

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica



Formazione di ghiaccio in correnti convettive turbolente oceaniche

Relatore: Prof.ssa Antonella ABBA'

Correlatore: Prof. Lorenzo VALDETTARO

Tesi di laurea di:
Giuseppe PELLINI
Matr. 800800

Anno Accademico 2014 - 2015

Indice

Elenco delle figure	5
Elenco delle tabelle	6
Sommario	8
Abstract	9
1 Formazione del ghiaccio	11
1.1 Proprietà del frazil ice	12
1.2 Nei fiumi	13
1.3 Negli oceani	13
Introduzione	11
2 La convezione termica turbolenta	15
2.1 Convezione termica	15
2.2 Parametri adimensionali	16
2.2.1 Numero di Reynolds	16
2.2.2 Numero di Nusselt	17
2.2.3 Numero di Prandtl	17
2.3 Turbolenza	18
2.3.1 Introduzione	18
2.3.2 Teoria di Kolmogorov	18
2.3.3 Turbolenza <i>soft e hard</i>	19
3 Il modello matematico	21
3.1 Equazioni di Navier-Stokes	21
3.1.1 Equazione della conservazione della massa	21
3.1.2 Equazione di conservazione della quantità di moto	22
3.1.3 Conduzione di calore	22
3.2 Miscela acqua-ghiaccio	23
3.3 Approssimazione di Boussinesq	23
3.4 Equazione per la specie ghiaccio	24

3.5	Equazione per la salinità	25
3.6	Scambi termici	25
3.7	Adimensionalizzazione delle equazioni	27
3.8	Approssimazione di Boussinesq per la miscela acqua-ghiaccio	29
4	Simulazione della convezione termica turbolenta	33
4.1	LES (<i>Large Eddy Simulation</i>)	33
4.2	Equazioni filtrate	33
4.3	Modelli LES a viscosità turbolenta	35
4.3.1	Il modello Smagorinsky	35
4.3.2	Il modello dinamico di Germano	36
4.4	Modello LES per uno scalare	37
4.5	Modelli LES per la convezione termoalina	38
4.6	Il metodo numerico	39
4.7	Discretizzazione temporale	40
4.8	Discretizzazione spaziale	42
4.9	Condizioni al contorno	43
4.10	Condizioni iniziali	44
5	Analisi dei risultati	46
5.1	Simulazioni H_2O	46
5.2	Modello teorico	47
5.3	Simulazioni senza sale	49
5.3.1	Scelta dei valori	49
5.3.2	Simulazioni ICE	49
5.4	Simulazioni con il sale	55
5.4.1	Scelta dei valori	55
5.4.2	Simulazioni SALT	57
5.5	Effetto combinato: simulazioni S+I	59
5.5.1	Confronto dell'evoluzione temporale di simulazioni nel caso ICE e nel caso S+I	67
	Conclusioni	74
	Ringraziamenti	75
	Bibliografia	76

Elenco delle figure

1.1	Grease ice	11
1.2	Pancake ice	12
1.3	Sheet ice	13
4.1	Confronto tra tassi di crescita del ghiaccio in funzione di w_{rise} calcolati con condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann a $\gamma_i = 10^5$	44
5.1	Profili delle radici delle fluttuazioni quadratiche medie delle componenti di velocità nel caso H_2O	47
5.2	Profili medi di temperatura nel caso H_2O	48
5.3	Visualizzazione in un caso ICE della concentrazione di ghiaccio (sopra) e della temperatura (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano orizzontale vicino alla superficie ($z = 0.49$): dove la temperatura è minore, la concentrazione di ghiaccio è più alta	51
5.4	Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^4$ al variare di w_{rise}	52
5.5	Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^5$ al variare di w_{rise}	52
5.6	Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^6$ al variare di w_{rise}	53
5.7	Andamento del tasso di crescita della concentrazione media di ghiaccio in funzione di w_{rise} : confronto tra i risultati ottenuti con BICE a $\gamma_i = 10^6$ e quelli previsti dal modello monodimensionale eq.(5.8)	54
5.8	Andamento del tasso di crescita del ghiaccio in funzione di w_{rise} nel caso ICE a γ_i diversi	54
5.9	Andamento del tasso di crescita del ghiaccio in funzione di γ_i nel caso ICE a w_{rise} diversi	55
5.10	Confronto tra i profili di <i>r.m.s.</i> delle componenti orizzontali di velocità nel caso H_2O e nel caso ICE con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 1 \cdot 10^{-4}$	56

5.11	Confronto tra i profili di <i>r.m.s.</i> w nel caso H_2O e nel caso ICE con $\gamma = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 1 \cdot 10^{-4}$	56
5.12	Variazione di salinità rispetto al profilo di equilibrio nel caso SALT	57
5.13	Confronto tra i profili delle fluttuazioni della componente di velocità verticale (<i>r.m.s.</i> w) nel caso H_2O e nel caso SALT	58
5.14	Andamento dell'energia cinetica turbolenta mediata sul dominio in funzione del tempo nel caso H_2O e nel caso SALT	58
5.16	Confronto tra i profili di variazione di densità rispetto al profilo di equilibrio nel caso H_2O e nel caso SALT	60
5.17	Visualizzazione in un caso S+I della temperatura (sopra), della concentrazione di ghiaccio (centro) e della salinità (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano orizzontale vicino alla superficie ($z = 0.49$): dove la temperatura è minore, la produzione di ghiaccio e, di conseguenza, la concentrazione di sale aumentano	62
5.18	Confronto tra i profili medi di temperatura nel caso SALT, nel caso ICE e nel caso S+I con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$	63
5.19	Variazione di salinità rispetto al profilo di equilibrio nel caso SALT e nel caso S+I con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 5.70 \cdot 10^{-5}$	63
5.20	Variazione della salinità nel tempo all'aumentare della w_{rise}	64
5.21	Confronto tra i profili di <i>r.m.s.</i> w nel caso ICE con $w_{rise} = 2500$ e nel caso SALT	64
5.22	Visualizzazione in un caso S+I della temperatura (sopra), della salinità (centro) e della componente verticale della velocità turbolenta w (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano verticale ($y = 0.49$): a pennacchi ascendenti di w , corrispondono pennacchi ascendenti di temperatura (più caldi) e di salinità	66
5.23	Confronto tra i tassi di crescita del ghiaccio nel caso S+I e nel caso ICE al variare di w_{rise} per $\gamma_i = 10^6$	67
5.24	Confronto tra i profili medi di <i>r.m.s.</i> w nel caso S+I e nel caso ICE a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma = 10^6$ al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$	67
5.25	Confronto tra i profili medi di temperatura nel caso S+I e nel caso ICE a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma = 10^6$ al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$	68
5.26	Profili medi di concentrazione di ghiaccio in funzione del dominio nel caso ICE (sinistra) e S+I (destra) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$	69
5.27	Profili medi di concentrazione di ghiaccio in funzione del dominio nel caso ICE (sinistra) e S+I (destra) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$	70

Elenco delle tabelle

5.1	Simulazioni	46
5.2	Simulazione ICE	50
5.3	Simulazione SALT	57
5.4	Simulazione S+I	61

Sommario

L'oggetto della seguente tesi è lo studio del primo stadio della formazione del ghiaccio (*frazil ice*) in un moto convettivo turbolento. Per questo scopo, sono state effettuate diverse simulazioni numeriche. Il flusso è considerato nell'approssimazione di Boussinesq e il ghiaccio viene trattato come una specie diluita. Viene condotta un'analisi parametrica, variando la velocità di risalita e il coefficiente del termine di produzione di ghiaccio, e i dati ottenuti vengono confrontati, dove possibile, con quelli ricavati in lavori di tesi precedenti. I risultati evidenziano l'influenza della salinità sulla turbolenza e sulla produzione di ghiaccio, fornendo nuovi spunti per la comprensione del fenomeno dal punto di vista fisico.

Abstract

The object of the present thesis is the study of the first stage of ice formation (*fra-zil ice*) in turbulent convective motion. To this aim, several numerical simulations have been carried out. The flow is considered in the Boussinesq approximation and the ice is treated as a dilute specie. A parametric analysis, varying the rising velocity and the coefficient of the ice production term, has been conducted and the obtained data are compared, where possible, with the ones given by previous thesis works. The results highlight the influence of the salinity on the turbulence and ice production, providing new ideas for the understanding of the phenomenon from a physical point of view.

Introduzione

Lo scopo del seguente lavoro di tesi è quello di analizzare i risultati prodotti da simulazioni numeriche di flussi di convezione termoalina turbolenta in miscele di acqua e ghiaccio. Tale studio è stato svolto presso il Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali del Politecnico di Milano. Negli oceani, nei fiumi e nei laghi, quando l'acqua viene raffreddata sotto la temperatura di congelamento, si forma uno strato di minuscoli cristalli di ghiaccio, chiamato *frazil ice*, che rappresenta il primo passo nella formazione del ghiaccio in acqua.

Lo studio di questo fenomeno affonda le sue radici nell'interesse per l'ambiente artico e antartico. Con i recenti mutamenti climatici, il ritiro della banchisa polare e la presenza di venti gelidi e forti che generano turbolenza e ostacolano la formazione di uno strato solido, la presenza del *frazil ice* diventa molto più importante. I moti convettivi turbolenti, inoltre, sono molto rilevanti anche per quanto concerne l'ossigenazione degli strati inferiori dell'oceano, influenzando sulla biologia marina.

L'interesse per questo fenomeno in vari settori, ha portato allo sviluppo di diversi studi teorici e pratici.

Un'importante scoperta, ad esempio, fu quella effettuata da T.E. Osterkamp [12], il quale giunse alla conclusione che la formazione del ghiaccio non era dovuta ad una nucleazione spontanea, introducendo negli scambi di calore anche l'azione del vento, lo scoppio di bolle, l'evaporazione e la presenza di materiale che si forma a una certa distanza dalla corrente. Sotto le grandi piattaforme di ghiaccio, il meccanismo di formazione di ghiaccio diventa molto più complicato, coinvolgendo moti convettivi molto più complessi (*pompa di ghiaccio* [6]), in cui fusione e congelamento a diverse profondità giocano ruoli molto importanti. Più recentemente, Sherwood [16], nei suoi studi effettuati nel mare Kara, notò, attraverso l'uso di un modello numerico monodimensionale, che la "risospensione" dei sedimenti indotta dal moto delle onde rappresenta un meccanismo praticabile per la formazione di ghiaccio.

Studi sperimentali che hanno portato a importanti risultati possono essere quelli pubblicati da Morse & Richards [10], che sono riusciti a fornire delle stime di velocità di risalita del ghiaccio. Altri studi come quelli di Smith *et al* [17] e quelli di Naumann *et al* [11], si sono occupati di misurare i ratei di crescita del *frazil ice*, i primi attraverso dati forniti da una sonda nella base antartica di

McMurdo, mentre i secondi da prove in laboratorio.

Per perseguire lo scopo della tesi, è stato formulato un modello della dinamica di formazione e diffusione del frazil ice. Il modello è rappresentabile tramite un sistema di equazioni, risolto numericamente.

Il codice utilizzato è stato realizzato in Fortran ed è l'evoluzione di un codice che simula correnti di convezione turbolenta alla Bénard, tramite modelli di turbolenza di tipo LES.

Nel corso degli anni, sono stati realizzati molti modelli per lo studio della formazione e dell'accrescimento del frazil ice. Omstedt & Svensson [19] hanno effettuato simulazioni numeriche della dinamica del frazil ice nello strato superficiale dell'oceano, modellato come uno strato limite di Eckman, per cristalli di diverse dimensioni, attraverso un modello matematico monodimensionale. Holland & Feltham [3] hanno effettuato degli studi dettagliati della precipitazione dei cristalli di frazil ice sulle piattaforme di ghiaccio. Uno dei progetti più ambiziosi e degni di nota, rimane quello di Salas [15], che ha realizzato un modello globale di formazione del ghiaccio in mare che accoppia i modelli di formazione del ghiaccio con i modelli oceanici globali, tenendo conto anche di effetti viscosi, elastici e plastici.

In letteratura è però assente uno studio dell'interazione tra formazione di ghiaccio, salinità e turbolenza convettiva.

La parte più innovativa di questa tesi, consiste proprio nell'effettuare una serie di simulazioni numeriche a numeri di Rayleigh elevati, svolgendo uno studio parametrico delle equazioni. Inoltre, vengono condotte prove tenendo conto della salinità dell'acqua, riuscendo così ad avere dei dati che descrivano l'influenza del sale nel processo di formazione del ghiaccio.

Lo studio dell'impatto della salinità sul fenomeno è molto interessante, in quanto è anch'esso associato ai moti convettivi e ai moti planetari.

Il lavoro è diviso in 5 capitoli: nel primo capitolo viene descritto il frazil ice e i fenomeni che portano alla sua formazione. Il secondo introduce i parametri fondamentali del problema e le basi della teoria sulla convezione turbolenta. Il terzo descrive il sistema di equazioni del modello. Il quarto presenta il modello LES e il codice numerico utilizzato. Nel quinto vengono analizzati i risultati delle simulazioni acqua-ghiaccio senza e con sale.

I risultati ottenuti in questo lavoro di tesi verranno, inoltre, confrontati con quelli di altri lavori precedenti, condotti a numeri di Rayleigh inferiori e in assenza della specie sale, per vedere ed apprezzare i cambiamenti subiti dalle varie quantità fisiche coinvolte nel processo.

Capitolo 1

Formazione del ghiaccio

Il primo stadio della formazione di ghiaccio in acque turbolenti raffreddate a temperature appena al di sotto di quella di congelamento, è chiamato *frazil ice*. In questa fase, il ghiaccio si presenta come una sospensione di piccoli cristalli orientati casualmente, di $0.01 \div 4 \text{ mm}$ di diametro e $1 \div 100 \text{ }\mu\text{m}$ di spessore. Con il progressivo aggregarsi dei cristalli di ghiaccio in strutture più complesse, il frazil ice evolve rapidamente in un sottile strato dall'aspetto oleoso, conosciuto con il nome di *grease ice* (fig.1.1), il cui spessore dipende dall'intensità del vento e dalla temperatura dell'aria.



Figura 1.1: Grease ice

L'evoluzione del grease ice dipende dal miscelamento. In condizioni "calme", a causa della crescita e dell'agglomerazione dei cristalli in acqua, si forma in superficie un sottile strato di ghiaccio ($< 10 \text{ cm}$), noto come *nilas*. In condizioni turbolente e ventose, in cui persiste il raffreddamento, la sospensione di acqua e ghiaccio aumenta di densità: i cristalli si aggregano ulteriormente formando dei grossi dischi che possono raggiungere i $3 \div 5 \text{ m}$ di diametro e $50 \div 70 \text{ cm}$ di spesse-

re, chiamati *pancake* per la loro forma caratteristica, dovuta agli urti tra i dischi adiacenti e all'accumularsi del frazil ice sui bordi.



Figura 1.2: Pancake ice

La fase finale coincide con l'unione dei blocchi, dovuta all'azione delle onde e del vento freddo, che porta alla formazione di uno strato continuo di ghiaccio.

1.1 Proprietà del frazil ice

I primi cristalli di ghiaccio appaiono quando la temperatura dell'acqua scende di $0.01-0.1^{\circ}\text{C}$ sotto il punto di congelamento. Poiché le temperature negli oceani e nei fiumi solitamente non scendono al di sotto di questi valori, l'ipotesi di una formazione iniziale di ghiaccio dovuta al fenomeno della nucleazione omogenea viene scartata. Si pone la questione, largamente discussa in letteratura, di stabilire i modi di nucleazione e moltiplicazione del frazil ice in acque turbolente. Per Osterkamp [12], la formazione di ghiaccio può avvenire in 2 modi: tramite la nebulizzazione dell'acqua superficiale dovuta alle onde e al vento, che congela istantaneamente le particelle di acqua spruzzate in aria facendole ricadere sotto forma di cristalli, o, alternativamente, tramite insemminazione (*seeding*), attraverso particelle di ghiaccio e di neve, trasportate dai venti, che fungono da attivatori. In acque turbolente, inoltre, la produzione di frazil ice viene aumentata tramite nucleazione secondaria, un processo in cui le collisioni tra i vari nuclei di ghiaccio provocano una rapida moltiplicazione dei cristalli.

1.2 Nei fiumi

Il frazil ice è molto comune in fiumi con acque turbolente e sottoposte a basse temperature. La quantità di frazil ice dipende dal tasso di scambio termico e dalla superficie di contatto tra acqua e aria. Il ghiaccio tende a depositarsi nei punti del fiume in cui l'intensità della corrente è bassa e il moto è poco turbolento. E' questo il caso del *border ice*, in cui banchi di ghiaccio si accumulano ai margini del letto del fiume. Il border ice modifica in modo evidente la geometria del flusso superficiale dell'acqua creando un restringimento e quindi una variazione tangibile della portata del fiume. Se si ha un rapido decremento della temperatura, il ghiaccio può espandersi dal bordo fino a ricoprire completamente il corso d'acqua (*sheet ice*)(fig.1.3).



Figura 1.3: Sheet ice

Se il clima freddo persiste, lo spessore del ghiaccio diventa sempre più spesso, presentando però, a differenza dei laghi, in cui lo spessore del ghiaccio è uniforme, dei punti più sottili. Questo è dovuto al fatto che, sotto lo strato di ghiaccio, il fiume continua a scorrere sciogliendo il ghiaccio nei punti in cui le acque sono più turbolente e calde. Il frazil ice, inoltre, può tendere ad aderire al letto del fiume, formando così il cosiddetto *anchor ice*. Le dinamiche di formazione, crescita e distacco dell'*anchor ice* sono ancora poco chiare. La presenza del ghiaccio nei fiumi può essere deleteria per le attività umane, provocando guasti agli impianti idroelettrici e problemi alla navigazione.

1.3 Negli oceani

Negli oceani la formazione di frazil ice può avvenire in diverse condizioni. Il caso più evidente è quello che si verifica nelle regioni di acque aperte (*polynyas*): in

queste zone, l'azione combinata dell'aria gelida e delle onde agita la superficie dell'acqua creando la condizione ottimale per la formazione del ghiaccio. Una volta accumulato, quest'ultimo viene spinto verso riva dai venti e dalle correnti, creando così nuovo spazio per la prosecuzione del processo. Un altro meccanismo di formazione del frazil ice ha luogo quando uno strato di acqua salata vicino alla temperatura di congelamento incontra uno strato di acqua dolce. La produzione di cristalli di ghiaccio avviene a causa della differenza della temperatura di congelamento (0°C per l'acqua pura e -2.09°C per l'acqua salata). Questa situazione si può trovare alla foce dei fiumi e durante le estati artiche, a seguito dello scioglimento dei ghiacciai. Anche nei pressi degli *icebergs* si può avere la formazione di frazil ice, grazie al raffreddamento diretto dell'acqua. Il frazil ice è tipicamente presente nella MIZ (*Marginal Ice Zone*), che è l'area di transizione tra l'oceano aperto e la banchisa che copre il bacino centrale. La presenza di regioni del frazil ice è associata a importanti fenomeni geofisici e biologici degli oceani polari e la dinamica di formazione dei cristalli risulta quindi un campo di ricerca molto attivo.

Capitolo 2

La convezione termica turbolenta

2.1 Convezione termica

Diversamente dalla conduzione termica, la convezione è una modalità di trasporto di calore attraverso un movimento di materia. Esistono molti esempi di moti convettivi in natura: nell'atmosfera, negli oceani, nel mantello terrestre, nel sole.

Se un fluido contenuto tra due lastre piane viene riscaldato sulla superficie inferiore, si genera una situazione di instabilità (*instabilità di Rayleigh-Bénard*): il fluido presente sul fondo, a causa dell'espansione termica, diminuisce di densità e tende a salire verso l'alto, sospinto dalla forza di Archimede, mentre il fluido sulla superficie superiore, più pesante, scende sotto l'azione della forza peso. In particolare, Henry Bénard notò che tale situazione porta il moto del fluido a strutturarsi come una serie di cellette, chiamate *celle di Bénard*, in cui il fluido assume un andamento ascendente in mezzo e discendente ai bordi. Successivamente, John Rayleigh diede un fondamento teorico alle scoperte di Bénard, individuando un parametro adimensionale legato alla stabilità di un fluido scaldato sulla superficie inferiore. Affinché si generi un moto convettivo e si realizzi la situazione descritta precedentemente, è necessario il superamento di una certa soglia, poiché sono presenti due fenomeni che contrastano il moto, ossia la viscosità del fluido e la conduzione. Tale soglia viene rappresentata con il *numero di Rayleigh* definito come:

$$Ra = \frac{g\alpha L^3 \Delta T}{k_T \nu} \quad (2.1)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, $\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \Big|_p$ è il coefficiente di espansione termica, L è la distanza tra le superfici, $\Delta T = (T_1 - T_0)$ è la differenza di temperatura fra la superficie inferiore T_0 e quella superiore T_1 , k_T è la conducibilità termica e ν è la viscosità cinematica. Il punto di separazione tra stabilità e instabilità viene raggiunto per un certo valore di Ra , detto numero di Rayleigh critico (Ra_c). Il valore di Ra_c dipende da molti fattori, in particolare dalla geometria del

problema, e non è sempre di facile determinazione. Oltre questo valore, si nota il sorgere di strutture convettive di natura laminare molto simili a quelle osservate da Bénard. Aumentando ulteriormente il numero di Rayleigh, la convezione passa da laminare a turbolenta: le celle di Bénard vengono sostituite da strutture più piccole che si distribuiscono nel fluido in maniera caotica.

2.2 Parametri adimensionali

2.2.1 Numero di Reynolds

La dinamica dei fluidi viscosi dipende principalmente dal rapporto tra le forze viscosi e le forze inerziali. Reynolds, durante i suoi esperimenti sul moto dei fluidi nei condotti, fu il primo a distinguere un *regime laminare*, caratterizzato da una prevalenza delle forze viscosi su quelle inerziali e un *regime turbolento*, in cui si verifica il contrario. Nel primo caso, non c'è rimescolamento tra i vari strati del fluido e le linee di corrente rimangono parallele tra di loro. Nel caso turbolento, invece, il fluido assume una natura caotica e instabile, in cui una piccola variazione delle condizioni iniziali può generare moti completamente diversi. Reynolds, inoltre, trovò che il rapporto tra le forze di inerzia, che portano all'instabilità, e le forze viscosi, che inibiscono i moti di rimescolamento, può essere espresso da un numero adimensionale, il *numero di Reynolds*:

$$Re = \frac{U\rho L}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (2.2)$$

dove U è la velocità media della corrente, L è una lunghezza caratteristica del problema considerato, ρ è la densità del fluido, μ è la viscosità dinamica e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è la viscosità cinematica.

Come per il numero di Rayleigh, il passaggio da regime laminare a regime turbolento avviene quando si supera un certo valore del numero di Reynolds fortemente dipendente dalla geometria del problema e dalle condizioni iniziali, il numero di Reynolds critico (Re_c).

Scrivendo le *equazioni di Navier-Stokes* adimensionalizzate per fluidi incomprimibili:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}^{\text{termine convettivo}} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \overbrace{\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}}^{\text{termine viscoso}} \quad (2.3)$$

si nota subito che il numero di Reynolds pesa il contributo del termine viscoso rispetto a quello convettivo. Per $Re < Re_c$, le forze viscosi domineranno su quelle inerziali e il moto sarà laminare, mentre per $Re > Re_c$, il termine convettivo sarà preponderante, e il moto turbolento verrà innescato.

Vicino a una parete, a causa della *condizione di non slittamento*, la velocità si annulla e quindi il termine inerziale non sarà mai in grado di opporsi alle forze viscosse, che saranno quindi dominanti: si forma così uno strato, detto *strato limite*, in cui la velocità passa da un valore pari a quella della corrente indisturbata ad un valore nullo vicino alla parete. Per determinare lo spessore δ dello strato limite, basta notare che quest'ultimo termina nel punto in cui il termine viscoso e il termine inerziale hanno uguale ordine di grandezza:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \simeq \frac{\overline{U^2}}{L} \simeq \nu \Delta \mathbf{u} \simeq \nu \frac{\overline{U}}{\delta^2} \quad (2.4)$$

ottenendo pertanto $\delta = \frac{\overline{L}}{\sqrt{Re}}$.

2.2.2 Numero di Nusselt

Il *numero di Nusselt* è un parametro adimensionale che ci da informazioni sulla quantità di calore scambiata per convezione e quella scambiata per conduzione. Esso esprime il rapporto tra calore totale scambiato Q e calore scambiato per conduzione q :

$$Nu = \frac{Q}{q} = \frac{Q}{K_T \nabla T} \simeq \frac{QL}{K_T(T_1 - T_0)} \quad (2.5)$$

Il calore scambiato q è espresso attraverso la *legge di Fourier*, con conducibilità termica K_T e gradiente di temperatura ∇T approssimato con la differenza di temperatura $(T_1 - T_0)$ e la lunghezza caratteristica L .

2.2.3 Numero di Prandtl

Nei problemi fluidodinamici e termodinamici che coinvolgono scambi di calore per convezione, viene utilizzato il *numero di Prandtl*, un gruppo adimensionale che esprime il rapporto tra diffusività cinematica e diffusività termica:

$$Pr = \frac{\nu}{k_t} = \frac{\mu c_p}{K_T} \quad (2.6)$$

dove k_t è la diffusività termica e c_p è il calore specifico a pressione costante. Come visto in precedenza per la velocità, anche la temperatura deve rispettare delle condizioni al contorno e, per questo, si può parlare di *strato limite termico* a parete. Per determinare lo spessore dello strato limite termico δ_T bisogna imporre che il termine convettivo e il termine diffusivo dell'equazione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla T}^{\text{termine convettivo}} = \overbrace{k_T \Delta T}^{\text{termine diffusivo}} \quad (2.7)$$

abbiano lo stesso ordine di grandezza:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T \simeq \frac{(T_1 - T_0)U}{L} \simeq k_T \Delta T \simeq k_T \frac{(T_1 - T_0)}{\delta_T^2} \quad (2.8)$$

ottenendo, infine, $\delta_T = \frac{L}{\sqrt{RePr}}$.

Si può notare che gli spessori dei 2 strati limiti, termico e dinamico, sono confrontabili tra di loro e, addirittura, coincidono per valori del numero di Prandtl dell'ordine dell'unità:

$$\delta_T = \frac{1}{\sqrt{Pr}} \delta \quad (2.9)$$

Da ciò, ne segue che in acqua lo spessore dello strato limite termico è inferiore rispetto a quello dinamico.

2.3 Turbolenza

2.3.1 Introduzione

Tutti i fenomeni fluidodinamici che osserviamo in natura e la maggior parte dei flussi di interesse scientifico e ingegneristico sono di natura turbolenta. La turbolenza è un fenomeno estremamente complicato ed è tuttora un ambito di indagine estremamente attuale e in continua evoluzione. La transizione da regime laminare a regime turbolento avviene a causa di un susseguirsi di instabilità all'aumentare del numero di Reynolds.

Una corrente turbolenta completamente sviluppata è caratterizzata da alcune proprietà tipiche, ossia comportamento caotico e imprevedibile delle grandezze puntuali istantanee, tridimensionalità, instazionarietà, rotazionalità, forte rimescolamento.

Matematicamente, l'origine della turbolenza può essere analizzata osservando che nelle equazioni di Navier-Stokes, all'aumentare del numero di Reynolds, il termine nonlineare, che rappresenta le forze inerziali, cresce rispetto al termine viscoso, aumentando in questo modo gli effetti nonlineari nell'equazione.

2.3.2 Teoria di Kolmogorov

L'instabilità della corrente fluida parte dalla formazione di strutture vorticosi che hanno una dimensione, anche detta scala spaziale, paragonabile alle dimensioni tipiche della corrente. Successivamente, le strutture vorticosi di grande scala diventano a loro volta instabili, producendo strutture di scala sempre più piccola fino a quando diventano importanti gli effetti della dissipazione viscosa. Questo fenomeno di instabilità successive viene chiamato *cascata di energia di Richardson*. L'energia viene trasferita dalle grandi scale alle piccole scale, dove viene dissipata. Basandosi su questo fenomeno, il matematico russo Andrej

Nikolaevič Kolmogorov formulò nel 1941 la prima teoria formale sulla turbolenza (*teoria K41*). Attraverso un approccio statistico, la teoria permette la descrizione dell'andamento dello spettro di energia cinetica turbolenta. Le tre ipotesi su cui si basa la teoria K41 sono:

- *ipotesi di isotropia locale*: per numeri di Reynolds sufficientemente grandi, i moti turbolenti su piccola scala ($l \ll l_0$) sono statisticamente isotropi;
- *prima ipotesi di similarità*: per numeri di Reynolds sufficientemente grandi, le statistiche dei moti di piccola scala ($l \ll l_0$) hanno forma universale e dipendono solo dalla viscosità ν e dalla dissipazione energetica ϵ ;
- *seconda ipotesi di similarità*: per numeri di Reynolds sufficientemente grandi, le statistiche dei moti inerziali ($\eta \ll l \ll l_0$) hanno forma universale e dipendono solo dalla dissipazione energetica ϵ .

Da queste ipotesi si possono ricavare, attraverso un'analisi dimensionale, la relazione per il tasso di dissipazione dell'energia cinetica prodotta dai grandi vortici

$$\epsilon = \frac{u_0^3}{l_0}$$

in funzione della quale si fornisce una stima della scala dei piccoli vortici, detta *scala dissipativa di Kolmogorov*:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Nonostante la teoria di Kolmogorov sia uno dei risultati più importanti degli studi sulla turbolenza, essa presenta molti limiti che sono stati superati da teorie successive, come il fatto che non riesce a tener conto del *backscatter*, ossia del trasferimento inverso dell'energia dalle scale più piccole a quelle più grandi.

2.3.3 Turbolenza *soft* e *hard*

Castaing *et al.* [2], rifacendosi ad un precedente lavoro del 1987 (Heslot *et al.*), proposero i risultati di un esperimento condotto su correnti di convezione turbolenta ad alti numeri di Rayleigh in un intervallo compreso tra $2 \cdot 10^5 \div 6 \cdot 10^{12}$. Il lavoro mise in luce l'esistenza di due differenti regimi di turbolenza: *soft* e *hard*. Il numero di Rayleigh $Ra \approx 4 \cdot 10^7$ costituisce il limite fra le due fasi che sono caratterizzate da significative differenze nella dipendenza del numero di Nusselt dal numero di Rayleigh, nella forma della distribuzione di probabilità delle fluttuazioni di temperatura e nella tipologia delle strutture convettive presenti. Nello stato di turbolenza *soft*, la legge di scala per il numero di Nusselt è

$$Nu \propto \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{\frac{1}{3}}$$

dove $Ra_c \simeq 10^3$ è una ragionevole stima per il numero di Rayleigh critico. La distribuzione di probabilità delle fluttuazioni di temperatura a centro canale ha un andamento di tipo gaussiano. Nello stato di turbolenza *hard*, invece, i risultati sperimentali indicano una legge di scala del tipo

$$Nu \propto Ra^{\frac{2}{7}}$$

Tale diversità dalla situazione precedente mette in discussione la convinzione diffusa per il valore dell'esponente $\frac{1}{3}$ di essere un limite asintotico per numeri di Rayleigh grandi. La distribuzione delle fluttuazioni di temperatura non ha più un andamento gaussiano, ma esponenziale e la sua ampiezza dipende dal numero di Rayleigh. La distinzione tra turbolenza *soft* e *hard* risulterà molto importante in questo lavoro di tesi, come verrà mostrato nel capitolo 5.

Capitolo 3

Il modello matematico

3.1 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il comportamento di un fluido dal punto di vista macroscopico. Esse sono la formulazione matematica dei tre principi fisici ai quali i fluidi devono sottostare, una volta imposta la condizione di continuo deformabile:

- principio di conservazione della massa (*equazione di continuità*);
- secondo principio della dinamica (*seconda legge di Newton*);
- primo principio della termodinamica (*legge di conservazione dell'energia*).

3.1.1 Equazione della conservazione della massa

L'equazione di conservazione della massa, detta anche equazione di continuità, esprime l'uguaglianza tra la variazione di massa all'interno di un volume fisso V e il flusso di massa attraverso la frontiera di tale volume ∂V . La sua formulazione è la seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

Supponendo che il fluido sia incomprimibile e a densità costante ($\rho = \rho_0 = \text{cost.}$), l'equazione si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

e in questo caso il campo di velocità è detto *solenoidale*.

3.1.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

La seconda legge di Newton impone che la rapidità della variazione della quantità di moto di un elemento di fluido sia uguale alla somma delle forze agenti su di esso. Sfruttando il bilancio della quantità di moto, dunque, si ricavano le note equazioni che relazionano i campi di velocità \mathbf{u} con la pressione p :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho g \vec{k} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.3)$$

3.1.3 Conduzione di calore

La legge di conservazione di energia per un fluido ideale viene espressa matematicamente dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + h \right) - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} - K_T \nabla T \right] + G_T \quad (3.4)$$

che rappresenta il bilanciamento tra la variazione di energia per unità di volume del fluido e la divergenza del flusso di energia. I singoli termini presenti nell'equazione sono:

- l'energia cinetica $\frac{1}{2} \rho u^2$;
- l'energia interna $\rho \varepsilon$;
- il flusso della somma dell'energia interna e dell'entalpia $\rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + h \right)$;
- il flusso di energia dovuto agli attriti viscosi all'interno del fluido $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}$;
- il flusso di calore dovuto alla conduzione termica espresso tramite la legge di Fourier $-K_T \nabla T$;
- il termine sorgente G_T .

Ipotizzando la velocità del fluido trascurabile rispetto alla celerità delle onde sonore, possiamo trascurare le variazioni di pressione dovute alle variazioni di densità. In tali condizioni, la densità risulta dipendere dalla sola temperatura. Sottraendo all'eq.(3.4) l'equazione della quantità di moto moltiplicata scalarmente per la velocità si ottiene l'equazione per la temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_T \nabla^2 T + G_T \quad (3.5)$$

con $k_T = \frac{K_T}{\rho c_p}$ coefficiente di diffusività termica.

3.2 Miscela acqua-ghiaccio

L'approssimazione fatta in questo lavoro di tesi consiste nel considerare il ghiaccio come una specie dispersa in acqua, ma con una concentrazione tale da poter trascurare le interazioni molecolari tra i singoli cristalli. In questo modo, il mezzo acqua più frazil ice può essere considerato una miscela a 2 fasi. La densità ρ della miscela è data dalla seguente equazione:

$$\rho = \rho_i \phi_i + \rho_w \phi_w \quad (3.6)$$

dove ρ_i e ϕ_i sono la densità e la frazione di volume del ghiaccio, e ρ_w e $\phi_w = 1 - \phi_i$ sono la densità e la frazione di volume dell'acqua. Conoscendo le relazioni fra concentrazione volumetrica ϕ e in massa C

$$\rho_i \phi_i = \rho C_i \quad \rho_w \phi_w = \rho C_w \quad (3.7)$$

si può riscrivere la densità totale della miscela in questo modo:

$$\rho = \left(\frac{C_i}{\rho_i} + \frac{1 - C_i}{\rho_w} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

La densità dell'acqua ρ_w è legata alla temperatura e alla salinità dalla relazione

$$\rho_w = \rho_{w0} [1 - \alpha(T - T_0) + \alpha_s(S - S_0)] \quad (3.9)$$

con densità di riferimento ρ_{w0} corrispondente alla salinità di riferimento $S_0 = 34.5 \text{ psu}$ e alla temperatura di riferimento $T_0 = -2 \text{ }^\circ\text{C}$, coefficiente di espansione termica $\alpha \simeq 3.87 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e coefficiente di espansione alina $\alpha_s \simeq 7.86 \cdot 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$. La salinità, come si vedrà in seguito, viene trattata come una quantità scalare che evolve con una dinamica simile a quella della temperatura.

3.3 Approssimazione di Boussinesq

Non avendo fatto alcuna ipotesi sui coefficienti fin qui visti, le equazioni presentate hanno validità generale. Esistono dei casi, però, in cui è possibile applicare delle semplificazioni. Come notò Boussinesq, se le variazioni di temperatura e di salinità non sono elevate, le conseguenti variazioni di densità saranno relativamente modeste. Nel nostro caso questa situazione è garantita dal fatto che α e α_s sono molto ridotti e, di conseguenza, è possibile considerare la densità come una costante $\rho = \rho_{w0}$. Il termine di galleggiamento, tuttavia, rappresenta l'eccezione a queste considerazioni, in quanto qui le fluttuazioni di densità generano accelerazioni non trascurabili rispetto agli altri termini. Applicando l'approssimazione di Boussinesq, quindi, le equazioni di Navier-Stokes possono essere riscritte in questo modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_T \nabla^2 T + G_T \quad (3.12)$$

Si nota che nel termine di galleggiamento è presente la densità $\rho = \rho_0 + \hat{\rho}$ che è pari a quella vista nel capitolo precedente (con $\hat{\rho} = -\alpha(T - T_0) + \alpha_S(S - S_0)$). Sostituendo anche questa, si ottiene infine:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + [1 - \alpha(T - T_0) + \alpha_S(S - S_0)] g \vec{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_T \nabla^2 T + G_T \quad (3.15)$$

3.4 Equazione per la specie ghiaccio

L'equazione per la concentrazione del ghiaccio viene ricavata scomponendo l'equazione di continuità dell'intera miscela [3] e viene scritta come un'equazione di trasporto e diffusione di uno *scalare attivo*, in quanto influenza le dinamiche del moto. La conservazione della specie ghiaccio viene quindi rappresentata matematicamente in questo modo:

$$\frac{\partial(\rho C_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C_i \mathbf{u}_i) = k_i \nabla \cdot (\rho \nabla C_i) + G_i \quad (3.16)$$

Il termine $\rho C_i \mathbf{u}_i$ rappresenta il flusso del ghiaccio trasportato dall'acqua, il termine $k_i \nabla \cdot (\rho \nabla C_i)$ rappresenta la diffusione dei cristalli all'interno della miscela stessa, con k_i coefficiente di diffusività del ghiaccio e, infine, il termine G_i rappresenta il termine di sorgente dovuto alla formazione e allo scioglimento del ghiaccio. La velocità dei cristalli di ghiaccio \mathbf{u}_i è deviata rispetto alla velocità media della miscela \mathbf{u} ed è data dalla somma di quest'ultima e della velocità di galleggiamento $\mathbf{w}_r = (0, 0, w_r)$, avente componente diversa da zero solamente lungo la coordinata verticale z :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \mathbf{w}_r \quad (3.17)$$

La velocità di risalita risulta dal bilancio tra la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso che i cristalli di ghiaccio incontrano nei confronti dell'acqua

circostante e dipende, tra altri fattori, dalla forma del cristallo e dalle sue dimensioni. Poiché in questo studio effettueremo un'indagine parametrica del fenomeno di formazione del ghiaccio, la w_r verrà considerata come un parametro libero. Sostituendo l'espressione di \mathbf{u}_i , si può riscrivere l'equazione per la conservazione del ghiaccio nella forma finale:

$$\frac{\partial(\rho C_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C_i \mathbf{u}) = -w_r \frac{\partial \rho C_i}{\partial z} + k_i \nabla \cdot (\rho \nabla C_i) + G_i \quad (3.18)$$

3.5 Equazione per la salinità

L'equazione per la salinità S descrive l'evoluzione della concentrazione di sale in acqua. Essa stabilisce che la variazione della salinità è dovuta a tre contributi: uno legato al flusso di acqua con un certo contenuto di sale, uno legato alla diffusione del sale da zone ad alta salinità a zone a bassa salinità e uno fornito da un termine sorgente G_S dipendente dalla formazione e/o dallo scioglimento del ghiaccio. Considerando ρ costante, si può scrivere:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(S) = k_s \nabla^2 S + G_s \quad (3.19)$$

dove k_s è la diffusività del sale in acqua.

3.6 Scambi termici

Si studia il processo di formazione del ghiaccio in termini di scambi termici tra cristalli e acqua allo scopo di modellare i termini di sorgente nell'equazione della temperatura, del ghiaccio e del sale. Per una maggiore semplicità, si approssimano i cristalli di ghiaccio a dischetti di raggio R_i . Questa procedura viene spesso trovata in letteratura, ad esempio in [19] e [3]. Il calore scambiato in un intervallo di tempo Δt tra un dischetto di raggio R_i di ghiaccio e l'acqua circostante è

$$Q_i = \bar{h} A_i (T_i - T) \Delta t \quad (3.20)$$

con:

- area della superficie del cristallo $A_i = 2\pi R_i t_i$, con t_i spessore del dischetto di ghiaccio;
- temperatura di congelamento in funzione della salinità $T_i = T_{i0} + ah + a_s(S - S_0)$, in cui abbiamo che $T_{i0} = -2.09$ °C è la temperatura di congelamento in acqua salata, a è il coefficiente che descrive la diminuzione della temperatura di congelamento con la profondità h , e a_s è il coefficiente che descrive la diminuzione della temperatura con la salinità;

- coefficiente di trasmissione termica $\bar{h} = \frac{NuK_T}{2R_i}$, in cui compaiono la conducibilità termica K_T e il numero di Nusselt Nu .

La quantità di calore Q_w corrispondente ad un aumento di temperatura ΔT di un volume V di acqua è pari a

$$Q_w = c\rho_w\Delta TV \quad (3.21)$$

dove c è il calore specifico e ρ_w è la densità dell'acqua.

Ipotizzando di trattare la fase relativa alla fusione e quella relativa al congelamento allo stesso modo, considerando un numero N arbitrario di particelle nel volume V ed eguagliando le due espressioni

$$N\bar{h}A_i(T_i - T)\Delta t = c\rho_w\Delta TV \quad (3.22)$$

possiamo ottenere la variazione di temperatura, in un intervallo di tempo, dovuta al processo di congelamento o fusione di N cristalli di ghiaccio, ossia

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = N \frac{\bar{h}A_i(T_i - T)}{c\rho_w V} = N \frac{V_i 2\bar{h}(T_i - T)}{V R_i c\rho_w} \quad (3.23)$$

Ricordando ora le relazioni tra concentrazione in massa e in volume e fissando $\phi_i = \frac{NV_i}{V}$, con V_i volume del singolo dischetto di ghiaccio, otteniamo

$$G_T = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{2\bar{h}}{R_i c\rho_w \rho_i} \rho C_i (T_i - T) = \lambda_T \rho C_i (T_i - T) \quad (3.24)$$

Ora teniamo conto del calore Q_m necessario a formare o a fondere una particella di ghiaccio

$$Q_m = L_i \rho_i V_i \quad (3.25)$$

con L_i calore latente di fusione. Procedendo come nel caso precedente, ossia eguagliando le due equazioni, considerando N particelle ed eseguendo tutti i passaggi, otteniamo

$$\Delta(NV_i)L_i\rho_i = NV_i \frac{2\bar{h}(T_i - T)}{R_i} \Delta t \quad (3.26)$$

dai cui si ricava l'equazione per la variazione di concentrazione di ghiaccio

$$\frac{\Delta\phi_i}{\Delta t} = \frac{2\phi_i\bar{h}(T_i - T)}{R_i L_i \rho_i} \quad (3.27)$$

A questo punto, ricordando l'espressione di $\phi_i = \frac{\rho C_i}{\rho_i}$ in funzione della concentrazione di ghiaccio C_i , otteniamo il termine sorgente per l'equazione del ghiaccio

$$G_i = \frac{\Delta(\rho C_i)}{\Delta t} = \frac{2\bar{h}}{R_i L_i \rho_i} \rho C_i (T_i - T) = \lambda_i \rho C_i (T_i - T) \quad (3.28)$$

Per modellare il termine sorgente dell'equazione della salinità G_S , assumiamo che il ghiaccio sia composto solo da acqua dolce e che la presenza del sale non modifichi la termodinamica degli scambi di calore. Possiamo allora considerare G_S direttamente proporzionale a G_i , avvalendoci del fatto che l'aumento della concentrazione del sale è legato esclusivamente alla formazione del ghiaccio, cioè si ha che l'acqua che si trasforma in ghiaccio rilascia nel fluido circostante tanto sale quanto quella porzione di volume avrebbe contenuto. Se prendiamo allora un volume V di fluido contenente una certa massa di sale m_S e una certa concentrazione di ghiaccio C_i , l'incremento di salinità S_V dovuta al congelamento dell'acqua contenuta in V sarà pari a

$$S_V = \frac{m_S}{V(1 - C_i)} \quad (3.29)$$

Considerando la variazione di salinità rispetto al tempo $\frac{\partial S_V}{\partial t}$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} G_S &= \frac{\Delta S_V}{\Delta t} = \frac{\Delta S_V}{\Delta C_i} \frac{\Delta C_i}{\Delta t} = \frac{S_V}{1 - C_i} \frac{\Delta C_i}{\Delta t} = \frac{\rho_i}{\rho_w} S_V G_i \\ &= \frac{2\bar{h}}{R_i L_i \rho_w} S_V \rho C_i (T_i - T) = \lambda_S S_V \rho C_i (T_i - T) \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.7 Adimensionalizzazione delle equazioni

Allo scopo di rappresentare il fenomeno fisico in forma indipendente dalle unità di misura, riscriviamo le equazioni descritte in maniera adimensionale. La forma adimensionale è particolarmente utile in quanto consente un riconoscimento immediato e più semplice delle condizioni in cui si studiano i moti. Grazie alla forma adimensionale, inoltre, possiamo stabilire sotto quali condizioni due problemi sono geometricamente, dinamicamente o cinematicamente simili. A seconda delle grandezze caratteristiche scelte, si ottengono sistemi con coefficienti diversi. Nel nostro caso, le grandezze di riferimento considerate sono:

- lunghezza verticale del dominio considerato \bar{L} ;
- differenza di temperatura tra il limite superiore e il limite inferiore del dominio $\Delta \bar{T}$;
- velocità caratteristica delle scale viscosi $\bar{U} = \frac{\nu}{\bar{L}}$;
- tempo corrispondente $\bar{t} = \frac{\bar{L}}{\bar{U}} = \frac{\bar{L}^2}{\nu}$;

- densità dell'acqua $\bar{\rho} = \rho_{w0}$;
- salinità di riferimento \bar{S}_0 .

Ridefiniamo la temperatura T come variazione rispetto alla condizione iniziale $T(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, 0) \rightarrow T(\mathbf{x}, t)$, e, in maniera simile, la salinità S come variazione rispetto alla media $S - S_0 \rightarrow S$. Seguendo i riscalamenti rispetto alle grandezze sopra definite, otteniamo

$$\mathbf{x} = \bar{L}\tilde{\mathbf{x}} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{u} = \bar{U}\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\nu}{\bar{L}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (3.32)$$

$$t = \frac{\bar{L}}{\bar{U}}\tilde{t} = \frac{\bar{L}^2}{\nu}\tilde{t} \quad (3.33)$$

$$T = \bar{\Delta T}\tilde{T} \quad (3.34)$$

$$C_i = \alpha\bar{\Delta T}\tilde{C}_i \quad (3.35)$$

$$S = \bar{S}_0\alpha\bar{\Delta T}\tilde{S} \quad (3.36)$$

$$p = \bar{\rho}\bar{U}^2\tilde{p} \quad (3.37)$$

Le equazioni adimensionali del problema sono:

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\tilde{C}_i}{\tilde{\rho}_i} + \frac{1 - \tilde{C}_i}{\tilde{\rho}_w} \right)^{-1} \quad (3.38)$$

$$\tilde{\rho}_w = \rho_{w0} \left[1 - \bar{\alpha}\tilde{T} + \bar{\alpha}_S\tilde{S} \right] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{Ra}{\bar{\alpha}Pr} \tilde{\rho} \vec{k} + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \tilde{T} + \gamma_T \tilde{\rho} \tilde{C}_i (\hat{T}_i - \tilde{T}) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial (\tilde{\rho}\tilde{C}_i)}{\partial \tilde{t}} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}\tilde{C}_i\tilde{\mathbf{u}}) = -\hat{w}_r \frac{\partial \tilde{\rho}\tilde{C}_i}{\partial z} + \frac{1}{Sc_i} \nabla \cdot (\tilde{\rho}\nabla \tilde{C}_i) + \gamma_i \tilde{\rho}\tilde{C}_i (\hat{T}_i - \tilde{T}) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{S} = \frac{1}{Sc_s} \nabla^2 \tilde{S} + \gamma_S \tilde{S} \tilde{\rho} \tilde{C}_i (\hat{T}_i - \tilde{T}) \quad (3.44)$$

dove sono stati usati:

- il numero di Rayleigh $Ra = \frac{g\alpha L^3 \Delta T}{k_T \nu}$;
- il numero di Prandtl $Pr = \frac{\nu}{k_t} = \frac{\mu c_p}{K_T}$;
- il numero di Schmidt del ghiaccio $Sc_i = \frac{\nu}{k_i}$ e il numero di Schmidt salino $Sc_S = \frac{\nu}{k_S}$;
- il coefficiente di espansione termica adimensionale $\bar{\alpha} = \alpha \overline{\Delta T}$;
- il coefficiente di espansione salina adimensionale $\bar{\alpha}_S = \alpha_S \overline{S_0}$;
- la velocità adimensionale di risalita $\widehat{w}_r = \frac{w_r}{U}$;
- la temperatura di congelamento adimensionale $\hat{T}_i = \frac{T_i}{\Delta T}$;
- il parametro $\gamma_T = \frac{\lambda_T \overline{L}^2 \bar{\rho}}{\nu}$;
- il parametro $\gamma_i = \frac{\lambda_i \overline{\Delta T} L^2}{\nu}$;
- il parametro $\gamma_S = \frac{\lambda_S \overline{\Delta T} L^2}{\nu}$;

Per non appesantire la notazione, d'ora in avanti, dato che verranno usate solo quantità adimensionali, i segni (\sim) verranno omessi.

3.8 Approssimazione di Boussinesq per la miscela acqua-ghiaccio

Il termine di galleggiamento è moltiplicato per la quantità $\frac{Ra}{\bar{\alpha} Pr}$. Nell'oceano, il numero di Rayleigh assume valori compresi tra $10^9 \div 10^{16}$ e il coefficiente $\bar{\alpha}$ è dell'ordine di 10^{-6} : considerando il caso di nostro interesse in cui $Ra = 10^{10}$, si ha

$$\frac{Ra}{\bar{\alpha} Pr} \sim 10^{16} \quad (3.45)$$

Un ordine così alto per questo fattore può portare ad una forte instabilità numerica, dovuta al fatto che il codice non è in grado di tener conto dell'errore di troncamento, anche se in doppia precisione. Per evitare questo problema, è necessario ricorrere ad un'approssimazione di tipo Boussinesq: ci poniamo in una

condizione in equilibrio idrostatico, preso con un profilo lineare di temperatura e in assenza di ghiaccio e le equazioni vengono scritte non più per le variabili stesse, ma per le loro fluttuazioni attorno a questa configurazione di equilibrio. Infine si sviluppano tali fluttuazioni usando delle serie di Fourier del parametro $\bar{\alpha}$, trascurando i termini superiori al primo ordine. Il sistema di equazioni del problema viene risolto per le sole fluttuazioni, sottraendo alle grandezze intere i corrispondenti valori di equilibrio. Di seguito riportiamo le variabili, riscritte come somma dei valori di equilibrio e delle fluttuazioni:

$$T = T_{eq} + T' \quad \text{con} \quad T_{eq} = \widehat{T}_0 - \alpha_T z \quad (3.46)$$

$$S = S_{eq} + S' \quad \text{con} \quad S_{eq} = \widehat{S}_0 - \beta_S z \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}' \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_{eq} = 0 \quad (3.48)$$

$$C_i = C_{ieq} + C'_i \quad \text{con} \quad C_{ieq} = 0 \quad (3.49)$$

$$\rho = \rho_{eq} + \rho' \quad \text{con} \quad \rho_{eq} = \rho_{weq} = 1 - \bar{\alpha} (T_{eq} - \widehat{T}_0) + \bar{\alpha}_S (S_{eq} - \widehat{S}_0) \quad (3.50)$$

$$p = p_{eq} + p' \quad \text{con} \quad p_{eq} = p_0 - \frac{Ra}{\bar{\alpha} Pr} \left[z - z_0 + \frac{\alpha}{2} (z - z_0)^2 - \frac{\alpha_S}{2} (z - z_0)^2 \right] \quad (3.51)$$

dove $\alpha_T = \frac{\Delta T}{L}$ e $\beta_S = \frac{\Delta S}{L}$. Adottando l'approssimazione di Boussinesq si considera la densità dell'acqua costante ovunque ($\rho_w = \rho_{w0} = 1$) tranne nel termine di galleggiamento, che dovrà tener conto del contributo relativo alla fluttuazione. L'approssimazione descritta è valida solo nel caso in cui le concentrazioni del ghiaccio sono dello stesso ordine delle fluttuazioni di temperatura e di salinità, in quanto tutte e tre le grandezze intervengono linearmente nell'equazione che descrive la densità. Per confermare l'ipotesi fatta, dunque, sostituiamo nell'eq. (3.38) l'espressione (3.39) ottenendo

$$\rho = \left(\frac{C_i}{\rho_i} + \frac{1 - C_i}{[1 - \bar{\alpha} T + \bar{\alpha}_S S]} \right)^{-1} \quad (3.52)$$

Ora, grazie al fatto che conosciamo gli ordini di grandezza di α e α_S , possiamo sviluppare la densità in serie di Taylor:

$$\begin{aligned}\rho &\simeq \rho(\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha}_S = 0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\alpha}} \right|_{\alpha=0} \bar{\alpha} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\alpha}_S} \right|_{\alpha=0} \bar{\alpha}_S + \dots \\ &\simeq \left(\frac{C_i}{\rho_i} + 1 - C_i \right)^{-1} + \frac{1 - C_i}{\left(\frac{C_i}{\rho_i} + 1 - C_i \right)^2} (-\bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S) + \dots\end{aligned}\quad (3.53)$$

Trascurando i termini di ordine superiore al primo, scriviamo:

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{C_i}{\rho_i} + 1 - C_i \right)} + \frac{1 - C_i}{\left(\frac{C_i}{\rho_i} + 1 - C_i \right)^2} (-\bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S) + o(\alpha)\quad (3.54)$$

Sottraendo poi alla ρ il suo valore di equilibrio ρ_{eq} e raccogliendo i termini di ordine $O(\alpha)$ troviamo:

$$\rho - \rho_{eq} = \frac{1}{\frac{C_i}{\rho_i} + 1 - C_i} - 1 + O(\alpha)\quad (3.55)$$

Avendo $\rho - \rho_{eq} \sim O(\alpha)$, segue che $C_i \sim O(\alpha)$. Sapendo inoltre che la concentrazione di equilibrio è nulla, ne risulta che sono proprio le fluttuazioni di concentrazione del ghiaccio ad essere dell'ordine di grandezza di α . Possiamo porre allora

$$C_i = \bar{\alpha}C'\quad (3.56)$$

Sostituendo quest'ultima nell'equazione (3.38), ricaviamo

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\left(\bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 \right)} + \frac{1 - \bar{\alpha}C'}{\left(\bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 \right)^2} (-\bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S) \\ &= \frac{1}{\left(\bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 \right)^2} \left[\bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 + (1 - \bar{\alpha}C') (-\bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S) \right]\end{aligned}\quad (3.57)$$

A questo punto, considerando $\bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 \simeq 1$ per α piccoli, e trascurando i termini di ordine superiore $\bar{\alpha}C' (-\bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S) \simeq O(\alpha^2)$, si arriva a scrivere:

$$\rho = \bar{\alpha}C' \left(\frac{1-\rho_i}{\rho_i} \right) + 1 - \bar{\alpha}T + \bar{\alpha}_S S\quad (3.58)$$

Ricavando un'equazione per le fluttuazioni $\rho' = \rho - \rho_{eq}$ della densità della miscela

$$\rho - \rho_{eq} = \bar{\alpha} \left(C'_i \frac{1 - \rho_i}{\rho_i} + T' - \frac{\bar{\alpha}_S}{\alpha} S' \right) \quad (3.59)$$

e sostituendola nel termine di galleggiamento dell'equazione del moto, omettendo i segni ($\bar{\cdot}$) per alleggerire la notazione, otteniamo finalmente

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{Ra}{Pr} \left(C'_i \frac{1 - \rho_i}{\rho_i} + T' - \frac{\alpha_S}{\alpha} S' \right) \vec{k} + \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (3.60)$$

Infine, anche l'equazione per la temperatura può essere riscritta ottenendo un'equazione per le sole fluttuazioni T' . Ricordando la dipendenza lineare della temperatura con la quota, e notando che il termine $\mathbf{u} \cdot \nabla T_{eq}$ ha solo componenti nulle tranne $\alpha_T w$, con w componente della velocità verticale, abbiamo

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla T' = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T' - \alpha_T w + \gamma_T \rho C'_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 - \alpha_T z - T' \right) \quad (3.61)$$

A questo punto, possiamo finalmente presentare il modello completo del sistema di equazioni della convezione termica nelle miscele acqua-ghiaccio in approssimazione di Boussinesq:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{Ra}{Pr} \left(C'_i \frac{1 - \rho_i}{\rho_i} + T' - \frac{\alpha_S}{\alpha} S' \right) \vec{k} + \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla T' = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T' - \alpha_T w + \gamma_T C'_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 - \alpha_T z - T' \right) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial (C'_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (C'_i \mathbf{u}') = -\widehat{w}_r \frac{\partial C'_i}{\partial z} + \frac{1}{Sc_i} \nabla^2 C'_i + \gamma_i C'_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 - \alpha_T z - T' \right) \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) S' = \frac{1}{Sc_s} \nabla^2 S' + \gamma_S S' C'_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 - \alpha_T z - T' \right) \quad (3.66)$$

Capitolo 4

Simulazione della convezione termica turbolenta

4.1 LES (*Large Eddy Simulation*)

La tecnica LES, o Simulazione a Grandi Vortici, è un modello matematico usato nella fluidodinamica computazionale, basata sulla modellizzazione delle scale dissipative e inerziali (più piccole) e sulla risoluzione in modo diretto dello spettro delle scale energetiche (più grandi). Teorizzata nel 1963 dal meteorologo Joseph Smagorinsky, essa è ancora oggetto di grande interesse, sia per i suoi possibili sviluppi, sia perché si pone come un giusto compromesso tra l'ottenere un modello più accurato delle RANS (*Reynolds Average Navier Stokes*) e l'essere meno costoso dal punto di vista computazionale rispetto a una DNS (*Direct Numerical Simulation*). La procedura tipica di un approccio alla LES è la seguente:

- decomposizione in componenti delle grandi scale e delle piccole scale (come per le RANS);
- filtraggio per eliminare le frequenze più alte (relative a scale inerziali e dissipative);
- chiusura con un modello per gli *sforzi sottogriglia* (relativi alle scale filtrate);
- soluzione numerica delle equazioni filtrate.

4.2 Equazioni filtrate

L'operazione di filtraggio è il primo passo nel processo di derivazione delle equazioni per la simulazione a grandi vortici. Essa consente la separazione della parte spaziale discretizzata e risolta direttamente dalla parte degli sforzi sottogriglia, successivamente modellata. Per perseguire tale scopo, si applica un metodo che

prevede l'utilizzo di un operatore filtro passa-basso in frequenza (passa-alto in scala) ($\bar{\cdot}$), che "ripulisce" la grandezza \mathbf{u} dall'influenza dei vortici delle scale più piccole e la trasforma nella componente risolta $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \quad (4.1)$$

dove \mathbf{u}' rappresenta la componente non risolta, o velocità residua. Il filtro viene rappresentato come un integrale di convoluzione sul dominio D

$$\bar{\mathbf{u}} = \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \bar{G}_{\bar{\Delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (4.2)$$

con $\bar{G}_{\bar{\Delta}}$ nucleo (*kernel*) dell'operatore filtro normalizzato

$$\int_D \bar{G}_{\bar{\Delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = 1 \quad (4.3)$$

e $\bar{\Delta}$ scala di *cutoff* del filtro G nello spazio e nel tempo, al quale viene associato il numero d'onda di cutoff $k_c = \frac{\pi}{\bar{\Delta}}$. Essa dev'essere contenuta nella banda inerziale, in quanto non elimina le scale energetiche. Nel codice BICE è stato utilizzato un filtro di tipo scatola (*box filter*), corrispondente ad una media in un cubo di volume $\bar{\Delta}_x \bar{\Delta}_y \bar{\Delta}_z$, definito come

$$\bar{G}_{\bar{\Delta}} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{se } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se la deformazione della griglia non è eccessiva, si può supporre che l'operatore filtro commuti con le derivate spaziali e temporali. Possiamo allora scrivere le equazioni filtrate di Navier-Stokes e della conservazione della massa:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad (4.5)$$

dove \bar{S}_{ij} è il tensore della velocità di deformazione

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.6)$$

Il problema principale è rappresentato dalla modellazione del termine non lineare $\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}$. La soluzione si trova introducendo il *tensore degli sforzi sottogriglia* τ_{ij} definito come

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (4.7)$$

Questo tensore è la base delle LES, e deve essere modellato in modo da calcolare gli effetti delle scale sottogriglia a partire dai campi di velocità ottenuti esplicitamente dalle scale maggiori. Si riscrivono allora le equazioni LES nella seguente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad (4.9)$$

4.3 Modelli LES a viscosità turbolenta

I modelli LES utilizzati in questo elaborato sono quelli a viscosità turbolenta fondati sulla teoria di Kolmogorov di turbolenza statistica omogenea, isotropa e in equilibrio. Questi modelli sono basati sull'ipotesi di Boussinesq del 1877, la quale afferma che:

- il comportamento della turbolenza di piccola scala è simile al moto Browniano molecolare;
- l'effetto delle piccole scale è assimilabile a una dissipazione viscosa.

Egli propose di associare a fianco della viscosità cinematica ν un coefficiente di viscosità turbolenta ν_{turb} : ciò equivale a supporre l'esistenza di un legame di proporzionalità tra la parte anisotropa del tensore degli sforzi τ_{ij}^a e il tensore velocità di deformazione \bar{S}_{ij}

$$\tau_{ij}^a = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_{turb} \bar{S}_{ij} \quad (4.10)$$

La correzione è necessaria per garantire che il tensore \bar{S}_{ij} sia a traccia nulla, assicurando la condizione di incomprimibilità.

4.3.1 Il modello Smagorinsky

Il modello proposto da Smagorinsky nel 1963 ipotizza che il coefficiente di viscosità turbolenta ν_{turb} dipenda direttamente dal tasso di dissipazione ϵ e dalla scala di *cutoff* del filtro $\bar{\Delta}$ attraverso una costante adimensionale C_s

$$\nu_{turb} = C_s \epsilon^{1/3} \bar{\Delta}^{4/3} \quad (4.11)$$

Tale modello presenta diverse debolezze:

- contiene una costante C_s il cui valore deve essere imposto a priori e dipende dal flusso considerato;

- ipotizza una completa separazione tra scale risolte e sottogriglia;
- essendo sempre dissipativo, in ogni punto e ad ogni istante, non è in grado di rappresentare il fenomeno della cascata inversa di energia;
- più in generale, è legato ai limiti della teoria di Kolmogorov;
- è attivo anche in condizioni laminari.

4.3.2 Il modello dinamico di Germano

La procedura dinamica introdotta da Germano nel 1991, è una tecnica che si propone di determinare la costante del modello nel corso della simulazione numerica, anziché prescriverla a priori. L'idea è quella di utilizzare due filtri, il filtro *griglia* ($\widehat{\cdot}$) e il filtro *test* ($\widehat{\cdot}$), di ampiezza maggiore ($\widehat{\Delta} > \overline{\Delta}$), ma comunque sempre all'interno della banda inerziale. Si suppone inoltre che lo stesso modello di turbolenza sia valido per le equazioni filtrate con entrambi i filtri. Per prima cosa, applichiamo al sistema di equazioni il filtro composto $\widehat{\widehat{G}} = \widehat{G} \star \overline{G}$, dove \star è l'operatore che indica il prodotto di convoluzione, ottenendo

$$\frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{\widehat{p}}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \widehat{\widehat{S}}_{ij}}{\partial x_j} + \widehat{\widehat{f}}_i \quad (4.13)$$

Lo sforzo sottogriglia, in questo caso, corrisponde a $T_{ij} = \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j - \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j$

Adesso, invece, applichiamo in successione il filtro griglia \overline{G} e poi il filtro test \widehat{G} allo stesso sistema di equazioni, in modo da ottenere

$$\frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \widehat{\widehat{\tau}}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{\widehat{p}}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \widehat{\widehat{S}}_{ij}}{\partial x_j} + \widehat{\widehat{f}}_i \quad (4.15)$$

dove $L_{ij} = \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j - \widehat{\widehat{u}}_i \widehat{\widehat{u}}_j$ è il tensore degli sforzi turbolenti risolti. Da un confronto tra i due sistemi precedenti, si arriva ad un'equazione nota come l'identità di Germano:

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} \quad (4.16)$$

Quest'ultima si utilizza per ricavare la costante C_s , dopo aver approssimato gli sforzi τ_{ij} e T_{ij} con la *formulazione di scala*, un modello di Smagorinsky modificato proposto da Wong & Lilly [8]:

$$\tau_{ij}^a \equiv \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} \equiv -2\nu_{turb} \left(\overline{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\overline{S}_{kk} \right) \quad (4.17)$$

$$T_{ij}^a \equiv T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_{turb} \left(\widehat{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\widehat{S}_{kk} \right) \quad (4.18)$$

con $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right)$, $\widehat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right)$ e $\nu_{turb} = C^{2/3} \overline{\Delta}^{4/3} \epsilon^{1/3} = C_\epsilon \overline{\Delta}^{4/3}$.

In accordo con le equazioni viste sopra, possiamo scrivere l'identità di Germano come

$$L_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk} \approx 2C_\epsilon M_{ij} \quad (4.19)$$

dove $M_{ij} = \left(\overline{\Delta}^{4/3} - \widehat{\Delta}^{4/3} \right) \left(\widehat{S}_{ij} - \delta_{ij}\widehat{S}_{kk}/3 \right)$. Dato che $L_{ij} = L_{ji}$, l'equazione scritta sopra rappresenta un sistema di sei equazioni con una sola incognita, rappresentata dalla costante C_ϵ . Data la sovradeterminazione, è appropriato utilizzare un metodo ai minimi quadrati (Lilly, 1992) per determinare C_ϵ .

Il modello dinamico di Germano ha le seguenti proprietà:

- la costante del modello non deve più essere fornita ma diventa una funzione dello spazio e del tempo che viene calcolata nel corso della simulazione;
- il modello si spegne automaticamente nelle regioni laminari, ad esempio nel sottostrato laminare dello strato limite: infatti, dove non sono presenti scale piccole, le quantità \widehat{S} e \overline{S} tendono a diventare uguali, e M_{ij} non tende a zero, mentre il termine L_{ij}^a tende ad annullarsi poiché le velocità $\widehat{\mathbf{u}}$ e $\overline{\mathbf{u}}$ tendono a diventare uguali;
- la costante C ora non è più necessariamente positiva: valori negativi sono responsabili di un aumento di energia cinetica e vengono associati al *backscatter*.

4.4 Modello LES per uno scalare

Come abbiamo già osservato con la temperatura e la salinità, si può considerare la dinamica di un generico scalare ζ attraverso un'equazione di diffusione-trasporto:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \zeta = k_\zeta \Delta \zeta + G_\zeta \quad (4.20)$$

dove k_ζ è la diffusività e G_ζ è il termine sorgente. Applicando un filtro all'equazione si ottiene

$$\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{\zeta} + \nabla \pi = k_\zeta \Delta \overline{\zeta} + \overline{G}_\zeta(t, \overline{\zeta}, \overline{\mathbf{u}}) \quad (4.21)$$

con il termine sottogriglia da modellare $\pi_i = \overline{u_i \zeta} - \overline{u_i} \overline{\zeta}$ e il termine sorgente filtrato $\overline{G_\zeta}$. Per analogia con i modelli a viscosità turbolenta, si può considerare una diffusività turbolenta k_{turb} e porre

$$\pi_i = k_{turb} \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_i} \quad (4.22)$$

Rifacendosi al modello di Smagorinsky, si ottiene

$$k_{turb} = -2p_s^2 \Delta^2 |\overline{S}| \quad (4.23)$$

La costante p_s va fornita a priori. Prima dell'avvento dei modelli dinamici, era solito considerarla uguale a quella che compare nell'equazione del moto, il che equivale a supporre un numero di Prandtl turbolento $P_{turb} = \frac{\nu_{turb}}{k_{turb}}$ unitario.

4.5 Modelli LES per la convenzione termoalina

Consideriamo il sistema di equazioni ricavato nella sezione 3.8. L'equazione della conservazione della quantità di moto è accoppiata tramite il termine di galleggiamento all'equazione della temperatura, della salinità e della concentrazione del ghiaccio. Accanto alle considerazioni che hanno portato alla deduzione del modello di Smagorinsky, va esaminato allora anche questo termine e l'energia potenziale gravitazionale ad esso legata. Le equazioni filtrate e adimensionalizzate sono rappresentate di seguito:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{Ra}{Pr} \left[\frac{1 - \rho_i}{\rho_i} \overline{C} + \overline{T} - \frac{\alpha_S}{\alpha} \overline{S} \right] \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + \tau_{ijsgs}) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{T} \overline{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_{jsgs}}{\partial x_j} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{\alpha_T w} + \gamma_T \overline{\alpha C f}(\overline{T}) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{C} \overline{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \xi_{jsgs}}{\partial x_j} + \frac{1}{Sc_i} \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{w_r} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + \gamma_C \overline{f}(\overline{T}) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{S} \overline{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \kappa_{jsgs}}{\partial x_j} + \frac{1}{Sc_S} \frac{\partial^2 \overline{S}}{\partial x_j \partial x_j} + \gamma_S \overline{S C f}(\overline{T}) \quad (4.28)$$

dove è stata definita la funzione $\overline{f}(\overline{T}) = \widehat{T}_i - \widehat{T}_0 + \alpha_T z - \overline{T}$ e il tensore $\tau_{ij} = \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$. Risulta evidente la necessità di modellare, oltre al tensore degli sforzi

sottogriglia $\tau_{ijsgs} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$, il flusso di calore sottogriglia $q_{isgs} = \overline{u_i T} - \overline{u_i} \overline{T}$, il flusso di concentrazione sottogriglia $\xi_{isgs} = \overline{u_i C} - \overline{u_i} \overline{C}$ e il flusso di salinità sottogriglia $\kappa_{isgs} = \overline{u_i S} - \overline{u_i} \overline{S}$. Per il tensore degli sforzi si adotta un modello a viscosità turbolenta di tipo Smagorinsky, applicando la procedura dinamica per calcolare la costante C_s

$$\nu_{turb} = C_s^2 \Delta^2 |\overline{S}| \quad \tau_{ij}^a = -2C_s^2 \Delta^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (4.29)$$

mentre per il flusso di calore, di ghiaccio e di salinità si procede come per uno scalare, introducendo il coefficiente di diffusione termica turbolenta ν_θ , la diffusività turbolenta del ghiaccio ν_i e del sale ν_S :

$$q_{isgs} = -\nu_\theta \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad (4.30)$$

$$\xi_{isgs} = -\nu_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} \quad (4.31)$$

$$\kappa_{isgs} = -\nu_S \frac{\partial \overline{S}}{\partial x_i} \quad (4.32)$$

4.6 Il metodo numerico

Il codice numerico BICE (Boussinesq with ICE), scritto in Fortran, impiegato in questo lavoro di tesi, è una versione modificata di un codice di simulazione LES che riproduce correnti di convezione turbolenta alla Bénard, sviluppato all'interno del gruppo di ricerca coordinato dal professor Cercignani al Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. Le principali modifiche apportate riguardano l'introduzione dell'equazione per la specie ghiaccio, di quella per la specie sale e dei termini di accoppiamento di queste con le altre variabili. È stato affinato il modello di calcolo sottogriglia per i termini sorgente che rendono conto degli scambi termici tra acqua e ghiaccio, delle transizioni di fase e del termine di produzione di salinità. Le equazioni utilizzate nel codice BICE sono le stesse già riportate nel paragrafo 3.8, con l'aggiunta dei termini sottogriglia del modello di turbolenza:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{Ra}{Pr} \left[\frac{1 - \rho_i}{\rho_i} C_i + T - \frac{\alpha_S}{\alpha} S \right] \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + \tau_{ijsgs}) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (Tu_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_{jsgs}}{\partial x_j} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} - \alpha_T w + \gamma_T \bar{\alpha} C_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 + \alpha_T z - T \right) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial (C_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \xi_{jsgs}}{\partial x_j} - \widehat{w}_r \frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{1}{Sc_i} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j \partial x_j} + \gamma_i C_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 + \alpha_T z - T \right) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Su_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \kappa_{jsgs}}{\partial x_j} + \frac{1}{Sc_S} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j \partial x_j} + \gamma_S S C_i \left(\hat{T}_i - \hat{T}_0 + \alpha_T z - T \right) \quad (4.37)$$

4.7 Discretizzazione temporale

Uno dei principali problemi nella risoluzione del sistema di equazioni visto precedentemente è l'accoppiamento tra l'equazione di conservazione della massa e l'equazione di conservazione della quantità di moto. Nella prima, di carattere non evolutivo, la condizione di divergenza nulla deve essere soddisfatta in ogni punto e in ogni istante, mentre la seconda, che contiene la derivata temporale, necessita l'utilizzo di più nodi della griglia. Per superare questa difficoltà, si è fatto ricorso al *metodo di proiezione*. Per l'avanzamento temporale sia dell'equazione per il campo di moto, sia dell'equazione per la temperatura, la concentrazione di ghiaccio e la salinità, è stato utilizzato un metodo Runge-Kutta esplicito a tre passi con accuratezza del secondo ordine. Si riporta di seguito un esempio del metodo di proiezione, in cui si è supposto di approssimare l'operatore di derivazione temporale al primo ordine con il metodo di Eulero. Il valore della velocità u_i^n si fa avanzare ponendo

$$u_i^{n+1} = u_i^n + f_i^n \cdot \Delta t \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.38)$$

in cui f_i^n rappresenta la derivata temporale di u_i al passo n . L'operatore di derivazione spaziale nella direzione x_i viene invece indicato con $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Lo schema di avanzamento temporale considera ogni generico passo n suddiviso in due fasi distinte: nella prima si avanza la velocità senza tenere conto del termine di pressione e si ottiene un termine provvisorio u^*

$$u_i^* = u_i^n + \left[-u_i^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{Ra}{Pr} \left(\frac{1 - \rho_i}{\rho_i} C^n + T^n - \frac{\alpha_S}{\alpha} S^n \right) \delta_{i3} + \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \right] \cdot \Delta t \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.39)$$

il quale, però, non è a divergenza nulla. Il secondo passo consiste nel sottrarre u_i^* all'espressione dell'avanzamento completo. Si ottiene così la relazione

$$u_i^{n+1} - u_i^* = \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \cdot \Delta t \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.40)$$

A questo punto si considera la divergenza della (4.40) e si impone che il campo sia solenoidale:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.41)$$

Si ottiene così l'equazione di Poisson per la pressione

$$-\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.42)$$

che, risolta numericamente attraverso un *Fast Poisson Solver*, permette di correggere il valore di u_i^* sostituendo nella (4.40) il valore di p trovato. L'idea del metodo di proiezione è, in sostanza, quella di interpretare il ruolo del termine di pressione nell'equazione della quantità di moto come quello di un proiettore, che proietta un arbitrario campo vettoriale in uno spazio a divergenza nulla. Per approssimare l'operatore di derivazione nel tempo è stato impiegato un metodo esplicito: le espressioni discrete dei termini nella relazione che aggiorna le grandezze al passo n dipendono solo dai valori relativi a tempi precedenti a n stesso. Riguardo la scelta del passo temporale Δt , per garantire la stabilità di un codice esplicito, bisogna considerare i vari termini separatamente e ottenere per ognuno di essi un valore massimo Δt_{max} : il minimo dei Δt calcolati viene poi assunto come limite effettivo. Per il termine convettivo si ricava la stima

$$\Delta t \simeq CFL \left(\frac{\Delta x_i}{u_i} \right) \quad (4.43)$$

con CFL (dalle iniziali di Courant, Friedrichs e Lewy) coefficiente che dipende dal particolare metodo utilizzato: per lo schema RK impiegato, $CFL = \sqrt{3}$. Per il termine diffusivo la stima del massimo passo temporale è

$$\Delta t_{max} \simeq k_{min_i} \left(\frac{\Delta x_i^2}{\nu} \right) \simeq k \left(\frac{L^2}{N_x^2 \nu} \right) \quad (4.44)$$

con $0.1 < k < 10$ coefficiente numerico, anch'esso dipendente dallo schema di avanzamento temporale. All'aumentare della risoluzione, questo requisito di stabilità diventa più severo. E' importante considerare, inoltre, il problema dell'avanzamento temporale delle equazioni per la temperatura, per la concentrazione di ghiaccio e per la salinità. Per i tempi di diffusione termica e molecolare, si considera il valore Δt_{max} per la diffusione di quantità di moto, moltiplicato rispettivamente per i parametri adimensionali Pr , Sc_i e Sc_S .

4.8 Discretizzazione spaziale

Esistono numerose tecniche per effettuare la discretizzazione spaziale del dominio fisico nel quale si vuole simulare una corrente. Nella presente tesi, si è utilizzato il metodo delle differenze finite (FD), per il vantaggio di essere più immediato nell'implementazione del codice e di comportare un minor costo computazionale rispetto a uno schema a volumi finiti o agli elementi finiti. Tale metodo consiste nell'imporre le equazioni su una griglia di nodi: la struttura del dominio di calcolo appare quindi come una serie di parallelepipedi affiancati, sui quali, in generale, vengono collocate tutte le grandezze. In questo caso, tuttavia, la collocazione di tutte le quantità in ogni nodo causerebbe l'insorgenza di oscillazioni numeriche, chiamate *modi spuri di pressione*. Per ovviare tale problema, si è fatto ricorso a una griglia strutturata sfalsata (*structured staggered grid*), in cui le quantità scalari (temperatura, concentrazione di ghiaccio, salinità, pressione) vengono collocate al centro di ogni cella, mentre le quantità vettoriali (velocità) vengono poste sulle facce delle celle corrispondenti. Nell'applicazione del metodo alle differenze finite si deve optare per una conveniente approssimazione dell'operatore di derivazione dello spazio. La scelta deve essere un giusto compromesso tra costo computazionale, accuratezza e stabilità. In base a tali considerazioni, la soluzione comunemente adottata è quella delle differenze finite centrate del secondo ordine. La scelta della griglia è anche condizionata dalla necessità di risolvere meglio le zone dove i gradienti delle grandezze sono elevati: a tal proposito, si rinuncia all'uniformità e si procede ad un infittimento delle celle nelle regioni relative allo strato limite, in cui devono essere riprodotte strutture vorticosi di piccole dimensioni. Per questo scopo vengono utilizzate funzioni di stiramento (*stretching*), che diminuiscono progressivamente lo spessore delle celle a mano a mano che ci si avvicina alla parete, lungo la coordinata verticale z . La funzione utilizzata nel codice BICE è espressa dalla relazione

$$\frac{\Delta z(k)}{\Delta z(k+1)} = \sigma \quad (4.45)$$

con $\sigma = 1.1$. Lo stiramento di ordine geometrico si applica in modo da dare una griglia simmetrica rispetto al centro (posto in $z = 0$). Questa scelta garantisce una buona gradualità nella disposizione dei punti in prossimità delle pareti: uno stiramento eccessivo e non abbastanza progressivo può infatti comportare instabilità numerica e diminuzione di accuratezza. La risoluzione utilizzata dipende dal numero di Rayleigh, a causa dell'aumento di turbolenza che esso comporta e della conseguente necessità di "catturare" strutture vorticosi più piccole e strati limite più fini. Nella seguente tesi, si utilizza $Ra = 10^{10}$ e una griglia (181x181x120).

4.9 Condizioni al contorno

Il confine fisico segue quello delle celle. I campi scalari, comprese le velocità tangenziali, vengono posti a centro cella, a una distanza pari a mezza cella dal bordo fisico. Per applicare le condizioni al contorno su queste componenti si considera, attorno al dominio di calcolo, uno strato di celle esterne al bordo, chiamate *celle fantasma*, a cui si associano dei valori che, interpolati con quelli delle celle del primo strato interno al dominio, consentono di ottenere i valori voluti sul confine fisico. Le condizioni di Neumann di flusso nullo vengono imposte mettendo il valore del punto fantasma uguale a quello dell'ultimo punto del dominio ($u_{n+1} = u_n$), mentre per le condizioni di Dirichlet il valore al contorno nel punto fantasma è l'opposto di quello del primo punto del dominio ($u_{n+1} = -u_n$). In tutte le simulazioni effettuate, sono state imposte condizioni periodiche lungo le direzioni orizzontali x e y , in quanto non è semplice stabilire i valori delle grandezze caratteristiche della turbolenza ai bordi laterali del dominio. L'inconveniente nell'applicare tali condizioni è che possono crearsi "auto-interferenze" tra porzioni di fluido che nella realtà non interagirebbero. Tuttavia, il dominio è più grande delle distanze di correlazione, pertanto la loro dinamica non viene alterata dalle scelte delle condizioni al contorno. Per i bordi superiori e inferiori del dominio, invece, la scelta di quali condizioni al contorno applicare si fa più delicata. Nell'ipotesi di simulare le dinamiche di un oceano, il bordo superiore rappresenta l'interazione acqua-aria, mentre il bordo inferiore viene fissato arbitrariamente, ma sufficientemente lontano dal fondo da non sentirne gli effetti. Per il campo di velocità sono state imposte condizioni di scivolamento libero (*free slip condition*) su tutte le superfici orizzontali, e condizioni di non-penetrabilità per la componente verticale w . Quest'ultima tiene conto del fatto che non ci devono essere passaggi di acqua fra l'oceano e l'atmosfera e che si ipotizza non ce ne siano neppure fra i diversi strati di oceano. Per la temperatura sono state imposte condizioni di Dirichlet del tipo:

$$T(0) = T_{bottom} \quad T(L) = T_{top} \quad (4.46)$$

con $T_{bottom} \geq T_{top}$. Le condizioni fisiche del problema in questione vengono in questo modo ben riprodotte: la superficie dell'oceano viene infatti mantenuta a temperatura costante dal vento, mentre gli strati inferiori dell'oceano non subiscono variazioni climatiche di temperatura.

Interessante è la questione delle condizioni al contorno per la specie ghiaccio. Da altri lavori [9], si vedeva come la scelta di condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann non influenzasse più di tanto i risultati ottenuti. Nella seguente tesi, tuttavia, come verrà ribadito anche nel capitolo successivo, il numero di Rayleigh è decisamente superiore rispetto ai valori utilizzati negli studi precedenti. In questa situazione si nota come la scelta delle condizioni al contorno porta a si-

gnificative variazioni dei valori di crescita di concentrazione del ghiaccio ottenuti, come mostrato in figura 4.1.

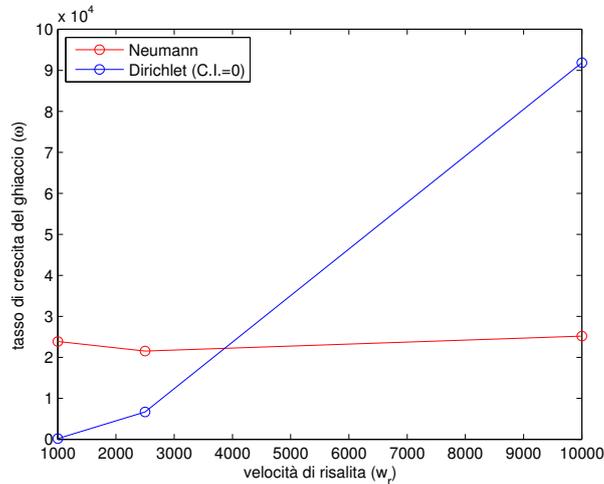


Figura 4.1: Confronto tra tassi di crescita del ghiaccio in funzione di w_{rise} calcolati con condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann a $\gamma_i = 10^5$

A seguito di tale osservazione, scegliamo di basare tutte le nostre simulazioni su delle condizioni al contorno di Neumann per quanto riguarda la specie ghiaccio. Tale scelta si basa sul fatto che una condizione di Dirichlet non sarebbe affatto opportuna, dato che non sappiamo quanto ghiaccio si deve formare. La condizione di Neumann, al contrario, è la condizione più "neutra" possibile, che consente di imporre ciò che abbiamo fuori (non noto) uguale a quello che abbiamo dentro (flusso nullo). Tale soluzione è quindi decisamente migliore. Poiché si può considerare la salinità proporzionale alla concentrazione di ghiaccio, in quanto il passaggio di stato avviene solo per l'acqua pura causando un rilascio e un aumento della concentrazione salina, si è deciso di applicare condizioni al contorno di Neumann anche per la specie sale, almeno per quanto riguarda il bordo superiore. Per il bordo inferiore, tuttavia, si preferisce imporre un valore fissato di salinità, perché altrimenti il sale risulterebbe definito a meno di una costante. Lo svantaggio, però, è che si ha una perdita di sale il quale, proprio a causa delle condizioni al contorno imposte, tende a uscire dal dominio. Non avendo altre soluzioni migliori, accettiamo questo limite, tenendone conto nei risultati ottenuti.

4.10 Condizioni iniziali

Il modello matematico deve essere infine chiuso da opportune condizioni iniziali.

Simulazione acqua-ghiaccio senza sale: la simulazione viene avviata a partire da un campo di velocità e temperatura con turbolenza sviluppata e otte-

nuto da una prova precedente. A questo campo viene sovrapposto, per la concentrazione di ghiaccio, un disturbo random distribuito nel dominio e dell'ordine di 10^{-12} .

Simulazione acqua-sale senza ghiaccio: Ad una condizione iniziale di quiete, con temperatura e salinità crescenti con la profondità, viene sovrapposto un disturbo random per la velocità, la temperatura e la salinità.

Simulazioni acqua-ghiaccio con sale: Ad un campo di velocità, temperatura e salinità ottenuto dalla simulazione acqua-sale senza ghiaccio, viene sovrapposto un disturbo random per la concentrazione di ghiaccio.

Capitolo 5

Analisi dei risultati

Nel presente capitolo viene presentata l'analisi dei risultati delle simulazioni effettuate mediante il codice precedentemente descritto con lo scopo di studiare l'interazione tra produzione di ghiaccio, turbolenza e salinità ad un valore del numero di Rayleigh pari a 10^{10} . Dapprima sono state effettuate simulazioni coinvolgendo disgiuntamente la specie ghiaccio e la specie sale per stimarne separatamente gli effetti, dopo di che si è valutato l'effetto combinato. Tali simulazioni verranno citate nel seguito secondo quanto indicato in tab.(5.1). I risultati ottenuti vengono confrontati, dove possibile, con quelli ricavati in lavori precedenti a numeri di Rayleigh più bassi.

Tabella 5.1: Simulazioni

Sigla	Descrizione
H_2O	Simulazioni con sola acqua, senza la specie ghiaccio né la specie sale
ICE	Simulazioni che coinvolgono solo la specie ghiaccio
SALT	Simulazioni che coinvolgono solo la specie sale
S+I	Simulazioni che coinvolgono sia la specie ghiaccio sia la specie sale

5.1 Simulazioni H_2O

Vengono qui presentati i risultati di simulazioni H_2O precedentemente svolte, che verranno confrontati con quelli ottenuti dalle simulazioni ICE e SALT in modo da dedurre i cambiamenti operati dalla presenza del ghiaccio e dalla salinità sul fenomeno. Per simulare un moto di convezione termica turbolenta si parte da una condizione di equilibrio statico in cui, dato l'effetto molto importante della stratificazione della densità, la temperatura ha un profilo lineare rispetto alle condizioni al contorno imposte. Aggiungendo dei disturbi aleatori di piccola ampiezza ai campi di velocità e temperatura media, si causa una destabilizzazione della stratificazione che innesca i moti di convezione termica e i moti turbolenti.

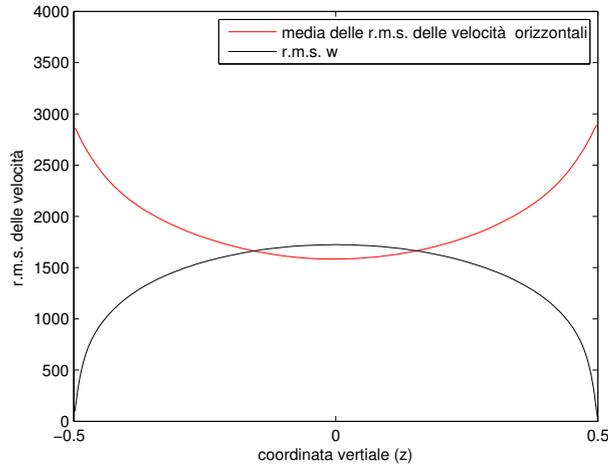


Figura 5.1: Profili delle radici delle fluttuazioni quadratiche medie delle componenti di velocità nel caso H_2O

In fig. 5.1 vengono rappresentati i profili di fluttuazione quadratica media (*r.m.s.*) delle velocità. Le medie sono state valutate su piani orizzontali e nel tempo. Si può notare come la componente verticale w sia più grande nella zona centrale e si annulli agli estremi. Questo è dovuto al fatto che deve rispettare la condizione al contorno di non penetrabilità. La componente orizzontale, invece, è più alta agli estremi rispetto alla parte centrale, poiché soggetta a condizioni di scorrimento libero. La turbolenza modifica il profilo di temperatura rispetto a quello di equilibrio, come si può vedere in figura 5.2. A causa del rimescolamento dovuto alla presenza di vortici, la temperatura media risulta pressoché costante nella zona centrale, presentando uno strato limite alle estremità.

5.2 Modello teorico

Studi precedenti hanno evidenziato come la presenza di ghiaccio sia dominante all'interno delle strutture turbolente fredde e discendenti (*plumes*). Questi risultati hanno portato a proporre un modello teorico semplificato, ipotizzando la concentrazione di ghiaccio C_i all'interno di una struttura fredda funzione della coordinata verticale z e del tempo t :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -W \frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{1}{S_c} \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} + \Gamma C_i \quad (5.1)$$

dove

$$\frac{1}{S_c} = \frac{1}{S_{c_i}} + \frac{1}{S_{c_{turb}}} \quad W = w + w_r \quad \Gamma = \gamma (T_i - T) \quad (5.2)$$

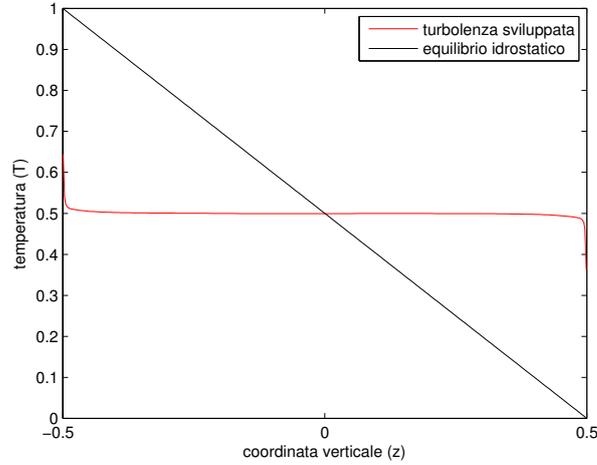


Figura 5.2: Profili medi di temperatura nel caso H_2O

Utilizzando il metodo della separazione delle variabili, otteniamo:

$$C_i(z, t) = \widehat{C}(z) e^{\omega t} \quad (5.3)$$

dove $\omega \in \mathbb{C}$ è l'autovalore e $\widehat{C}(z)$ l'autovettore. Sostituendo nell'equazione (5.1) otteniamo:

$$\widehat{C}''(z) - WSc\widehat{C}'(z) + (\Gamma - \omega)Sc\widehat{C}(z) = 0 \quad (5.4)$$

in cui $\widehat{C}''(z)$ e $\widehat{C}'(z)$ rappresentano, rispettivamente, la derivata seconda e la derivata prima rispetto a z .

Se scriviamo:

$$\widehat{C}(z) = \Psi(z) e^{\chi z} \quad (5.5)$$

possiamo riscrivere l'equazione precedente in questo modo:

$$\chi^2 - WSc\chi + (\Gamma - \omega)Sc = 0 \quad (5.6)$$

da cui si ricava

$$\chi_{1,2} = \frac{WSc \pm \sqrt{W^2Sc^2 - 4Sc(\Gamma - \omega)}}{2} \quad (5.7)$$

Considerando solo la parte reale, in modo da ignorare i contributi oscillatori, si ottiene l'espressione dell'autovalore ω :

$$\omega = \Gamma - \frac{W^2Sc}{4} \quad (5.8)$$

che mostra una dipendenza lineare da Γ e quadratica da W . Per i numeri di Rayleigh analizzati in lavori di tesi precedenti [9], si nota una buona corrispondenza tra i risultati ottenuti e il modello monodimensionale esposto.

Sarà interessante stabilire la bontà di questo modello per i casi qui studiati ad un numero di Rayleigh elevato. E' importante far notare come, dato che il ghiaccio non diffonde, il numero di Schmidt fisico sia molto grande e che, quindi, il termine $\frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sc_i} + \frac{1}{Sc_{turb}}$, coincida praticamente con il termine relativo al numero di Schmidt turbolento.

5.3 Simulazioni senza sale

5.3.1 Scelta dei valori

Una volta fissato Ra , si ricavano i valori della lunghezza del dominio L e dell'intervallo di tempo ΔT utilizzati per adimensionalizzare le equazioni. Con una stima il più possibile attinente alla realtà, aiutati anche da alcune misure effettuate, si sceglie $L = 5 \text{ m}$ e $\Delta T = 10^{-1} \text{ }^\circ\text{C}$. Più elaborate sono le stime dei due parametri fondamentali di queste simulazioni: la velocità di risalita del ghiaccio w_{rise} e il coefficiente di scambio termico γ_i . Per la prima, ci siamo serviti di alcuni risultati sperimentali forniti da Morse & Richard [10]: attraverso esperimenti condotti in laboratorio, essi hanno ricavato valori di velocità di galleggiamento del ghiaccio compresi tra 0.1 cm/s e 2.2 cm/s . Nel nostro studio, tali valori vengono, come già descritto nei capitoli precedenti, opportunamente adimensionalizzati, ottenendo un range di dati pari a $2500 \div 10000$. Per determinare γ_i , invece, viene sfruttata la sua forte dipendenza dalle dimensioni dei cristalli di frazil ice (in particolar modo dai loro raggi). Conoscendo tali dimensioni, e applicando l'ipotesi di turbolenza *hard* per calcolare il numero di Nusselt (paragrafo 2.3.3), si è ricavato l'intervallo $10^4 \div 10^6$. Queste simulazioni vengono tutte effettuate a partire da condizioni iniziali in cui, nel campo di velocità e temperatura ottenuto in condizioni di regime statisticamente stazionario con le simulazioni H_2O descritte nel paragrafo 5.1, viene sovrapposto un campo di concentrazione di ghiaccio con distribuzione gaussiana e ampiezza massima 10^{-12} .

5.3.2 Simulazioni ICE

I calcoli condotti in questo capitolo sono stati tutti effettuati facendo variare la velocità di risalita nel proprio intervallo per ogni valore del range di γ_i . La tabella (5.2) riassume i principali parametri utilizzati nelle varie prove.

La scelta di un intervallo di w_{rise} più ampio rispetto a quello presentato nel paragrafo precedente è dovuta principalmente a due ragioni. In primo luogo, l'estensione dell'intervallo di velocità di risalita ci consente, dove richiesto, di effettuare un'analisi parametrica più approfondita, ricavando ulteriori informa-

Tabella 5.2: Simulazione ICE

Parametri	Valori Adimensionalizzati
γ_i	$10^4 \div 10^6$
w_{rise}	$50 \div 10000$
ΔT	1
ΔL	1
Ra	10^{10}
Pr	14

zioni soddisfacenti per la comprensione del fenomeno studiato. Secondariamente, per il numero di Rayleigh considerato, ci si vuole confrontare con il modello teorico monodimensionale anche a valori molto ridotti di velocità di galleggiamento, lontani da quelli fisici. Viene simulata solo la prima fase della formazione di ghiaccio, in quanto è la condizione in cui i valori di concentrazione sono compatibili con l'approssimazione di Boussinesq. In figura 5.3 vengono visualizzate la concentrazione di ghiaccio e la temperatura in un piano orizzontale prossimo alla superficie a $w_{rise} = 2500$, $\gamma_i = 10^6$ e tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$.

Come prevedibile, il ghiaccio si forma nelle zone a temperatura inferiore a quella di congelamento. Come già ampiamente sottolineato, i parametri che più influenzano la fase di crescita del ghiaccio sono la velocità di risalita w_{rise} e il coefficiente di scambio termico γ_i . La scelta di tali valori è fondamentale per ottenere regimi di maggiore o minore crescita di ghiaccio. Per la velocità di risalita, il termine di paragone è la radice del valore quadratico medio della componente verticale della velocità turbolenta *r.m.s.* w . Nelle figure 5.4, 5.5 e 5.6 sono riportate le concentrazioni di ghiaccio mediate su tutto il volume di calcolo, in funzione del tempo al variare di w_{rise} e, rispettivamente, a $\gamma_i = 10^4$, $\gamma_i = 10^5$ e $\gamma_i = 10^6$. Si può osservare che fino a $w_{rise} \simeq 500$ la crescita di concentrazione è più rapida con l'aumento della velocità di galleggiamento. Questo può essere interpretato col fatto che per valori di w_{rise} molto più bassi di *r.m.s.* w , la forza di galleggiamento è troppo ridotta, e i cristalli di ghiaccio vengono spinti verso il fondo dove la temperatura è più alta, causandone la fusione. Quando la w_{rise} è confrontabile con la *r.m.s.* w , le forze di galleggiamento del ghiaccio vengono bilanciate dai moti turbolenti discendenti: in questo modo, i cristalli rimangono all'interno di strutture convettive fredde, ossia le plumes, in cui riescono a fungere da nuclei per la produzione di nuovo ghiaccio. Per valori di w_{rise} superiori a quelli di *r.m.s.* w , i cristalli raggiungono la superficie velocemente senza riuscire a contribuire alla formazione in profondità. Il parametro γ_i definisce il peso relativo che il termine sorgente ha nell'equazione (3.65) della concentrazione del ghiaccio. Per valori bassi di γ_i , l'importanza del termine sorgente è minore rispetto agli altri e gli scambi termici sono molto più lenti rispetto ai tempi caratteristici della convezione e della diffusione. Viceversa, per valori di γ_i elevati, il termine sorgente

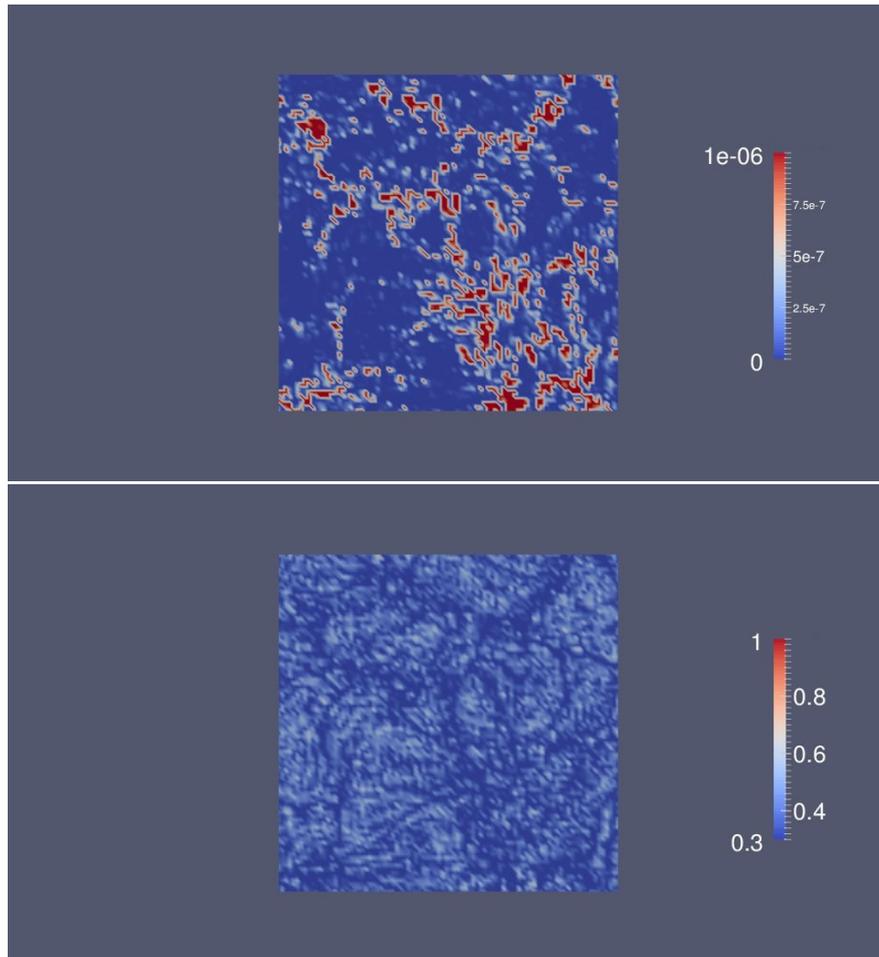


Figura 5.3: Visualizzazione in un caso ICE della concentrazione di ghiaccio (sopra) e della temperatura (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano orizzontale vicino alla superficie ($z = 0.49$): dove la temperatura è minore, la concentrazione di ghiaccio è più alta

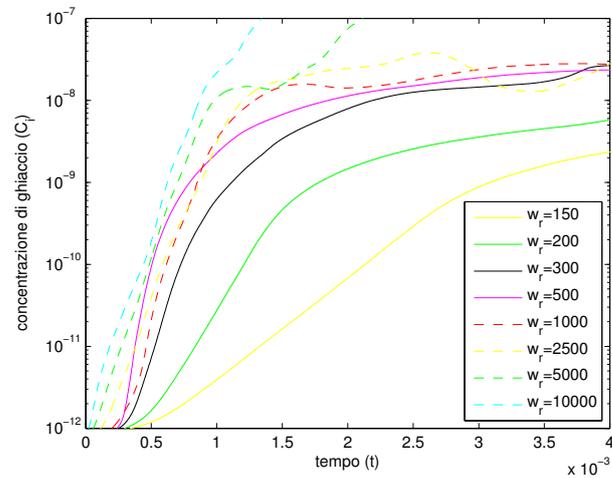


Figura 5.4: Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^4$ al variare di w_{rise}

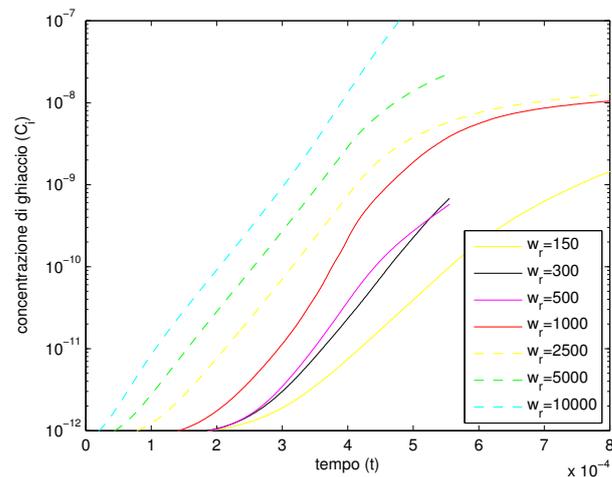


Figura 5.5: Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^5$ al variare di w_{rise}

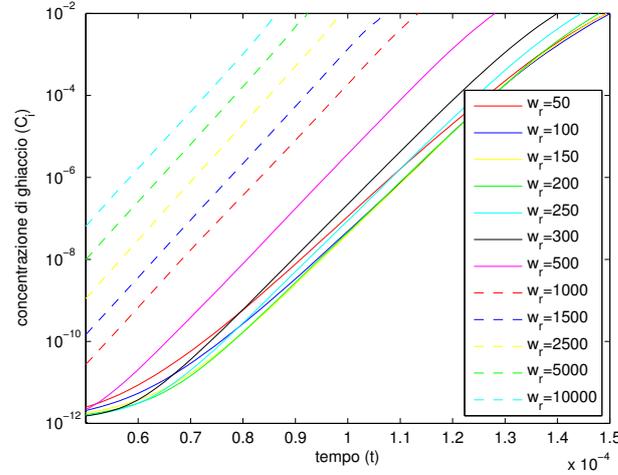


Figura 5.6: Concentrazione di ghiaccio C_i mediata sul dominio in funzione del tempo t in un caso ICE con $\gamma_i = 10^6$ al variare di w_{rise}

te diventa preponderante rispetto agli altri, aumentando l'efficienza degli scambi termici. A seguito di ciò, si può notare come in figura 5.4, per valori di $\gamma_i = 10^4$, la maggiore lentezza nei processi di fusione e congelamento porta a un minore rateo di crescita del ghiaccio e a una sua minore concentrazione, mentre all'aumentare di γ_i gli scambi termici si intensificano, riuscendo a generare più ghiaccio (fig. 5.6, $\gamma_i = 10^6$). Nelle figure 5.8 e 5.9 è rappresentato il valore del tasso di crescita del ghiaccio ω (ovvero la pendenza delle curve rappresentanti la concentrazione di ghiaccio media in funzione del tempo nella fase lineare) in funzione della velocità di risalita e del coefficiente di scambio termico, rispettivamente.

Dal confronto tra i ratei di crescita ottenuti a $\gamma_i = 10^6$ e il modello monodimensionale (fig. 5.7), si nota come l'andamento parabolico del tasso di crescita in funzione della w_{rise} , previsto dal modello, sia valido solo per valori della velocità di galleggiamento inferiori a quelli di *r.m.s.* w . Questo conferma quanto osservato in precedenti lavori di tesi [9] a $Ra = 10^6$. Per numeri di Rayleigh elevati, come nel presente elaborato, il modello teorico monodimensionale risulta quindi inadeguato in quanto valido solo per velocità di risalita basse, ben lontane da valori realistici. La figura 5.8 mostra per w_{rise} basse andamenti molto diversi per $\gamma_i = 10^4$ e 10^5 rispetto a $\gamma_i = 10^6$. Per i valori di γ_i più bassi gli scambi termici sono meno efficaci, quindi è più lento anche lo scioglimento del ghiaccio trasportato dalla velocità turbolenta nelle zone a temperatura maggiore. Questo comporta un incremento delle quantità di ghiaccio nel dominio e, per $\gamma_i = 10^4$ e 10^5 , un aumento del tasso di crescita al diminuire di w_{rise} . Per valori di w_{rise} superiori a *r.m.s.* w , il tasso di crescita risulta indipendente dalla velocità di galleggiamento. In figura 5.9 è evidente la forte dipendenza di ω dal valore del termine di produzione γ_i .

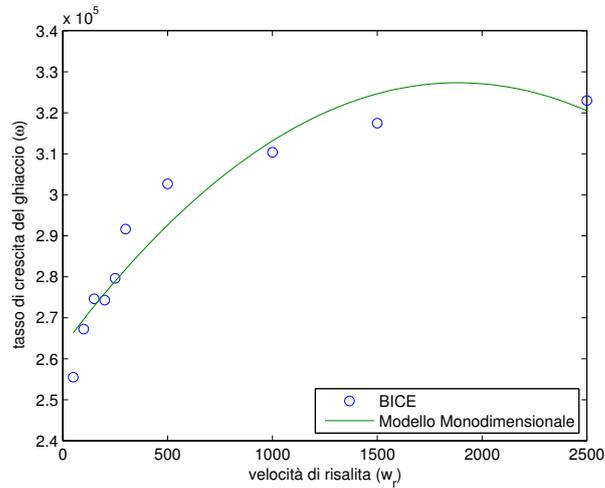


Figura 5.7: Andamento del tasso di crescita della concentrazione media di ghiaccio in funzione di w_{rise} : confronto tra i risultati ottenuti con BICE a $\gamma_i = 10^6$ e quelli previsti dal modello monodimensionale eq.(5.8)

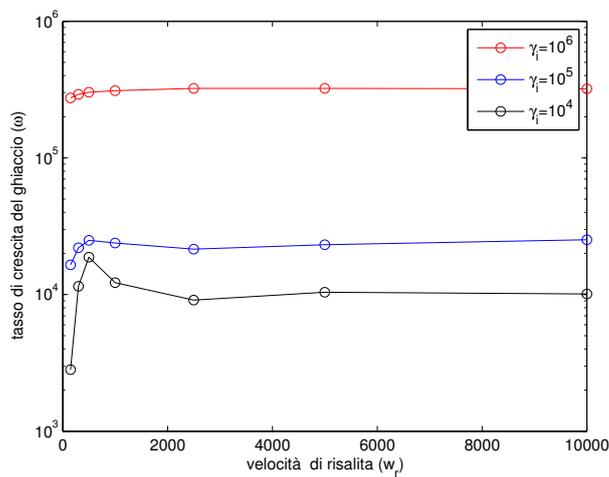


Figura 5.8: Andamento del tasso di crescita del ghiaccio in funzione di w_{rise} nel caso ICE a γ_i diversi

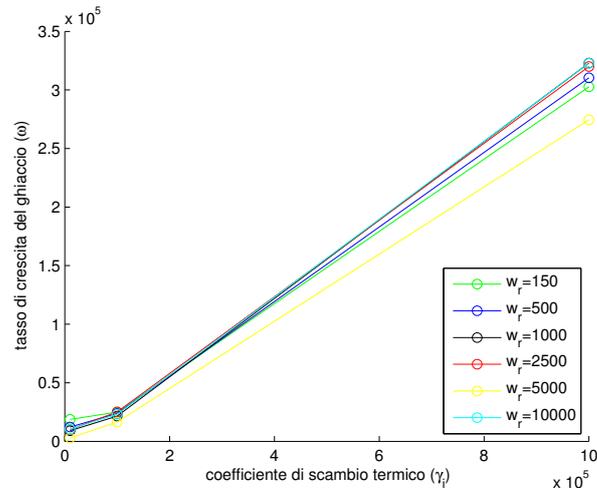


Figura 5.9: Andamento del tasso di crescita del ghiaccio in funzione di γ_i nel caso ICE a w_{rise} diversi

Per quanto riguarda il contributo del ghiaccio all'energia turbolenta, si va ad analizzare i profili di *r.m.s.* della velocità turbolenta (fig. 5.10 e 5.11). Per le simulazioni ICE, svolte in un regime che non è statisticamente stazionario, i profili vengono ottenuti da medie solo in piani orizzontali. Dai grafici riportati risulta che la presenza di ghiaccio riduce l'intensità delle fluttuazioni turbolente di velocità.

Il profilo medio di temperatura non subisce variazioni significative tra il caso ICE e il caso H_2O , a causa della bassa concentrazione di ghiaccio.

5.4 Simulazioni con il sale

5.4.1 Scelta dei valori

La seconda parte delle simulazioni di questo lavoro di tesi è svolta considerando la salinità come variabile indipendente. Le simulazioni sono effettuate a partire da un profilo di salinità iniziale stabile e lineare corrispondente ad una differenza di salinità tra superficie e fondo pari a $\Delta S = 10^{-2}$ *psu* [14] ed in valore adimensionale $\Delta S^* = 10^{-4}$. I parametri utilizzati sono riportati in tab. 5.3. Le prove effettuate consentono di valutare l'influenza della salinità sulla turbolenza. I risultati ottenuti, inoltre, forniranno i dati da cui partiranno le simulazioni con sale e ghiaccio.

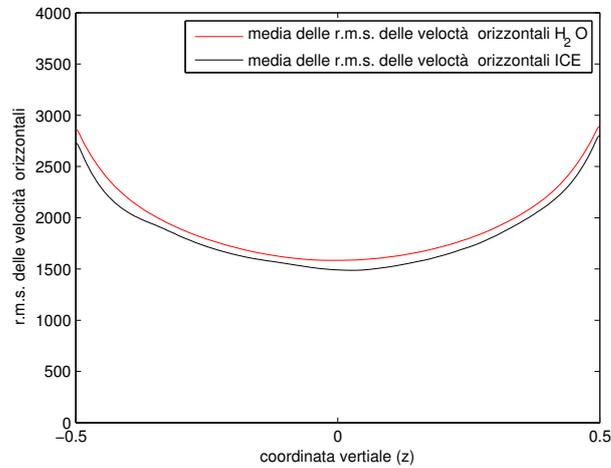


Figura 5.10: Confronto tra i profili di r.m.s. delle componenti orizzontali di velocità nel caso H₂O e nel caso ICE con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 1 \cdot 10^{-4}$

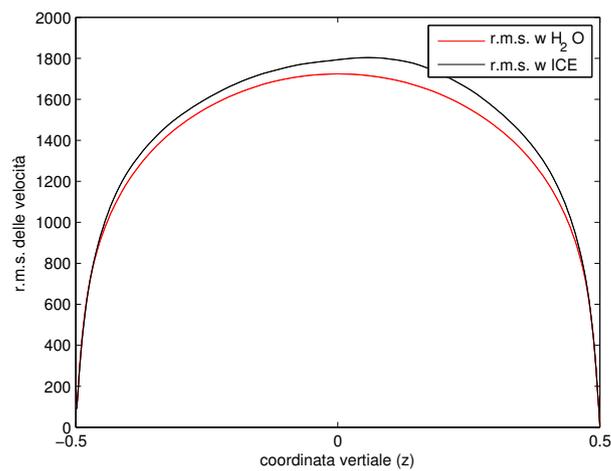


Figura 5.11: Confronto tra i profili di r.m.s. w nel caso H₂O e nel caso ICE con $\gamma = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 1 \cdot 10^{-4}$

5.4.2 Simulazioni SALT

Poiché la simulazione raggiunge un regime statisticamente stazionario, i profili mostrati nel seguito sono ottenuti da medie calcolate in piani orizzontali e nel tempo.

Tabella 5.3: Simulazione SALT

Parametri	Valori Adimensionalizzati
ΔS	10^{-4}
α	$8 \cdot 10^{-6}$
α_S	0.03

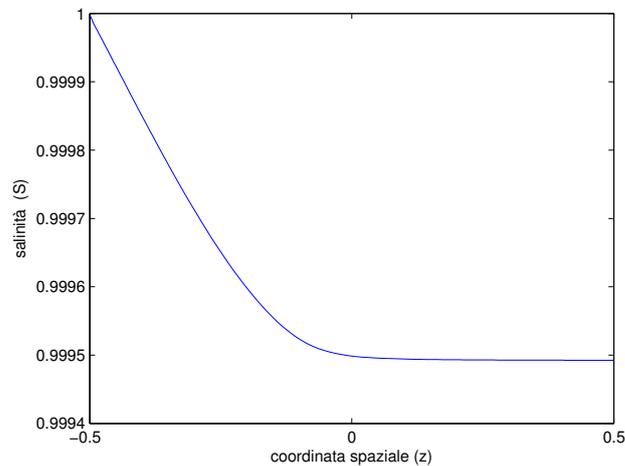


Figura 5.12: Variazione di salinità rispetto al profilo di equilibrio nel caso SALT

Il profilo medio di salinità viene mostrato in figura (5.12). Nonostante la variazione molto ridotta ($\simeq 10^{-4}$), si ha una concentrazione di sale superiore nella parte inferiore del dominio. Tale condizione è abbastanza realistica in quanto il sale tende a depositarsi sul fondo. Nella parte inferiore si ha un profilo lineare stratificato, mentre nella parte superiore la salinità è pressoché costante, a causa del rimescolamento turbolento.

Per apprezzare l'impatto della salinità sul fenomeno in esame, è interessante confrontare innanzitutto la sua influenza su diverse grandezze fisiche rispetto al caso H_2O .

L'effetto della salinità sulla turbolenza è evidente nei grafici rappresentanti la radice del valore quadratico medio della componente verticale del campo di moto dell'acqua *r.m.s.* w (fig. 5.13). In H_2O , la turbolenza ricopre un ruolo molto importante in tutto il dominio. Al contrario, il sale riduce i valori tipici della turbolenza, in misura tanto maggiore quanto più è presente (parte inferiore

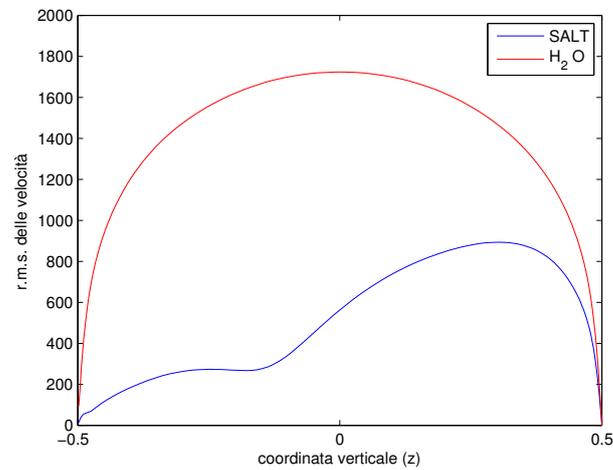


Figura 5.13: Confronto tra i profili delle fluttuazioni della componente di velocità verticale (r.m.s. w) nel caso H_2O e nel caso SALT

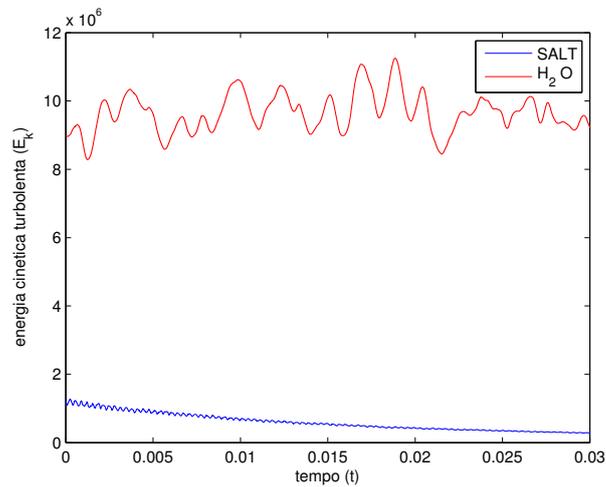


Figura 5.14: Andamento dell'energia cinetica turbolenta mediata sul dominio in funzione del tempo nel caso H_2O e nel caso SALT

del dominio). La stratificazione di salinità nella parte inferiore del dominio ha un effetto stabilizzante, riducendo drasticamente i moti turbolenti. Un' ulteriore prova si ha dal grafico dell'andamento dell'energia turbolenta in funzione del tempo (fig. 5.14). L'energia, rispetto al caso senza sale, viene ridotta di un ordine di grandezza e così pure le sue fluttuazioni.

Anche la temperatura risente molto dell'influenza del sale (fig. 5.15). Rispetto al caso H_2O , dove la temperatura media rimane praticamente costante nel dominio, tranne agli estremi dove è presente uno strato limite termico, nel caso SALT si ottiene un andamento costante della temperatura nella parte superiore del dominio (eccetto nello strato limite termico), mentre nella parte inferiore presenta un andamento lineare. Questa discordanza è dovuta al fatto che, nella parte superiore, essendo la salinità inferiore, la turbolenza resta dominante, e quindi il rimescolamento rimane elevato (seppur minore rispetto al caso senza sale). Tale rimescolamento omogenizza la temperatura. Nella parte inferiore, invece, la maggior presenza di sale diminuisce sensibilmente i livelli di turbolenza, riducendo il rimescolamento e riportando la situazione ad una condizione simile a quella di equilibrio idrostatico (fig.5.2), con stratificazione e andamento lineare della temperatura.

Salinità e temperatura, inoltre, influiscono direttamente sulla densità (fig. 5.16), rispettando l'equazione (3.9). In assenza di sale, la distribuzione di temperatura (paragrafo 4.10) ha un effetto dominante sulla densità: in particolare, si nota come la variazione di densità rispetto al profilo di equilibrio sia negativa nella parte superiore del dominio e positiva nella parte inferiore, annullandosi a centro vena. Con l'aggiunta della salinità, l'andamento della densità varia notevolmente. L'acqua salata, essendo più pesante, ha un profilo di equilibrio traslato verso l'alto rispetto al caso dell'acqua pura. Nella parte superiore del dominio, a causa della salinità inferiore e costante, il profilo di densità presenta un andamento simile al caso dell'acqua dolce, mentre nella parte inferiore, la pendenza aumenta per via di un incremento rilevante di sale. In figura 5.16, in particolare, è riportata la variazione di densità rispetto al profilo di equilibrio: essa rimane negativa per la maggior parte del dominio, per poi diventare positiva in un piccolo strato vicino al limite inferiore, a causa del sale depositatosi per gravità.

5.5 Effetto combinato: simulazioni S+I

L'ultima parte di questo lavoro di tesi è dedicata all'analisi dei risultati derivati da simulazioni effettuate coinvolgendo sia la specie ghiaccio sia la specie sale. In particolare, si vuole andare a vedere come quest'ultime si influenzino a vicenda causando delle variazioni rispetto ai casi studiati nei paragrafi precedenti, in cui gli effetti del sale e del ghiaccio venivano considerati indipendentemente.

Nelle seguenti simulazioni vengono utilizzati tutti i parametri presentati nei paragrafi precedenti, ma con degli intervalli più ridotti, come evidenziato in ta-

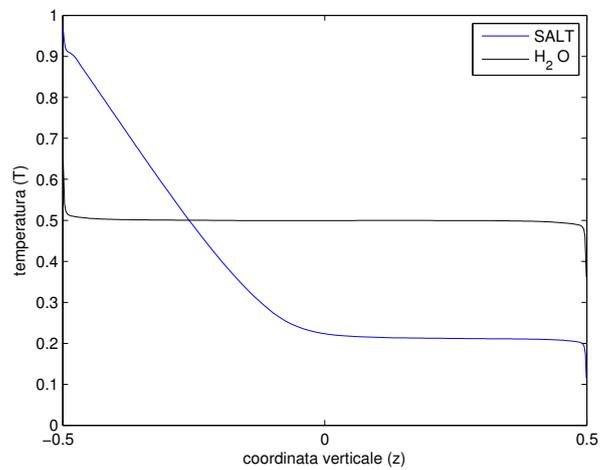


Figura 5.15: Confronto tra i profili medi di temperatura nel caso H_2O e nel caso SALT

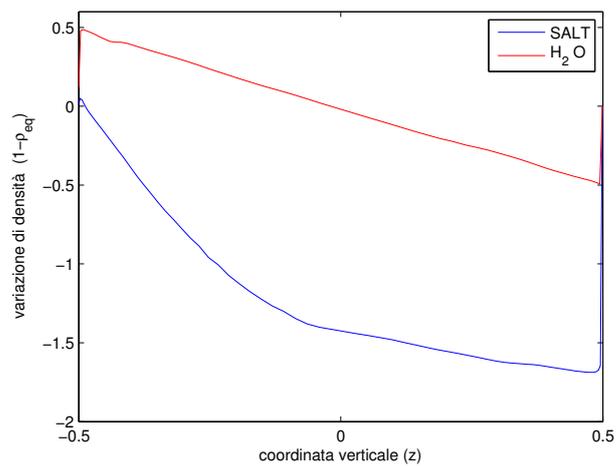


Figura 5.16: Confronto tra i profili di variazione di densità rispetto al profilo di equilibrio nel caso H_2O e nel caso SALT

bella 5.4, in quanto l'interesse, in questo caso, è rivolto alla comprensione del fenomeno, più che a una sua indagine parametrica.

A livello fisico, la presenza del sale diminuisce la temperatura di congelamento dell'acqua. Ci si aspetta quindi una riduzione della formazione del ghiaccio. Viceversa, la produzione di ghiaccio aumenta la salinità: durante il congelamento, infatti, solo l'acqua pura subisce il passaggio di stato, mentre il sale viene rilasciato nell'oceano. Questo è confermato dalla figura 5.17 in cui sono visualizzati i campi di temperatura, concentrazione di ghiaccio e salinità in un piano orizzontale prossimo alla superficie ($z = 0.49$) al tempo $t = 5.14 \cdot 10^{-5}$ per $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$.

Tabella 5.4: Simulazione S+I

Parametri	Valori Adimensionalizzati
γ_i	10^6
w_{rise}	$100 \div 10000$
ΔT	1
ΔL	1
Ra	10^{10}
Pr	14
ΔS	10^{-4}
α	$8 \cdot 10^{-6}$
α_S	0.03

Nel seguito, non essendo in presenza di un regime statisticamente stazionario, i profili sono ottenuti da medie nelle sole direzioni di omogeneità. In figura 5.18, si può notare come nel caso S+I il profilo di temperatura aumenti nella parte superiore del dominio per effetto del calore latente associato al passaggio di fase acqua-ghiaccio e diminuisca in quella inferiore rispetto al caso SALT. Nella parte superiore del dominio si formano dei cristalli di ghiaccio che come detto aumentano la quantità di sale disciolto in acqua. Il sale causa un aumento di densità dell'acqua ρ_w (3.9). Questo porta ad un aumento della differenza tra ρ_w e ρ_i , il quale amplifica l'effetto di galleggiamento. Il ghiaccio tenderà allora a salire più rapidamente, mentre il sale rilasciato, viceversa, tenderà a sprofondare verso il basso, causando un incremento dei moti turbolenti rispetto al caso SALT, come mostrato in figura 5.21. Il grafico, inoltre, mostra come l'effetto del sale sulla turbolenza sia decisamente più importante rispetto a quello del ghiaccio.

Nella parte inferiore, il rilascio di sale a causa della formazione dei cristalli di ghiaccio, aumenta la salinità del caso SALT (fig. 5.19), provocando una maggiore diminuzione di temperatura.

Un' ulteriore conferma della teoria descritta viene portata dal grafico della salinità media dell'acqua in funzione del tempo (fig.5.20), in cui si nota come la formazione di ghiaccio aumenti notevolmente la quantità di sale, tanto più quanto

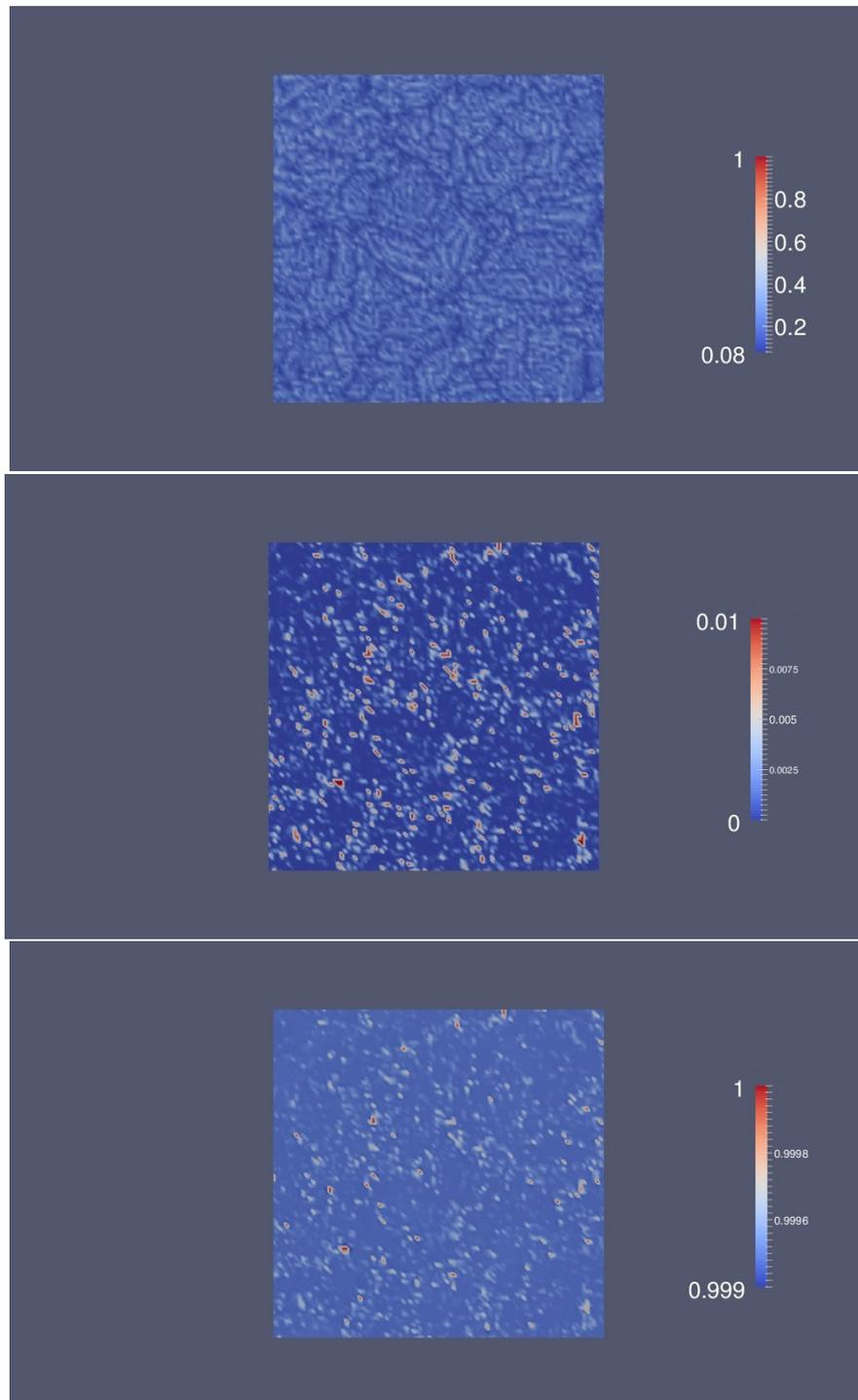


Figura 5.17: Visualizzazione in un caso S+I della temperatura (sopra), della concentrazione di ghiaccio (centro) e della salinità (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano orizzontale vicino alla superficie ($z = 0.49$): dove la temperatura è minore, la produzione di ghiaccio e, di conseguenza, la concentrazione di sale aumentano

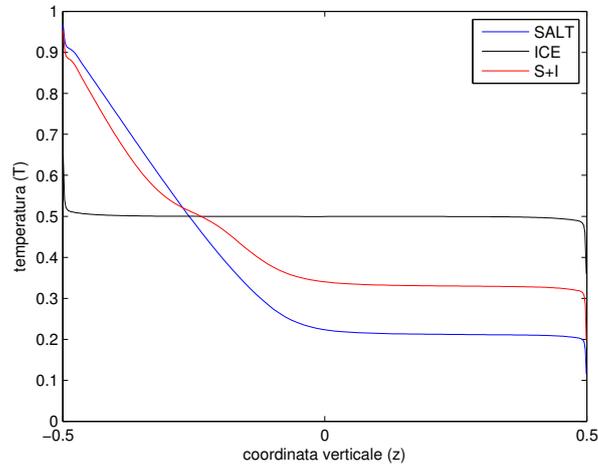


Figura 5.18: Confronto tra i profili medi di temperatura nel caso SALT, nel caso ICE e nel caso S+I con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$

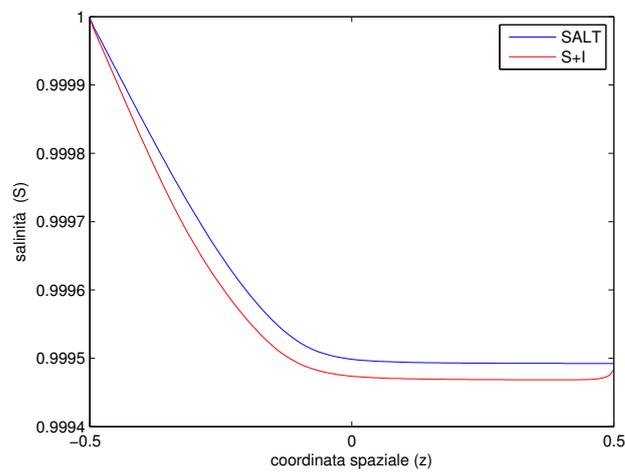


Figura 5.19: Variazione di salinità rispetto al profilo di equilibrio nel caso SALT e nel caso S+I con $\gamma_i = 10^6$ e $w_{rise} = 2500$ al tempo $t = 5.70 \cdot 10^{-5}$

più è alta la velocità di risalita w_{rise} . A valori di w_{rise} più alti corrisponde un tasso di crescita del ghiaccio maggiore e quindi un incremento di salinità dell'acqua più rapido.

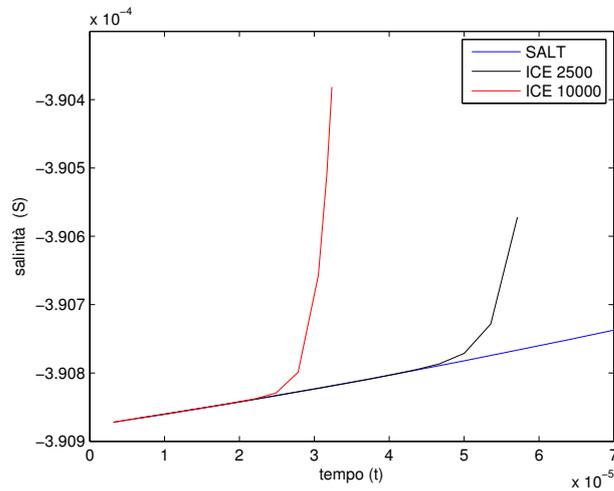


Figura 5.20: Variazione della salinità nel tempo all'aumentare della w_{rise}

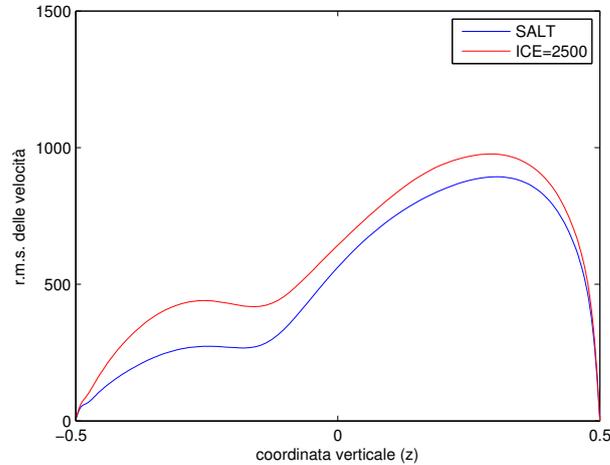


Figura 5.21: Confronto tra i profili di r.m.s. w nel caso ICE con $w_{rise} = 2500$ e nel caso SALT

In figura (5.22) vengono evidenziate ulteriori dipendenze tra la temperatura, la salinità e la componente di velocità verticale w : in particolare, oltre alla fascia con forte stratificazione, si nota come velocità verticali positive, e quindi che vanno verso l'alto, corrispondono a pennacchi di temperature più calde, che tendono anch'essi a salire. Anche il sale, nonostante a causa della forte stratificazione

l'effetto sia molto più ridotto, viene trasportato verso l'alto all'interno di questi pennacchi.

Interessante è anche la variazione della produzione di frazil ice con la presenza del sale. Dalla teoria, a causa di una riduzione della temperatura di congelamento, ci si aspetta una diminuzione della formazione di cristalli di ghiaccio nel caso S+I rispetto al caso ICE. Nonostante l'impossibilità di confrontare i diversi profili di ghiaccio a tempi differenti, si nota che i picchi raggiunti dai profili di concentrazione di ghiaccio nel caso ICE sono maggiori anche di alcuni ordini di grandezza rispetto a S+I. Qualitativamente, dunque, abbiamo un ottimo riscontro con i risultati computazionali.

Il confronto tra i tassi di crescita del ghiaccio al variare delle w_{rise} nei due casi è riportato in figura 5.23.

A prima vista, il grafico può sembrare in contraddizione con quanto detto precedentemente. A valori di velocità di risalita superiori a 500, si nota un maggiore rateo di crescita nel caso S+I. Questo può portare a far credere ad un accumulo maggiore di ghiaccio in presenza di sale, in contrasto con la teoria. Dal punto di vista fisico, la spiegazione può essere la seguente: nel caso ICE, la velocità di galleggiamento deve solo occuparsi di bilanciare gli effetti turbolenti, mantenendo o meno i cristalli di ghiaccio nelle plumes discendenti, a seconda dei valori assunti. Nel caso S+I, si verifica la stessa situazione, ma la presenza del sale varia la densità relativa portando a un aumento degli effetti di galleggiamento: a parità di w_{rise} nel regime di produzione di ghiaccio descritto nel paragrafo 5.3.2, la forza di galleggiamento è più alta, e questo porta ad un aumento del rateo di crescita del ghiaccio. Per valori esterni a tale range si ha un ulteriore incremento del tasso di crescita rispetto al caso ICE per valori superiori, poiché negli strati alti del dominio la minor presenza del sale causa un aumento della temperatura di congelamento e conseguentemente della formazione di ghiaccio, e una riduzione per valori inferiori, a causa della presenza nella parte inferiore del dominio del sale depositato, che riduce lo spazio disponibile all'accumulo di cristalli di ghiaccio rispetto al caso ICE.

Va comunque detto che la presenza del sale modifica, come si è visto, il profilo di *r.m.s.* w , e quindi i range di w_{rise} in cui si verifica la maggiore formazione di ghiaccio possono cambiare. In particolare, in un futuro lavoro, sarebbe utile indagare il comportamento per valori di w_{rise} molto bassi.

Viene fatto notare infine come il modello monodimensionale presentato nel paragrafo 5.2 sia del tutto inadeguato in un caso S+I. Il modello si basa sull'ipotesi che il ghiaccio segua una plume discendente lungo un tratto lineare, in cui la temperatura viene considerata costante. Come visto, però, l'intromissione del sale modifica di molto sia la forma dei profili delle varie grandezze sia la fisica, rendendo tale modello del tutto inconsistente con i risultati trovati.

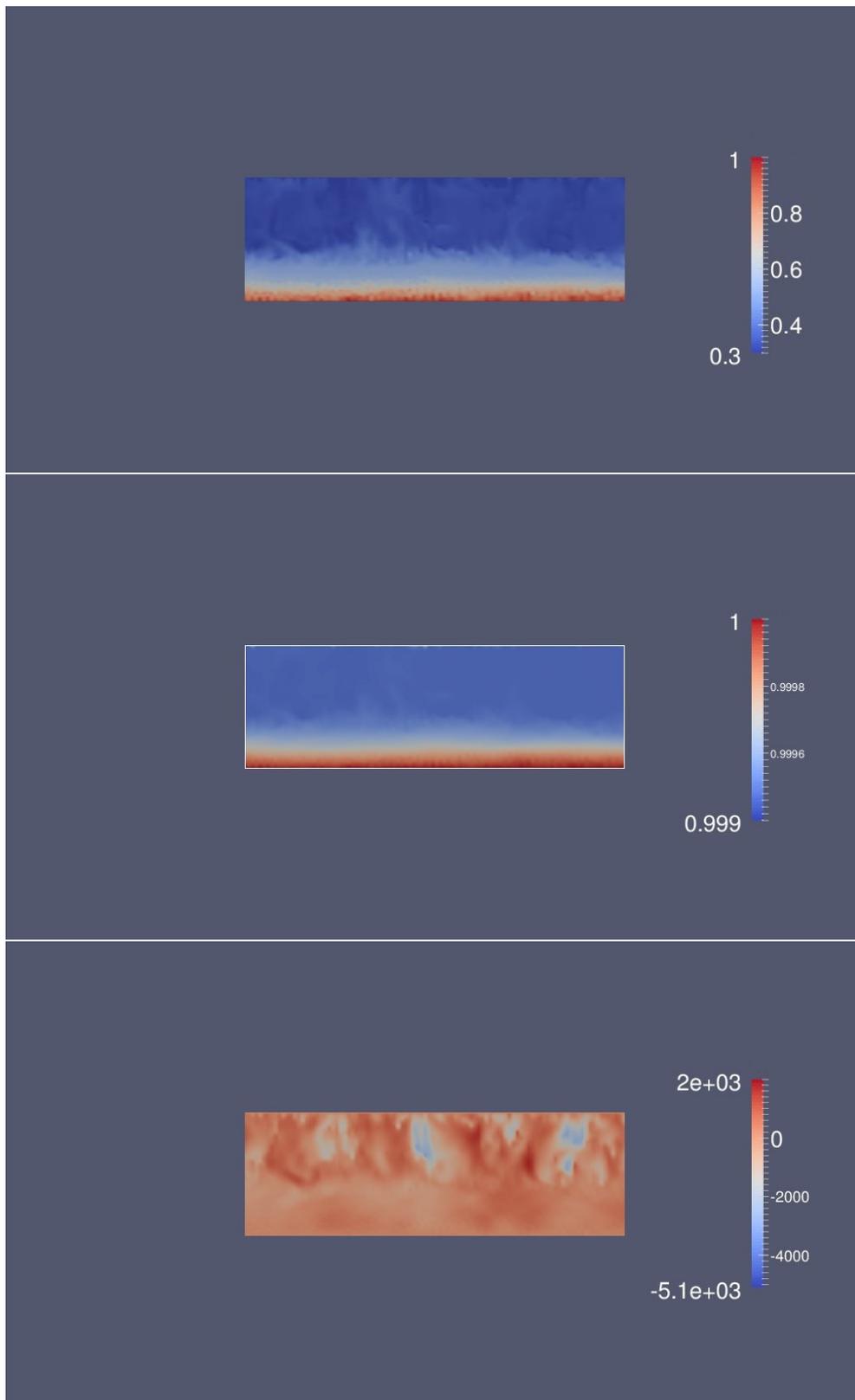


Figura 5.22: Visualizzazione in un caso S+I della temperatura (sopra), della salinità (centro) e della componente verticale della velocità turbolenta w (sotto) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$ in un piano verticale ($y = 0.49$): a pennacchi ascendenti di w , corrispondono pennacchi ascendenti di temperatura (più caldi) e di salinità

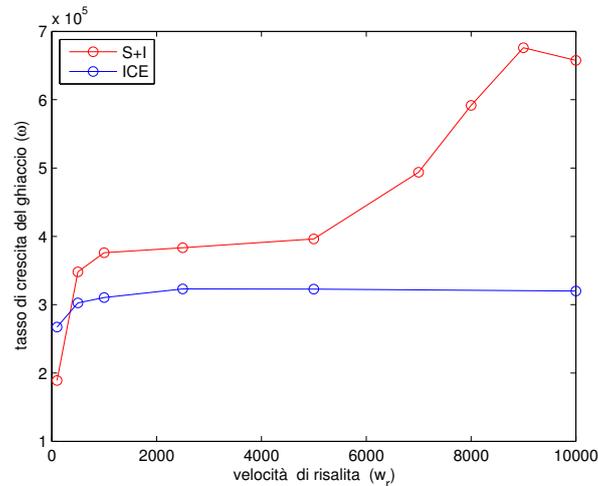


Figura 5.23: Confronto tra i tassi di crescita del ghiaccio nel caso S+I e nel caso ICE al variare di w_{rise} per $\gamma_i = 10^6$

5.5.1 Confronto dell'evoluzione temporale di simulazioni nel caso ICE e nel caso S+I

Nel seguente paragrafo si prendono un caso ICE e un caso S+I, entrambi a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$, e si valuta come evolvono le varie grandezze fisiche nel tempo.

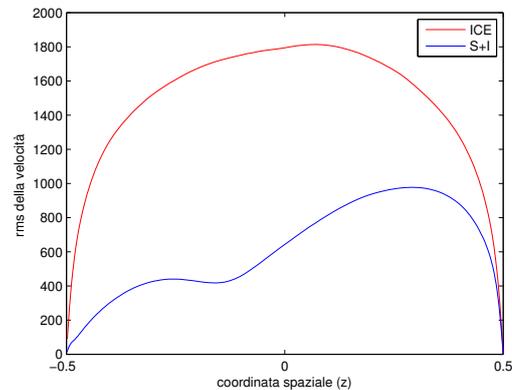


Figura 5.24: Confronto tra i profili medi di r.m.s. w nel caso S+I e nel caso ICE a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma = 10^6$ al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$

Dal confronto tra i profili medi di varie grandezze fisiche a diversi istanti temporali, si riconfermano molti dei risultati ottenuti precedentemente. Nel caso S+I, la r.m.s. w viene abbassata di molto, poiché la salinità riduce il mescolamento (fig. 5.24), la temperatura è inferiore nella parte superiore del dominio,

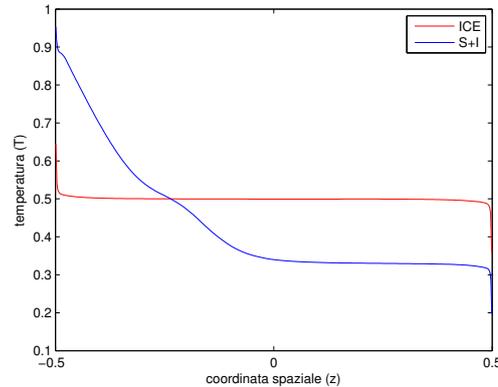
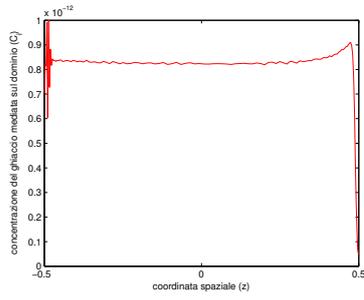
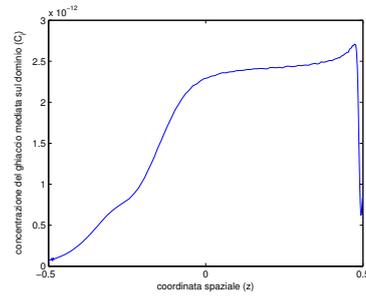


Figura 5.25: Confronto tra i profili medi di temperatura nel caso S+I e nel caso ICE a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma = 10^6$ al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$

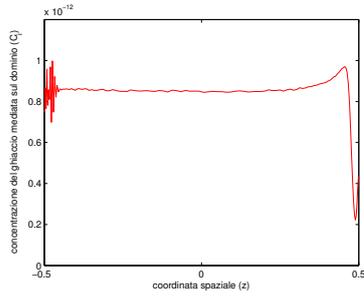
per la maggior concentrazione di sale e maggiore nella parte inferiore, per la minor concentrazione di ghiaccio (fig. 5.25) e la salinità replica l'andamento già visto nei paragrafi precedenti. La parte più interessante riguarda il profilo medio della concentrazione di ghiaccio. In particolare, ad istanti di tempi molto bassi, quindi ancora nella fase transitoria e ben lontani dalla condizione di regime, si nota in entrambi i casi un picco negativo nei pressi del bordo superiore del dominio (fig. 5.26), che diminuisce aumentando il tempo di integrazione, per poi sparire una volta raggiunta una condizione di turbolenza sviluppata (fig. 5.27). Una spiegazione per questo comportamento potrebbe essere la seguente: nelle prove effettuate, si parte sempre da una condizione a temperatura come in figura (5.2) e a concentrazione di ghiaccio random; andando avanti nel tempo, il ghiaccio aumenta nella parte superiore del dominio, dove le temperature sono più basse; durante la formazione di ghiaccio, viene rilasciato calore negli strati vicini e questo comporta un aumento di temperatura a livello locale a causa del calore latente; l'aumento di temperatura porta allo scioglimento di alcuni cristalli di ghiaccio presenti nei dintorni, causando una diminuzione di concentrazione di ghiaccio. Questa situazione, tuttavia, riguarda solamente le fasi iniziali del processo di formazione del ghiaccio, e dipende molto dalle condizioni al contorno e iniziali relative alla fase di transizione. L'evoluzione temporale mette inoltre in evidenza il fatto che il ghiaccio non si forma immediatamente nella parte superiore del dominio: nelle fasi iniziali del processo di crescita, infatti, i cristalli di ghiaccio si formano in maniera sparsa (fig. 5.26a - 5.26b) e vengono spinti verso l'alto in presenza di una adeguata velocità di risalita. Si nota, infine, come i profili della concentrazione di ghiaccio restano molto simili nelle varie prove, ma le concentrazioni raggiungono valori più alti con l'avanzare del tempo.



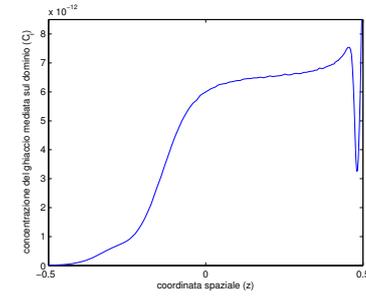
(a) ICE al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-6}$



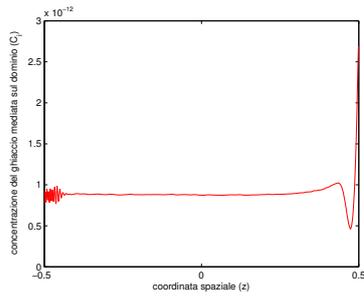
(b) S+I al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-6}$



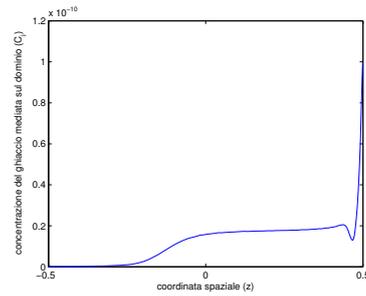
(c) ICE al tempo $t = 1.14 \cdot 10^{-5}$



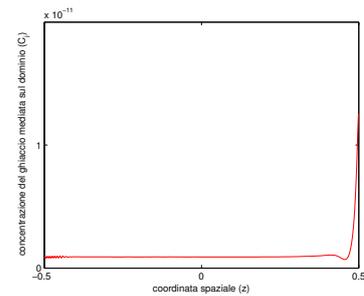
(d) S+I al tempo $t = 1.14 \cdot 10^{-5}$



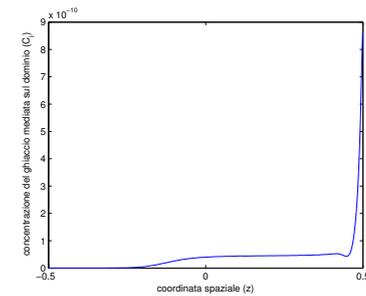
(e) ICE al tempo $t = 1.71 \cdot 10^{-5}$



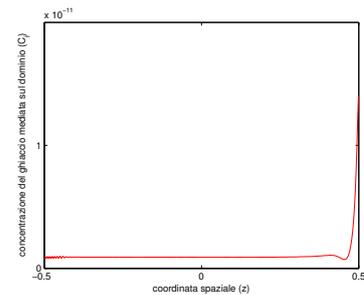
(f) S+I al tempo $t = 1.71 \cdot 10^{-5}$



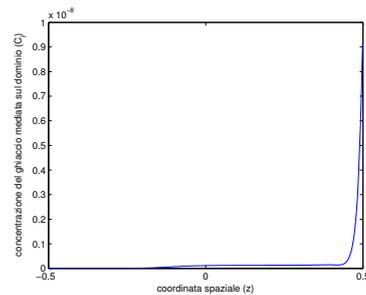
(g) ICE al tempo $t = 2.28 \cdot 10^{-5}$



(h) S+I al tempo $t = 2.28 \cdot 10^{-5}$



(i) ICE al tempo $t = 2.86 \cdot 10^{-5}$



(j) S+I al tempo $t = 2.86 \cdot 10^{-5}$

Figura 5.26: Profili medi di concentrazione di ghiaccio in funzione del dominio nel caso ICE (sinistra) e S+I (destra) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$

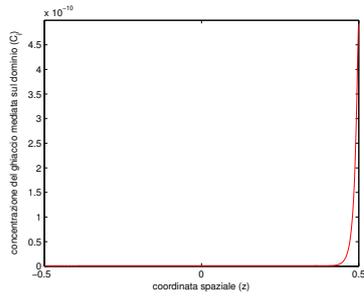
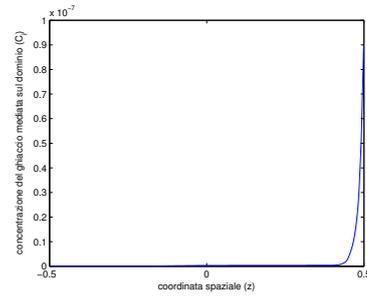
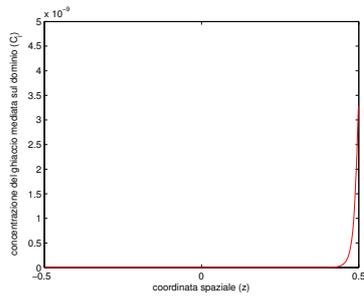
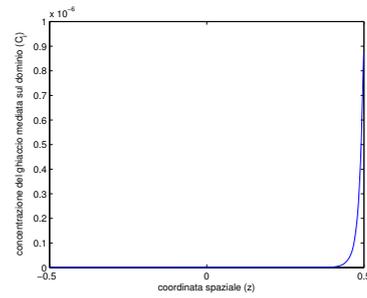
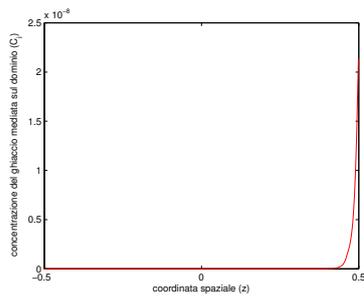
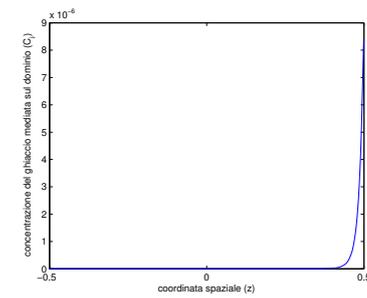
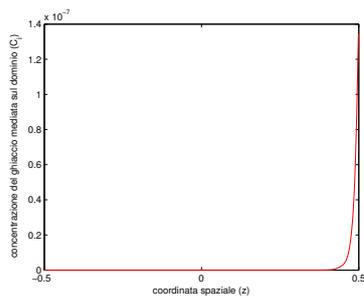
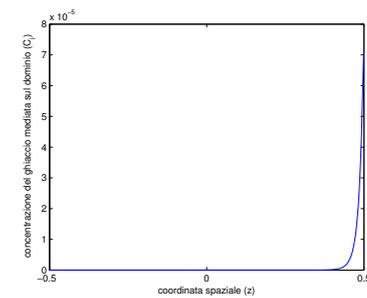
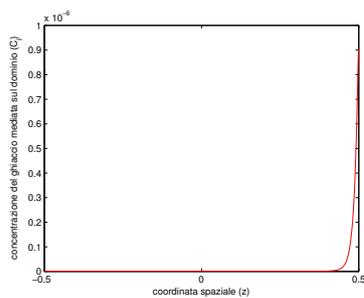
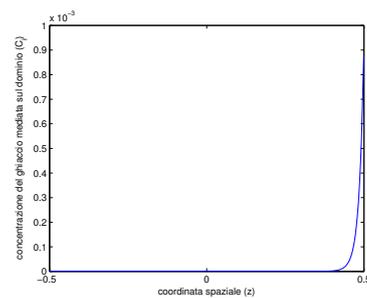
(a) ICE al tempo $t = 3.42 \cdot 10^{-6}$ (b) S+I al tempo $t = 3.42 \cdot 10^{-6}$ (c) ICE al tempo $t = 3.99 \cdot 10^{-5}$ (d) S+I al tempo $t = 3.99 \cdot 10^{-5}$ (e) ICE al tempo $t = 4.57 \cdot 10^{-5}$ (f) S+I al tempo $t = 4.57 \cdot 10^{-5}$ (g) ICE al tempo $t = 5.14 \cdot 10^{-5}$ (h) S+I al tempo $t = 5.14 \cdot 10^{-5}$ (i) ICE al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$ (j) S+I al tempo $t = 5.71 \cdot 10^{-5}$

Figura 5.27: Profili medi di concentrazione di ghiaccio in funzione del dominio nel caso ICE (sinistra) e S+I (destra) a $w_{rise} = 2500$ e $\gamma_i = 10^6$

Conclusioni

Nella tesi presentata è stata studiata la dinamica della formazione del ghiaccio nell'oceano in regime di convezione termica turbolenta. Il modello matematico utilizzato consiste in un sistema di cinque equazioni differenziali per la conservazione della massa, la quantità di moto, la concentrazione di ghiaccio, la temperatura e la salinità.

Viene utilizzata l'approssimazione di Boussinesq, che consente di considerare la densità costante ovunque, tranne nel termine di galleggiamento, soggetto a fluttuazioni di densità non trascurabili rispetto agli altri termini e per concentrazioni di ghiaccio basse. La turbolenza è modellata mediante la tecnica LES, che risolve esattamente solo le scale vorticosose di grandi e medie dimensioni, modellando quelle più piccole.

I calcoli sono stati effettuati attraverso il codice numerico BICE, che ha simulato i moti convettivi turbolenti ad un numero di Rayleigh pari a 10^{10} in quattro fasi distinte: a partire dalla convezione turbolenta in sola acqua (H_2O), è stata simulata la formazione di ghiaccio con salinità costante (ICE), poi il solo effetto della salinità (SALT) e, infine, è stato considerato l'effetto combinato della specie ghiaccio e della specie sale sul fenomeno (S+I).

Le simulazioni ICE sono state svolte considerando valori realistici di alcuni parametri caratteristici dei moti convettivi turbolenti, quali la velocità di risalita w_{rise} e il coefficiente responsabile degli scambi termici γ_i . Dal confronto tra i risultati ottenuti nel caso ICE e quelli ricavati da altri studi [9], si nota che l'utilizzo di un Ra realistico rende inopportuno il modello monodimensionale teorico, il quale resta in grado di riprodurre in parte il comportamento solo per valori di velocità di galleggiamento molto bassi, lontani dalla realtà. Restano comunque valide molte conclusioni riportate nei lavori precedenti a numeri di Rayleigh più bassi: anche in questo caso si ritrova che i regimi di maggiore crescita del ghiaccio si hanno all'aumentare di γ_i , responsabile dei processi di fusione e congelamento, e per valori di w_{rise} confrontabili con la velocità associata ai moti turbolenti, in quanto consentono i cristalli di ghiaccio di rimanere all'interno delle strutture fredde discendenti, fungendo da nuclei di formazione e consentendo l'accumulo in esse. La formazione del ghiaccio favorisce il rimescolamento, aumentando i valori di velocità verticale e modificando l'energia cinetica turbolenta.

Il caso SALT tiene conto di parametri aggiuntivi, quali la variazione di salinità

ΔS , il coefficiente di espansione alina α_S e il coefficiente di espansione termica α . La presenza del sale modifica di molto i profili delle grandezze fisiche in gioco, quali la densità, la temperatura e le fluttuazioni delle tre componenti di velocità. Oltre ad aumentare la densità, l'accumulo di sale sul fondo del dominio considerato produce un nuovo profilo di stratificazione del tutto diverso dal caso H_2O . Il sale, inoltre, ha un effetto "smorzante" sulla turbolenza: esso, infatti, riduce di molto il rimescolamento dovuto ai vortici, causando una diminuzione importante dell'energia turbolenta. Questo ha effetto anche sul profilo di temperatura, il quale resta quasi costante nella parte superiore del dominio, dove la concentrazione di sale è minore, e assume un andamento lineare, simile a quello all'equilibrio idrostatico, nella parte inferiore.

Infine, le simulazioni S+I mostrano l'effetto combinato della presenza delle due specie. La presenza del sale riduce la temperatura di congelamento all'interno delle strutture fredde discendenti diminuendo la concentrazione del ghiaccio, e la formazione di ghiaccio in superficie genera un rilascio di sale che precipita e aumenta la salinità nel dominio, e quindi dei suoi effetti. Da questi calcoli si nota come il modello teorico monodimensionale precedentemente proposto sia del tutto inconsistente e i risultati ottenuti nel caso ICE e nei lavori precedenti, in cui la presenza del sale non veniva considerata, siano incompleti. La specie sale modifica il tasso di crescita del ghiaccio, aumentandolo nel regime di crescita valutato anche per il caso ICE e diminuendolo per valori inferiori. Le ipotesi fatte negli articoli letti, per esempio quello di Omstedt & Svensson [19], che trascuravano la salinità nei loro conti, non sono quindi del tutto esatte. La presenza del sale ha un impatto significativo sulla turbolenza ed è decisamente molto importante per una comprensione soddisfacente del fenomeno studiato.

Vanno fatti notare, tuttavia, i limiti dovuti all'impiego di un numero di Rayleigh così alto, in termini di costo computazionale e tempo di calcolo, e il fatto che l'utilizzo di profili delle grandezze fisiche a istanti di tempo diversi abbia reso possibili solo confronti del tutto qualitativi. Nel caso S+I, inoltre, è stata analizzata la differenza prodotta dalla presenza del sale nel range $w_{rise} \simeq r.m.s.w$ definito nel paragrafo riguardante il caso ICE. Non sono state ampliate le indagini sulle variazioni dei range di crescita del ghiaccio a causa della variazione delle fluttuazioni di velocità verticale operata dalla salinità.

I risultati di questa tesi sono rilevanti in quanto ci danno un'indicazione più precisa di come si svolge il fenomeno di formazione del frazil ice in un caso realistico. Tuttavia c'è ancora molto da imparare. Molti spunti vengono offerti; per esempio si può provare ad aumentare ulteriormente il numero di Rayleigh, oppure si può investigare la zona nelle simulazioni S+I a w_{rise} più bassi, ottenendo indicazioni più precise su come la variazione operata dal sale sulle fluttuazioni di velocità influisca sulla formazione del ghiaccio. Per quanto riguarda la salinità, nel lavoro svolto si sono utilizzate delle condizioni di Neumann per il limite superiore del dominio e condizioni di Dirichlet per il limite inferiore; potrebbe essere molto interessante effettuare una serie di simulazioni a regime operando

scelte differenti per le condizioni al contorno, in modo da verificare se e come influiscono sul fenomeno in esame. Per meglio simulare la realtà fisica si possono considerare classi di cristalli di dimensione diversa. L'introduzione in superficie dell'effetto delle onde e del vento sarebbe un ulteriore aspetto da considerare per riprodurre le condizioni fisiche dell'oceano.

Ringraziamenti

I miei più sinceri ringraziamenti vanno alla professoressa Antonella Abba' che ha saputo guidarmi in questo percorso di tesi con pazienza, disponibilità e gentilezza. Un grazie va anche al professor Lorenzo Valdetaro e ai suoi consigli e pareri, sempre utili e fonte di ispirazione. Ringrazio molto i miei genitori, mia sorella e la mia famiglia per il grande sostegno che non mi hanno mai fatto mancare in questi anni di università. Grazie a tutti i miei compagni di studio che hanno saputo dare una mano di colore alle grigie giornate in Bovisa, in particolare Daniele, Luca, Federico detto "Valerio", Marco detto "Garreth", Eleonora, Alessandro R., Davide detto "Davisino", Nicolò, Francesco, Ezio, Giulia, Guido, Alessandro M. e Giacomo. Un doveroso ringraziamento agli amici di sempre Andrea, Mattia, Igor, Teo e Oscar che, seppur indirettamente, con la loro compagnia mi hanno sempre strappato un sorriso e tenuto alto il morale, anche in momenti non proprio idilliaci. E per ultima, ma non d'importanza, ringrazio Sara che, anche se solamente per l'ultimo periodo della mia carriera universitaria, mi è sempre stata vicino quando ho avuto bisogno di lei.

Bibliografia

- [1] <http://www.denniskalma.com/river/ice.html>.
- [2] Heslot F. Kadanoff L. Libchaber A. Thomae S. Xiao-Zhong Wu Zaleski S. Zanetti G. B. Castaing, Gunaratne G. Scaling of hard thermal turbulence in rayleigh-bénard convection. *Tellus XIV*, 1962. 19
- [3] P.R. Holland, Feltham D.L. Frazil dynamics and precipitation in a water column with depth-dependent supercooling. *J. Fluid Mech.*, 2005. 10, 24, 25
- [4] J. Kampf, Backhaus J.O. Ice-ocean interactions during shallow convection under conditions of steady winds: three-dimensional numerical studies. *Deep Sea Research*, 1999.
- [5] S. Legg, McWilliams J.C. Temperature and salinity variability in heterogeneous oceanic convection. *Journal of Physical Oceanography*, Giugno 2000.
- [6] E.L. Lewis, Perkin R.G. Ice pumps and their rates. *Journal of Geophysical Research*, Ottobre 1986. 9
- [7] D.K. Lilly. On the numerical simulation of buoyant convection. *Tellus XIV*, 1962.
- [8] D.K. Lilly, Wong V.C. A comparison of two dynamic subgrid closure methods for turbulent thermal convection. *Physics of Fluids*, Febbraio 1994. 36
- [9] M. Montini. *Convezione termica in miscela di acqua e ghiaccio*. PhD thesis, Politecnico di Milano, 2006. 43, 49, 53, 71
- [10] B. Morse, M. Richard. A field study of suspended frazil ice particles. *Cold Regions Science and Technology*, 2009. 9, 49
- [11] Havik L. Sirevaag A. A.K. Naumann, Notz D. Laboratory study of initial sea-ice growth: properties of grease ice and nilas. *The cryosphere*, 2012. 9

-
- [12] T.E. Osterkamp. Frazil-ice nucleation by mass-exchange processes at the air-water interface. *Journal of Glaciology*, 1977. 9, 12
- [13] L. Pignagnoli. *Theoretical and numerical analysis of frazil ice dynamics*. PhD thesis, Università degli studi di Milano, 2004/2005.
- [14] N. V. Radia. *Frazil ice formation in the polar oceans*. PhD thesis, 2013. 55
- [15] D. Salas Mélia. A global coupled sea ice-ocean model. *Ocean Modelling*, 2002. 10
- [16] C.R. Sherwood. Numerical model of frazil ice and suspended sediment concentrations and formation of sediment laden ice in the kara sea. *Journal of Geophysical Research*, Giugno 2000. 9
- [17] Frew R.D. Vennell R. Haskell T.G. I.J. Smith, Langhorne P.J. Sea ice growth rates near ice shelves. *Cold Regions Science and Technology*, 2012. 9
- [18] A. Stefanoni. *Formazione di ghiaccio in regime di convezione turbolenta*. PhD thesis, Politecnico di Milano, 2007.
- [19] U. Svensson, Omstedt A. Numerical simulation of frazil ice dynamics in the upper layers of the ocean. *Cold Regions Science and Technology*, 1998. 10, 25, 72
- [20] M. Versari. *Convezione turbolenta di mesoscala in oceano polare*. PhD thesis, Politecnico di Milano, 2006.