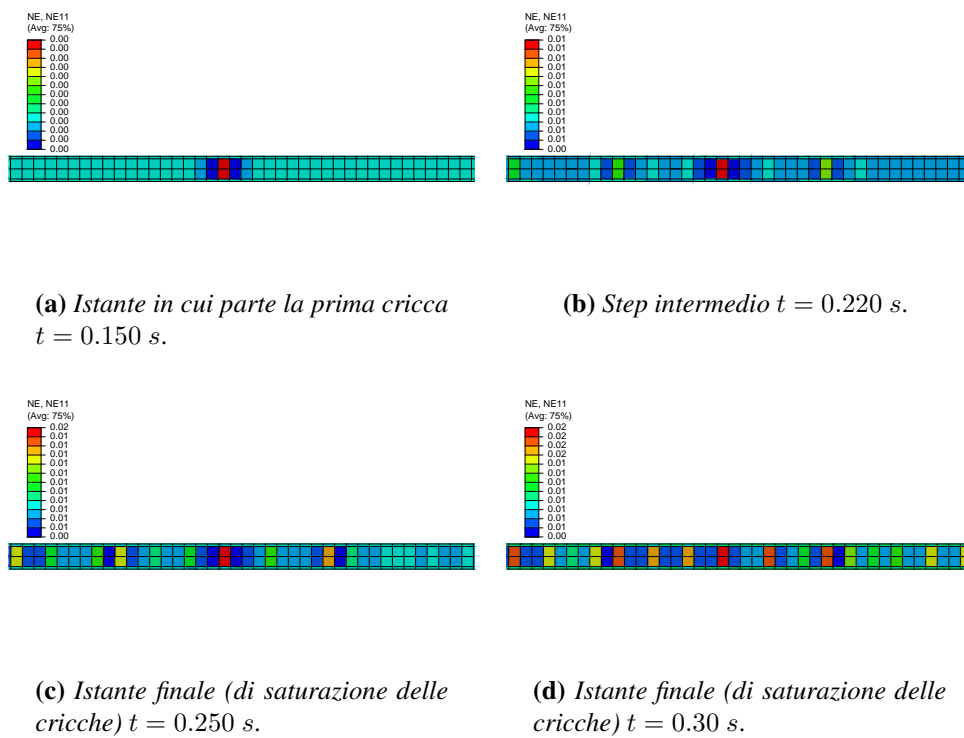
La variabile di stato che indica la presenza di un difetto è  $d_{mt}^{UP}$  (indicata con *SDV30* nella subroutine *Vumat*), quando essa è diversa da zero significa che si è attivato il danno. Nel momento in cui questo si innesta ( $t = 0.150$  s) lo stato di sforzo dell'elemento cambia, insieme a quello degli elementi vicini. Lo sforzo è direttamente collegato alla deformazione, motivo per cui si riportano in Figura 3.2a le immagini delle deformazioni  $NE_{11}$  lungo  $x$  (in assi globali) degli elementi del modello. Si può notare facilmente come le deformazioni negli elementi centrali (rappresentanti la zona a  $90^\circ$ ) siano giustamente molto maggiori rispetto alle altre.

Durante tutta la prova si sviluppano poi altri difetti fino ad arrivare allo stato di saturazione delle cricche mostrato in Figura 3.1d, che riporta la situazione finale del provino. A tale configurazione corrisponde lo stato di deformazione di Figura 3.2d. Di tutti gli step intermedi se ne riportano solo due, per non appesantire la trattazione in quanto queste immagini sono soltanto rappresentative dell'evoluzione del fenomeno. Anche di questi due step sono raffigurati sia la variabile di danno  $d_{mt}^{UP}$  in Figura 3.1b e in Figura 3.1c che la deformazione in Figura 3.2b e Figura 3.2c.

Per la validazione del modello i dati ricavati dalle prove numeriche si confrontano con quelli sperimentali provenienti da [7]. I grafici a disposizione per tali prove riportano l'andamento della densità di cricca nel provino con lo sforzo



**Figura 3.1:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per striscia monoelemento con mesh da  $0.3 \text{ mm}$ .

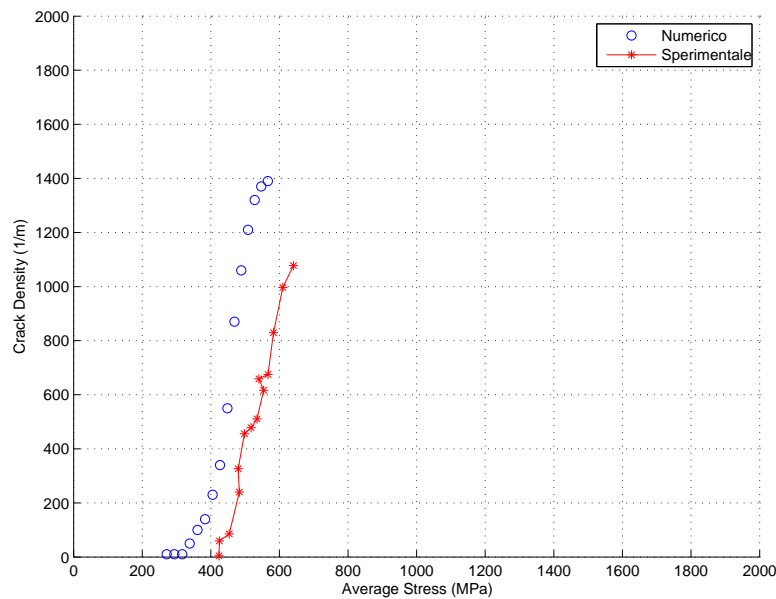


**Figura 3.2:** Andamento della deformazione  $NE_{11}$  nel tempo per striscia monoelemento con mesh da  $0.3 \text{ mm}$ .

medio nel laminato.

Per ricostruire tale andamento relativo ai risultati derivanti dal modello FE si utilizza un programma *Phyton* [6] che permette di contare il numero di cricche presenti ad ogni step e ricostruire di conseguenza l'andamento della densità di cricca al variare dello sforzo medio nel laminato.

Quanto ottenuto viene mostrato in Figura 3.3, dove si può notare che i risultati numerici non sono del tutto correlati con quelli sperimentali. Questo a seguito di problemi nel passaggio dal modello bidimensionale reale a quello monodimensionale numerico.

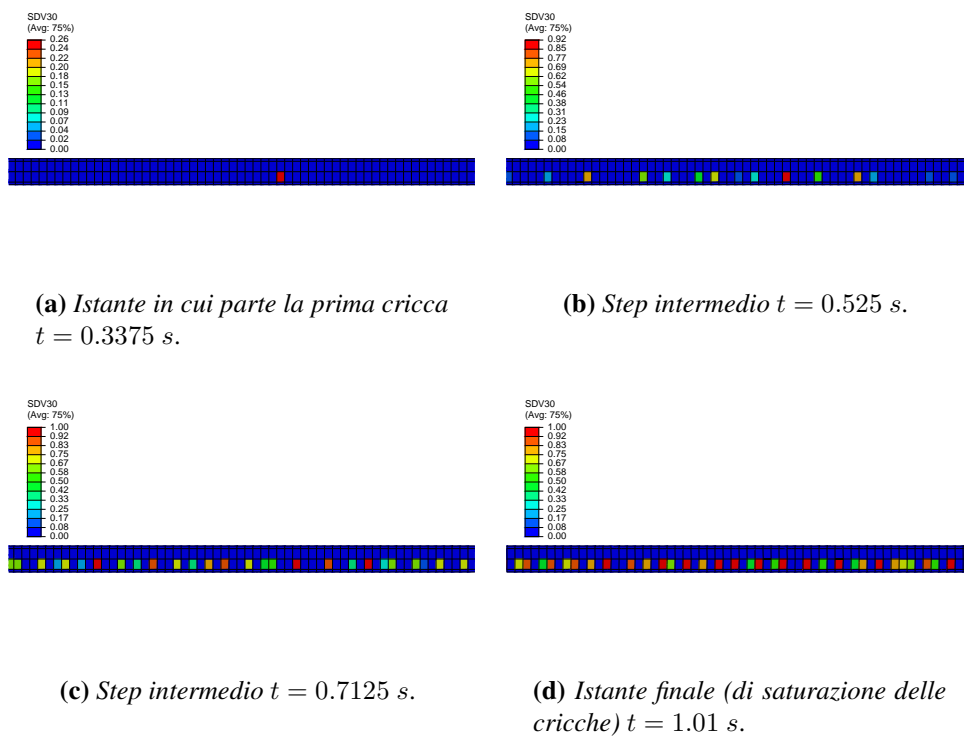


**Figura 3.3:** Andamento della densità di cricca al variare dello sforzo medio per laminato  $[0/90_3/0]$ , usando una mesh da  $0.3\text{ mm}$

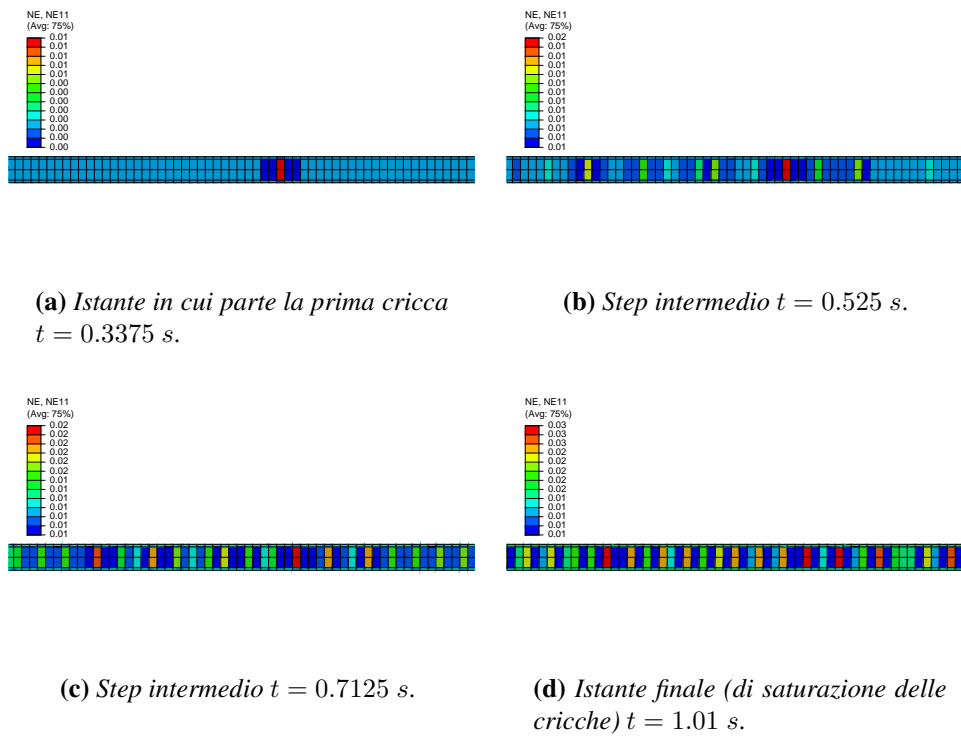
### 3.1.2 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a $0.2\text{ mm}$

In questo caso il difetto si innesca in un altro punto del provino. Molto probabilmente perché la sua lunghezza è sempre la stessa ma essendo differente la mesh varierà la popolazione su cui calcolare la distribuzione di sforzo nel materiale (con la funzione statistica di Weibull). Cambia anche l'istante di tempo in cui esso si manifesta, che corrisponde ora a  $0.3375\text{ s}$ , circa il doppio di prima. Si riportano, analogamente al caso con la mesh da  $0.3\text{ mm}$ , i valori della variabile di danno all'istante iniziale Figura 3.4a e il corrispondente valore di deformazione Figura 3.5a.

Anche qui si può notare la nascita di altri difetti nel materiale, valutando sempre i parametri  $d_{mt}^{UP}$  ed  $NE_{11}$  di cui si riportano sempre due step intermedi ri-



**Figura 3.4:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per striscia monoelemento con mesh da  $0.2 \text{ mm}$ .

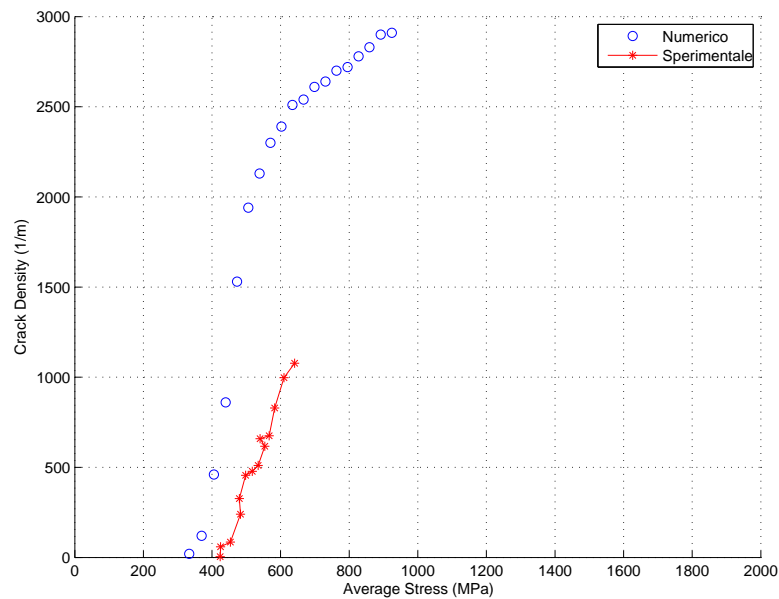


**Figura 3.5:** Andamento della deformazione  $NE_{11}$  nel tempo per striscia monoelemento con mesh da  $0.2 \text{ mm}$ .



spettivamente per la prima variabile di stato in Figura 3.4b e Figura 3.4c e per la seconda nella Figura 3.5b e Figura 3.5c.

Al termine dell'analisi il componente risulta completamente criccato, analogamente al caso con la mesh da  $0.3 \text{ mm}$  si riportano le immagini che mostrano la situazione del pezzo nell'istante finale, rappresentanti sempre la variabile di danno Figura 3.4d e le deformazioni lungo  $x$  (in assi locali) Figura 3.5d. Si riporta infine l'andamento della densità di cricca con lo sforzo medio nel materiale Figura 3.6. Si nota che riducendo la mesh di  $0.1 \text{ mm}$  i valori ottenuti discostano ancora di più da quelli sperimentali, contrariamente a quanto ci si attendeva.



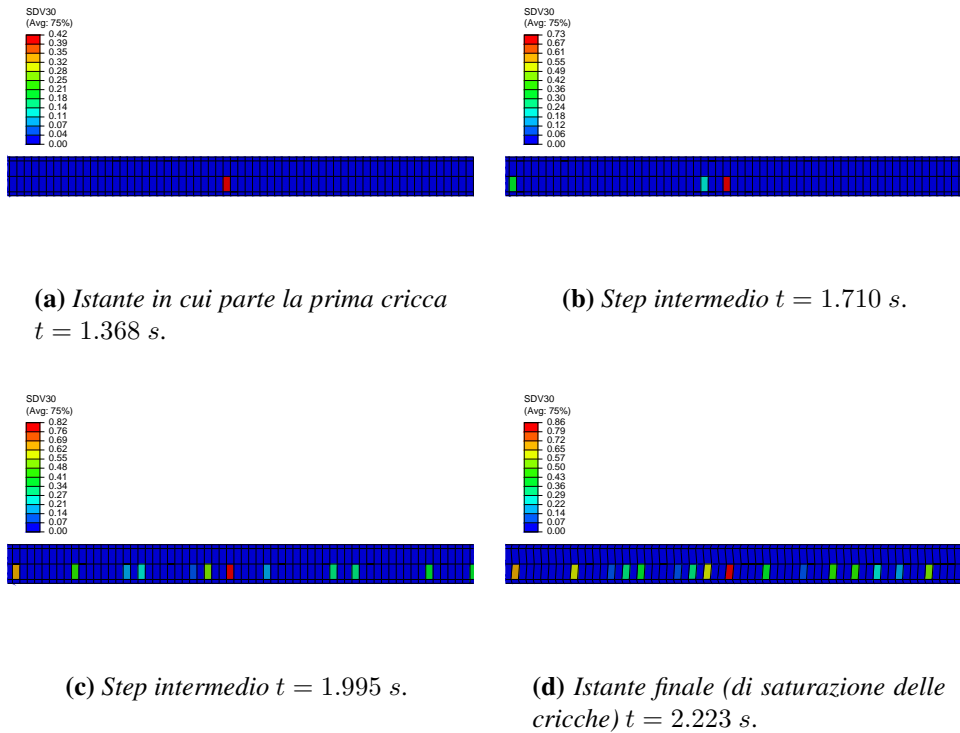
**Figura 3.6:** Andamento della densità di cricca al variare dello sforzo medio per il laminato  $[0/90_3/0]$

### 3.1.3 Caso mesh con elementi di lunghezza pari a $0.125 \text{ mm}$

Si prova a ridurre ulteriormente la mesh per vedere proprio come questa influisce sulla simulazione della propagazione di cricche nel materiale. La presenza del primo difetto compare ad un tempo molto più alto che negli altri due casi. Questo semplicemente perché è più bassa la velocità di applicazione del carico, scelta tale per minimizzare gli effetti di propagazione delle onde di sforzo nel materiale.

Lo sviluppo della cricca però avviene analogamente ai casi precedenti, con comparsa del primo difetto all'istante  $t = 1.368 \text{ s}$  (Figura 3.7a e Figura 3.8a) e successivamente nascita di altre cricche nel materiale con propagazione di alcune pre-esistenti. In Figura 3.7b ed in Figura 3.8b si riportano la variabile di danno

$d_{mt}^{UP}$  nel pezzo per due step intermedi, mentre in Figura 3.7c e Figura 3.8c sono riportate le corrispondenti deformazioni  $NE_{11}$ . Si riporta poi la situazione all'istante finale, in Figura 3.7d e Figura 3.8d, dove la densità di cricca è giunta a saturazione.

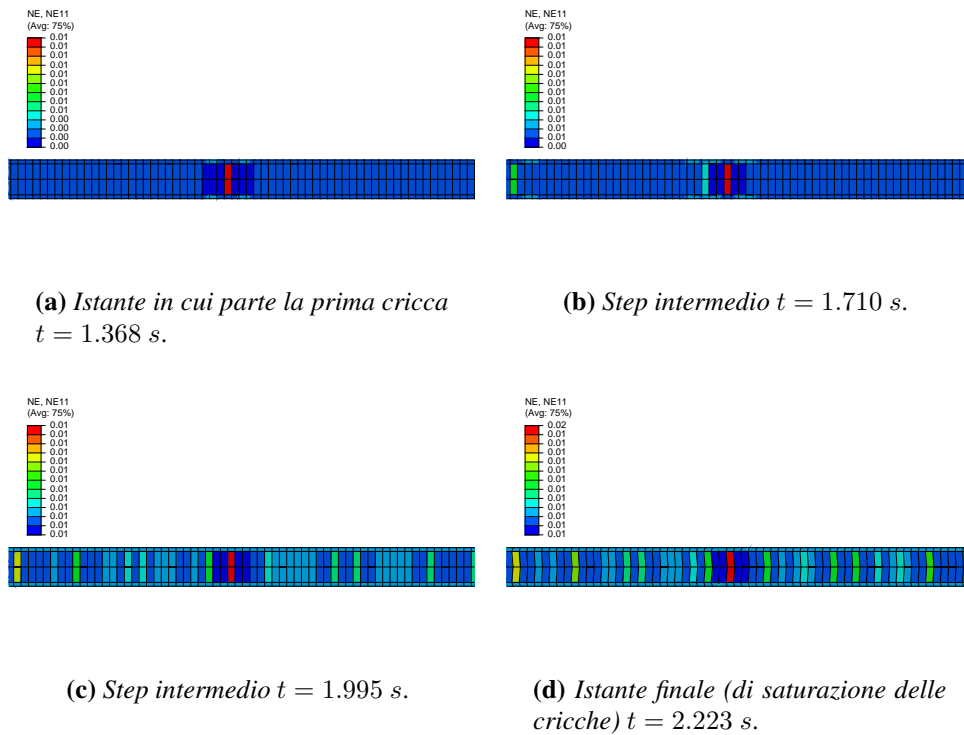


**Figura 3.7:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per striscia monoelemento con mesh da  $0.125$  mm.

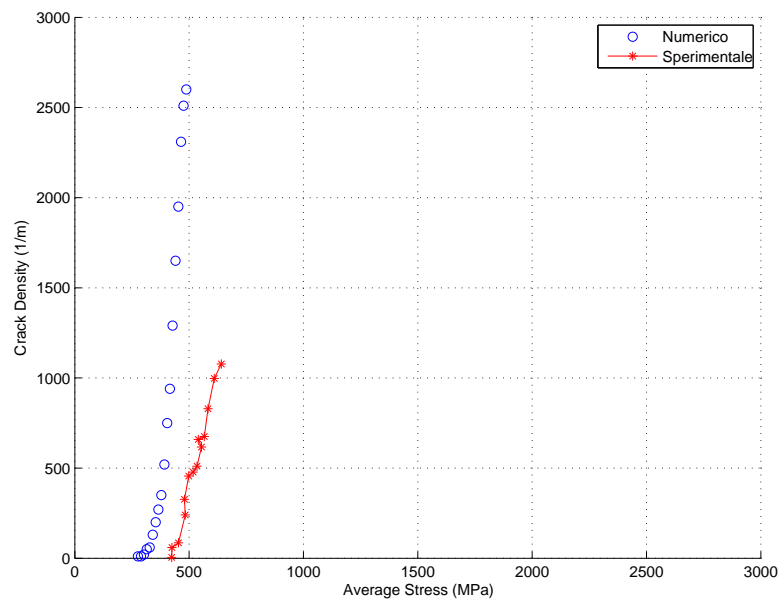
Come fatto per le altre prove si riporta il confronto tra risultati numerici e sperimentali, comparando il livello di densità di cricca nel materiale al cambiare dello sforzo medio Figura 3.9. Ancora una volta si nota una mancanza di correlazione con i dati sperimentali, dovuta all'effetto della monodimensionalità.

### 3.1.4 Conclusioni

Si è visto che con il metodo implementato si riesce ad indagare il fenomeno del *transverse matrix cracking* per quello che riguarda provini mono-elemento. Si sono riscontrati però problemi nel confronto coi dati sperimentali, questo perchè si sono considerate strisce con larghezza pari a quella del solo elemento. Per ottenere una buona correlazione c'è bisogno quindi di effettuare alcune correzioni per considerare delle particolarità che sono state finora ignorate.



**Figura 3.8:** Andamento della deformazione  $NE_{11}$  nel tempo per striscia monoelemento con mesh da 0.125 mm.



**Figura 3.9:** Andamento della densità di cricca al variare dello sforzo medio per il laminato  $[0/90_3/0]$

Le prove sperimentali sono state effettuate su provini veri e propri, nel caso analizzato invece si sta valutando un oggetto monodimensionale costituito da una sola fila di elementi.

La probabilità di cricche nel volume diventa quindi una probabilità di cricche nella lunghezza e nello spessore, in quanto una dimensione (la larghezza del provino) viene trascurata.

Tipicamente una prima cricca parte (dal bordo) e propaga nel provino, di conseguenza finché non nasce un nuovo difetto nel materiale il numero di cricche presenti è ancora pari ad uno. Questo per spiegare che la densità di cricche può considerarsi un fenomeno monodimensionale.

In generale dunque si ipotizza distribuzione lineare (si veda equazione 3.1) della densità di cricche, dove con  $S$  ci si riferisce alla probabilità di avere distanza tra le cricche inferiore ad un determinato valore, con  $\rho$  si indica la densità di cricche (tipicamente in  $1/m$ ) e con  $L$  la distanza tra le cricche (in  $m$ ).

$$\ln(1 - S) = -\rho L \quad (3.1)$$

Da questo consegue l'espressione della distribuzione cumulativa di intervalli tra cricche adiacenti, riportata in equazione 3.2.

$$1 - S = e^{-\rho L} \quad (3.2)$$

In accordo con quanto fatto da [19] si collega la presenza delle cricche con la resistenza del materiale, ipotizzandone una distribuzione descrivibile con quella relativa ad un volume unitario, detta  $S_0$ .

Di conseguenza è possibile definire come  $(1 - S_v)$  la probabilità che un volume  $V$  nella lamina a  $90^\circ$  sia integro. Nell'equazione 3.3 è riportato il legame tra  $S_0$ ,  $S_v$  ed  $R_v$ , dove quest'ultimo è definito come *rischio di rottura*.

$$\ln(1 - S_v) = V \ln(1 - S_0) = -R_v \quad (3.3)$$

Per volume di riferimento il rischio di rottura è legato allo sforzo applicato  $\sigma$  attraverso una funzione incognita  $\phi(\sigma)$ . Si giunge così alla relazione tra la probabilità di avere un volume integro e la distribuzione di resistenza stessa, riportata in equazione 3.4.

$$\ln(1 - S_0) = -\phi(\sigma) \quad (3.4)$$

L'imprecisione risiedeva nel considerare, anche per strisce monodimensionali, un volume infinitesimo  $dV = th l dw$  di materiale che porta alla definizione del rischio di frattura nel volume in funzione di  $\phi(\sigma)$  espresso come in equazione 3.5. Da questa definizione consegue la probabilità  $S_v$ , espressa in equazione 3.6, che in  $V$  ci sia una rottura. Dove si indica con  $th$  lo spessore del laminato,  $l$  la lun-

ghezza del provino e  $w$  la sua larghezza. L'errore risiedeva proprio nell'assegnare anche questa dimensione (anche se piccola perché pari a quella dell'elemento), in quanto così facendo il problema non è più monodimensionale che prevede invece larghezza trascurabile.

Si dovrebbe quindi considerare non un volume infinitesimo ma un'area  $A = th w$ , per fare ciò basta assegnare larghezza unitaria al provino. In questo modo l'integrale sul volume diventa un integrale sull'area (si veda equazione 3.6) rimane quanto riportato in equazione 3.7.

$$R_v = \int_v \phi(\sigma) dV \quad (3.5)$$

$$S_v = 1 - e^{-\int_v \phi(\sigma) dV} = 1 - e^{-\int_A \phi(\sigma) dA} \quad (3.6)$$

$$S_v = 1 - e^{-A\phi(\sigma)} \Rightarrow \ln(1 - S_v) \simeq -A\phi(\sigma) = -R_v \quad (3.7)$$

Si assume che  $A\phi(\sigma)$  sia rappresentativa della resistenza nella lunghezza della lamina a  $90^\circ$ , dove però l'andamento della resistenza è definibile tramite la distribuzione probabilistica di Weibull esprimibile come in equazione 3.8. Dove  $\sigma^*$  ed  $\varepsilon^*$  sono i parametri di scala della distribuzione di Weibull e  $w$  il parametro di forma della distribuzione cumulativa.

Questo mostra chiaramente come la scelta tra considerare un volume infinitesimo o un'area infinitesima di materiale influisca direttamente sui parametri della distribuzione di Weibull e quindi sulle proprietà del materiale stesso.

$$A\phi = A \left( \frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^w = A \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^w \quad (3.8)$$

Ricordando che  $\rho$  è legato alla distribuzione  $S$  (equazione 3.1) si sceglie di applicare il logaritmo all'equazione 3.8 ottenendo la relazione 3.9.

$$\ln(A\phi) = \ln(A) + w \ln(\varepsilon) - w \ln(\varepsilon^*) \quad (3.9)$$

Di conseguenza qualsiasi sia il valore di deformazione  $\varepsilon$  a cui corrisponde una densità di cricca  $\rho$  è possibile rappresentare quest'ultima come una retta con pendenza  $w$ , la cui espressione è riportata in eq.3.10. Dove, si ricorda, l'area  $A$  è quella relativa alla sezione perpendicolare alle fibre a  $90^\circ$  data solo dal prodotto di  $l$  con  $th$ .

$$\rho = w \ln(\varepsilon) - w \ln(\varepsilon^*) + \ln(A) \quad (3.10)$$

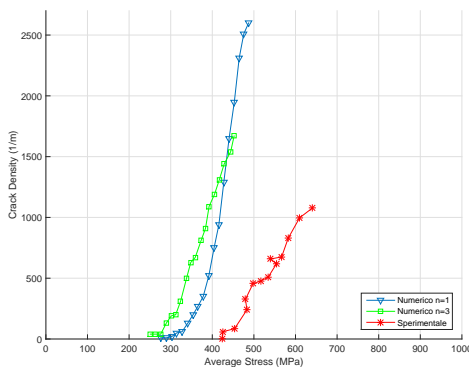
Si ripetono dunque i calcoli considerando che nel passaggio a provino monodimensionale viene meno la valutazione di cricche nel volume. Per far sì che questo sia possibile si assegna larghezza unitaria al provino in modo da consi-

derarla trascurabile e ottenere un'integrazione sull'area e non sul volume, come precedentemente annunciato. Così facendo si giunge a risultati molto più soddisfacenti. Dimostrando che questo approccio è più corretto per passare dal caso bidimensionale reale al caso monodimensionale numerico.

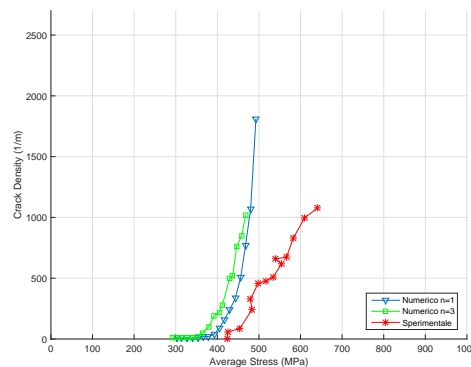
Si è deciso comunque di provare anche a cambiare il parametro  $n$  della legge di danno sia con la vecchia trattazione che con la correzione effettuata. Questo per vedere che il cambiare tale valore provoca migliore correlazione del modello ma che comunque non è sufficiente per far sì che l'andamento della densità di cricca sia più simile a quello reale. Risulta necessario, infatti, effettuare la correzione nel passaggio ad una dimensione.

Si mostra l'andamento della densità di cricca al variare di  $n$  che viene confrontato con l'analogo grafico relativo ai risultati ottenuti considerando larghezza unitaria per la striscia mono-elemento, riportati rispettivamente in:

- mesh da 0.125 mm: Figura 3.10a e Figura 3.10b
- mesh da 0.2 mm: Figura 3.11a e Figura 3.11b
- mesh da 0.3 mm: Figura 3.12a e Figura 3.12b



(a) Correlazione ottenuta considerando la larghezza reale.

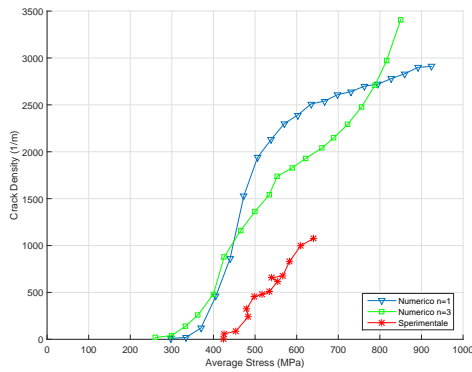


(b) Correlazione ottenuta considerando larghezza unitaria.

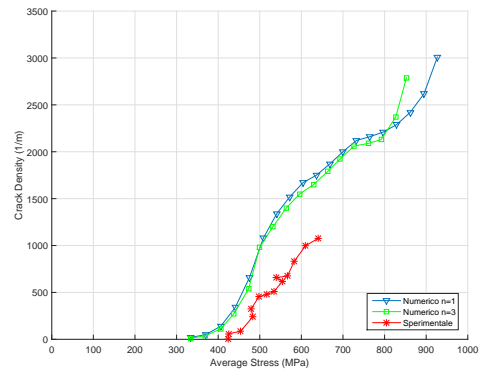
**Figura 3.10:** Densità di cricca al variare dello sforzo medio, laminato  $[0/90_3/0]$  con mesh da 0.125 mm

In tutti i casi risulta notevole come la correzione effettuata, considerando la distribuzione di cricche in lunghezza anziché nel volume, porti ad una correlazione maggiore dei risultati.

I risultati di correlazione migliore sono senz'altro quelli con la mesh da 0.3 mm per tale motivo si sceglie, per modellare i provini reali, di usare tale valore per le dimensioni degli elementi del modello.

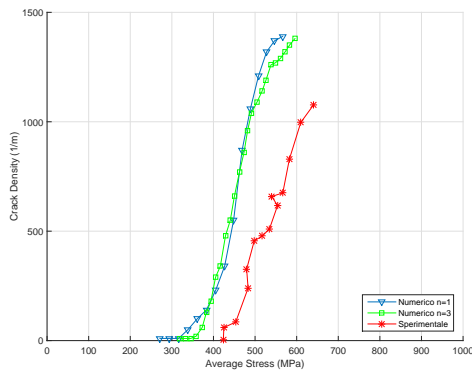


(a) Correlazione ottenuta considerando la larghezza reale.

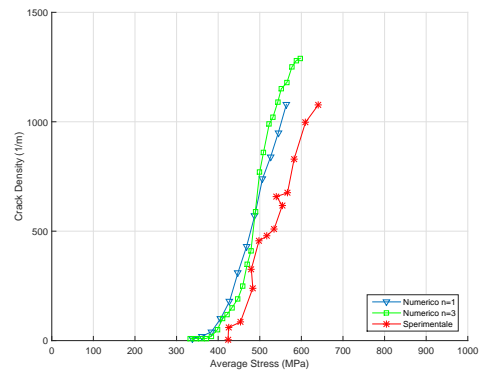


(b) Correlazione ottenuta considerando larghezza unitaria.

**Figura 3.11:** Densità di cricca al variare dello sforzo medio, laminato  $[0/90_3/0]$  con mesh da  $0.2\text{ mm}$



(a) Correlazione ottenuta considerando la larghezza reale.



(b) Correlazione ottenuta considerando larghezza unitaria.

**Figura 3.12:** Densità di cricca al variare dello sforzo medio, laminato  $[0/90_3/0]$  con mesh da  $0.3\text{ mm}$

Inoltre si riportano in Tabella 3.3 i tempi di calcolo relativi ad ogni caso, si può notare come essi siano notevolmente ridotti rispetto all'utilizzare elementi bidimensionali *SHELL* (anziché *MEMBRANE*). Notevole risparmio in tempo è dovuto principalmente all'aver riformulato la subroutine *Vumat* utilizzata adattandola al solo caso di modellazione del *transverse matrix cracking*.

Dimensioni elementi (mm)	$n = 1$			$n = 3$		
	0.125	0.2	0.3	0.125	0.2	0.3
Spessore reale						
CPU Time (hh:mm)	02 : 26	00 : 47	00 : 09	02 : 23	03 : 19	03 : 37
Spessore unitario						
CPU Time (hh:mm)	02 : 27	00 : 50	00 : 11	02 : 18	03 : 30	03 : 39
Velocità nodi (mm/s)	0.07	0.3	0.7	0.07	0.03	0.03

**Tabella 3.3:** Tempi di calcolo provini mono-elemento

I differenti tempi di calcolo sono dovuti alla diversa velocità di spostamento dei nodi alle estremità che è in alcuni casi molto bassa per evitare la propagazione di onde di sforzo nel materiale.

## 3.2 Applicazione a provini reali

Tale tecnica si è applicata poi ad elementi di dimensioni simili a quelli reali, verificando che i risultati ottenuti siano coerenti con quanto valutato da [17]. Il materiale usato è sempre il laminato *T300 – 934*, cross-ply  $[0/90_3/0]$ , con dimensioni del provino indicate in Tabella 3.1. Le condizioni di vincolo sono le stesse del caso delle prove su oggetti mono-elemento, con la differenza che i nodi di estremità sono in numero notevolmente maggiore. Cambiano invece la durata dell'analisi, la velocità di spostamento dei nodi e il mass scaling introdotto, che diventano rispettivamente di:

- 2.0 s
- 0.03 mm/s
- $10^{-6}$  s

Questi dati sono stati scelti al fine di ottenere una deformazione percentuale del pezzo pari a 0.002 evitando la propagazione di onde di sforzo nel materiale.



Differenza sostanziale con quanto esistente fino ad ora consiste nel fatto che con la tecnica sviluppata la cricca ha una tendenza a propagare parallelamente alle fibre pur non vincolandola a muoversi lungo una direzione preferenziale. Dando poi una direzionalità al danno si riesce a simularne perfettamente la propagazione, senza imporre nessun difetto iniziale sul bordo. Propagazione che avviene in modo quasi istantaneo, così come dovrebbe essere. Si indagano quindi tre casi:

- **RANDOM:** assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione il numero totale di elementi della mesh
- **CON CARD UGUALI PER FILE:** assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione gli elementi di una sola fila, questa poi viene applicata a tutte le file di elementi
- **CON CARD SFALZATE TRA FILE:** assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione gli elementi di una sola fila, questa poi viene applicata a tutte le file di elementi sommate però ad una funzione sinusoidale

Per tutte e tre le tipologie di prova si valuteranno due casi che differiscono per il parametro  $n$  (e di conseguenza  $k_{\epsilon_f}$ ) della legge di danno, analogamente a prima:

- *triangular law:*  $n = 1$  e  $k_{\epsilon_f} = 1$
- *increased strain softening:*  $n = 3$  e  $k_{\epsilon_f} = 8$

Questo per confermare che i risultati nel secondo caso sono più vicini a quelli sperimentali e per mostrare che con  $n = 3$  e  $k_{\epsilon_f} = 8$  la tendenza dei difetti a propagare parallelamente alle fibre di rinforzo è maggiore.

### 3.2.1 Caso random

Il caso *RANDOM* viene indagato per dimostrare che il modello è in grado di simulare una propagazione almeno tendenzialmente parallela alle fibre di rinforzo, grazie all'assegnazione dell'orientazione delle fasi attraverso la card \*USER MATERIAL di Abaqus. Il danno all'interno dei ply a  $90^\circ$  tende a svilupparsi parallelamente alle fibre, di conseguenza a causa della modalità di assegnazione delle proprietà di rigidità non serve di indicare una direzione preferenziale per la propagazione delle cricche. Si riporta, nelle figure seguenti, l'andamento della variabile di danno all'interno del materiale, di cui non si vedono la zona nominata *SOLID*<sub>1</sub> e la zona *SOLID*<sub>4</sub> (con riferimento alla Figura 2.5b) e cioè si rendono

visibili le sole lamine a  $90^\circ$ .

Si riportano dunque in Figura 3.13 ed in Figura 3.14 le sequenze di propagazione per il caso di distribuzione randomica di sforzo nel materiale. Si può notare come, impostando un valore più elevato alla variabile di danno, caso di *increased strain softening*, la direzionalità delle cricche sia più accentuata nonostante l'assegnazione delle proprietà del materiale sia avvenuta in maniera totalmente randomica.

Si nota che per il primo dei due casi il danno si innesta all'istante  $t = 0.8$  s e la variabile di danno (legata direttamente alla deformazione e alla rigidità, quindi allo sforzo nell'elemento) assume un valore massimo di circa 0.24. Nel secondo, invece, il difetto parte all'istante  $t = 0.76$  s con la variabile di danno del valore di 0.84. Essendo tale variabile di stato molto più grande imponendo  $n = 3$  si ha la conferma che la cricca tende a propagare molto più rapidamente, come si può notare anche dalle immagini. Ciò conferma chiaramente come l'andamento sforzi-deformazioni mostra un crollo più immediato dopo il superamento dello sforzo massimo  $\sigma_0$ , infatti si era visto (nell'equazione 2.48) che la variabile di danno  $d$  nell'elemento è inversamente proporzionale rispetto alla deformazione attuale moltiplicata per se stessa  $n$  volte ( $\varepsilon^n$ ). Lo sforzo diminuisce e la deformazione aumenta, e con essa lo sforzo agli apici della cricca.

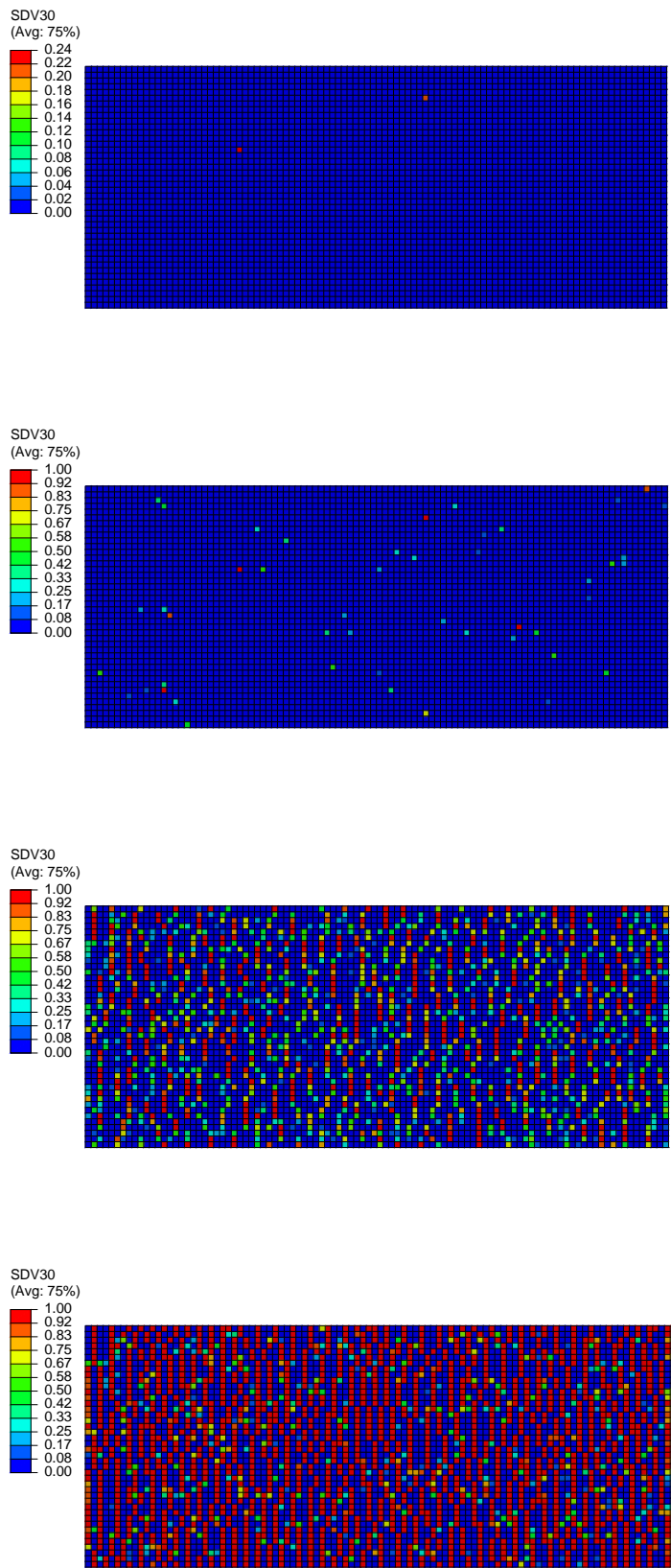
### 3.2.2 Caso con proprietà uguali per file

Nell'articolo [17] viene riportato come sia possibile rappresentare la propagazione di una frattura intralaminare all'interno del materiale a patto che si imponga alle difettosità di partire dal bordo e che si assegnino a tutte le file di elementi le stesse proprietà. Ovvero si generano le caratteristiche del materiale in modo che esse rispettino la funzione densità di probabilità statistica di Weibull per una popolazione pari a quella di una sola fila di elementi.

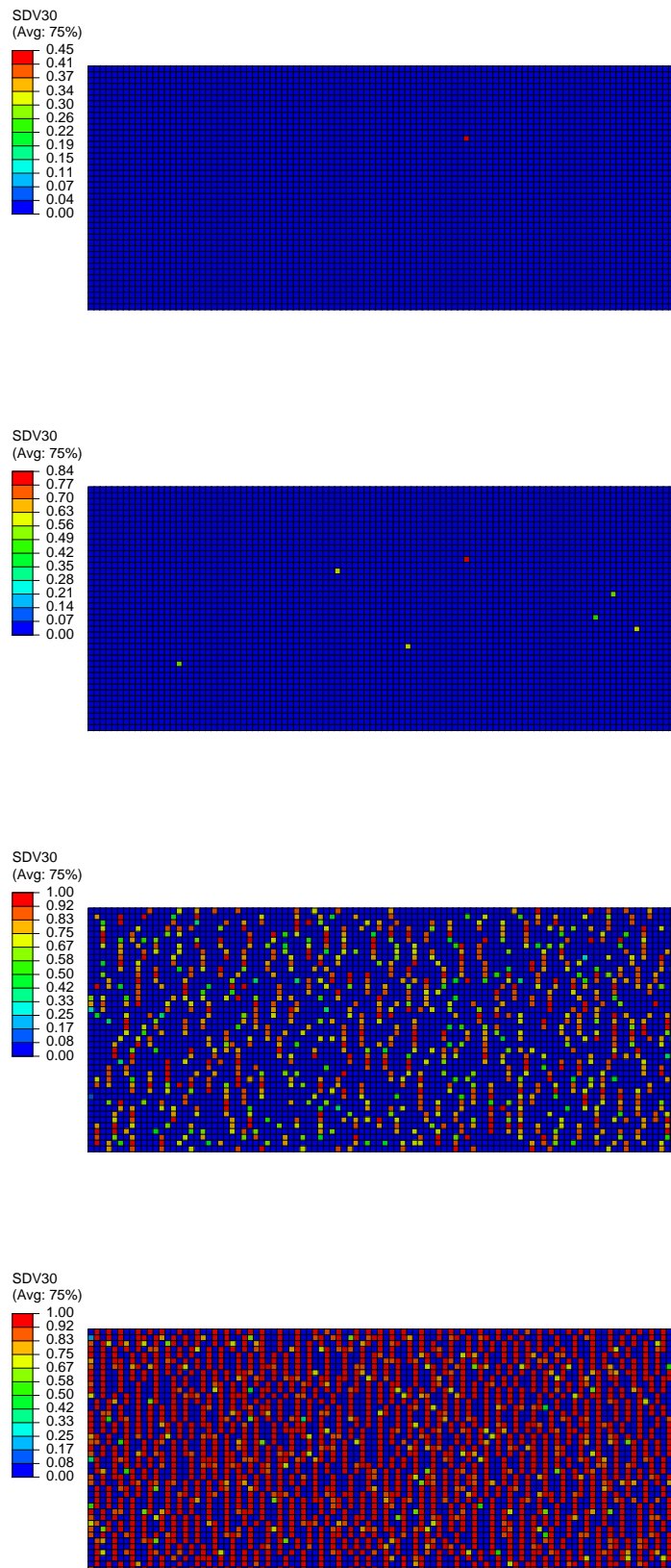
Le "CARD" di materiale ad essi attribuite vengono poi egualmente distribuite lungo la direzione trasversale del provino. Così facendo tutte le file di elementi che lo caratterizzano avranno la stessa identica assegnazione di proprietà.

Si dimostra che con la tecnica utilizzata si riesce a simulare la propagazione dei difetti nel materiale senza imporre che essi partano dal bordo. Analogamente agli altri casi si riportano i risultati ottenuti sia per il caso di *triangular law*, si veda Figura 3.15, sia per il caso di *increased strain softening*, in Figura 3.16.

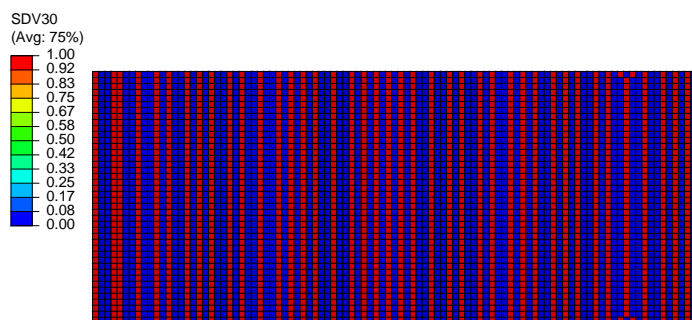
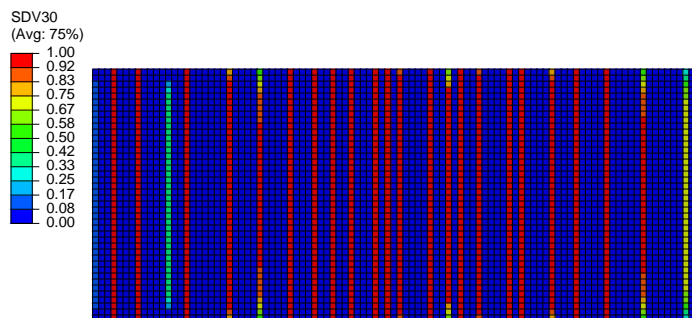
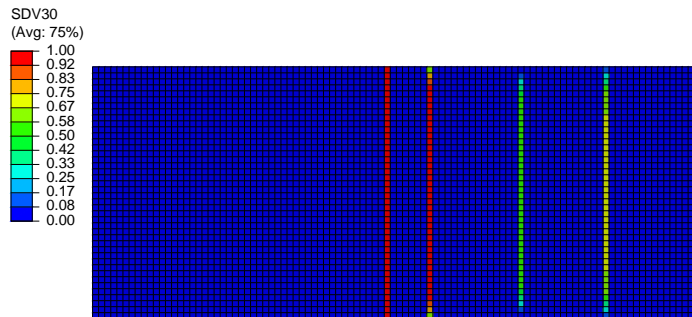
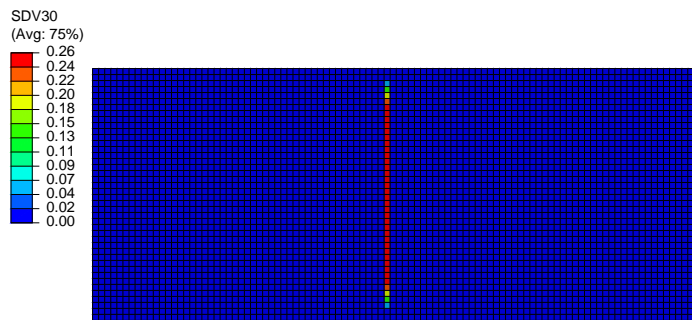
I risultati ottenuti sono simili a quelli di [17], cioè la propagazione delle cricche avviene in modo istantaneo. La tendenza a partire dal bordo si può ottenere in due modi. Uno prevede di agire direttamente sulla rigidità a taglio nel materiale, l'altro invece è quello di assegnare le proprietà non tutte identicamente tra file ma sfalzandole in modo che gli sforzi siano massimi ai bordi.



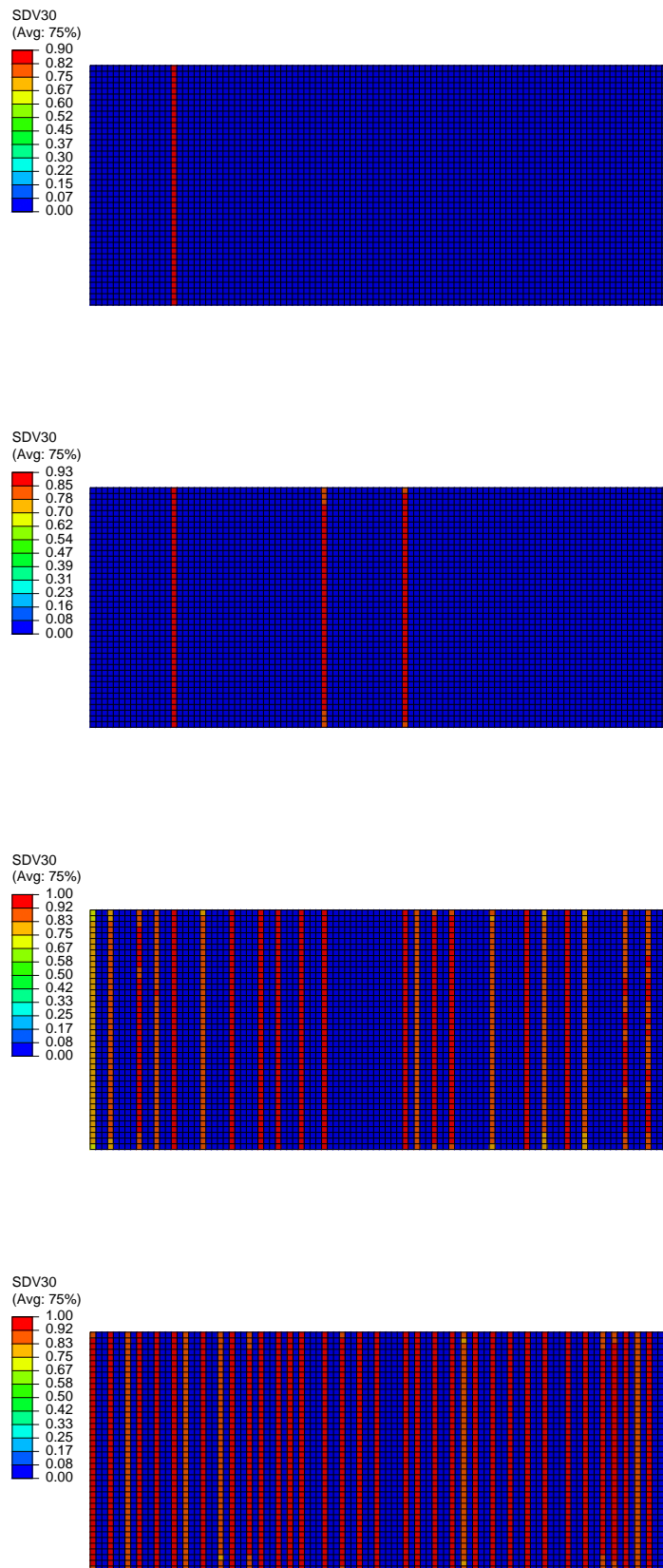
**Figura 3.13:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso *RANDOM* con  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$



**Figura 3.14:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso *RANDOM* con  $n = 3$  e  $k_{\epsilon_f} = 8$



**Figura 3.15:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$



**Figura 3.16:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 3$  e  $k_{\varepsilon_f} = 8$

### 3.2.3 Caso con proprietà diverse tra file

Per simulare la partenza dai bordi si sceglie la seconda possibilità. Alla prima fila di elementi si assegnano dunque i valori di sforzo in modo da rispettare la curva probabilistica di Weibull, per ogni elemento poi tale parametro viene maggiorato in larghezza sommandovi una funzione sinusoidale.

Si sceglie di aggiungere alle proprietà degli elementi della prima fila una funzione che sia minima alle estremità e massima al centro e tale che la sua media su tutta la lunghezza sia nulla in modo da assicurare una distribuzione di tipo Weibull anche sugli elementi delle altre file.

La funzione sinusoidale è stata scelta perché lascia invariata la media della distribuzione di Weibull, essendo la funzione seno a media nulla. Data quindi la popolazione comprendente il numero di elementi della prima fila e calcolati per questa i valori di sforzo da attribuire per rispettare la funzione probabilistica, si procede poi col sommare ad assegnare agli elementi delle file consecutive le stesse proprietà della prima fila ma sommate alla funzione sinusoidale mostrata in equazione 3.11. Dove con  $x$  si indica la coordinata lungo il lato corto del provino, la cui dimensione viene indicata con  $w$ , mentre  $A$  è l'ampiezza della funzione stessa.

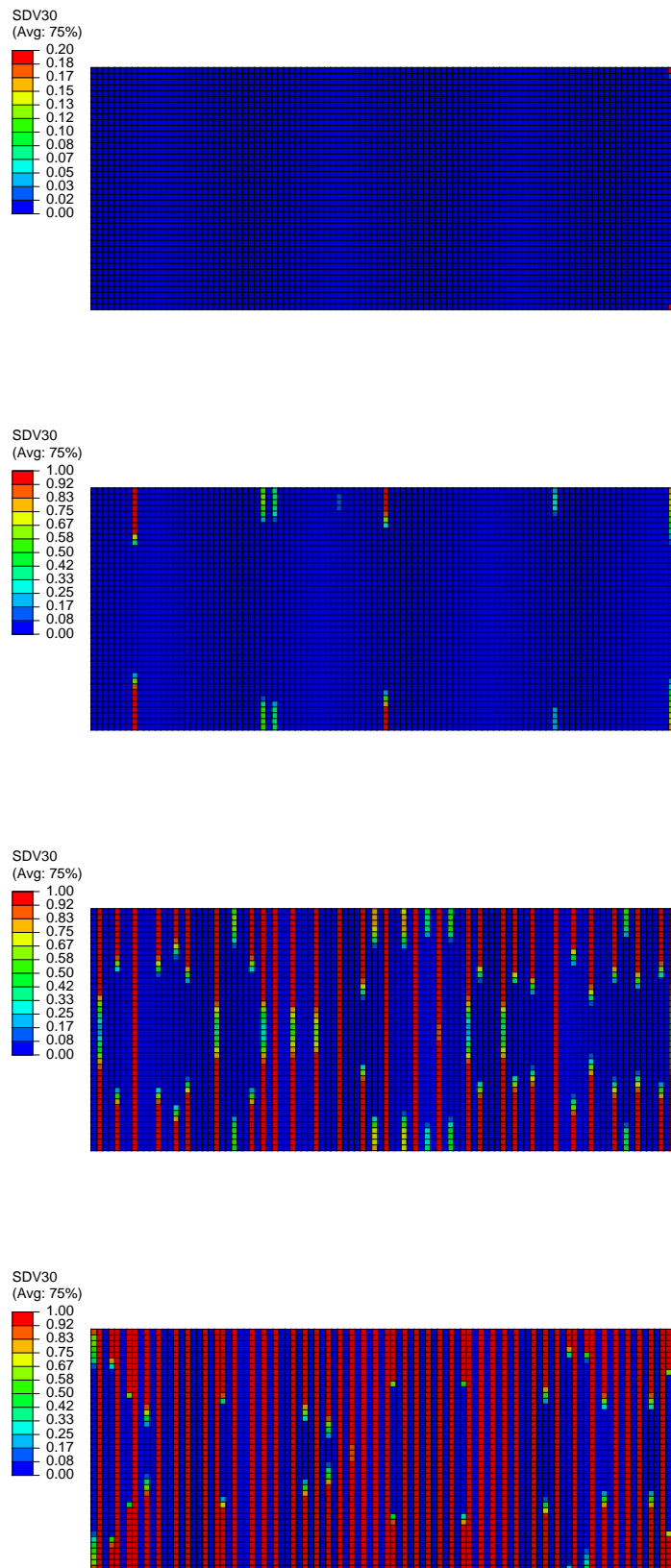
$$\sin(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{w}\left(x + \frac{3}{4}w\right)\right) \quad (3.11)$$

Si sceglie di provare per la funzione sinusoidale due valori di ampiezza: 5 *MPa* e 10 *MPa*. Non discostando di molto tra loro i risultati si decide di riportarne solo uno dei due e cioè il secondo, per il quale la propagazione della cricca avviene in modo più netto a partire dai bordi. Si riportano in Figura 3.17 ed in Figura 3.18 i casi ottenuti rispettivamente ponendo  $n = 1$  ed  $n = 3$ , per i quali si valgono le stesse considerazioni del caso randomico.

### 3.2.4 Conclusioni

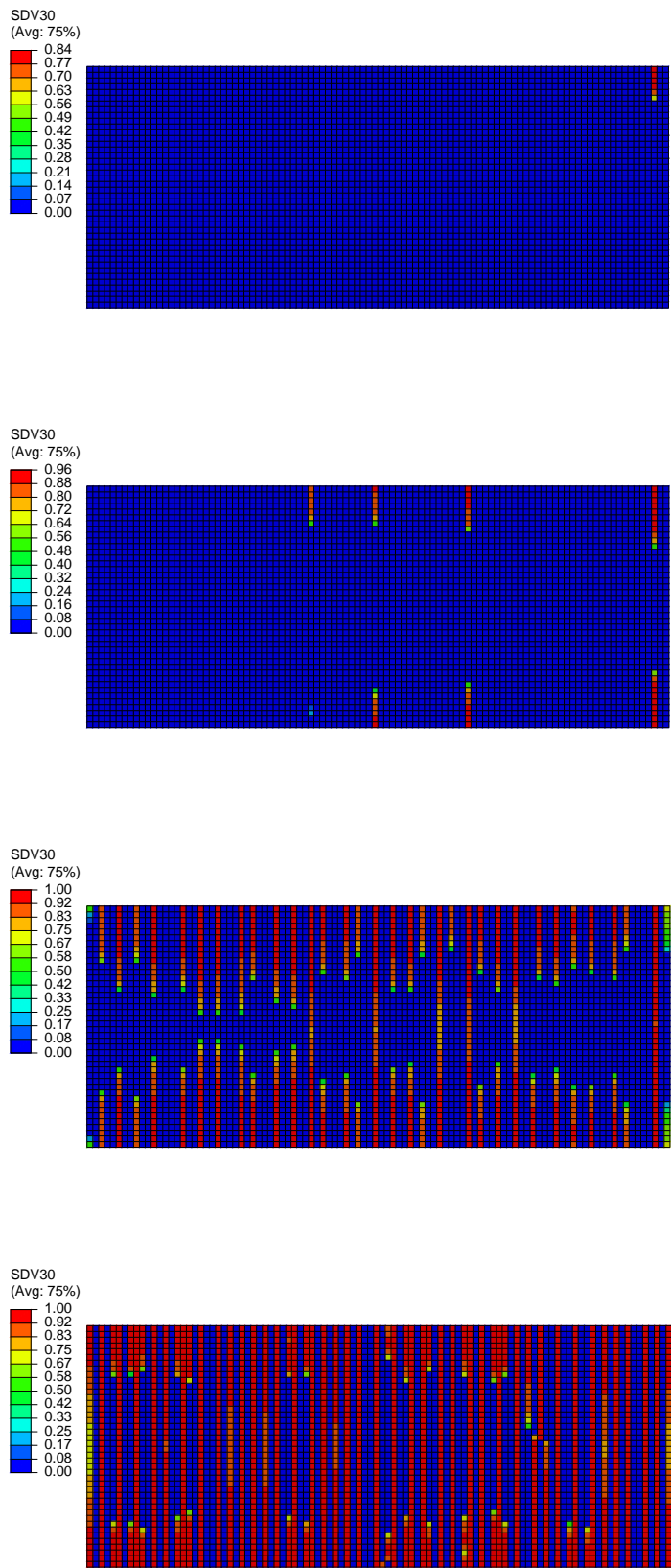
Imponendo un valore di esponente della variabile di danno maggiore dell'unità si ottiene una propagazione della cricca più istantanea, in accordo con i risultati degli studi svolti precedentemente che però utilizzavano altri metodi [17].

Si riportano in Tabella 3.4 i tempi di calcolo ottenuti per le varie prove, si può notare come essi siano notevolmente inferiori rispetto all'utilizzare elementi bidimensionali shell che introducono gradi di libertà aggiuntivi nel sistema e rispetto all'utilizzo della vecchia subroutine Vumat che era pensata per simulare anche fenomeni di delaminazione. In particolare è notevole il risparmio in tempi rispetto alla modellazione attraverso l'uso di elementi coesivi.



**Figura 3.17:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 1$  e  $k_{\bar{\epsilon}_f} = 1$





**Figura 3.18:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 3$  e  $k_{\epsilon_f} = 8$

		CPU Time (hh:mm)
$n = 1$ $k_{\varepsilon_f} = 1$	Random	20:04
	Uguali	20:00
	Con sin	20:01
$n = 3$ $k_{\varepsilon_f} = 8$	Random	21:02
	Uguali	21:49
	Con sin	21:33

**Tabella 3.4:** Tempi di calcolo sui provini *cross-ply*

## Capitolo 4

### Applicazione a laminati angle-ply

Con le tecniche convenzionali ci sono problemi di modellazione per laminati con orientazione differente da  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Questo perchè si riesce a simulare la propagazione delle cricche solo nella direzione della mesh, cioè soltanto longitudinalmente o trasversalmente ai lati lunghi del provino. Non si riesce, infatti, a modellare la rottura in altre direzioni in quanto ci sono problemi nell'indicare al codice che, una volta emerso un difetto in un elemento della mesh, questo deve propagare rompendo il primo elemento vicino nella direzione delle fibre. Ricordando che per laminati *angle-ply* le fibre possono avere qualsiasi orientazione.

Con la tecnica di modellazione bi-fasica utilizzata si riesce ad indirizzare la propagazione della cricca qualunque sia l'angolazione delle fibre nella lamina in cui essa ha origine, cosa finora impossibile da simulare. Questo grazie proprio all'assegnazione dell'orientazione come una delle proprietà delle fasi che, senza dare una direzione preferenziale di rottura, permette al codice ad elementi finiti di modellare la propagazione in tutte le direzioni.

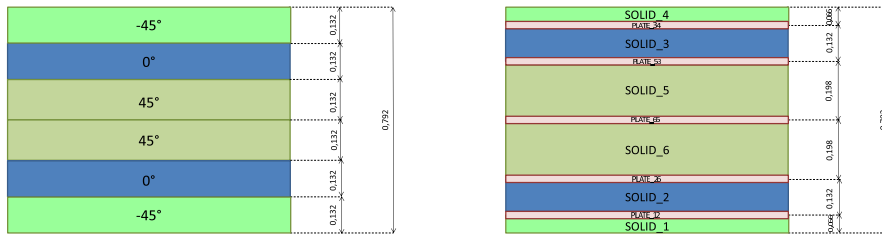
Per dimostrare questo si analizzerà, anche per questi laminati, il caso soprannominato *RANDOM*, che serve per verificare che senza imporre una direzione preferenziale si riesce ad avere un'avanzamento del difetto tendenzialmente in direzione parallela alle fibre di rinforzo.

Si decide di analizzare sempre lo stesso tipo di materiale, fibra di carbonio con matrice epossidica T300 – 934, ma con sequenza di laminazione differente.

Si sceglie un tipo di stratificazione che vede le due lamine centrali con orientazione delle fibre a  $45^\circ$ , ad esse si sovrappongono (ambo le parti) altri due ply di materiale, uno a  $0^\circ$  ed uno a  $-45^\circ$  per ottenere un laminato che sia simmetrico e bilanciato. In Figura 4.1a è illustrata la sequenza di laminazione scelta, con riportata in Figura 4.1b la decomposizione del materiale.

Analogamente al caso di laminato  $[0/90_3/0]$  si indagano i casi:

- *RANDOM*: assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione il numero totale di



(a) Laminato reale .

(b) Decomposizione laminato e nomenclatura.

**Figura 4.1:** Laminato T300 – 934 reale e decomposto (tutte le grandezze riportate sono in millimetri).

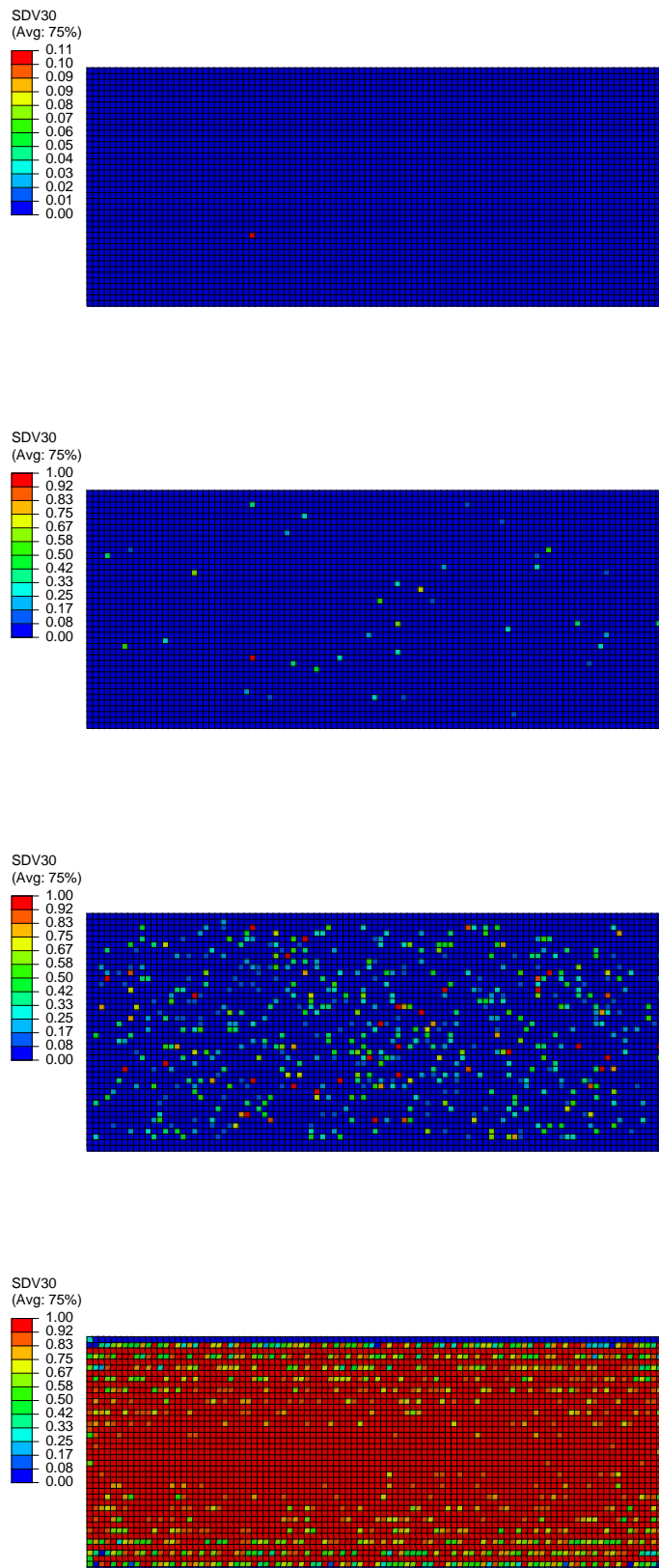
elementi della mesh

- CON CARD UGUALI PER FILE: assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione gli elementi della diagonale principale, questa poi viene applicata a tutte le diagonali di elementi
- CON CARD SFALZATE TRA FILE: assegnando le card di materiale agli elementi utilizzando una distribuzione di Weibull che vede come popolazione gli elementi della diagonale principale, questa poi viene applicata a tutte le diagonali di elementi sommate però ad una funzione sinusoidale

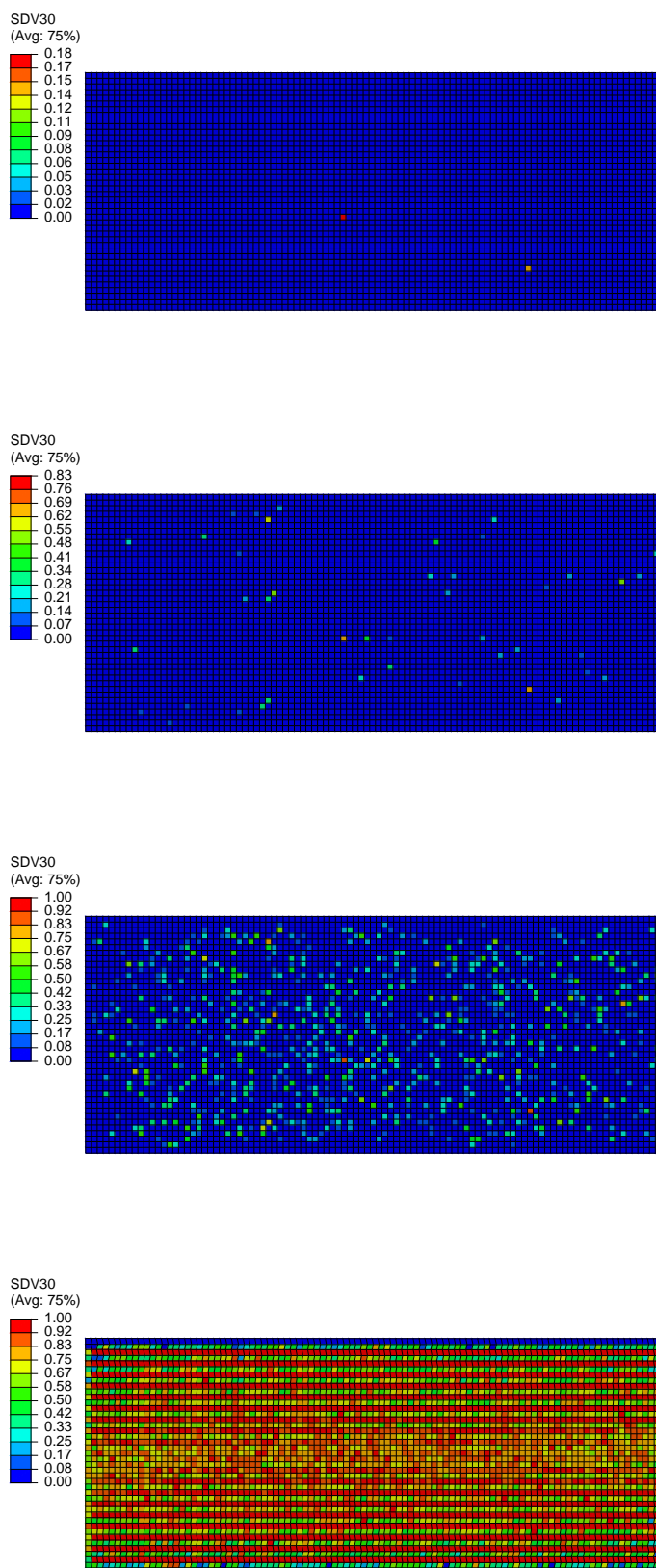
#### 4.0.5 Caso random

Esattamente a quanto fatto per il caso di laminato  $[0/90_3/0]$  si assegnano al materiale le proprietà in modo randomico, ovvero senza dare una direzionalità preferenziale ma generando la distribuzione di sforzi di Weibull su una popolazione che comprende tutti gli elementi dello strato di interesse.

Si mostra in Figura 4.2 che c'è una minima tendenza a propagare in diagonale che è comunque molto inferiore a quella di laminati *cross-ply*. Cambiando la legge di danno, e cioè imponendo  $n = 3$  e  $k_{\epsilon_f} = 8$ , si riesce ad aumentare la direzionalità dei difetti, si mostra cosa succede al variare di tali parametri, i risultati per il caso di *increased strain softening* sono riportati in Figura 4.3.



**Figura 4.2:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$



**Figura 4.3:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 3$  e  $k_{\bar{\epsilon}_f} = 8$

#### 4.0.6 Caso con proprietà uguali per diagonali

Si assegnano le proprietà all'antidiagonale principale, in modo che l'andamento di resistenza dei suoi elementi rispetti la distribuzione densità di probabilità statistica di Weibull e i valori ottenuti vengono applicati a tutte le altre antidiagonali del provino.

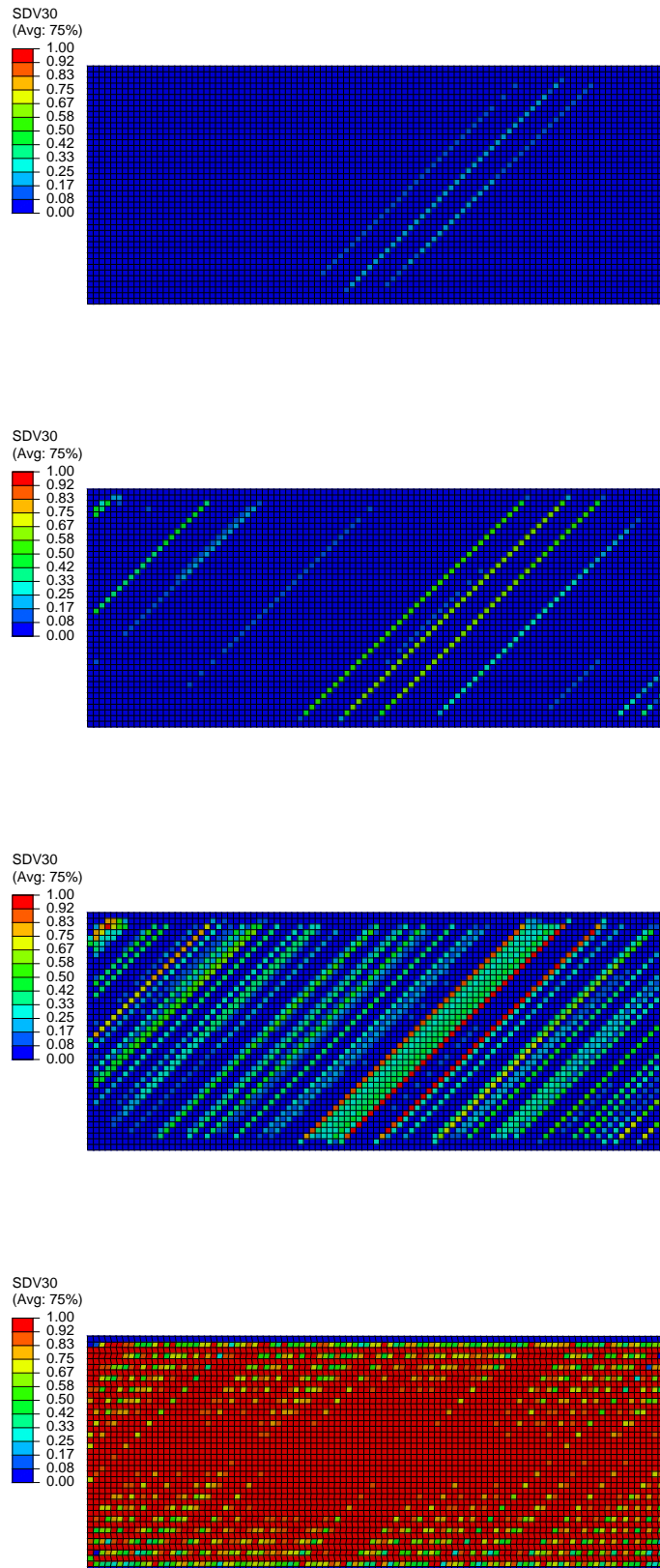
La parte difficoltosa riguarda proprio l'assegnazione delle proprietà. Nell'elemento discretizzato, volendo muoversi parallelamente alle fibre, ci sono  $N_l - N_w + 1$  antidiagonali costituite dallo stesso numero di elementi (ovvero tutte uguali come dimensioni) e  $2(N_w - 1)$  antidiagonali di lunghezze differenti non solo dalla principale ma anche tra loro. Ricordando che  $N_w$  è il numero di elementi presenti sul lato corto del provino ed  $N_L$  il numero di elementi sul lato lungo.

Lo scopo è quello di avere tutte le diagonali uguali e quindi tutti gli elementi di una stessa antidiagonale saranno caratterizzati dallo stesso valore di sforzo. Per capire questo concetto viene in aiuto l'analogia col caso  $[0/90_3/0]$  analizzato in precedenza. Si costruiva, infatti, la distribuzione di Weibull per la prima fila di elementi (con la quale ci si riferisce, ovviamente, a quella sul lato lungo) e la si assegnava identica a tutte le file. Così facendo, se si guarda al provino discretizzato come se fosse una matrice di  $N_w$  righe ed  $N_l$  colonne, tutti gli elementi di una stessa colonna della matrice devono risultare identici tra loro. Quindi si può concludere che gli elementi paralleli alle fibre di rinforzo devono avere tutti lo stesso valore di sforzo, regola generale che vale qualunque sia l'orientazione.

Di conseguenza nel caso del laminato analizzato su tutte le antidiagonali devono comparire valori di proprietà identici. Si riporta in Figura 4.4 ed in Figura 4.5 i risultati ottenuti variando il parametro  $n$  della legge di danno, in modo da effettuare un confronto analogamente a quanto fatto per gli altri casi e verificare ancora una volta come il secondo dei due modelli presenti, rispetto al primo, una propagazione in diagonale più netta e più simile alla realtà.

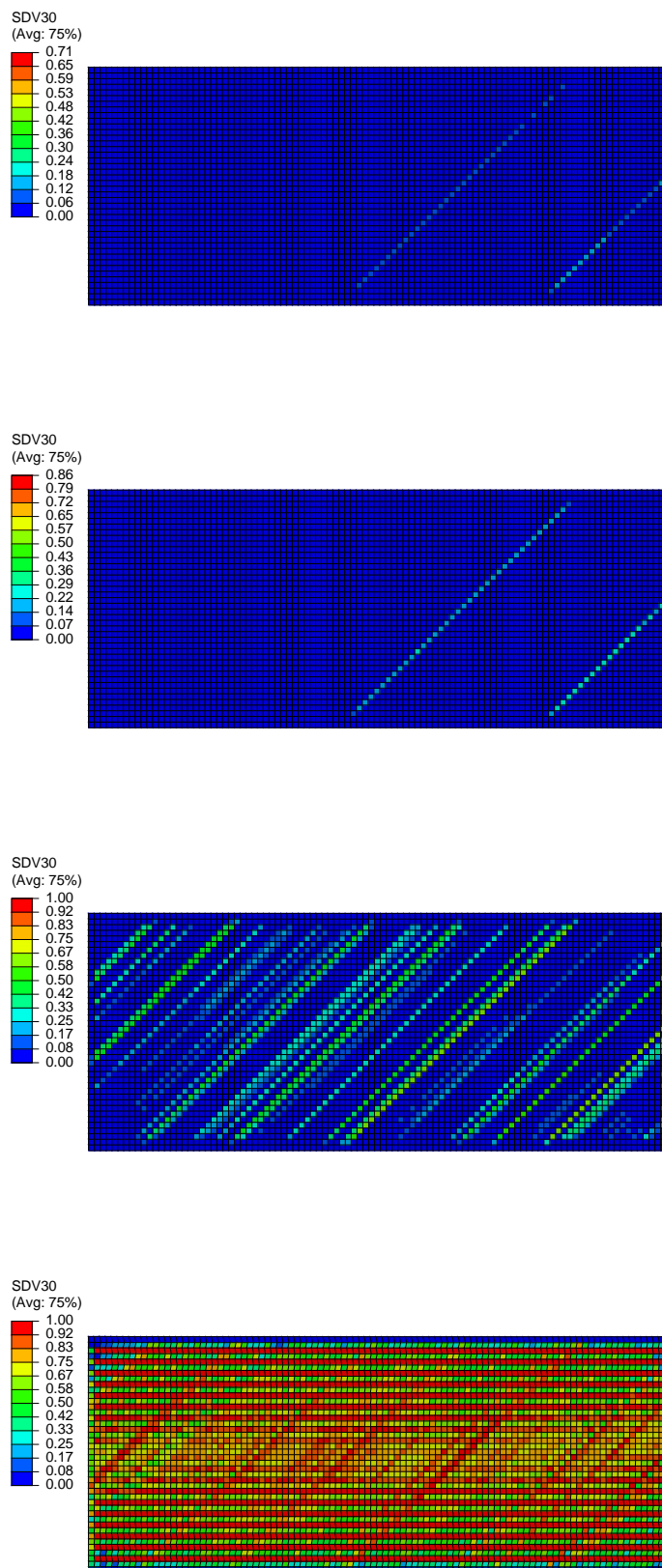
#### 4.0.7 Caso con proprietà diverse tra diagonali

Anche nel caso di laminati *angle-ply* sarebbe ideale che i difetti partissero dal bordo. Si adotta, per simulare tale comportamento, la stessa tecnica utilizzata prima. Si calcolano cioè i parametri per una delle diagonali principali seguendo la distribuzione di Weibull e si somma a tali valori una funzione sinusoidale che valga il massimo (in modulo) alle estremità e al centro, variabile quindi con le coordinate. Analogamente al caso del laminato *cross-ply* si esaminano due valori di ampiezza per la funzione, notando però che con un'ampiezza pari a  $10 \text{ MPa}$  i risultati sono un pochino migliori, si riportano solo questi ultimi. In particolare si illustra cosa succede variando il parametro della legge di danno, indagando



**Figura 4.4:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 1$  e  $k_{\bar{\epsilon}_f} = 1$





**Figura 4.5:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 3$  e  $k_{\varepsilon_f} = 8$

per confronto sempre i valori  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$  con  $n = 3$  e  $k_{\varepsilon_f} = 8$ , riportati rispettivamente in Figura 4.6 e in Figura 4.7.

#### 4.0.8 Conclusioni

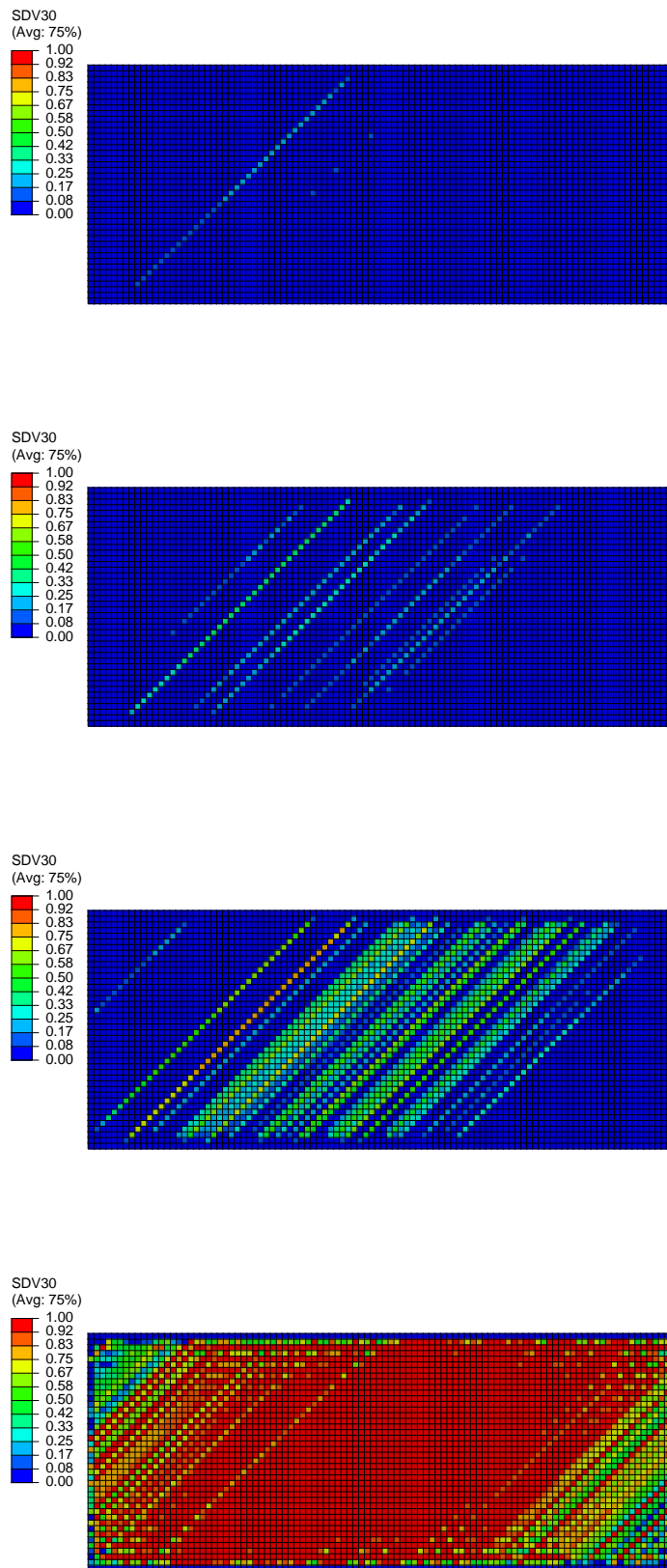
Non è stato possibile effettuare una correlazione coi dati sperimentali, in quanto in letteratura sui laminati *angle-ply* non sono presenti informazioni nè su prove numeriche nè su prove sperimentali. Questi materiali infatti sono di difficile indagine da entrambi i punti di vista ma mentre nel caso di test in laboratorio è possibile effettuare delle prove nel caso di test numerici, con le tecniche finora presenti, non si riesce a simulare la propagazione della cricca in direzioni diverse da  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Attraverso la tecnica di modellazione bi-fasica si riesce, invece, a indicare in che direzione deve propagare la cricca. A differenza del caso di laminato  $[0/90_3/0]$ , però, sfalzare le proprietà con una funzione aggiuntiva sinusoidale non è sufficiente per imporre alle difettosità di partire dai bordi.

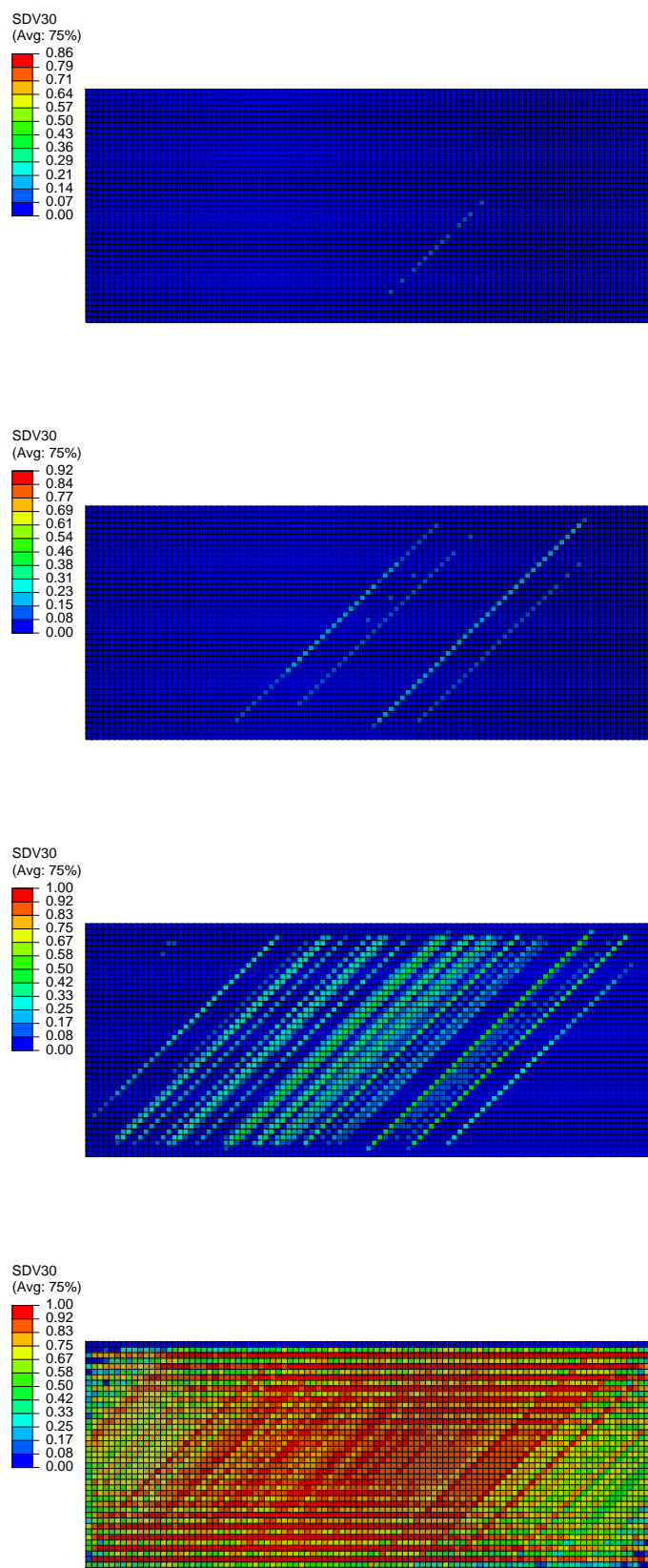
Per quanto riguarda i tempi di calcolo, anche in questo caso, risultano notevolmente ridotti rispetto sia all'utilizzo degli elementi coesivi che della vecchia subroutine, come mostrato in Tabella 4.1. La riduzione è ancora maggiore rispetto al caso di laminati *cross-ply* in quanto, essendo il provino più spesso (6 strati anziché sei) e resistendo maggiormente ad uno sforzo in direzione assiale, è stato possibile assegnarvi una più alta velocità ai nodi.

		CPU Time (hh:mm)
$n = 1$ $k_{\varepsilon_f} = 1$	Random	11:31
	Uguali	11:48
	Con sin	11:14
$n = 3$ $k_{\varepsilon_f} = 8$	Random	11:47
	Uguali	11:15
	Con sin	10:59

**Tabella 4.1:** Tempi di calcolo sui provini *angle-ply*



**Figura 4.6:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 1$  e  $k_{\varepsilon_f} = 1$



**Figura 4.7:** Andamento della variabile  $d_{mt}^{UP}$  di danno nel tempo per il caso con  $n = 3$  e  $k_{\bar{\epsilon}_f} = 8$

# Capitolo 5

## Conclusioni

Con questo lavoro si è voluto dimostrare la validità del metodo nella simulazione di fenomeni di rottura nei materiali compositi, in particolare del *transverse matrix cracking*. Il vantaggio nel suo utilizzo rispetto al metodo con elementi coesivi è notevole. Come già detto non si aggiunge rigidità al modello (dovuta proprio alla presenza dei coesivi stessi) e il risparmio in costo computazionale è elevato. I tempi di calcolo risultano di gran lunga ridotti mantenendo comunque un'ottima correlazione coi risultati sperimentali usando una discretizzazione nemmeno troppo fine.

Il vantaggio notevole riguarda la capacità di simulare, con la tecnica di modellazione bi-fasica, il propagarsi delle cricche in diverse direzioni. Basta cambiare nelle proprietà del materiale le orientazioni delle semi-matrici del modello utilizzato ed assegnare, durante la generazione delle card, il tipo di distribuzione voluta. A questo scopo è stato sviluppato in questo lavoro un programma Matlab che permette di scegliere che tipo di distribuzione da assegnare (tra le scelte ci sono i tre casi riportati in questa tesi) e genera in automatico le proprietà del materiale. Unica nota è che per cambiare effettivamente l'orientazione bisogna riformulare l'assegnazione delle proprietà nello script a seconda dell'angolazione con cui ci si intende muovere lungo la mesh e questa coincide ovviamente con l'orientazione delle fibre del ply in cui il fenomeno di nascita e propagazione delle cricche si manifesta.

### 5.1 Sviluppi futuri

Numerosi sono gli sviluppi che possono riguardare questa tecnica. Per quel che riguarda i laminati *cross-ply* può essere adattata per simulare il passaggio del difetto dall'interlamina all'intralamina, basterebbe modificare opportunamente la subroutine Vumat utilizzata in questo lavoro di tesi. Per i laminati *angle-ply*, invece, si nota che non si è riusciti a modellare la partenza dei difetti

dal bordo. Questo perché, come detto nel Capitolo 2.3.2, alle basi della legge di danneggiamento sviluppata c'è l'assunzione di non considerare degradazione alcuna per la rigidità a taglio del materiale.

Qualora si volesse considerare gli effetti di bordo l'energia potenziale da cui derivare la variabile termodinamica  $Y$  da cui dipende il danneggiamento andrebbe modificata come descritto in equazione 5.1.

$$2e_d = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}(1-d_{mt})} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}(1-d_{mt})} & \frac{1}{E_{22}(1-d_{mt})} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}(1-d_{mt})} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}(1-d_{mt})} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Infatti il motivo per cui nascono cricche dal bordo è proprio a causa del generarsi di un'azione di taglio sulla superficie laterale esterna che dovrebbe essere invece scarica. Tale azione di taglio nei laminati  $[0/90]$  è trascurabile rispetto agli sforzi in direzione assiale e tangenziale al carico, nel caso dei laminati a  $[\pm 45]$  invece essa non è assolutamente trascurabile. Motivo per cui per riuscire a simulare la partenza dei difetti dal bordo bisognerebbe intervenire direttamente sulla legge costitutiva del materiale.

Effettuare questa operazione eliminerebbe anche un altro problema che emerge quando la cricca propaga, essa invece di arrivare fino ai bordi passa alla semimatrice inferiore.

Tale difetto è però eliminabile anche discretizzando le semimatrici non con un unico strato di elementi solidi (come fatto) ma con più strati di elementi solidi di spessore più piccolo, di modo che la cricca non passi al ply superiore a  $0^\circ$  ma si trasmetta allo strato successivo di brick che costituisce però sempre la zona a  $90^\circ$  dove il difetto realmente parte.

## Bibliografia

- [1] Department of Defense of United States of America. *Composite Material Handbook*. MIL-HDBK-17.
- [2] <http://composite.about.com/library/data/blc-t300-934-1.htm>.
- [3] Davies G.A.O. Mi Y., Criesfield M.A. Progressive delamination using interface elements. 32(14):1246–1272.
- [4] de Moura M.F.S.F. Camanho P.P., Dávila C.G. Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. 37(16):1415–1438.
- [5] Li S. Zou Z., Reid S.R. A continuum damage model for delaminations in laminated composites. 51(2):333–356, 2003.
- [6] Merlini G. Lucchetta A.A. Modellazione delle delaminazioni e del danneggiamento progressivo intra-laminare nei laminati compositi mediante un approccio bi-fasico.
- [7] Berthelot J.M. Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates: Static and fatigue loading. 56:111–147.
- [8] Reifsnider K.L. *Fatigue of Composite Materials*. Elsevier Science Ltd.
- [9] Reifsnider K.L. Highsmith A.L. *Stiffness Reduction Mechanism in Composite Laminates*, pages 103–117. American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- [10] Zok F. W. Genet M. Cox B. Marshall D. Sudre O. Yang Q. Flores S., Evans A. G. Treating matrix nonlinearity in the binary model formulation for 3d ceramic composite structures. Part A 41:222–229.
- [11] Bettini P. Baldi A. Airoidi A., Sala G. An efficient approach for modeling interlaminar damage in composite laminates with explicit finite element codes.

- [12] Belotti P. Bettini P. Sala G. Baldi A., Airoidi A., editor. *Numerical and experimental analyses of multiple delaminations in curved composite laminates*. The XIX International Conference on Composite Materials.
- [13] Ladevèze P. Abisset E., Daghia F. *On the Validation of a Damage Mesomodel for Laminated Composites by Means of Open-Hole Tensile Tests on Quasi-Isotropic Laminates*, pages 1515–1524. American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- [14] Laws N. Dvorak G.J. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates ii. first ply failure. *Journal of Composite Materials*, 21:309–329, 1987.
- [15] Wang A.S.D Crossman F.W. *The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates*. Damage in Composite Materials: Basic mechanisms, accumulation, tolerance, and characterization, 1982.
- [16] Wang A.S.D. Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials. *Composites Technology Review*, 6:45–62, 1984.
- [17] Dàvila C. G. Van Der Mehr F. P., editor. *Modelling Transverse Cracking in Laminates with a Single Layer of Elements*. XV European Conference on Composite Materials.
- [18] Mostosi V. Sala G. Airoidi A., Baldi A., editor. *A bi-phasic approach to model progressive matrix damage in composites: development and applications*. XV European Conference on Composite Materials.
- [19] Jones F. R. Rock J.W. Menders P.W., Chou T. W. Statistical analysis of multiple fracture in  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  glass fibre/epoxy resin laminates. 8:2876–2889.