

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'informazione

Corso di Laurea in
Ingegneria Meccanica



**INDAGINE ANALITICA E SPERIMENTALE DELLE VIBRAZIONI DI UNA
BICICLETTA DA CORSA**

Relatore: Prof. Gianantonio MAGNANI

Tesi di Laurea di :

Marco PALERMITI Matr.755569

Anno Accademico 2014-2015

Sommario

Nella presente trattazione si intende approfondire lo studio di una instabilità dinamica che può capitare, in particolare, percorrendo discese a velocità elevata su biciclette da corsa. Tale instabilità prende il nome di “wobble” o, più comunemente, “shimmy”. Avendo a disposizione dati acquisiti su di una bicicletta da corsa, opportunamente strumentata per evidenziare il fenomeno dello shimmy, in un tratto di discesa affinché la velocità fosse sufficiente alta per innescare la vibrazione, si è deciso a valle di alcuni esperimenti di approfondire la dinamica della bicicletta in presenza dell’oscillazione.

Indice

1 Introduzione	1
2 Modellistica classica	5
2.1 Premessa.....	5
2.2 Modellizzazione di una bicicletta con ruota sterzante anteriore.....	6
2.2.1 Dinamica di imbardata della bicicletta nel piano orizzontale.....	6
2.2.2 Dinamica del rollio della bicicletta nel piano verticale.....	7
2.2.3 Funzione di trasferimento del sistema.....	11
2.2.4 Cancellazioni	13
2.2.5 Equazione di moto nel dominio del tempo	13
2.2.6 Rappresentazione dell'azione di controllo in anello chiuso.....	14
2.2.7 Analisi della stabilità.....	15
3 Modellistica con retroazione strutturale	19
3.1 L'avancorsa e la sua azione di feed-back	19
3.3.1 L'avancorsa.....	19
3.3.2 Effetto giroscopico.....	25
3.3.3 Definizione del modello.....	26
3.3.4 L'autostabilità (self-stability).....	28
3.3.5 La funzione di trasferimento.....	29
3.3.6 Analisi stabilità anello chiuso.....	30

4 Modello di Whipple.....	33
4.1 Premessa.....	33
4.2 Modello a due gradi di libertà	35
4.2.1 Equazioni di moto linearizzate.....	37
4.3 Stabilità del movimento.....	41
4.4 Modi di vibrare modello Whipple: Capsize, Weave, Castering.....	42
4.5 Conclusioni.....	43
5 Modi di vibrare dei veicoli a due ruote.....	45
5.1 Introduzione.....	45
5.2 Modo di Capsize	46
5.2.1 Modello con ruote lenticolari	46
5.3 Modo di Weave	49
5.3.1 Modello ad un grado di libertà del modo weave	50
5.3.2 Pulsazione smorzata e smorzamento adimensionale.....	52
5.4 Modo di Wooble o Shimmy.....	54
5.4.1 Modello ad un grado di libertà.....	55
5.5 Verifica numerica.....	63
6 La ruota girevole (Caster).....	62
6.1 Introduzione.....	62
6.2 Oscillazioni libere della ruota girevole (modello un grado di libertà).....	65
6.3 Lo Shimmy della ruota Caster (modello due gradi di libertà).....	72
6.3.1 Analisi della stabilità	72

6.4 Conclusioni	78
7 Indagine sperimentale del modo shimmy.....	79
7.1 Campagna acquisizione dati : test 4 Agosto 2014.....	79
7.2 Strumentazione	80
7.3 Analisi dei dati nel dominio del tempo.....	81
7.3.1 Andamento delle accelerazioni laterali e velocità del veicolo	81
7.3.2 Confronto tra accelerazioni laterali del veicolo.....	85
7.3.3 Confronto fra accelerazioni lineari laterali e velocità angolari	86
7.3.4 Confronto tra le velocità angolari di imbardata	88
7.4 Analisi del modo di vibrare Shimmy	89
7.4.1 Confronto tra moto di rollio e imbardata	89
7.5 Analisi nel dominio delle frequenze	91
7.5.1 Analisi spettrale	92
7.5.2 Accelerazioni nel dominio delle frequenze	92
7.5.3 Velocità angolari nel dominio delle frequenze	94
7.6 Analisi nel dominio del tempo 2° record	96
7.7 Analisi nel dominio delle frequenze 2° record	97
7.7.1 Accelerazioni nel dominio delle frequenze	97
7.7.2 Velocità angolari nel dominio delle frequenze.....	99
Conclusioni e sviluppi futuri.....	
Bibliografia.....	

Capitolo 1

Introduzione



**Life is like riding a bicycle.
To keep your balance you must
keep moving**

Albert Einstein

Nella presente trattazione si intende approfondire lo studio di una instabilità dinamica che può capitare, in particolare, percorrendo discese a velocità elevata su biciclette da corsa. Tale instabilità prende il nome di “wobble” o, più comunemente, “shimmy”. Si tratta una vibrazione della parte anteriore della bicicletta che capita d’incontrare molto raramente, in modo del tutto imprevedibile, improvviso ed estremamente violento (le accelerazioni laterali all’altezza del cannotto di sterzo possono raggiungere i 5-10g alla frequenza di 6-10 Hz)) da lasciare pochissimi margini di manovra al ciclista ed i cui effetti possono essere drammatici. Di shimmy si parla nelle pubblicazioni divulgative nell’ambito ciclistico, professionale e amatoriale, e nella letteratura scientifica, essendo oggetto di studio da parte di diversi gruppi di ricercatori nel mondo. E’ aumentato negli ultimi anni anche l’interesse a comprendere meglio come si origina il fenomeno e come evitarlo da parte delle case ciclistiche internazionali.

Tale vibrazione coinvolge non solo le biciclette ma tutti i mezzi o veicoli dotati di ruote auto-allineanti, nella direzione dello spostamento, definite Caster, tra cui i carrelli di movimentazione, quelli di atterraggio degli aerei, le motociclette. Le cause dell’origine di questo fenomeno sono ancora oggetto di studio, la via per la comprensione risiede da un lato nella migliore comprensione delle forze di contatto ruota-strada e dall’altro nell’individuazione di una opportuna cedevolezza della struttura (telaio e forcella) della bicicletta, considerata indispensabile per spiegare l’insorgere del problema. Di fatto il fenomeno si presenta quando le forze in gioco risultano tali da far sovrarichiamare in allineamento l’avantreno. Questo oltrepassa l’asse longitudinale, generando così altre coppie di forze di auto-allineamento, questa volta prodotte nel lato opposto dell’avantreno, e così via, in una sequenza alternata di coppie che sollecitano tutto il gruppo della ruota anteriore spingendolo da una parte all’altra del mezzo. Tale ondeggiamento dell’avantreno, non può essere controllato dal ciclista la cui capacità o “banda di controllo”, non supera i 2 Hz. Il ciclista può soltanto cercare di rallentare la bicicletta frenando dolcemente con il freno posteriore (frenando più intensamente potrebbe cadere), resistere alla tentazione di buttarsi a terra, pensando che sia meglio cadere in modo controllato piuttosto che disarcionato brutalmente dalla bicicletta, e aver la pazienza di attendere che la velocità diminuisca sufficientemente per far cessare la vibrazione. A dispetto della sua

violenza, la vibrazione di solito non diverge, e non succede di essere disarcionati dalla bicicletta.

Avendo a disposizione dati acquisiti su di una bicicletta da corsa, opportunamente strumentata per evidenziare il fenomeno dello shimmy, in un tratto di discesa affinché la velocità fosse sufficiente alta per innescare la vibrazione, si è deciso a valle di alcuni esperimenti di approfondire la dinamica della bicicletta in presenza dell'oscillazione. Dall'analisi dei risultati sperimentali relativi alla prova di shimmy si è cercato di comprendere il modo di vibrare della bicicletta e di evidenziare l'insufficienza dell'approccio modellistico classico nella descrizione del fenomeno, che considera la bicicletta come due corpi rigidi, avantreno e retrotreno, collegati da una coppia rotoidale allo sterzo, evidenziando il ruolo della cedevolezza della struttura. Successivamente, seguendo un approccio analitico del problema proposto per lo studio della shimmy dei carrelli degli aerei, si è adottata una modellizzazione semplificata del fenomeno che giustificasse i dati sperimentali ottenuti in termini di frequenza, smorzamenti e limiti di stabilità in funzione dei parametri che descrivono il complesso sistema dinamico bicicletta.

Nel presente elaborato verranno presentati nei capitoli 2 e 3, due modelli di bicicletta ad un grado di libertà, allo scopo di ottenere informazioni qualitative circa la stabilità del veicolo. L'approccio semplificato seguito per entrambi considera l'insieme bicicletta-ciclista come un unico corpo rigido, le ruote sono supposte prive di massa e vengono trascurati gli effetti giroscopici legati al rotolamento delle ruote.

Il primo modello proposto si rifà alla "modellistica classica" in cui la trattazione semplificata non prevede importanti caratteristiche geometriche che ne condizionano significativamente il comportamento dinamico; il secondo approfondisce la schematizzazione precedente con una più sofisticata interpretazione dell'azione di retroazione che in parte è esercitata dalla bicicletta su se stessa con una azione di "feedback strutturale" dovuta alla geometria dello sterzo.

Nel capitolo 4 si fa cenno ad una più articolata descrizione (modello di Whipple), di tipo multi-body, a due gradi di libertà del sistema bicicletta, al fine

di mettere in luce l'esistenza, per il veicolo, di diverse forme di instabilità legate ai modi di vibrare che ne caratterizzano il comportamento.

Nel capitolo 5, alla luce delle possibili instabilità evidenziate nell'analisi agli autovalori del modello di Whipple, si caratterizzano i modi di vibrare della bicicletta, in particolare se ne discute l'evoluzione temporale in termini di frequenza e smorzamenti ad essi associati al variare della velocità di avanzamento della bicicletta.

Nel capitolo 6 si effettua un'analisi linearizzata ad un grado di libertà del moto libero di una ruota Caster e si discutono al variare della velocità di avanzamento imposta, possibili effetti su transitori e smorzamenti associati. In particolare su di una geometria di ruota e telaio, assimilabile a quella dei carrelli degli aerei, se ne evidenziano le possibili fonti di instabilità legate allo shimmy, coinvolgendo la deformabilità laterale del telaio.

Nel capitolo 7 si è effettuata un'analisi su una campagna di dati sperimentali per investigare il moto e le oscillazioni che il telaio e tutta la bicicletta subiscono percorrendo una discesa nella quale si presenti il fenomeno dello shimmy. Sono state confrontate accelerazioni lineari e velocità angolari rilevate con strumentazioni opportune montate sulla bicicletta, per poi confrontarle e intuire il meccanismo di oscillazione di tutta la bicicletta in termini di rollio, imbardata e beccheggio in condizioni di shimmy violenta.

Capitolo 2

Modellistica classica

2.1 Premessa

In questo capitolo si propone una modellizzazione del sistema fisico rappresentato dall'insieme bicicletta-ciclista con un *unico corpo rigido*. Si assume che le ruote siano prive di massa, che non siano presenti effetti giroscopici legati al rotolamento delle ruote. Si tratta di un modello ad un grado di libertà che consente di ottenere informazioni di tipo qualitativo dal punto di vista dell'analisi di stabilità, benché non tenga conto di importanti caratteristiche geometriche del veicolo che ne condizionano significativamente il comportamento dinamico. Dal punto di vista del controllo, invece, si assume che il ciclista determini in modo diretto l'angolo di sterzo del manubrio, esercitando una azione proporzionale all'angolo di inclinazione della bicicletta. La stabilizzazione della bicicletta nel suo movimento laterale si traduce nel controllo della posizione del baricentro del sistema. Riportiamo la simbologia utilizzata per i parametri fondamentali del sistema in esame assieme ai relativi valori utilizzati per realizzare le simulazioni riportate nel corso della trattazione.

	Simbolo	Valore indicativo
Velocità	V	5 m/s
Momento inerzia baricentrico del sistema (modello a corpo rigido)	I_{CG}	20 kg*m ²
Distanza orizzontale tra il centro di gravità ed il punto di contatto ruota posteriore	A	0,4 m

Distanza orizzontale punto contatto ruota anteriore	B	0,7 m
Accelerazione di gravità	g	9,81m/s ²
Altezza baricentro in configurazione verticale	H	1,2 m
Passo bicicletta	L=A+B	1,1 m
Avancorsa	t	0,08 m
Massa del sistema bici-ciclista	M	70 kg
Angolo inclinazione dell'asse di sterzo rispetto alla verticale	λ	40°

2.2 Modellizzazione della bicicletta con ruota sterzante anteriore

2.2.1 Dinamica di imbardata nel piano orizzontale

Esaminiamo il movimento orizzontale del sistema bicicletta-ciclista nel piano stradale. Fissata una retta di riferimento, definiamo le seguenti coordinate per descrivere lo spostamento laterale:

- $x(t)$ posizione laterale del punto di contatto della ruota anteriore rispetto alla retta di riferimento;
- $y(t)$ posizione laterale del punto di contatto della ruota posteriore rispetto alla retta di riferimento;
- $z(t)$ posizione laterale della proiezione sul suolo del centro di massa (CG) del sistema rispetto alla retta di riferimento;
- $\psi(t)$ angolo di imbardata della bicicletta;
- $\varphi(t)$ angolo di sterzo ruota anteriore.

Per quanto concerne le convenzioni di segno si faccia riferimento alla seguente rappresentazione, nella quale il passo L della bicicletta è dato dalla somma delle lunghezze dei segmenti A e B :

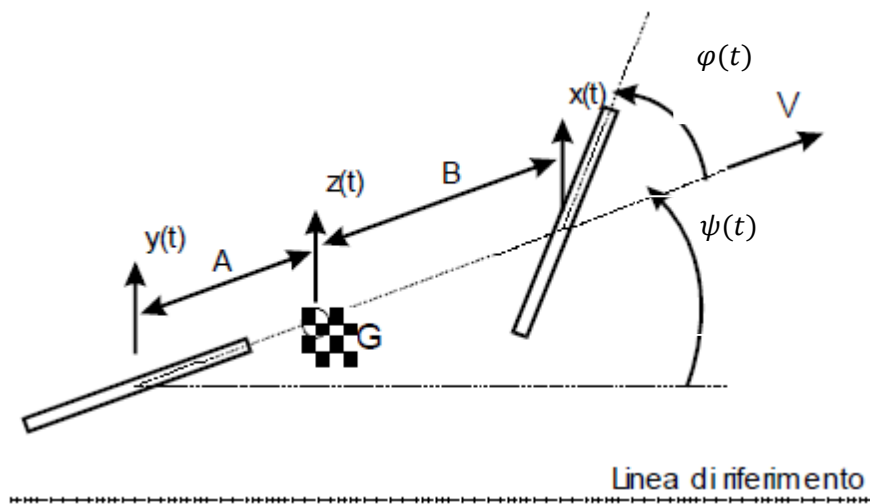


Fig.2.1 Proiezione bicicletta sul piano stradale

Le equazioni cinematiche fondamentali che descrivono il movimento laterale sono :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \varphi} \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \psi \\ Z = \frac{(Ax + By)}{L} \\ L \sin \psi = x - y \end{array} \right.$$

Le coordinate indipendenti sono due, in particolare, scelti i due gradi di libertà x ed y , il sistema precedente, linearizzato attorno alla posizione di equilibrio $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0,0,0)$ assume la forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V(\varphi + \psi) \\ \dot{y} = V\psi \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L} \\ L\psi = x - y \end{array} \right.$$

sostituendo nella prima e nella seconda equazione il valore di ψ ottenuto dall'ultima relazione si perviene al seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y + V\varphi \\ \dot{y} = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y \end{array} \right.$$

Considerando l'angolo di sterzo φ come ingresso, x ed y stati del sistema e z come uscita dal sistema precedente si ricava il seguente modello di stato a tempo continuo :

posto

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

ottenere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{X}}(t) = A\underline{X}(t) + B\varphi(t) \\ z(t) = C\underline{X}(t) \end{array} \right.$$

con

$$A = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} \\ \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & \frac{B}{L} \end{bmatrix}$$

da cui passando nel dominio delle trasformate è possibile esprimere la *funzione di trasferimento* che lega lo spostamento laterale della bicicletta alla rotazione dello sterzo.

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = G_1(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{V(As + V)}{Ls^2} \quad (2.1)$$

2.2.2 Dinamica di rollio nel piano verticale

Passiamo ora ad analizzare la dinamica di rollio della bicicletta, la quale per piccoli angoli di imbardata $\psi(t)$ può essere trattata come un pendolo inverso con massa M . Sia $\beta(t)$ l'angolo di inclinazione del sistema bicicletta-ciclista rispetto al piano verticale, mentre l'espressione di $z(t)$ prima trovata descrive il movimento laterale della base del pendolo, che è soggetta ad un vincolo di carrello. La figura 2.2 di seguito riportata, offre una schematizzazione del sistema:

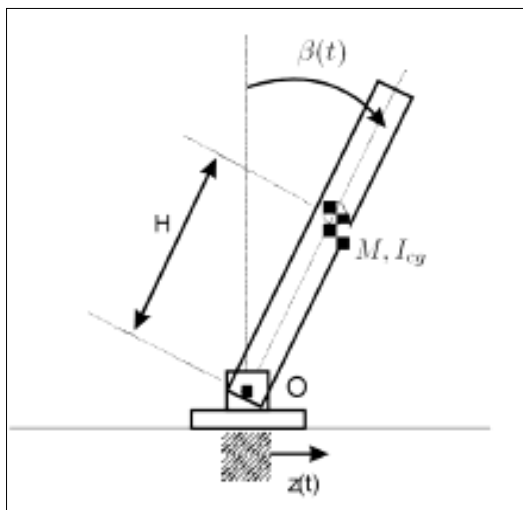


Fig.2.2 Schema della bicicletta nel piano laterale passante per il baricentro nel sistema di riferimento solidale con il moto rettilineo uniforme

Indicando con I_{cg} il momento d'inerzia baricentrico, l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto di cerniera O , per il quale passa la congiungente dei punti di contatto delle ruote con il piano stradale, assume la seguente forma:

$$(MH^2 + I_{cg})\ddot{\beta} = MgH \sin \beta - MH\ddot{z} \cos \beta \quad (2.2)$$

dove, a secondo membro, il primo termine rappresenta il momento dovuto alla forza peso, mentre il secondo termine si deve all'accelerazione \ddot{z} . Procedendo ancora una volta con la linearizzazione per piccoli valori dell'angolo β e ponendo $MH^2 + I_{CG} = J$ si ricava :

$$J\ddot{\beta} = MgH\beta - MH\ddot{z} \quad (2.3)$$

Da questa equazione si ottiene la funzione di trasferimento $G_2(s)$, che lega lo spostamento laterale $z(t)$ all'inclinazione $\beta(t)$ della bicicletta :

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = G_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH} \quad (2.4)$$

2.2.3 Funzione di trasferimento del sistema

Riprendendo le funzioni di trasferimento (2.1) e (2.4) evidenziando poli e zeri

$$G_1(s) = \frac{VA \left(s + \frac{V}{A} \right)}{L s^2} ;$$

$$G_2(s) = \frac{-MH s^2}{J \left(s^2 - \frac{MgH}{J} \right)}$$

e mettendole in serie si ottiene la relazione $G(s)$ che lega, nel dominio delle trasformate, l'angolo di sterzo φ e la inclinazione laterale β :

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (2.5)$$

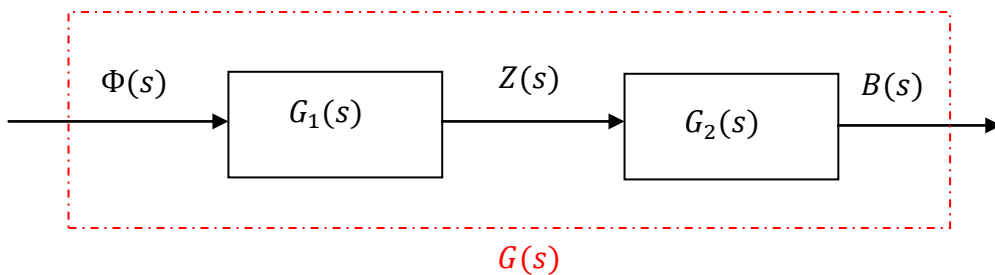


Fig.2.3 Funzione di trasferimento in anello aperto $G(s)$

Una considerazione delle cancellazioni effettuate mettendo in serie i due sottosistemi è presentata nel paragrafo seguente.

Si caratterizzano le singolarità di $G(s)$:

Poli

$$P = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}}$$

I poli sono reali simmetrici rispetto all'asse immaginario

Zero

$$Z = -\frac{V}{A}$$

Lo zero reale negativo per ogni valore di V (assumendo la velocità sempre in direzione positiva)

Notiamo che $G(s)$ rappresenta un sistema instabile dovuto ad un polo reale positivo, ciò corrisponde al fatto che la bici non rimane in piedi da sola e si rende necessario l'intervento del ciclista, il quale, percependo che la bicicletta si discosta dal piano verticale, di equilibrio instabile, determina l'angolo di sterzo φ necessario per mantenere la bicicletta nell'intorno del piano verticale.

2.2.4 Cancellazioni

Nella determinazione della funzione di trasferimento del sistema $G(s)$, come prodotto delle funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ dei due sottosistemi analizzati si è verificata la doppia cancellazione zero-polo nell'origine il quale darebbe origine ad un modo instabile. Si dimostra che tale modo sia associato alla variabile ψ che descrive l'imbardata del veicolo, dunque al fatto di non esserci posti per lo studio del moto, in un sistema di riferimento solidale con quello della bicicletta, per cui essa tende ad allontanarsi divergendo indefinitamente dalla retta di riferimento.

2.2.5 Equazione di moto nel dominio del tempo

Antitrasformando la funzione di trasferimento $G(s)$ si ottiene, nel dominio del tempo, la seguente equazione differenziale che descrive il sistema:

$$\ddot{\beta} - \frac{MgH}{J} \beta = -\frac{VAMH}{LJ} \dot{\varphi} - \frac{V^2MH}{LJ} \varphi \quad (2.6)$$

dove :

$\frac{MgH}{J} \beta$ contributo di coppia dovuto alla forza di gravità,

$\frac{V^2MH}{LJ} \varphi$ contributo di coppia dovuto alla forza centrifuga ;

$\frac{VAMH}{LJ} \dot{\varphi}$ contributo di coppia dovuto all'inerzia .

Le relazioni precedenti suggeriscono che, per poter effettuare una curva in una data direzione, il ciclista dovrà esercitare un'azione di sterzo che permetta al veicolo di percorrere una curva di raggio tale da generare una forza centrifuga sufficiente a bilanciare la forza di gravità: questo consentirà al sistema bicicletta-ciclista di rimanere alla stessa inclinazione β (*Stabilita*); se invece il ciclista desidera riportare il mezzo in posizione verticale, la forza centrifuga che avrà origine in seguito all'azione di sterzo dovrà essere superiore alla componente orizzontale della forza di gravità (asintotica stabilita). Va sottolineato, infine, che nel modello qui presentato si assume che il ciclista determini in modo diretto l'angolo di sterzo del manubrio, a differenza di quanto avverrà nel modello descritto in seguito, dove l'azione di controllo del ciclista sarà data dalla coppia che egli applicherà al manubrio.

2.2.6 Rappresentazione dell'azione di controllo in anello chiuso

Consideriamo il problema di rappresentare una legge di controllo per esprimere l'azione del ciclista. Assumiamo che il ciclista agisca direttamente sulla variabile di controllo rappresentata dall'angolo di sterzo φ . In particolare, supponiamo di rappresentare tale azione con una retroazione *positiva* di tipo proporzionale con guadagno K . Si assume cioè che l'angolo di sterzo φ cresca linearmente con l'inclinazione laterale β , per piccoli angoli. Il sistema si presta pertanto ad una rappresentazione a schema a blocchi con inserzione della retroazione in anello chiuso.

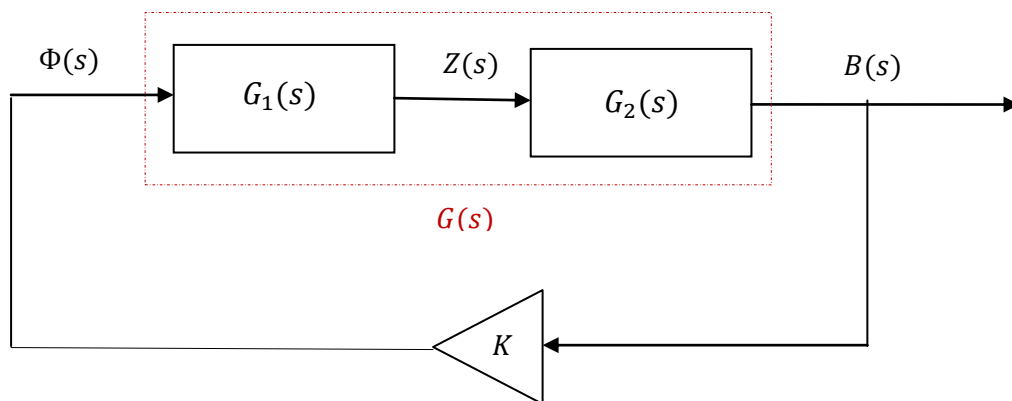


Figura 2.4 schema a blocchi del sistema con retroazione

Se, come abbiamo supposto, l'angolo di sterzo φ della bicicletta è proporzionale all'angolo di inclinazione β , il movimento del centro di massa può essere modellato come quello di un semplice oscillatore armonico smorzato, descritto dalla equazione differenziale del secondo ordine :

$$\begin{cases} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{J} \beta = -\frac{VAMH}{LJ} \dot{\varphi} - \frac{V^2MH}{LJ} \varphi \\ \varphi = K\beta \end{cases}$$

da cui :

$$\ddot{\beta} + \frac{VALH}{LJ} K \dot{\beta} + \left(\frac{V^2MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} \right) \beta = 0 \quad (2.9)$$

L' equazione caratteristica associata in s della forma

$$s^2 + \frac{VALH}{LJ} KS + \frac{V^2MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} = 0 \quad (2.10)$$

sarà usata per lo studio della stabilità delle soluzioni del sistema.

2.2.7 Analisi della stabilità

Uno strumento molto efficace per lo studio della stabilità del sistema è il luogo delle radici. Esso è caratterizzato da una topologia diversa a seconda della posizione relativa di poli e zeri. In particolare, al variare della velocità i poli in anello aperto per il nostro sistema rimangono in una posizione fissata, pari a:

Poli:

$$P = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{MH^2 + I_{cg}}} \cong \pm \sqrt{\frac{g}{H}}$$

se $M \gg I_{cg}$ ovvero la massa del ciclista è molto maggiore dell'inerzia del veicolo. Si sposta invece lo zero, che può assumere valori lungo l'asse reale negativo (nell'ipotesi di velocità positiva), dato che:

zero:

$$Z = -\frac{V}{A}$$

In base al valore della velocità possono essere discriminate due situazioni: lo zero della funzione di trasferimento, infatti, potrà trovarsi a sinistra del polo reale negativo oppure alla sua destra (o al limite coincidere con esso). Possiamo pertanto illustrare significativamente il luogo delle radici per il sistema in esame servendoci delle seguenti rappresentazioni in cui i poli $p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}}$ mentre lo zero $z = -\frac{V}{A}$

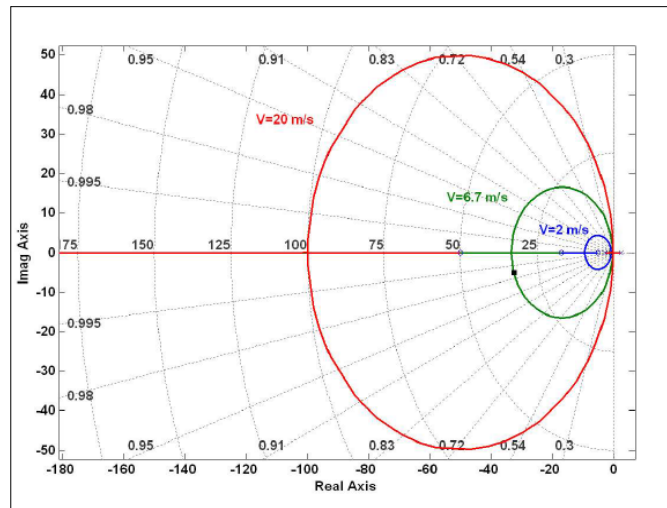


Fig.1.4 luogo delle radici al variare della velocità con $-\frac{V}{A} < -\sqrt{\frac{MgH}{J}}$

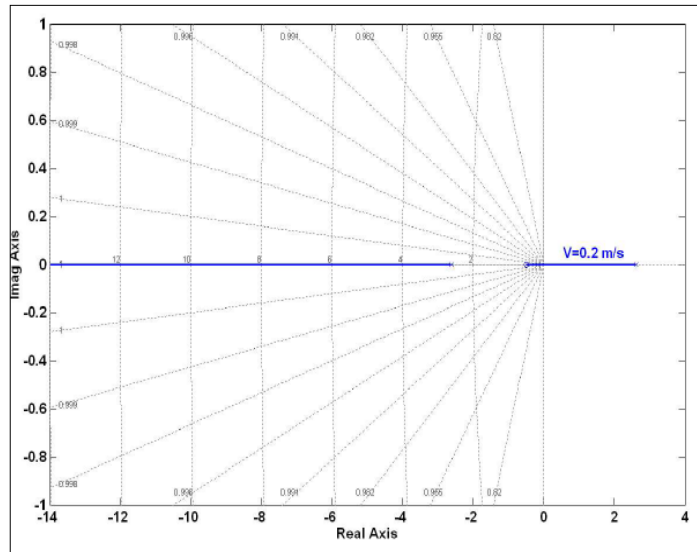


Fig.1.5 luogo delle radici al variare della velocità con $-\frac{V}{A} > -\sqrt{\frac{MgH}{J}}$

Si nota come, in entrambe le situazioni il guadagno d'anello, dipendente dall'azione proporzionale esercitata dal controllore umano, ha un ruolo fondamentale nella determinazione della stabilità del sistema. Infatti non per tutti i valori del guadagno d'anello il sistema risulta *asintoticamente* stabile. In particolare, se il pilota non esercita alcuna azione sul manubrio – situazione rappresentabile ponendo $K=0$ si ha in entrambi i casi instabilità. Ciò manifesta uno dei limiti della modellizzazione del sistema proposta in questo capitolo, in quanto non ricevono adeguata giustificazione a determinati fenomeni rilevabili sperimentalmente nel veicolo, tra i quali quello dell'autostabilità, cioè della proprietà di questo veicolo di stabilizzarsi senza l'intervento del pilota, a partire da certi valori di velocità. Si può notare come, al crescere della velocità e quindi del valore dello zero, in modulo, la parte ellissoidale del luogo tenderà a dilatarsi verso sinistra. Ciò comporta differenti caratteristiche in termini di smorzamento del sistema. Possiamo valutare il guadagno K del controllore proporzionale rappresentante l'azione del ciclista che garantisce al sistema un comportamento stabile asintoticamente, esprimendolo in funzione della velocità V . Lo si desume dal

polinomio caratteristico dell'equazione di secondo grado che descrive il sistema da controllare (equazione 2.10). Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, le radici del polinomio caratteristico devono essere tutte negative. Perché ciò avvenga, dato che il termine di primo grado è prodotto di termini tutti positivi e di conseguenza è a sua volta positivo, deve essere positivo anche il termine di grado zero ovvero la rigidità equivalente del sistema ; la condizione necessaria é sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema, quindi, sarà:

$$K > \frac{gL}{V^2} = K_{min} \quad (2.11)$$

Questo spiega bene il fatto che è più facile guidare una bicicletta a velocità elevate piuttosto che ridotte. Ad alta velocità, infatti, la stabilizzazione della bicicletta implica una azione di controllo più moderata; invece, a velocità nulla per la stabilizzazione del sistema è richiesto al ciclista un guadagno infinito. Come già anticipato, infatti, lo zero della funzione di trasferimento del sistema si sposta, in tali condizioni, nell'origine, mentre i poli rimangono nella loro posizione, non dipendendo dalla velocità. Se ne conclude che il sistema bicicletta-ciclista è staticamente instabile e dinamicamente stabile, in quanto a velocità nulla la stabilizzazione richiederebbe una intensità dell'azione di controllo illimitata.

Capitolo 3

Modellistica con retroazione strutturale

3.1 L'avancorsa e la sua azione di feedback

3.3.1 L'avancorsa

Il modello precedentemente descritto si basa su alcune semplificazioni di carattere geometrico e non risulta pertanto in grado di giustificare importanti aspetti della dinamica della bicicletta, in particolare la sua capacità di *autostabilizzazione* a velocità sufficientemente elevate. La scelta operata nel capitolo precedente di descrivere il sistema bicicletta-ciclista come un unico corpo rigido senza considerare in modo analitico la geometria del sistema, così come quella di assegnare l'angolo di sterzo φ della bicicletta come variabile di controllo manipolata direttamente dal ciclista, era finalizzata allo scopo di ottenere un'analisi qualitativa che fornisse una serie di risultati iniziali sulla stabilità del sistema. Nel seguito verrà presentato un modello dovuto allo svedese Aström, il quale prende in particolare considerazione le caratteristiche geometriche della forcella anteriore, schematizzata nella figura seguente.

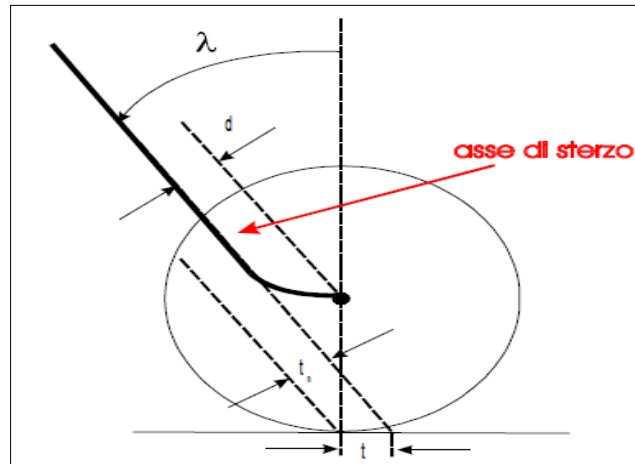


Fig 3.1 Forcella anteriore sterzante

Solitamente l'asse di sterzo è eccentrico rispetto al centro di rotazione della ruota e la distanza tra i due elementi è data dal segmento d , detto avanzamento dello sterzo. La grandezza che però gioca un ruolo molto importante nella dinamica della bicicletta risulta essere l'avancorsa t , ovvero la distanza tra il punto di intersezione dell'asse di sterzo con il piano stradale e il punto di contatto della ruota sterzante. Per convenzione, l'avancorsa è considerata positiva se l'asse di sterzo interseca il piano orizzontale in posizione avanzata rispetto al punto sterzante. Se indichiamo con λ , l'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo, con R il raggio della ruota e con t_n l'avancorsa normale, è possibile ricavare le seguenti relazioni, che esprimono il legame tra le grandezze citate:

$$t = R \tan \lambda - \frac{d}{\cos \lambda} \quad (3.1)$$

$$t_n = t \cos \lambda \quad (3.2)$$

L'avancorsa riveste un ruolo particolarmente importante in quanto, se positiva, garantisce un certo grado di stabilità mediante l'effetto imbardante e

raddrizzante. Innanzitutto consideriamo l'avancorsa normale, ovvero la componente dell'avancorsa normale all'asse dello sterzo: essa è il braccio vettore di tutti i momenti che si creano sullo sterzo, causati da forze applicate nel punto di contatto della ruota anteriore.

Effetto raddrizzante dell'avancorsa

Immaginiamo di procedere in moto rettilineo uniforme con velocità V ; in seguito ad una perturbazione che provoca la rotazione dello sterzo verso sinistra, la velocità si decompone in una componente di rotolamento $\omega_f R_f$ ed una componente che tende a far slittare verso destra. La forza laterale F dovuta all'attrito genera un momento attorno all'asse di sterzo (in senso orario) a causa del braccio dovuto all'avancorsa normale t_n . Se l'avancorsa è positiva, allora il momento è raddrizzante, se invece fosse negativa non lo sarebbe. L'effetto stabilizzante dell'avancorsa viene annullato quando la ruota, a causa di un'irregolarità sul terreno, trova il caster urta in un punto anteriore rispetto all'usuale punto di contatto.

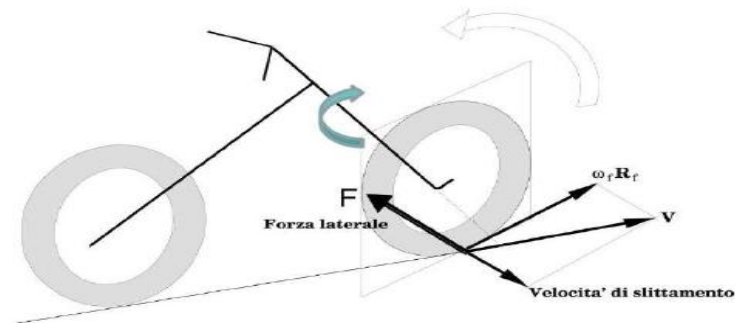


Fig 3.2 Effetto raddrizzante avancorsa

Effetto imbardante dell'avancorsa

L'avancorsa genera anche un effetto opposto a quello raddrizzante appena descritto di tipo stabilizzante che facilita l'inserimento in curva. Supponiamo che per ruotare verso destra, invece di girare lo sterzo, si sposti il proprio peso verso destra in modo da fare inclinare la bicicletta verso destra; nel punto di contatto col suolo della ruota anteriore hanno origine due forze di reazione:

- la reazione verticale del peso;
- la forza laterale di attrito (che evita lo slittamento);

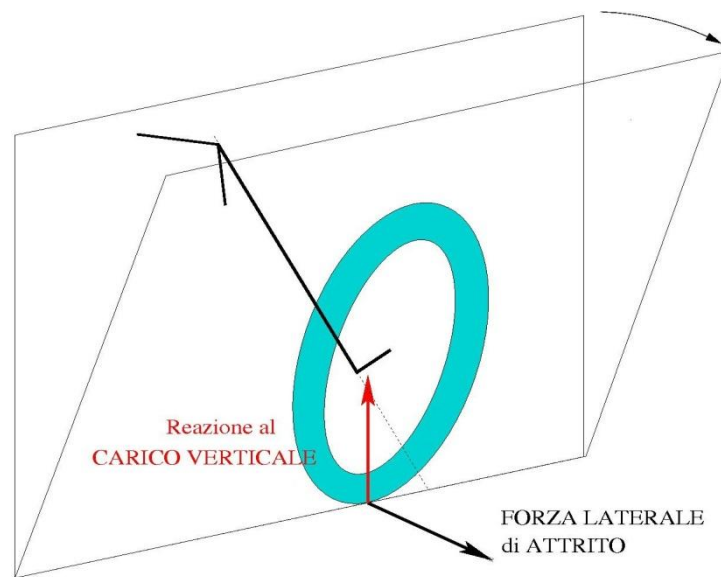


Fig 3.3 Effetto imbardante avancorsa

Reazione verticale del peso:

Consideriamo la reazione del peso, che risulta ortogonale al terreno, e la decomponiamo in:

- una componente *parallela* alla direzione dello sterzo (che non genera momento);
- una componente *normale* al piano della ruota anteriore (rivolta verso l'esterno della curva), la quale genera un momento che provoca

l'imbardata della bicicletta, ovvero fa girare la ruota verso destra come si vede in figura 3.4.

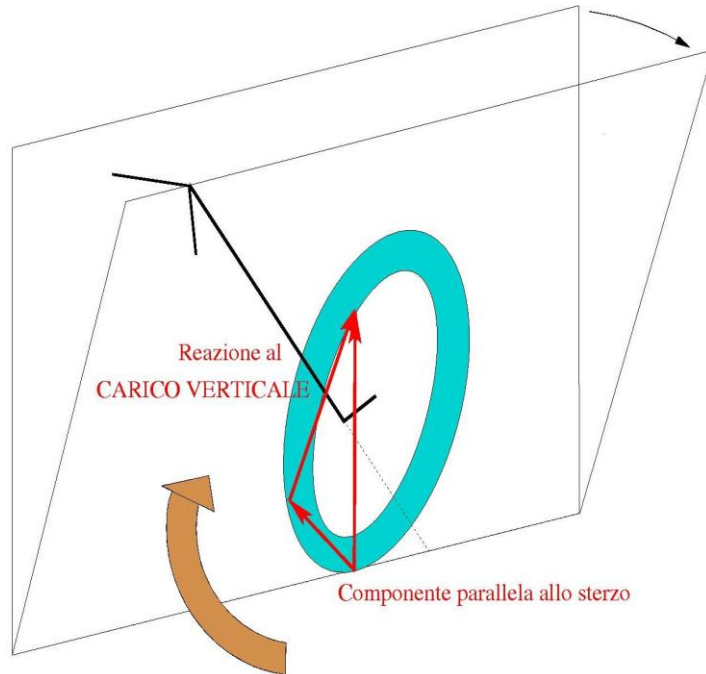


Fig 3.4 Decomposizione reazione verticale del peso

Forza laterale di attrito:

Passiamo ora alla forza laterale di attrito che invece è orizzontale e decomponiamo anch'essa in:

- una componente *parallela* alla direzione dello sterzo, che non genera momento;
- una componente *normale* al piano della ruota anteriore e rivolta verso l'interno della curva, la quale genera un momento che si oppone all'imbardata della bicicletta, ovvero non fa girare la ruota verso destra, ma verso sinistra.

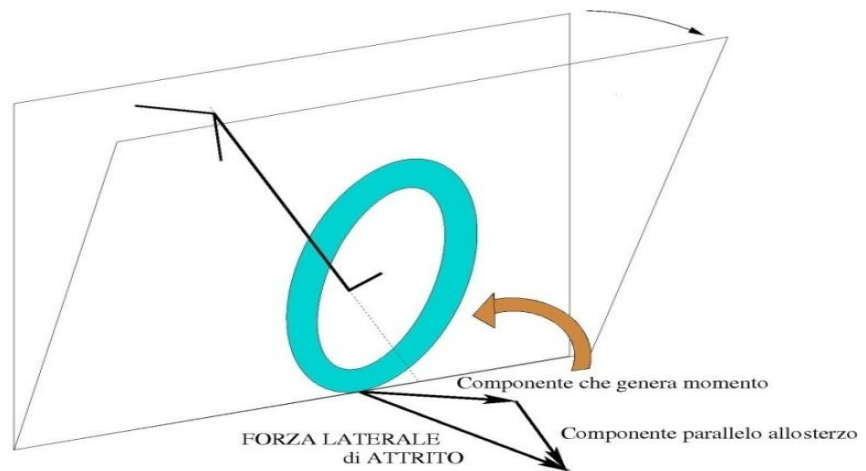


Fig 3.5 Componenti forza laterale di attrito

Ricapitolando nel punto di contatto ruota-terreno ci sono due forze che generano un momento e hanno come braccio l'avancorsa normale:

- la componente della *reazione del peso* fa girare la ruota verso destra (favorisce l'inserimento in curva)
- la componente della *forza laterale* fa girare la ruota verso sinistra.

L'effetto del carico verticale è maggiore di quello generato dalla forza laterale di attrito e in seguito ad uno spostamento del peso del ciclista verso destra la bicicletta ruota automaticamente verso destra, provocando l'*imbardata* della bicicletta verso destra.

Conclusione sull'avancorsa

In caso di inclinazione laterale della bicicletta, le forze di contatto sulla ruota anteriore esercitano un momento che fa ruotare la bicicletta (verso la parte in cui la bici si è inclinata); di conseguenza la bici gira generando una forza centrifuga che si oppone alla caduta sul lato di inclinazione, stabilizzando il moto di rollio

della bici. Riassumendo la coppia totale agente sulla ruota anteriore rispetto all'asse di sterzo sarà la somma di quattro coppie

- la coppia della reazione normale del terreno alla forza peso
- la coppia interna dovuta alla forza di attrito laterale che mantiene la bicicletta sulla traiettoria circolare
- la coppia interna di tipo giroscopico che soddisfa il principio di conservazione del momento angolare per la ruota anteriore
- coppia esterna applicata dal ciclista al manubrio.

3.3.2 Effetto giroscopico

Finora sono stati trascurati gli effetti giroscopici legati alle ruote del veicolo rotanti attorno agli assi dei mozzi: tali effetti dipendono in modo principale alle caratteristiche delle ruote e dalla loro velocità angolare. Sebbene nelle motociclette essi giochino un ruolo fondamentale per la stabilizzazione del mezzo, lo stesso non avviene per quanto riguarda la bicicletta, in quanto le velocità tipiche raggiunte con tale mezzo danno origine ad effetti giroscopici che, ai fini della descrizione semplificata di cui faremo uso in questo studio, possono essere trascurati.

3.3.3 Definizione del modello

Fatte le necessarie premesse, possiamo ora passare alla formulazione del modello vero e proprio, il quale considera l'azione svolta dall'avancorsa nella stabilizzazione del veicolo come una vera azione di retroazione (feedback). A differenza di quanto avveniva nel modello classico, dove il ciclista esercitava la propria azione di controllo direttamente sull'angolo di sterzo φ della bicicletta, in questo caso, il ciclista governa il mezzo applicando una coppia all'asse di sterzo, tramite il manubrio; questa azione si somma poi a quella dovuta alla retroazione realizzata dalla forcella anteriore. Nel complesso, il sistema bicicletta-ciclista viene ora suddiviso in due sottosistemi distinti: il telaio e la forcella anteriore con le parti ad essa solidali rispettivamente. Per quanto riguarda il telaio, esso viene descritto in modo analogo al modello classico, mentre per la forcella viene usato un modello statico. Indicata infatti con T la coppia applicata dal ciclista sull'asse dello sterzo, la descrizione del funzionamento della forcella anteriore può essere fatta mediante un bilancio delle coppie che la caratterizzano:

$$T = (F_f + N_f \beta)c \sin \lambda \quad (3.3)$$

dove:

F_f forza orizzontale agente nel punto di contatto ruota terreno

N_f forza verticale agente nel punto di contatto ruota terreno

c avancorsa

λ angolo di sterzo

T momento esterno applicato dall'esterno dal ciclista

β angolo di rollio

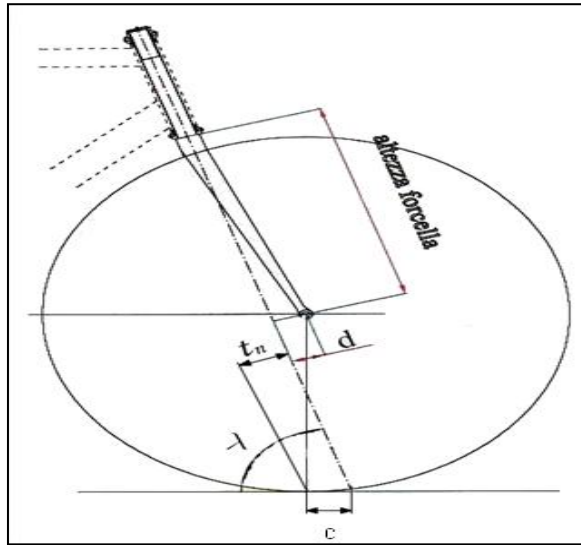


fig.3.6 Parametri geometrici della forcella anteriore

Esplicitando il valore dell'angolo di sterzo φ si può ottenere la seguente relazione di retroazione di tipo proporzionale, questa volta tenendo conto delle forze scambiate nel punto di contatto della ruota anteriore che nascono grazie all'avancorsa.

$$\varphi = K_1(V)T + K_2(V)\beta \quad (3.4)$$

dove $K_1(V)$, $K_2(V)$ sono due parametri che dipendono dalla velocità V e dalla geometria dello sterzo secondo le seguenti relazioni:

$$K_1(V) = \frac{L^2}{tMA \cos \lambda (V^2 \cos \lambda - gL \sin \lambda)};$$

$$K_2(V) = \frac{Lg}{V^2 \cos \lambda - Lg \sin \lambda}$$

3.4 Autostabilità (*self-stability*)

Complessivamente possiamo scrivere il seguente sistema per rappresentare il comportamento del veicolo, dove l'equazione che descrive la dinamica del telaio è identica a quella ottenuta per il modello semplice ed è espressa dalla funzione di trasferimento $G(s)$.

$$\begin{cases} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{LJ}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\varphi} - \frac{V^2MH}{LJ}\varphi \\ \varphi = K_1(V)T + K_2(V)\beta \end{cases} \quad (3.5)$$

Il modello descritto dalle due equazioni indicate sopra può essere rappresentato tramite il seguente schema a blocchi:

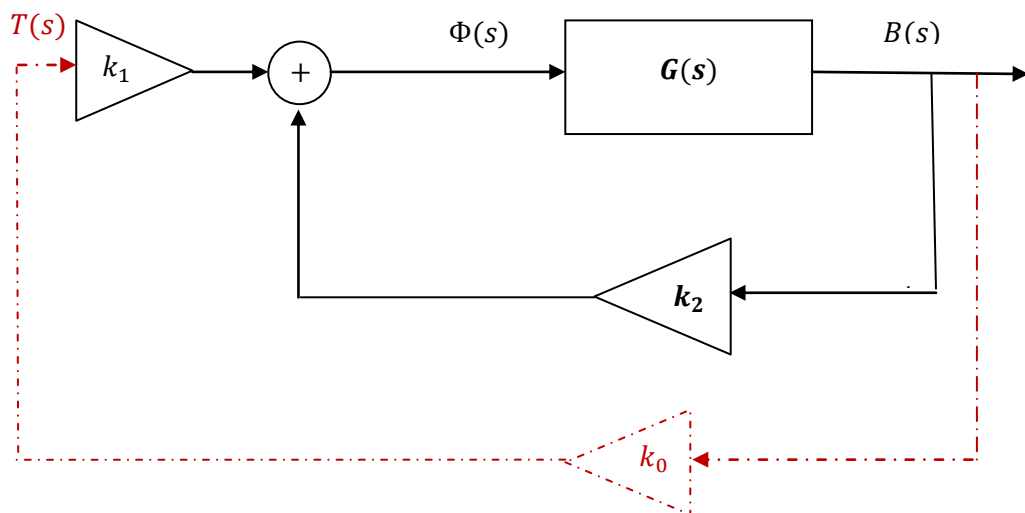


Fig. 3.7 Schema a blocchi con retroazione strutturale

Si noti che, rispetto al modello semplificato, qui la retroazione realizzata dalle forcella anteriore svolge un ruolo analogo a quello prima esercitato dal ciclista, creando un rapporto di proporzionalità tra β e φ , attraverso il guadagno k_2 . A questa retroazione si somma l'effetto della coppia torcente T esercitata dal ciclista. Questa sarà frutto, a sua volta, di una retroazione realizzata dal ciclista, descritta a sua volta da un guadagno k_0 . Si crea così un termine di retroazione "strutturale" k_2 dipendente dalla geometria ed alla velocità di avanzamento della bicicletta con effetto stabilizzante sul modello di bicicletta descritto in precedenza e assimilabile ad un pendolo rovescio. A questo contributo si somma in retroazione l'effetto della coppia torcente T esercitata dal ciclista, il cui effetto è mediato attraverso il contributo proporzionale K_1 anch'esso funzione della geometria e della velocità.

3.3.5 La funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento ad *anello aperto* coincide con quella del modello semplificato e vale pertanto:

$$G(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \quad (3.6)$$

Elaborando lo schema a blocchi di figura 3.7 si ricava la funzione di trasferimento $G'(s)$ ad anello chiuso "strutturale" che lega l'angolo β di rollio della bicicletta alla coppia T applicata al manubrio:

$$G'(s) = \frac{B(S)}{T(S)} = -\frac{K_1 V A M H}{L J} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 + \frac{V A M H}{L J} K_2 s + \frac{M g H}{J} \left(\frac{K_2 V^2}{L g} - 1 \right)} \quad (3.8)$$

Dalla quale è possibile esaminare gli effetti della retroazione realizzata tramite la forcella anteriore. La rigidità del sistema (in questo caso) può assumere un valore positivo all'aumentare della velocità di marcia V , senza applicare nessuna coppia allo sterzo e quindi una rotazione dello stesso, come si rendeva invece necessaria nel modello con avancorsa nulla analizzato nel capitolo 1. Infatti la costante di proporzionalità tra β e φ ovvero k_2 è intrinseca nella modellazione della forcella, figlia del fatto di avere considerato non nulla l'avancorsa, e non dipende dal ciclista. Il contributo alla stabilità è in funzione della velocità, da qui l'autostabilità del sistema che avverrà per valori superiori a valori definiti critici.

3.3.6 Analisi stabilità in anello chiuso

La discussione sulla stabilità passa attraverso l'ausilio del luogo delle radici innanzitutto si vuole ottenere il luogo delle radici per l'anello di retroazione strutturale relativo ad una bicicletta con avancorsa positiva (anello interno); poi si intende analizzare il luogo delle radici relativo all'anello esterno, anche al variare del segno di $k_0 \cdot k_1$, quindi del segno della coppia T applicata dal ciclista.

Anello interno :

La conformazione del luogo è uguale a quella ottenuta relativamente al modello classico con retroazione k (figura 2.4). Si nota che la costante di proporzionalità k_1 non interviene nella stabilizzazione del sistema. La condizione necessaria e sufficiente in questo caso, per la stabilità delle soluzioni può essere desunta dal denominatore della funzione di trasferimento $G'(s)$.

$$\frac{K_2 V^2}{Lg} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad V > V_c = \sqrt{\frac{Lg}{K_2}} \quad (2.8)$$

Dove si è indicato con V_c la *velocità critica* oltre la quale il sistema è stabile asintoticamente. Tenendo conto che il termine k_2 dipenda solo dalle caratteristiche geometriche del veicolo e non dalla velocità dello stesso, tale condizione risulta verificata per i valori dei parametri scelti e, in particolare, rimane valida per ogni valore della velocità V che soddisfi:

$$V > 3 \text{ m/s}$$

Pertanto, per velocità superiori ai 3 m/s la $G'(s)$ ad anello chiuso risulta stabile, a differenza del modello precedente, dove l'intervento del ciclista si dimostrava necessario per la stabilità e la velocità aveva come impatto solamente di ridurre l'azione del controllo. Il grafico seguente mostra la diminuzione della velocità critica in funzione del coefficiente k_2 .

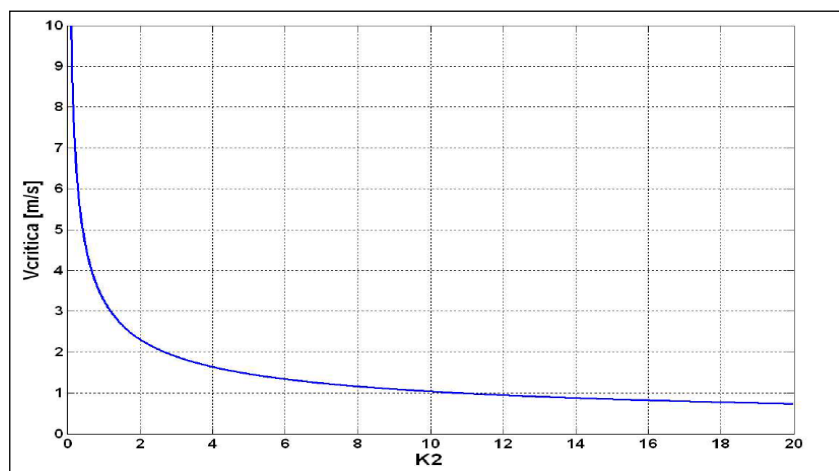


Fig.3.8 Velocita critica in funzione di K_2

La stabilizzazione del sistema, in questo caso, è realizzata dalla geometria del sistema, senza l'intervento stabilizzante del ciclista. Possiamo quindi concludere che, a causa del feedback creato dalla geometria della forcella anteriore, la bicicletta sarà asintoticamente stabile se la velocità è abbastanza grande.

Anello esterno :

Consideriamo ora, il luogo delle radici per l'anello di controllo esterno Al variare di $k_1 \cdot k_0$, guadagno dell'anello di coppia, la posizione dei poli in anello chiuso si sposta dalla posizione assunta nel corrispondente luogo relativo all'anello interno; lo spostamento avviene lungo i punti del luogo interno, dove questo è definito. Per $T > 0$ si nota che il pilota non assume un ruolo stabilizzante, in quanto la stabilità (asintotica) è già garantita, mentre può modificare le caratteristiche dinamiche (transitori, smorzamento) del sistema; per $T < 0$, invece, cioè nel caso in cui il ciclista eserciti una coppia in verso opposto a quello di curvatura, egli può rendere il sistema instabile, o anche stabile non asintoticamente.

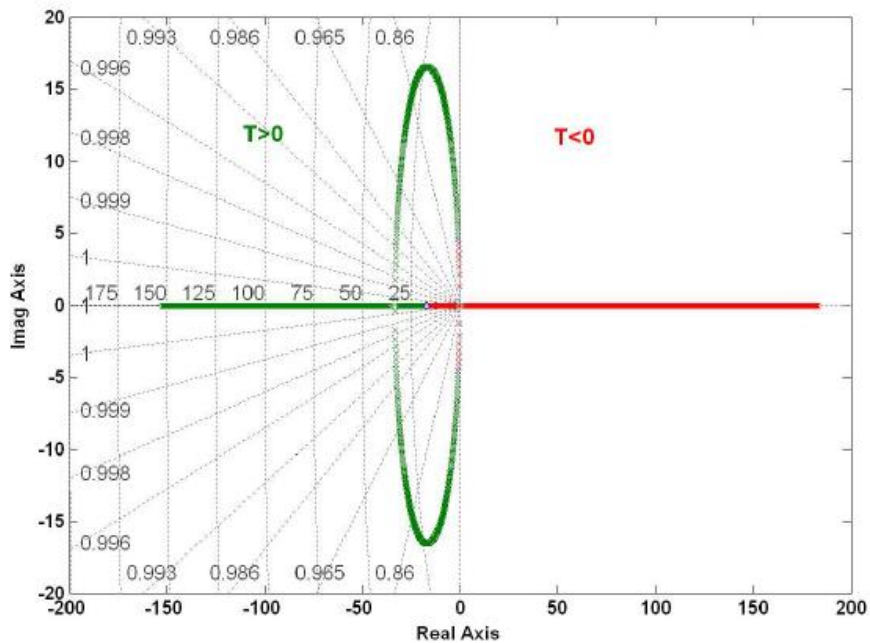


Fig.3.9 Dipendenza della posizione dei poli in anello chiuso dalla coppia T esercitata dal ciclista sul manubrio

Capitolo 4

Modello di Whipple

4.1 Premessa

Data l'importanza che il modello di Whipple riveste poiché rappresenta la base per tutti i lavori successivamente effettuati nel campo dello studio dei veicoli a due ruote è bene soffermarsi descrivendolo più dettagliatamente. La bicicletta di Whipple [1] è caratterizzata da quattro corpi rigidi: le due ruote anteriore e posteriore, il retrotreno, composto dal telaio con pilota rigidamente vincolato ad esso, ed infine dall'avantreno, che comprende l'assieme di forcella e manubrio; le ruote in questo modello sono considerate lenticolari, cioè di spessore nullo e rappresentano un vincolo ideale con il terreno poiché perfettamente rigide. il modello di veicolo utilizzato è schematizzato in figura 4.1 in essa è in evidenza il punto P di contatto della ruota posteriore con il suolo, il punto Q di contatto della ruota anteriore e la terna di riferimento fissa di origine O. Le rotazioni presenti nel modello sono 5, e sono schematizzate da cilindri in figura:

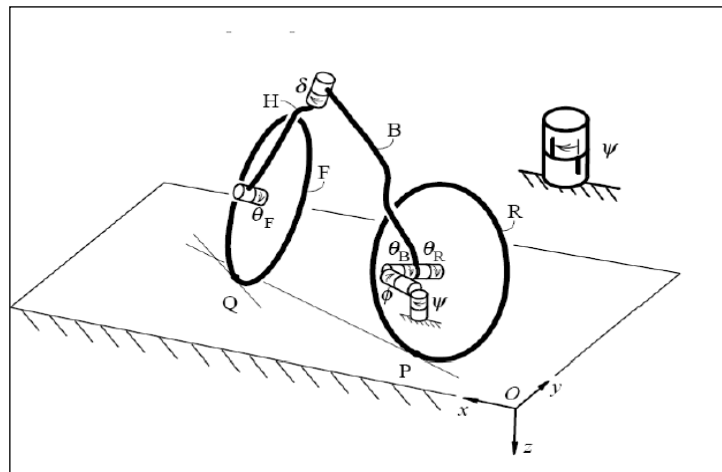


Fig.4.1 Modello cinematico di una bicicletta di Whipple

I simboli in figura rappresentano :

- ψ imbardata del retrotreno, cioè rotazione rispetto ad un asse verticale
- φ rollio del retrotreno, cioè rotazione rispetto ad un asse orizzontale
- θ_R , rotazione della ruota posteriore attorno al suo asse
- θ_F rotazione della ruota anteriore attorno al suo asse
- δ rotazione dello sterzo attorno al suo asse
- θ_B rotazione di beccheggio

Il modello di Whipple è definito da 25 parametri geometrici ed inerziali; i gradi di libertà del sistema meccanico non vincolato, composto da 4 corpi rigidi nello spazio tridimensionale sono pari a 24; considerando le 3 coppie rotoidali presenti (sterzo e ruote) e il vincolo di contatto verticale (non compenetrazione) tra le ruote e il suolo il numero di gradi di libertà si riduce a 7. Successivamente considerando i vincoli di non slittamento tra le ruote e il suolo i gradi di libertà si riducono a 3, che sono rappresentati dal rollio della bicicletta φ , l'angolo di sterzo δ e la rotazione della ruota posteriore θ_R . Per lo studio della stabilità della bicicletta, che si effettua a velocità costante i gradi di libertà si riducono a due, e si può eliminare la variabile θ_R relativa all'avanzamento longitudinale.

4.2 Modello a 2 gradi di libertà

Si illustrerà ora il modello sviluppato da Papadopoulos contenuto in Schwab, Meijaard e Papadopoulos, la cui rappresentazione grafica è riportata in Figura 3.2 in cui i gradi di libertà sono δ rotazione avantreno attorno all'asse di sterzo, e il moto di rollio espresso dalla variabile φ .

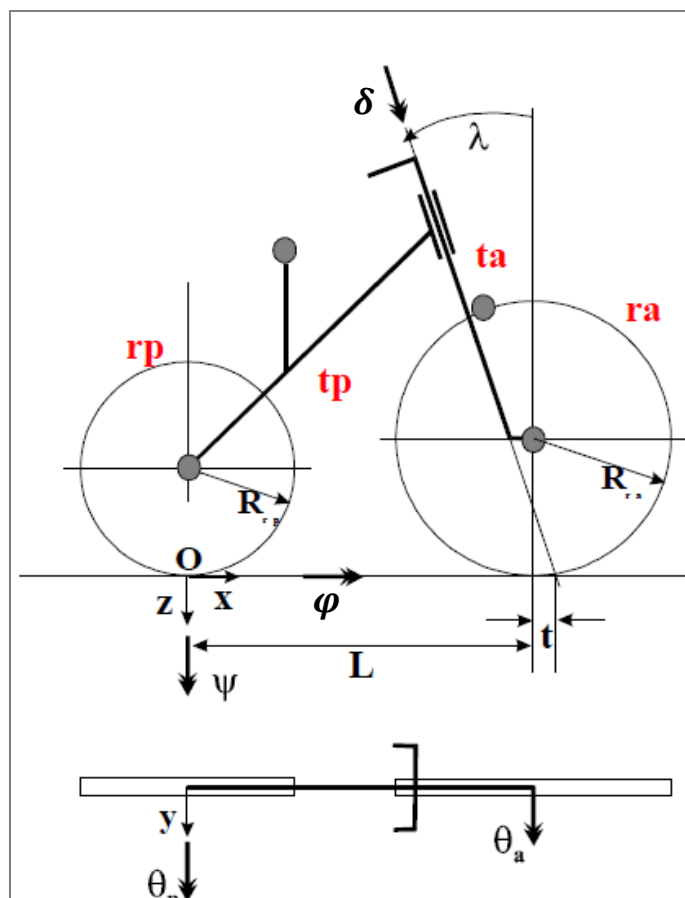


Fig .4.2 Modello a 2 gradi di libertà con le convenzioni di segno adottate.

Considerando la bicicletta in figura 4.2, la simbologia utilizzata per i pedici riportata nelle formule successive è la seguente:

- ta : per il telaio anteriore
- ra : per la ruota anteriore
- a : insieme di telaio e ruota anteriore
- : per telaio posteriore
- rp : per la ruota posteriore
- tot: per il sistema complessivo

La tabella riportata sotto indica i parametri, i simboli e i corrispondenti valori numerici associati alle grandezze utilizzate per descrivere il presente modello.

Parametro	Simbolo	Valore
Passo	L	1.02m
Avancorsa	t	0.08m
Angolo inclinazione sterzo	λ	$\pi/2 - \text{atan}(3)$
Accelerazione gravita	g	9,81m/s ²
Velocità	V	
Ruota posteriore		
Raggio	R_{rp}	0,3
massa	m_{rp}	2kg
Momenti inerzia massa	(A_{xx} ; A_{yy} ; A_{zz})	(0,06 ; 0,12 ; 0,06) Kg *m ²
Retrotreno		
Posizione del centro di massa	(X_{tp} ; Y_{tp} ; Z_{tp})	(0,3 ; 0 ; - 0,9)m
Massa	m_{tp}	
Momento inerzia massa	$\begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & B_{xz} \\ 0 & B_{yy} & 0 \\ B_{xz} & 0 & B_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,2 & 0 & 2,4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2,4 & 0 & 2,8 \end{bmatrix} \text{Kg}^* \text{m}^2$
Avantreno		

Posizione del centro di massa	$(X_{ta}; Y_{ta}; Z_{ta})$	$(0,9; 0; -0,7)$ m
massa	m_{ta}	4Kg
Momenti inerzia massa	$\begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ C_{xz} & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,054 & 0 & -0,016 \\ 0 & 0,06 & 0 \\ -0,016 & 0 & 0,011 \end{bmatrix}$ kg.m ²
Ruota anteriore		
Raggio	R_{ra}	
Massa	M_{ra}	
Momenti inerzia	$(D_{xx}; D_{yy}; D_{zz})$	$(0,14; 0,28; 0,14)$

4.2.1 Equazioni di moto linearizzate

La massa totale e il corrispondente centro di massa rispetto all'origine O sono tenendo in considerazione il sistema di riferimento con origine nel punto di contatto della ruota posteriore:

$$m_{tot} = m_{tp} + m_{rp} + m_{ta} + m_{ra}$$

$$\begin{cases} X_{tot} = \frac{m_{tp}X_{tp} + m_{ta}X_{ta} + m_{ra}X_{ra}}{m_{tot}} \\ Z_{tot} = \frac{-m_{rp}R_{rp} + m_{tp}Z_{tp} + m_{ta}Z_{ta} - m_{ra}R_{ra}}{m_{tot}} \end{cases}$$

Calcoliamo anche i momenti di inerzia e i prodotti d'inerzia rispetto all'origine O lungo gli assi di riferimento:

$$T_{xx} = A_{xx} + B_{xx} + C_{xx} + D_{xx} + m_{rp}R_{rp}^2 + m_{tp}Z_{tp}^2 + m_{ta}Z_{ta}^2 + m_{ra}R_{ra}^2$$

$$T_{xz} = B_{xz} + C_{xz} - m_{tp}X_{tp}Z_{tp} - m_{ta}X_{ta}Z_{ta} + m_{ra}X_{ra}Z_{ra}$$

$$T_{zz} = A_{zz} + B_{zz} + C_{zz} + D_{zz} + m_{tp}X_{tp}^2 + m_{ta}X_{ta}^2 + m_{ra}L^2$$

Ripetiamo le considerazioni precedenti per l'assieme frontale a , costituito dal telaio anteriore e dalla ruota anteriore. La massa dell'assieme ed il centro di massa di questo rispetto ad O sono:

$$m_a = m_{ta} + m_{ra}$$

$$\begin{cases} X_a = \frac{m_{ta}X_{ta} + Lm_{ra}}{m_a} \\ Z_a = \frac{m_{ta}Z_{ta} - m_{ra}R_{ra}}{m_a} \end{cases}$$

I corrispettivi momenti d'inerzia ed i prodotti d'inerzia rispetto all'origine O lungo gli assi di riferimento sono:

$$F_{xx} = C_{xx} + D_{xx} + m_{ta}(Z_{ta} - Z_a)^2 + m_{ra}(R_{ra} + Z_a)^2$$

$$F_{xz} = C_{xz} + m_{ta}(X_{ta} - X_a)(Z_{ta} - Z_a) + m_{ra}(L - X_a)(R_{ra} + Z_a)$$

$$F_{zz} = C_{zz} + D_{zz} + m_{ta}(X_{ta} - X_a)^2 + m_{ra}(L - X_a)^2$$

Sia λ l'angolo dell'asse di sterzo (angolo compreso tra l'asse di sterzo e l'asse verticale). Possiamo calcolare la distanza u che indica di quanto il centro di massa dell'assieme anteriore è davanti rispetto all'asse di sterzo:

$$u = (X_a - L - t) \cos \lambda - Z_a \sin \lambda$$

I momenti di massa e i prodotti d'inerzia lungo l'asse di sterzo e gli assi di riferimento si possono calcolare nel modo seguente

$$F_{\lambda\lambda} = m_a u^2 + F_{xx} \sin(\lambda)^2 + 2F_{xz} \sin(\lambda) \cos(\lambda) + F_{zz} \cos(\lambda)^2$$

$$F_{\lambda x} = -m_a u Z_a + F_{xx} \sin(\lambda) + F_{zx} \cos(\lambda)$$

$$F_{\lambda z} = -m_a u X_a + F_{xz} \sin(\lambda) + F_{zz} \cos(\lambda)$$

Si definisce inoltre il rapporto tra l'avancorsa e il passo della bicicletta:

$$f = \frac{t \cos(\lambda)}{L}$$

Le equazioni del modello sono state linearizzate intorno ad un punto di equilibrio corrispondente alla direzione verticale della bicicletta $\bar{\varphi} = 0$ ed una velocità di marcia costante ipotizzando la condizione di puro rotolamento al contatto ruota-strada di modo da ridurre i gdl e concentrarci su problema della stabilità. I due gradi di libertà adottati sono l'angolo di rotazione dello sterzo δ , e l'angolo di rollio φ del telaio. Nella notazione matriciale adottata il vettore \underline{q} contenente i gradi di libertà diventa:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix}$$

l'equazioni di moto linearizzate in forma matriciale assumono così la forma:

$$[M]\underline{\ddot{q}} + [C_1 V]\underline{\dot{q}} + [K_0 + K_2 V^2]\underline{q} = [M]\underline{\ddot{q}} + [C]\underline{\dot{q}} + [K]\underline{q} = \underline{f} \quad (3.1)$$

dove M è la matrice di massa e rimane costante, la matrice di smorzamento contiene il termine C_1 proporzionale alla velocità di avanzamento del veicolo V , e la matrice di rigidità K è formata da un termine costante di rigidità equivalente K_0 funzione della accelerazione di gravità g ed un termine K_2 proporzionale al quadrato della velocità di avanzamento del veicolo legato alla accelerazione centripeta del sistema e quindi al momento centrifugo che da essa ne scaturisce. Il termine noto f è così definito:

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\delta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dove i valori di M_ϕ e M_δ sono i momenti che si generano a causa di forze esterne e agiscono rispettivamente sull'angolo di rollio ϕ , come può succedere nel caso di vento laterale molto forte, e sull'angolo di sterzo δ , come per esempio agisce un ciclista applicando una coppia allo sterzo per controllare il mezzo. Nel caso di bicicletta non controllata entrambi questi momenti sono nulli.

Le matrici di massa, smorzamento, rigidità del sistema sono così composte :

$$M = \begin{bmatrix} T_{xx} & F_{\lambda x} + fT_{xz} \\ F_{\lambda x} + fT_{xz} & F_{\lambda\lambda} + 2fF_{\lambda x} + f^2T_{zz} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & fS_{tot} + S_a \cos(\lambda) + \frac{T_{xz} \cos(\lambda)}{L} - fm_{tot}Z_{tot} \\ -(fS_{tot} + S_a \cos(\lambda)) & \frac{F_{\lambda z} \cos(\lambda)}{L} + f \left(S_u + \frac{T_{zz} \cos(\lambda)}{L} \right) \end{bmatrix} V;$$

$$K = gK_0 + K_2 = \begin{bmatrix} m_{tot}Z_{tot} & -S_u \\ -S_u & S_u \sin(\lambda) \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} 0 & \frac{(S_{tot} - m_{tot}Z_{tot}) \cos(\lambda)}{L} \\ 0 & \frac{(S_u + S_a \sin(\lambda)) \cos \lambda}{L} \end{bmatrix} V^2$$

4.3 Stabilità del movimento

Risolvendo l'equazione omogenea associata imponendo la soluzione del tipo:

$$q = q_0 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Si giunge a un problema agli autovalori. Per il modello in questione si ottiene come equazione caratteristica un polinomio del quarto ordine nella variabile λ .

$$[\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]] \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = 0$$

Il sistema ammette soluzioni non banali se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè se:

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]] = 0 \quad (3.3)$$

Il determinante è riconducibile, per questo sistema a due gradi di libertà, ad un polinomio del quarto ordine in λ del tipo:

$$\Delta(\lambda) = a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e \quad (3.4)$$

4.4 Modi di vibrare modello Whipple: capsise, weave, castering

I risultati che si ottengono con lo studio della stabilità sono rappresentati in figura 3.3 gli autovalori caratterizzati da parte reale positiva corrispondono ad un'instabilità, mentre la parte immaginaria rappresenta un modo di vibrare oscillante. I modi di vibrare più significativi per la stabilità sono il capsise e il weave: il capsise corrisponde ad un autovalore reale e relativo modo di vibrare caratterizzato principalmente dal rollio; se quest'ultimo è instabile la bicicletta rolla progressivamente percorrendo una traiettoria a spirale con angolo di rollio e sterzo che incrementano fino alla caduta. Il modo di vibrare di weave è di tipo oscillante a bassa frequenza e può essere descritto qualitativamente come un serpeggiamento della bicicletta, con angolo di sterzo e rollio che variano sinusoidalmente con un certo ritardo di fase tra di loro. Il terzo modo di vibrare è il cosiddetto castering, che è rappresentativo della tendenza fisica della ruota anteriore ad allinearsi alla direzione di avanzamento, quest'ultimo modo di vibrare, come si può vedere in figura è sempre dotato di parte reale negativa ed è stabile di conseguenza: cioè dovuto all'avancorsa positiva, e quindi il punto di contatto con il terreno della ruota anteriore si trova dietro rispetto all'asse di rotazione dell'avantreno. Dal grafico si osserva che il modo weave, che inizialmente è reale e alla velocità v_d diventa complesso; tale modo di vibrare tende a stabilizzarsi all'aumentare della velocità, poiché la sua parte reale diminuisce da positiva tende ad un valore negativo. Il modo di vibrare di capsise invece ha un andamento opposto ma, anche se la sua parte reale diventa positiva assume dei valori prossimi allo 0 e quindi praticamente non produce instabilità. Nel grafico viene evidenziata una zona di stabilità, all'interno della quale tutte le parti reali degli autovalori assumono valore negativo: in questo campo di velocità non è necessario applicare azioni di controllo al veicolo, ma quest'ultimo è intrinsecamente asintoticamente stabile.

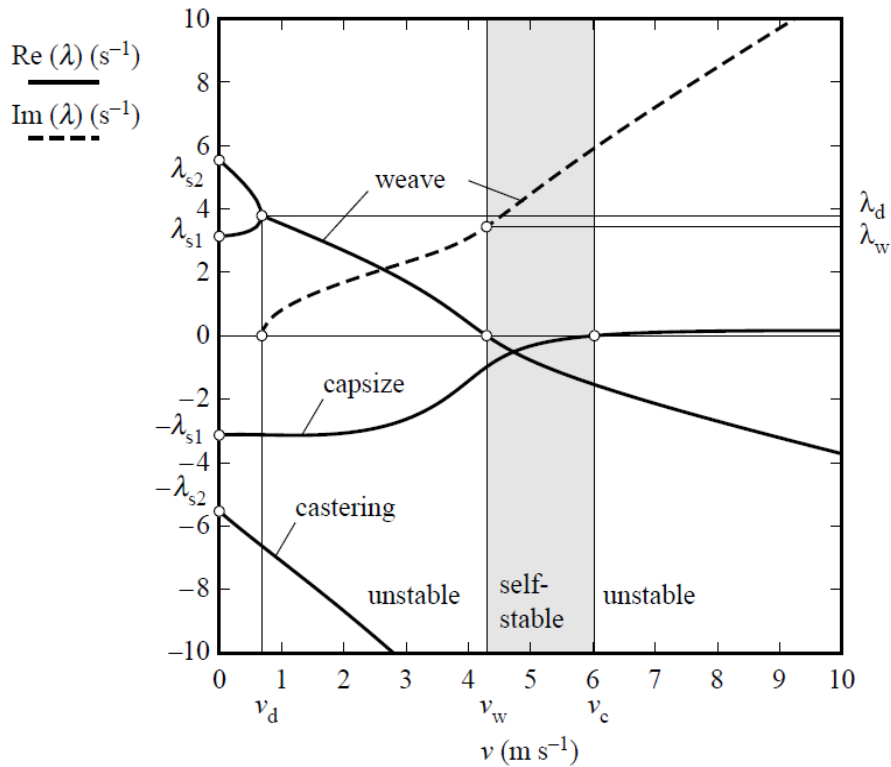


Fig.4.3 Autovalori $\lambda = \lambda(v)$ dell'analisi linearizzata del modello Whipple

4.5 Conclusioni

Il modello di Whipple, nonostante le semplificazioni adottate, che comprendono l'assenza di un modello realistico di pneumatico e di deformabilità strutturale del veicolo, è in grado di mettere in luce le caratteristiche salienti del veicolo a due ruote, cioè i suoi principali modi di vibrare, ed inoltre fornisce un'interpretazione della realtà, poiché viene evidenziata una zona di stabilità intrinseca della bicicletta, che corrisponde a ciò che chiunque può provare: la bicicletta è guidabile senza mani in un determinato intervallo di velocità.

L'evidenza pratica ha messo in evidenza il possibile insorgere, se pur raramente, di un altro modo di vibrare della bicicletta, lo shimmy. Esso non può essere descritto dal modello di Whipple. Occorre un ulteriore grado di libertà o una cedevolezza nel telaio Limbeer e altri Sharma collocano la cedevolezza nel piano della bicicletta, inserendo nel modello un ulteriore grado di libertà torsionale, attorno ad un asse normale al canotto di sterzo in posizione centrale ad esso espresso dalla variabile Φ come illustrato in figura sotto. Limbeer e Sharma introducono anche una descrizione più accurata del contatto ruota strada in grado di descrivere gli slittamenti laterali inserendo nel modello una dinamica di quest'ultima.

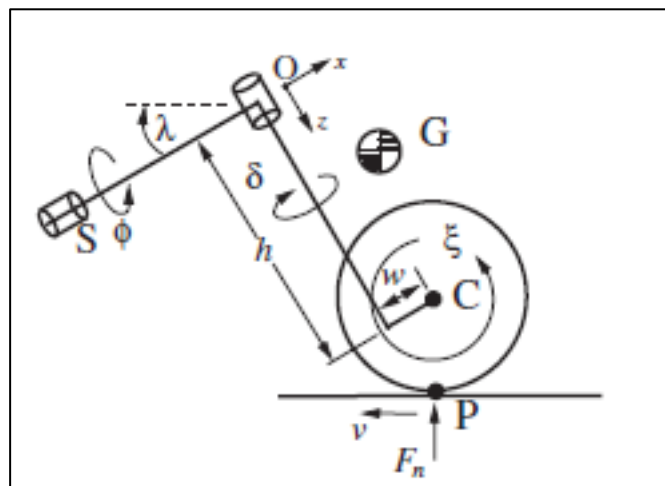


Fig.4.4

Magnani e Papadopoulos hanno proposto invece di descrivere la cedevolezza del telaio ancora nel piano della bicicletta, ma rispetto ad un asse di rotazione quasi verticale, passante per la sella e il punto di contatto a terra dello pneumatico posteriore. Si è visto sperimentalmente (tesi Pellecchia) entrambe queste cedevolezzae intervengono nella shimmy tuttavia essendo la seconda predominante.

Capitolo 5

Modi di vibrare dei veicoli a due ruote

5.1 Introduzione

In questo capitolo viene condotta un'analisi semplificata dei modi instabili dei veicoli a due ruote. Il modello di Whipple descritto precedentemente ricava la formulazione di un modello di bicicletta considerando il sistema a due corpi (avantreno e retrotreno) con i rispettivi gradi di libertà, vincolati all'asse di sterzo e dotati di moto relativo. In questa sezione il moto di retrotreno e avantreno del veicolo sono singolarmente analizzati, disaccoppiando le due rotazioni e descrivendo ogni singolo sottosistema ad un unico grado di libertà secondo quanto proposto da Cossalter ("Cinematica e dinamica della motocicletta", 1997). Nella descrizione del modo weave l'asse di sterzo è fermo e fa da cerniera per il retrotreno. Questa ipotesi è suffragata dall'osservazione che nelle oscillazioni di tipo weave si riscontrano spostamenti dell'asse di sterzo abbastanza limitati. Questo approccio viene poi applicato all'avantreno per analizzare il modo Wooble, identificandone almeno in prima approssimazione frequenza e smorzamento ad esso associati. Per ottenere dal modello di Whipple il modo Wooble è necessario estenderlo e mettere in gioco un ulteriore grado di libertà esprimibile dalla cedevolezza del telaio (Limebeer "Control system Magazine, 2013). Con riferimento in particolare alle motociclette Cossalter propone un'analisi approssimata ma più intuitiva dei tre principali modi di vibrare di un veicolo monotraccia a due ruote che viene riportata nel seguito.

5.2 Modo di Capsize

In assenza di azione del ciclista è noto che una bicicletta cade lateralmente in un tempo più o meno lungo, ciò significa che è un veicolo intrinsecamente instabile, in particolar modo essendo l'azione stabilizzante degli effetti giroscopici trascurabile. Tale instabilità opportunamente controllata dal ciclista permette di inclinare la bicicletta ed affrontare le curve in modo corretto. Il modo di capsise (modo non oscillatorio) è caratterizzato da un parametro definito come costante di tempo τ che rappresenta il tempo necessario alla caduta del veicolo. E' intuitivo che quanto più piccola è la costante di tempo (quindi quanto più risulta instabile il capsise), tanto minore deve essere l'anticipo con cui il pilota deve iniziare la manovra di inclinazione del veicolo nella fase di inserimento in curva. I due parametri che maggiormente influiscono sul capsise sono il *l'avancorsa* a . Per consentire il riallinearsi automatico della bici non controllata entrambi questi valori devono essere positivi ovvero, la proiezione dell'asse del canotto di sterzo deve essere posizionata davanti rispetto al centro dell'area di contatto, e il tubo di sterzo deve avere inclinazione positiva proiettando la ruota anteriore in avanti rispetto al telaio.

5.2.1 Modello con ruote lenticolari

Si consideri una bicicletta nelle seguenti ipotesi:

- il veicolo avanza in rettilineo (direzione x) a velocità costante V ;
- lo spessore del pneumatico è nullo;
- gli strisciamenti tra strada e pneumatico sono trascurabili;
- sterzo bloccato;
- effetti giroscopici trascurabili;

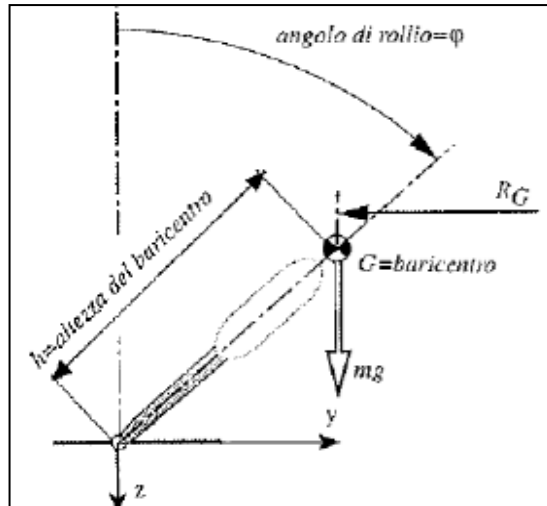


Fig.5.1 Forza peso applicata al baricentro bicicletta

L'equilibrio dei momenti, scritto rispetto ai punti di contatto, rappresenta l'equazione del moto:

$$(I_{X_G} + mh^2)\ddot{\varphi} = mgh \sin \varphi \quad (5.1.2)$$

che linearizzata per $\varphi = 0$, nell'intorno della posizione verticale diventa:

$$(I_{X_G} + mh^2)\ddot{\varphi} - mgh\varphi = 0 \quad (5.2.2)$$

Passando nel dominio di Laplace si ottiene:

$$(I_{X_G} + mh^2)s^2\Phi(s) - mgh\Phi(s) = 0 \quad (5.3.2)$$

le cui radici, a conferma di un moto non oscillatorio sono:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mgh}{I_{X_G} + mh^2}} \quad (5.3.3)$$

cui corrisponde un modo instabile, la cui costante di tempo τ è l'inverso della soluzione fornita dagli autovalori :

$$\tau = \sqrt{\frac{I_{X_G} + mh^2}{mgh}} \quad (5.3.4)$$

Il *capsize* si presenta quindi come un modo non oscillatorio instabile; entro i limiti dell'approssimazione lineare, è possibile esprimere il rollio del *capsize* con una legge esponenziale del tipo :

$$\varphi(t) = \Phi_0 e^{\frac{1}{\tau}t} \quad \text{dove } \tau \text{ indica la costante di tempo.}$$

5.3 Modo di weave

Il moto indicato con Weave è il più complesso dei modi di vibrare in quanto il veicolo oscilla attorno all'asse di rollio e contemporaneamente assume un movimento di imbardata. Il moto che ne scaturisce coinvolge tutto il veicolo, ma in maniera preponderante il retrotreno come riportato in figura (5.2). È un modo oscillatorio instabile alle basse velocità (1÷2 m/s) e con frequenza che cresce

con essa da zero a 1-2 [Hz] circa. Alle medie velocità si stabilizza e con l'aumentare della velocità diminuisce molto rapidamente lo smorzamento ξ ad esso associato cosa che può causare problemi di stabilità.

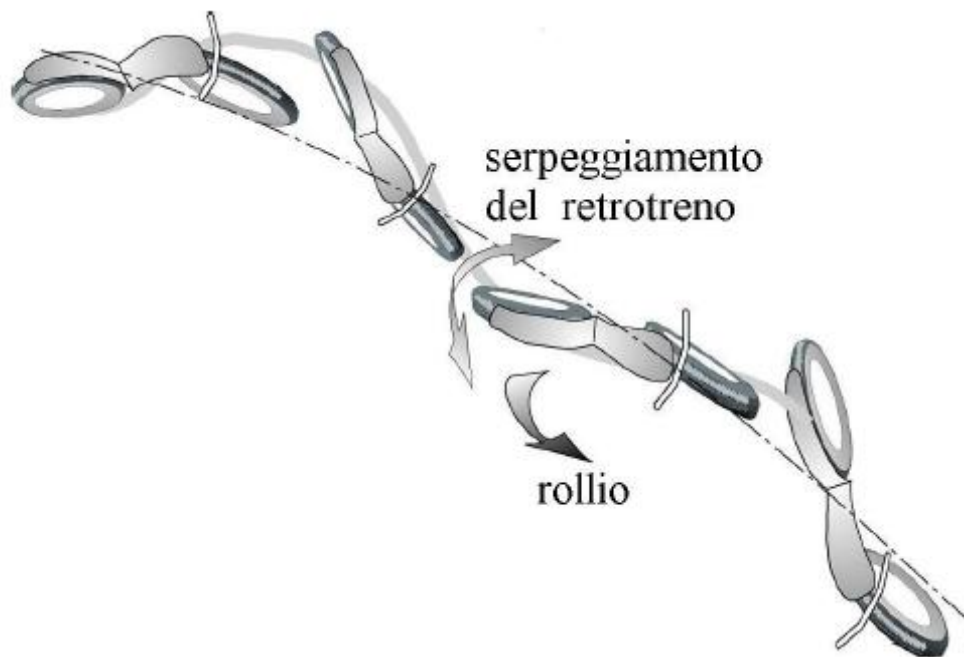


Fig.5.2 Modo weave

5.3.1 Modello ad un grado di libertà del modo weave

In prima approssimazione è possibile supporre che il modo weave sia disaccoppiato dall'avantreno e dal moto di rollio e che quindi sia costituito dall'oscillazione del retrotreno attorno all'asse di sterzo : le ipotesi che sono alla base del modello ad un grado di libertà del modo weave sono :

- rollio nullo
- sterzo fisso

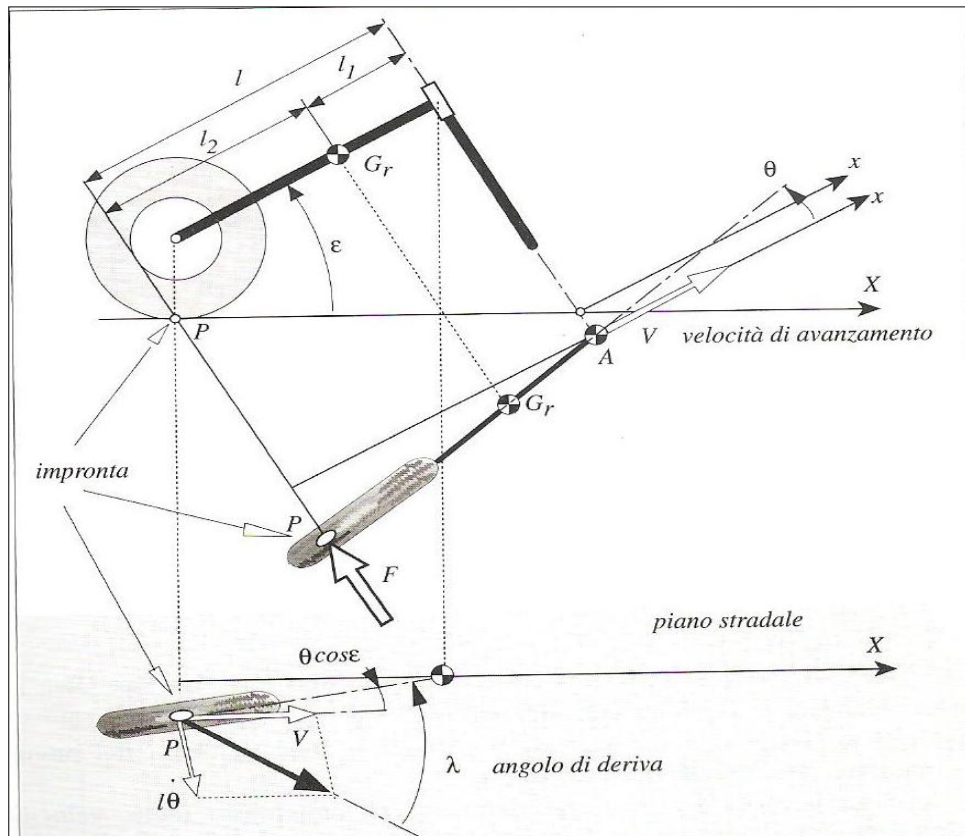


Fig.5.3 Oscillazione del retrotreno nel modo weave

Si analizzerà il solo moto di imbardata del retrotreno descritto dalla variabile ϑ . L'equazione del moto si ottiene imponendo l'equilibrio attorno all'asse di sterzo:

$$I_A \ddot{\vartheta} + Fl = 0$$

dove I_A è il momento di inerzia del retrotreno comprensivo della ruota posteriore, rispetto all'asse di sterzo;

F è la forza reattiva laterale, perpendicolare rispetto al piano della ruota posteriore, che agisce sul pneumatico. Quest'ultima è supposta proporzionale all'angolo di deriva posteriore secondo la relazione:

$$F = k_\lambda \cdot \lambda$$

Per piccoli spostamenti l'angolo di deriva può essere calcolato tramite l'espressione :

$$\lambda = \frac{l\dot{\vartheta}}{V} + \vartheta \cos(\varepsilon)$$

somma di due contributi :

- la velocità laterale nel punto di contatto ruota-strada rapportato alla velocità di avanzamento V ;
- angolo di sterzata effettivo misurato sul piano stradale.

Effettuando le opportune sostituzioni si ottiene l'equazione del moto valida per piccole oscillazioni:

$$I_A \ddot{\vartheta} + \frac{k_\lambda l^2}{V} \dot{\vartheta} + k_\lambda l \vartheta \cos \varepsilon = 0$$

Passando nel dominio di Laplace in condizioni iniziale nulli è possibile eliminare la dipendenza dal tempo e pervenire ad una equazione algebrica di secondo grado del tipo :

$$I_A s^2 + \frac{k_\lambda l^2}{V} s + k_\lambda l \vartheta \cos \varepsilon = 0$$

Le cui radici risultano :

$$s_{1,2} = -\frac{k_\lambda l^2}{2I_A V} \pm \sqrt{\left(\frac{k_\lambda l^2}{2I_A V}\right)^2 - \frac{k_\lambda l \cos \varepsilon}{I_A}} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$$

Il sistema risulta oscillante quando il radicando Δ risulta negativo, questa condizione si verifica per velocità di avanzamento superiori a :

$$V_0 > \frac{k_\lambda l^2}{2\sqrt{I_a k_\lambda l \cos \varepsilon}}$$

5.3.2 Pulsazione smorzata e smorzamento adimensionale

Nel caso di sistema oscillante asintoticamente stabile i poli del sistema possono essere espressi dalla relazione :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad 0 < \xi < 1$$

dove

$\omega_s = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ pulsazione smorzata (parte immaginaria polo);

$\xi\omega_n$ (parte reale polo)

Dal sistema meccanico di partenza è immediato ricavarne la pulsazione naturale ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_\lambda l \cos \varepsilon}{I_A}};$$

Quindi lo smorzamento adimensionale ξ pari a:

$$\xi = \frac{k_{\lambda} l^2}{2V \sqrt{I_A k_{\lambda} l \cos \varepsilon}};$$

e la pulsazione smorzata come ω_s :

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{k_{\lambda} l^2}{2V \sqrt{I_A k_{\lambda} l \cos \varepsilon}} \right)^2}$$

Possiamo concludere che la pulsazione smorzata del modo weave cresce rapidamente con la velocità e che tende ad un valore limite che corrisponde a quello del sistema non smorzato, ciò è dovuto al rapido decremento dello smorzamento ξ all'aumentare della velocità. Il modo assume sempre la parte reale dei poli negativa, ma l'effetto dell'elevato decremento di smorzamento del sistema può, se sollecitato, indurre una rapida oscillazione poco smorzata.

5.4 Modo di wobble o shimmy

Questo modo si manifesta con oscillazioni dell'avantreno intorno all'asse di sterzo che si innescano al crescere della velocità di avanzamento. Si tratta di oscillazioni che si destano anche in altri tipi di veicoli come gli autoveicoli e gli aerei (carrello anteriore) dove vengono identificate con il nome di shimmy. I valori usuali della frequenza di questo modo sono dai 4 [Hz] per i motocicli pesanti, ai 9 Hz per quelli leggeri e indicativamente da 6 a 10 [Hz] per le biciclette. La frequenza del modo wobble cresce all'aumentare dell'avancorsa ed al diminuire dell'inerzia dell'avantreno. Essa dipende sia dalle caratteristiche di rigidità dello pneumatico che da quelle della forcella anteriore. Per velocità superiori ai 10–20 m/s (40–80 km/h) il modo wobble risulta poco smorzato e può dar luogo ad un'oscillazione permanente.

5.4.1 Modello ad un grado di libertà

In prima approssimazione ipotizzando che il modo di wobble sia completamente disaccoppiato dal moto del retrotreno e dal rollio del motociclo, lo si può studiare con un modello ad un solo grado di libertà che schematizza il solo avantreno fig.1.

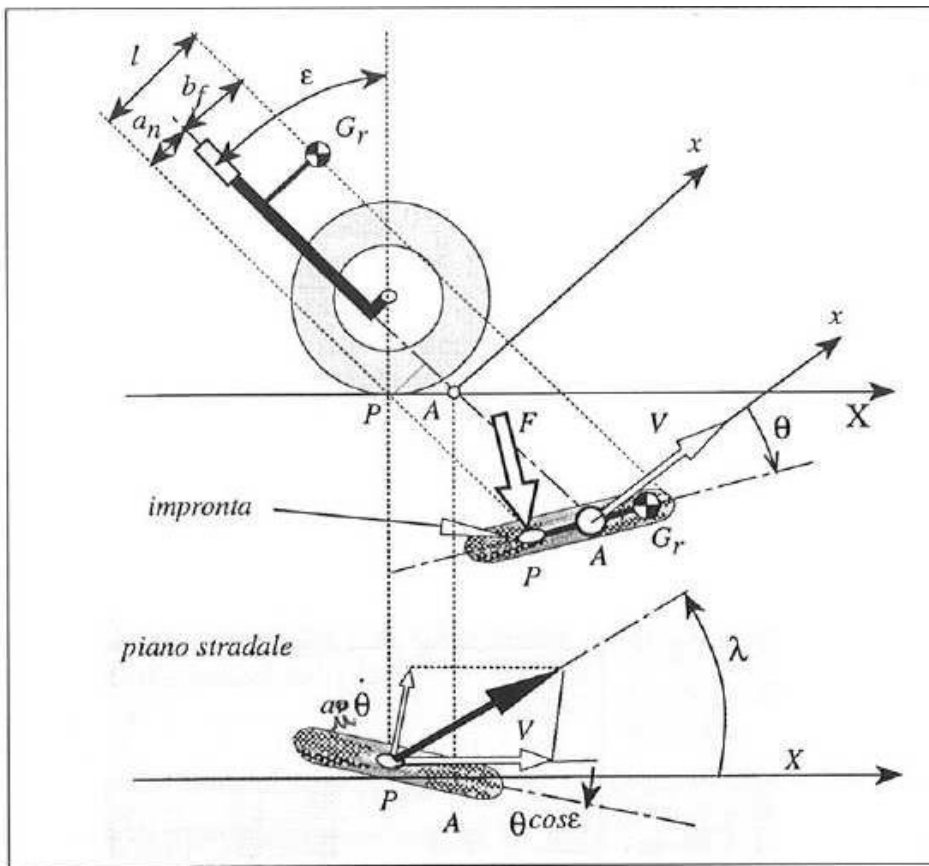


Fig.5.5 Schema del modello di avantreno della bicicletta

L'equazione del moto si può scrivere imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse di sterzo:

$$I_A \ddot{\theta} + F a_n = 0 \quad (5.4.1)$$

con

- $I_A = I_G + m b_f^2$ momento d'inerzia di massa intorno all'asse di sterzo ;
- $F = k_\lambda \lambda$ forza di deriva laterale al contatto ruota – strada .

e nell'ipotesi di piccole oscillazioni attorno la posizione di equilibrio :

$$\lambda = \frac{a_n \dot{\theta}}{V} + \theta \cos \varepsilon \quad (5.4.2)$$

sostituendo si ottiene l'equazione del moto nell'ipotesi di piccole oscillazioni

$$I_A \ddot{\theta} + \left(\frac{k_\lambda a_n^2}{V} \right) \dot{\theta} + k_\lambda a_n \cos \varepsilon \theta = 0 \quad (5.4.3)$$

Passando alla trasformata di Laplace si ottiene l'equazione:

$$I_A s^2 \theta(s) + \frac{k_\lambda a_n^2}{V} s \theta(s) + k_\lambda a_n \cos \varepsilon \theta(s) = 0 \quad (5.4.4)$$

le cui soluzioni ci permettono di valutare stabilità, frequenza smorzata e smorzamento adimensionale. Gli autovalori risultano:

$$s_{1,2} = \frac{-(k_\lambda a_n^2) \pm \sqrt{(k_\lambda a_n^2)^2 - 4I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}}{2I_A V} \quad (5.5.8)$$

la pulsazione naturale smorzata del wobble è la parte immaginaria degli autovalori :

$$\omega_s = \frac{\sqrt{(k_\lambda a_n^2)^2 - 4I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}}{2I_A V} \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (5.5.9)$$

da cui è possibile ricavarne la frequenza smorzata del modo:

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(k_\lambda a_n^2)^2 - 4I_A V^2 k_\lambda a_n \cos \varepsilon}}{2I_A V} \quad [Hz] \quad (5.5.10)$$

la frequenza della oscillazione libera smorzata f_s cresce all'aumentare della velocità di avanzamento V e della rigidezza a deriva k_λ , diminuisce all'aumentare dell'inerzia I_A . All'aumentare della velocità V , tende ad un valore limite, che corrisponde a quello della frequenza naturale f_n sistema non smorzato. Per V che tende all'infinito si ha:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\lambda a_n \cos \varepsilon}{I_A}} \quad [Hz] \quad (5.5.11)$$

risultando indipendente dalla velocità.

La parte reale degli autovalori è pari a $\xi \omega_n$ dove :

- ξ è lo smorzamento adimensionale
- ω_n la pulsazione non smorzata pari a $\omega_n = \sqrt{\frac{k_\lambda a_n \cos \varepsilon}{I_A}}$

per cui è possibile ricavare

$$\xi = \frac{k_\lambda a_n^2}{2V \sqrt{k_\lambda a_n I_A \cos \varepsilon}} \quad (5.5.12)$$

è interessante notare che ξ diminuisce al crescere della velocità V . Si nota anche come l'avancorsa normale a_n influenzi, aumentandolo lo smorzamento. In tale caso non potendo cambiare di segno la velocità, il wobble sarà sempre stabile poichè la parte reale degli autovalori è sempre negativa, ma il modo risulta poco smorzato causando, a seguito di uno scostamento dalla configurazione di equilibrio vibrazioni che si protraggono nel tempo a seconda della velocità di avanzamento V .

5.4.2 Verifica numerica

Per una verifica dei risultati ottenuti facciamo riferimento allo schema semplificato del veicolo come riportato in figura 5.6.

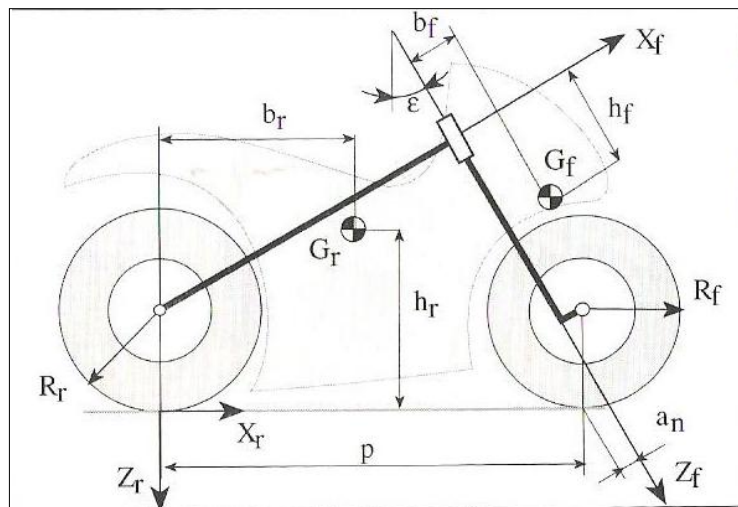


Fig.5.6 schema del veicolo

Weave

$$f_{weave} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\lambda r} l \cos \varepsilon}{I_r}}$$

dove

- $k_{\lambda r} = 10 \text{ rad}^{-1}$ rigidezza di deriva del pneumatico posteriore per ottenere una forza (di deriva) va moltiplicata per il carico normale agente nel punto di contatto ruota posteriore ottenendo come unita di misura [N/rad].
- l è la distanza della forza di deriva agente sul pneumatico posteriore rispetto all'asse di sterzo:
 $l = p \sin(90 - \varepsilon)$ dove p = passo della bicicletta

- I_r è il momento di inerzia del telaio posteriore (retrotreno) attorno all'asse di sterzo.
dove $I_r = I_G + ml_1^2$, I_G nel nostro caso supponendo come moto predominante quello di imbardata del retrotreno rispetto al rollio va preso I_{z_r} (momento inerzia baricentrico rispetto asse z di imbardata); l_1 è la distanza dal baricentro all'asse di sterzo attorno al quale ruota il retrotreno (momento di trasporto).
- ε inclinazione dell'asse di sterzo rispetto l'asse verticale.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{15802 \cdot 1.25 \cdot \cos(27)}{21.08 + 217.5 \cdot (0.6)^2}} \cong 2 \text{ [Hz]}$$

Wooble

$$f_{wooble} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\lambda f} a_n \cos \varepsilon}{I_A}}$$

dove

- $k_{\lambda f} = 11153 \text{ [N/rad]}$ rigidezza dimensionale alla deriva già moltiplicata per il carico normale ripartito, agente sul punto di contatto ruota anteriore.
- a_n avancorsa normale (braccio vettore delle forza laterale applicata al punto di contatto pneumatico-strada della ruota anteriore).
- $I_A = I_G + mb_f^2$ dove I_G è il momento principale di inerzia baricentrico del telaio anteriore attorno all'asse di sterzo, in questo caso per le convezioni assunte essendo l'asse z diretto longitudinale all'asse di sterzo, prendiamo I_{z_f} , m è la massa dell'avantreno, b_f distanza del baricentro dall'asse di sterzo.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{11153 \cdot 0.116 \cdot \cos(27)}{0.44 + 30.7 \cdot (0.024)^2}} \cong 7.987 \text{ [Hz]}$$

Sono stati verificati anche i risultati sperimentali ricavati sulla bicicletta da corsa con dati tratti da articolo” Wobble of a racing bicycle with a rider hands on and hands off the handlebar” Florian Klingera, Julia Nusimea, Johannes Edelmann & Manfred Plöchl,2014

Weave:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5286 \cdot 0.927 \cdot \cos(17)}{2.30726 + 78.38 \cdot (0.5)^2}} \cong 2.32[\text{Hz}]$$

Wooble:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5286 \cdot 0.0571 \cdot \cos(17)}{0.05417 + 2.2 \cdot (0.2)^2}} \cong 7.937[\text{Hz}]$$

Capitolo 6

La ruota girevole (caster)

6.1 Introduzione

Si presenta in questa sezione una modellistica della ruota girevole (caster), nella quale si perviene a risultati analoghi a quelli condotti da Cossalter nel capitolo precedente, ma il cui utilizzo sempre nell'ambito di uno schema geometrico semplificato, rispetto alla modellazione del sistema bici-ciclista che coinvolge l'avantreno, permette di contemplare anche una cedevolezza laterale del telaio. (questa trattazione è tratta da Guido di Massa). Le ruote girevoli (*caster*) vengono utilizzate per agevolare lo spostamento di alcuni oggetti come carrelli, sedie per ufficio, ecc; il collegamento tra il supporto della ruota e l'oggetto è realizzato mediante un perno, con asse verticale (asse di sterzo) che consente alla ruota di allinearsi automaticamente alla direzione dello spostamento in modo che durante il movimento il centro dell'area di contatto P tra ruota e suolo risulta arretrato rispetto al punto A di intersezione del suolo con il prolungamento dell'asse di sterzo (fig. 1.1 a). La distanza a tra i punti P ed A è detta *avancorsa* (o *trail*) ed è definita positiva se A precede il punto P nel verso del moto.

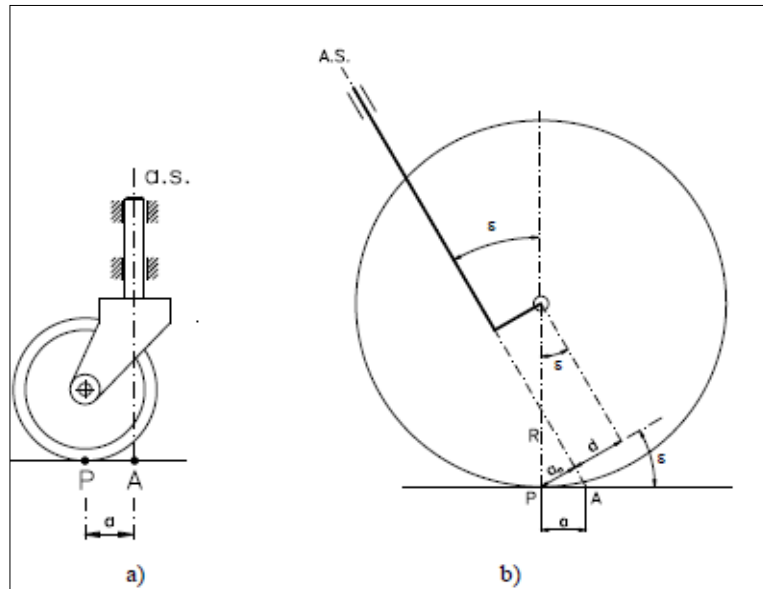


Fig.6.1 Ruota sterzante caster

Nel caso più generale l'asse di sterzo è inclinato e la ruota girevole è caratterizzata dalle seguenti grandezze (Fig.6.1b):

d = avanzamento del centro della ruota rispetto all'asse di sterzo (rake);

a_n = avancorsa normale = distanza tra il punto teorico P di contatto tra ruota e suolo e l'asse di sterzo;

R = raggio della ruota;

ε = inclinazione dell'asse di sterzo.

Le suddette grandezze sono legate tra loro dalla relazione:

$$a_n + d = R \sin \varepsilon \quad ; \quad a_n = a \cos \varepsilon$$

da cui sostituendo la seconda relazione nella prima:

$$a \cos \varepsilon + d = R \sin \varepsilon$$

esplicitando il valore dell'avancorsa si può ottenere:

$$a = R \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{d}{\cos \varepsilon}$$

L'avancorsa è quindi definita dalla combinazione delle tre grandezze geometriche R , d , ε . Il valore dell'avancorsa caratterizza la stabilità direzionale del sistema in quanto rappresenta il braccio della forza laterale che si desta tra il pneumatico ed il suolo per effetto di una rotazione dell'avantreno dovuta ad perturbazione trasversale. Allo schema di ruota girevole si rifanno anche le ruote sterzanti dei veicoli ad esempio in figura in basso è riportato lo schema di una bicicletta.

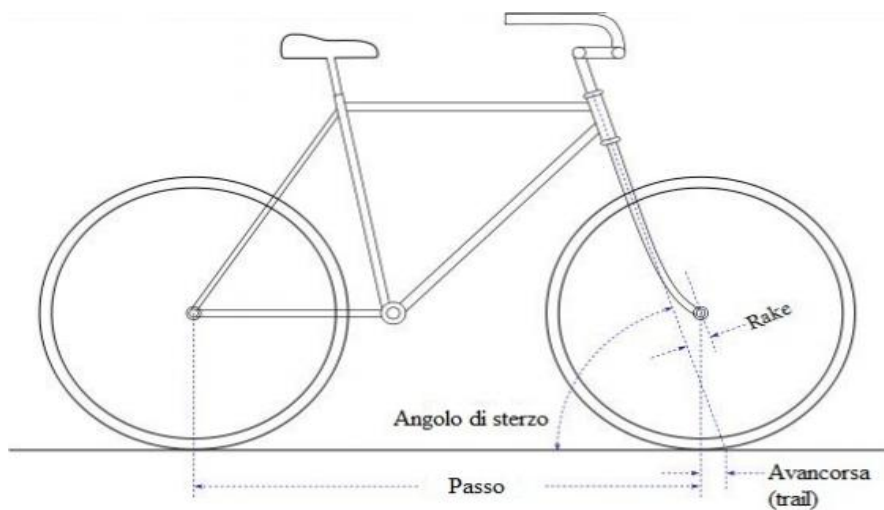


Fig.6.2 Schema bicicletta con ruota castor

6.2 Oscillazioni libere della ruota girevole (modello un grado di libertà)

Si consideri lo schema semplificato di figura 2.1 nel quale l'inclinazione dell'asse di sterzo è nulla, cioè $\varepsilon=0$. Si è indicato con r la lunghezza del braccio rigido che collega l'asse della ruota al telaio, che si muove con velocità V costante. L'insieme braccio-ruota ha la possibilità di ruotare intorno all'asse di traccia A.

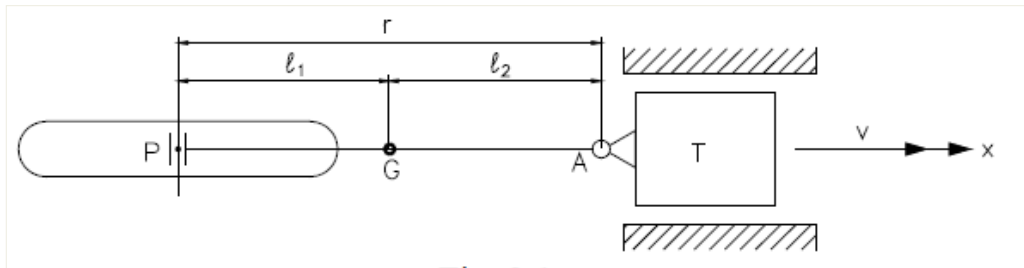


Fig.1 Schema ruota caster

In seguito ad una perturbazione il braccio PA si inclina rispetto alla direzione di avanzamento x di un angolo ϑ (fig. 2) e l'asse della ruota assume una velocità, risultante della velocità d'avanzamento V e della velocità tangenziale $r\dot{\vartheta}$

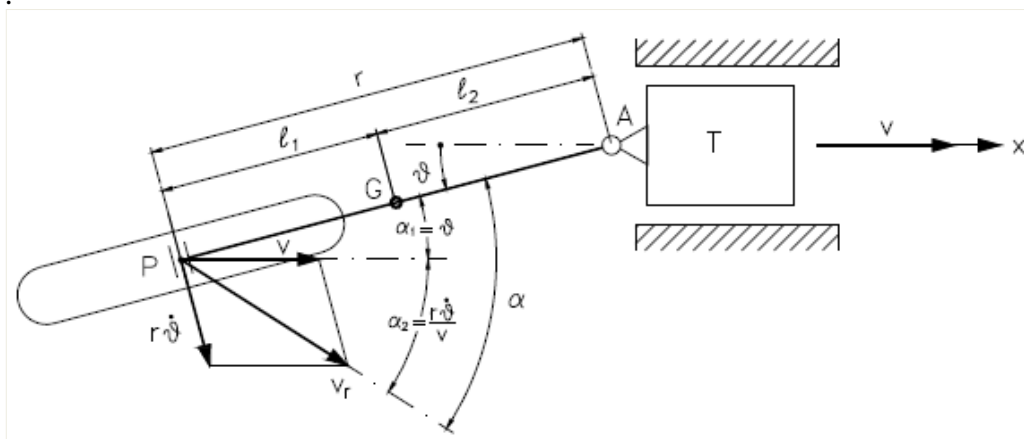


Fig.2

L'angolo α che il vettore velocità V_r forma con il piano mediano della ruota è l'angolo di deriva. Il suolo esercita sulla ruota una forza trasversale proporzionale all'angolo di deriva secondo il coefficiente di rigidità a deriva, k_α (fig.3) :

$$F = K_\alpha \cdot \alpha$$

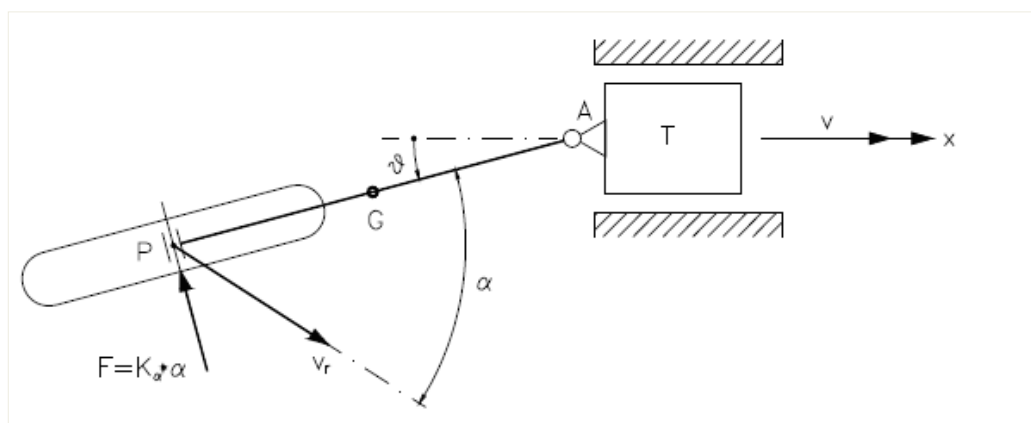


Fig.3

Nell'ipotesi di piccoli angoli di rotazione ϑ del braccio PA, risultando $r\dot{\vartheta} \cong V\alpha_2$ (fig.4) , l'angolo di deriva α è somma dei due contributi: $\alpha_1 = \vartheta$ e $\alpha_2 = \frac{r\dot{\vartheta}}{v}$

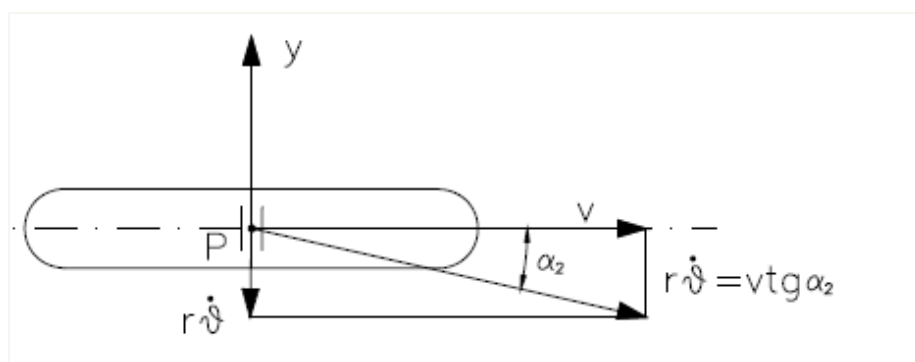


Fig.4

Si ha quindi:

$$F = K_{\alpha} \left(\frac{r\dot{\vartheta}}{V} + \vartheta \right)$$

Indicando con $I = I_G + ml_2^2$ il momento d'inerzia del braccio rispetto alla cerniera in A, l'equazione di moto del braccio per l'equilibrio alla rotazione, attorno a tale cerniera risulta:

$$I\ddot{\vartheta} + Fr = 0$$

dove r rappresenta il braccio della forza laterale di deriva nel punto di contatto ruota-strada

Sostituendo l'espressione della forza F , si ha:

$$I\ddot{\vartheta} + K_{\alpha} \left(\frac{r\dot{\vartheta}}{V} + \vartheta \right) r = 0$$

$$I\ddot{\vartheta} + \left(\frac{K_{\alpha}r^2}{V} \right) \dot{\vartheta} + K_{\alpha}r\vartheta = 0$$

Posto :

$$r^* = \frac{K_{\alpha}r^2}{V};$$

$$k^* = k_{\alpha}r;$$

l'equazione del moto può riscrivere come segue:

$$I\ddot{\vartheta} + r^*\dot{\vartheta} + k^*\vartheta = 0$$

Ci si è ricondotti ad una equazione differenziale del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. E' possibile confrontare l'equazione ottenuta nel dominio del tempo con l'equazione algebrica di un sistema del secondo ordine, definito nel dominio delle frequenze del tipo:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Dividendo i termini dell'*equazione di moto* per l'inerzia I ed operando la sostituzione $\frac{d}{dt} = s$; $\frac{d^2}{dt^2} = s^2$ ottenere:

$$s^2 + \frac{r^*}{I} s + \frac{k^*}{I} = 0$$

determinando pulsazione naturale :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{I}} ;$$

Smorzamento adimensionale :

$$\xi = \frac{r^*}{2\omega_n I}$$

quindi tenendo conto dell'espressione della rigidità equivalente del sistema k^* e dello smorzamento equivalente r^* , legare lo smorzamento adimensionale alla velocità V di avanzamento della ruota nel seguente modo:

$$\xi = \frac{k_\alpha r^2}{2V\sqrt{k_\alpha r I}}$$

identificando un legame inversamente proporzionale con la velocità a parità di altri fattori del sistema. Anche la pulsazione smorzata ω_s del sistema risulterà funzione della velocità con espressione del tipo :

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\frac{k^*}{I}} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

quindi sostituendo l'espressione di ξ e di k^* :

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_\alpha r}{I}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{k_\alpha r}{2V\sqrt{k_\alpha r I}} \right)^2}$$

La legge oraria $\vartheta(t)$ soluzione generale dell'equazione differenziale risulterà un moto oscillatorio smorzato:

$$\vartheta(t) = e^{-\omega_n \xi t} \cdot \left(\sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t + \varphi \right)$$

per $0 < \xi < 1$

oppure un moto aperiodico smorzato come somma di due esponenziali negativi :

$$\vartheta(t) = e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

per $\xi > 1$

il passaggio tra i due comportamenti del sistema si ha per $\xi = 1$ e quindi la velocità di avanzamento a partire dalla quale il moto libero del sistema risulta oscillatorio, vale

$$V^* = \frac{k_\alpha r^2}{2\sqrt{k_\alpha r I}}$$

Si mette in relazione la velocità di avanzamento V ai parametri di frequenza naturale smorzata

$f_s = \omega_s/2\pi$ e smorzamento critico ξ del sistema in esame. Il modello descritto pone in evidenza che il sistema è sempre stabile nel senso che perturbando le condizioni di regime il sistema inizia ad oscillare intorno all'asse dello sterzo ed in un tempo più o meno lungo (a seconda della velocità di avanzamento V) l'oscillazione si estingue e quindi l'angolo raggiunge nuovamente valore nullo. Si noti che per valori negativi della velocità di avanzamento in sistema è sempre instabile (l'angolo si allontana definitivamente dal valore iniziale di 0° tendendo a 180°). In figura sotto è riportato l'andamento nel tempo della variabile ϑ ad una perturbazione laterale per differenti velocità di avanzamento.

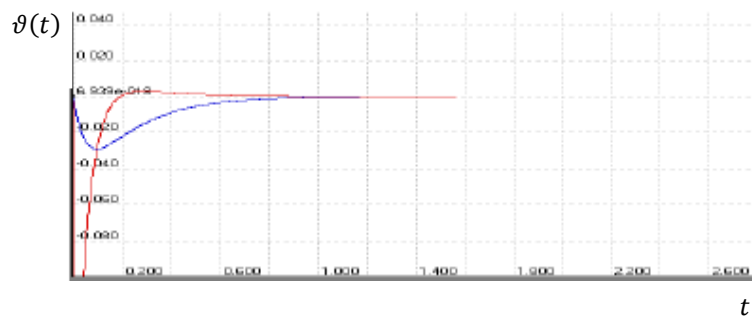


Fig.5a $V < V^*$; $\xi > 1$

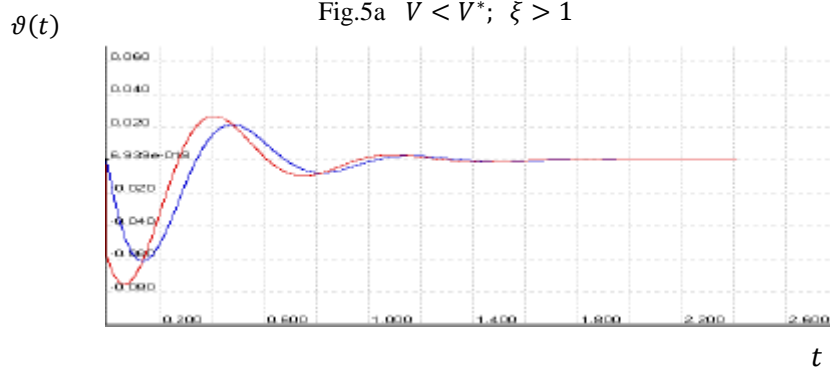


Fig.5b $V > V^*$; $\xi < 1$

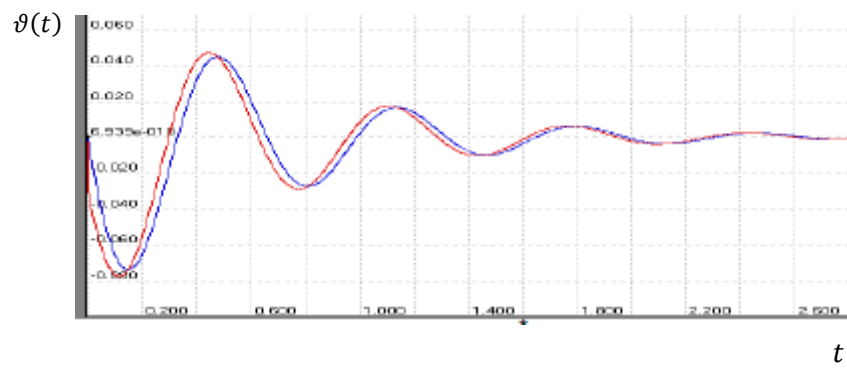


Fig.5c $V \gg V^*$; $\xi \ll 1$

6.3 Lo Shimmy della ruota Caster (modello 2 gradi di libertà)

6.3.1 Analisi della stabilità

Lo *shimmy* è una oscillazione autoeccitata dell'insieme ruota-braccio intorno all'asse di sterzo che si manifesta se il sistema ha la possibilità di deformarsi trasversalmente. Il fenomeno è spesso associato ai carrelli di atterraggio dei velivoli; in tal caso l'oscillazione, che coinvolge la deformabilità trasversale e di imbardata del carrello, avviene con frequenza compresa nell'intervallo 10-30Hz. Tali oscillazioni usurano rapidamente i pneumatici e, nei casi più severi, possono danneggiare o far collassare il carrello. Nel seguito viene presentato un modello di prima approssimazione in grado di evidenziare gli aspetti qualitativi del fenomeno e le condizioni geometriche/inerziali per le quali si desta tale fenomeno. Rispetto al caso precedente il braccio PA ha la possibilità di ruotare intorno alla cerniera A e di traslare in direzione y rispetto al telaio T (Fig.3.1); la rigidità trasversale del sistema è schematizzata con la molla di rigidità k . Nello schema di figura 2.1 il braccio è vincolato al telaio che trasla con velocità di avanzamento V costante, mediante una cerniera ed una guida che consente una traslazione in direzione y . Il moto del braccio lungo la direzione y è contrastato dalla reazione della molla di rigidità k . In seguito ad una perturbazione laterale, rivolta ad esempio nel senso delle y positive si ha una traslazione y positiva ed una rotazione oraria del braccio; si assumono, nel seguito, positive le rotazioni del braccio in senso orario.

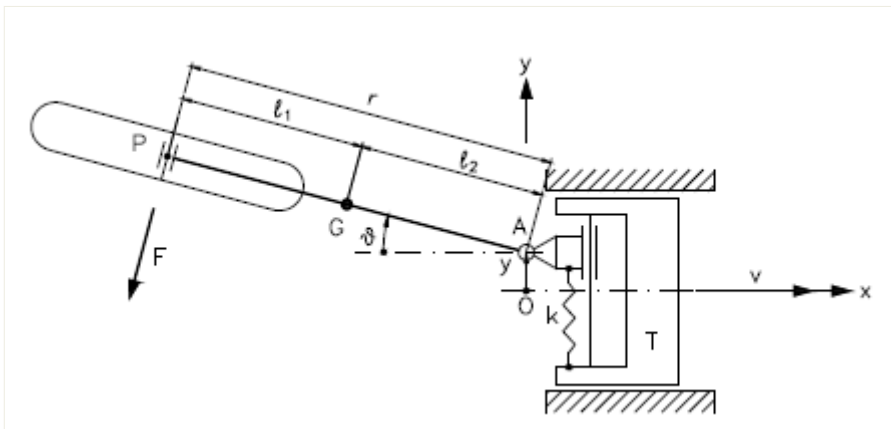


Fig.4

Le condizioni di equilibrio intorno al baricentro G e lungo l'asse y forniscono le seguenti due equazioni del secondo ordine nelle tre incognite ϑ , y , F :

$$\begin{cases} -I_G \ddot{\vartheta} + kyl_2 \cos \vartheta - Fl_1 = 0 \\ -m\ddot{y} - ml_2 \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - ky - F \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

I_G ed m sono rispettivamente il momento d'inerzia rispetto al baricentro G e la massa dell'insieme ruota-braccio. Per prescindere dai parametri che caratterizzano l'interazione ruota-suolo si adotta la *condizione di assenza di slittamento laterale* che impone che la ruota abbia componente della velocità nulla lungo la direzione parallela all'asse della ruota. Con riferimento alla figura 3.2 è possibile scrivere la seguente relazione che lega le velocità $\dot{\vartheta}$ e \dot{y} (vincolo anolonomo):

$$V \sin \vartheta + r\dot{\vartheta} + \dot{y} \cos \vartheta = 0$$

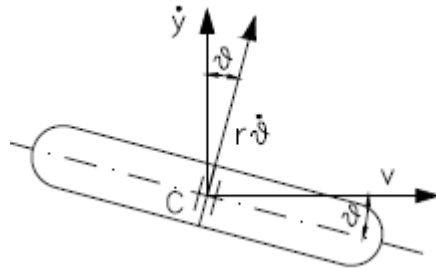


Fig.5

Si ha pertanto un sistema di tre equazioni nelle incognite $\vartheta(t)$, $y(t)$ e $F(t)$ che, per piccoli valori di ϑ , può risciversi nella seguente forma:

$$\begin{cases} -I_G \ddot{\vartheta} + kyl_2 - Fl_1 = 0 \\ m\ddot{y} + ml_2 \ddot{\vartheta} + ky + F = 0 \\ \dot{y} + r\dot{\vartheta} + V\vartheta = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due relazioni, esplicitando il valore di F, si ha:

$$\begin{cases} F = \frac{kyl_2 - I_G \ddot{\vartheta}}{l_1} \\ F = -[m(\dot{y} + l_2 \dot{\vartheta}) + ky] \end{cases}$$

ottenendo una equazione nei due gdl ϑ e y :

$$m(\dot{y} + l_2 \dot{\vartheta}) + ky + \frac{kl_2}{l_1} y - \frac{I_G}{l_1} \ddot{\vartheta} = 0$$

e quindi :

$$\begin{cases} m(\dot{y} + l_2 \dot{\vartheta}) + ky + \frac{kl_2}{l_1} y - \frac{I_G}{l_1} \ddot{\vartheta} = 0 \\ \dot{y} + r\dot{\vartheta} + V\vartheta = 0 \end{cases}$$

Trasformando con Laplace con condizioni iniziali nulle si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} \left(ms^2 + \frac{kr}{l_1} \right) Y + \left(ml_2 s^2 - \frac{I_G}{l_1} s^2 \right) \Theta = 0 \\ sY + (V + rs)\Theta = 0 \end{cases}$$

Isolando la variabile Y dalla seconda delle due equazioni e sostituendola nella prima si ottiene:

$$(I_G + ml_1^2)s^3 + ml_1Vs^2 + kr^2s + krV = 0 ;$$

$$s^3 + \frac{ml_1V}{I_G + ml_1^2} s^2 + \frac{kr^2}{I_G + ml_1^2} s + \frac{krV}{I_G + ml_1^2} = 0$$

quindi ponendo:

$$a_2 = \frac{ml_1V}{I_G + ml_1^2} ; \quad a_1 = \frac{kr^2}{I_G + ml_1^2} ; \quad a_0 = \frac{krV}{I_G + ml_1^2}$$

Si ha:

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Per valutare la stabilità di questo sistema si adotta il criterio di Routh-Hurwitz che permette di stabilire se è stabile o meno, senza però fornire indicazioni sul grado di instabilità. Secondo tale criterio il sistema è stabile se tutti i coefficienti dell'equazione sopra hanno lo stesso segno (necessaria) e se è verificata la seguente condizione (sufficiente) per l'asintotica stabilità:

$$a_1a_2 > a_0$$

Ponendo $I_G = m\rho_G^2$ ed operando le opportune sostituzioni si perviene a:

$$l_1l_2 > \rho_G^2$$

In conclusione, perché il sistema sia *asintoticamente stabile* è quindi necessario che:

- la velocità V sia positiva il che significa che il punto A deve precedere il punto P; la ruota deve essere cioè tirata - e non spinta - dal braccio;
- che sia rispettata la seguente condizione geometrica:

$$\rho_G^2 < l_1l_2$$

La posizione del baricentro risulta quindi particolarmente importante. Si noti che, per un assegnata lunghezza $r = l_1 + l_2$ del braccio il prodotto $l_1l_2 = l_1(r - l_1)$ è massimo per $l_1 = l_2 = r/2$ ed è nullo per $l_1 = 0$ e per $l_1 = r$

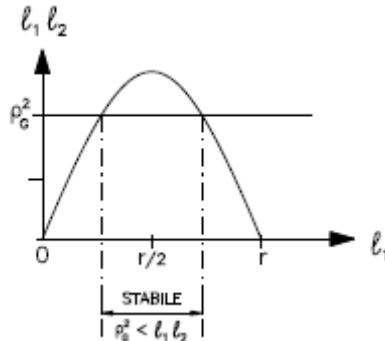


Fig.5

In alcuni sistemi, come ad esempio nel caso dei carrelli anteriori degli aeroplani, tale relazione generalmente non è rispettata in quanto il baricentro è molto prossimo all'asse della ruota che è l'elemento di massa maggiore, tra il corpo braccio-ruota ; si ha cioè: $l_1 \ll l_2$ e quindi il prodotto $l_1 l_2$ risulta piccolo e comunque minore di ρ_G^2 . Per evitare il fenomeno dello shimmy in corrispondenza della cerniera viene disposto uno smorzatore rotazionale; per tener conto di tale componente nella prima equazione del moto bisogna aggiungere la coppia di smorzamento fornita dallo *smorzatore antishimmy*:

$$-I_G \ddot{\vartheta} + k y l_2 - F l_1 - c \dot{\vartheta} = 0$$

dove il termine $c \dot{\vartheta}$ è il contributo dissipativo introdotto. Pervenendo alla seguente condizione sulla stabilità

$$\begin{cases} V > 0 \\ \rho_G^2 < l_1 l_2 + \frac{rc}{mV} \end{cases}$$

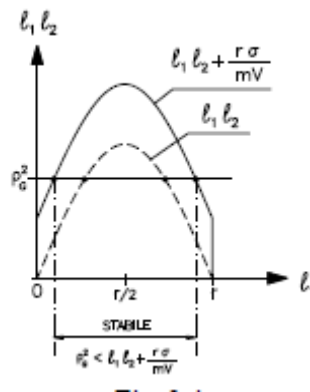
dalla quale si vede che, a parità di tutte le altre condizioni, la stabilità del sistema dipende anche dalla velocità di avanzamento V . Tale espressione può essere utilizzata per valutare l'entità dello smorzamento da assegnare al sistema per evitare le oscillazioni di shimmy, nota che sia la massima velocità di avanzamento V_{max} :

$$c > \frac{mV_{max}}{r} (\rho_G^2 - l_1 l_2)$$

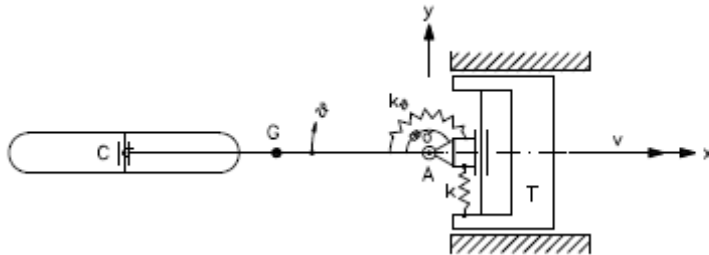
oppure consente di ricavare il valore massimo della velocità di avanzamento oltre il quale il sistema è instabile:

$$V < \frac{rc}{m(\rho_G^2 - l_1 l_2)}$$

In figura in basso è qualitativamente rappresentato il benefico effetto introdotto dalla presenza dello smorzatore sulla stabilità del sistema.



L'analisi sulla stabilità prosegue con l'inserimento di un ulteriore contributo di rigidità k_g atto a contrastare la rotazione del braccio come indicato in figura sottostante.



Inserendo un termine aggiuntivo per la condizione di stabilità:

$$\left\{ \begin{array}{l} V > 0 \\ \rho_G^2 < l_1 l_2 + \frac{l_1 k_\theta}{r k} + \left(r + \frac{k_\theta}{rk} \right) \frac{c}{mV} \end{array} \right.$$

Perché il funzionamento del sistema sia asintoticamente stabile è necessario che:

- il rapporto l_1/r sia il più grande possibile; il baricentro dovrebbe trovarsi più vicino alla cerniera A, condizione in genere non verificata se la ruota è l'elemento di massa maggiore del sistema;
- il rapporto tra la rigidezza rotazionale e quella trasversale k_θ/k sia elevato;
- il sistema abbia massa m contenuta ;
- la velocità V (positiva) non assuma valori elevati;
- lo smorzamento c assuma valore sufficientemente grande.

6.4 Conclusioni

Adottando il modello bidimensionale illustrato si giunge alla conclusione che, al crescere della velocità, il sistema può divenire instabile; in tale modello, come si è detto, non si è tenuto conto degli effetti dinamici dovuti dalla rotazione della ruota che, nel caso specifico rappresenta solo un elemento in grado di scambiare forze trasversali con il suolo.

Capitolo 7

Indagine sperimentale del modo shimmy

7.1 Campagna acquisizione dati : test 4 agosto 2014

Per effettuare l'analisi cinematica del fenomeno della shimmy ad alte velocità di una bicicletta, è stata effettuata una campagna di raccolta di dati sperimentali su una bicicletta da corsa appositamente strumentata per lo studio della shimmy. Lo scopo dei test è di valutare il movimento del telaio e forcella della bicicletta durante il fenomeno vibratorio. Verranno analizzati due stadi di vibrazione consecutivi innescati ad una velocità di circa 45, 50km/h.



Fig.7.1 Bicicletta utilizzata per la campagna di acquisizione dati.

7.2 Strumentazione

La bicicletta è stata strumentata con le seguenti apparecchiature fornite da E-Shock srl (Milano):

- due unità di misura inerziali (IMU) in grado di acquisire accelerazioni lineari e velocità angolari alla frequenza di 100 [Hz]. I dati vengono registrati su una scheda di memoria formato microSD nell'unità di acquisizione collocata sul tubo orizzontale.
- la prima unità di misura inerziale (IMU1) fissata al telaio in prossimità del cannotto di sterzo.
- la seconda unità di misura inerziale (IMU2) è fissata al telaio e posta sul piantone a circa metà della sua altezza.
- attraverso il software in dotazione, caricando il file salvato sulla scheda di memoria, si possono leggere le misure di accelerazione lineari: A_x , A_y , A_z nella direzione dei tre assi principali, in direzione longitudinale, laterale e verticale x , y , z e le velocità angolari W_x , W_y , W_z intorno agli stessi assi di riferimento.
- i sistemi di riferimento delle IMU seguono una terna sinistrorsa (regola della mano sinistra) con rotazioni positive in senso orario ad assi mutuamente ortogonali orientati come in figura (7.1)
- le unità di misura delle rilevazioni sono rispettivamente [m/s^2] con range +/-5g e risoluzione LSB di 0.01[m/s^2] e [deg/s] con range +/-100°/s e risoluzione LSB di 0.1[°/s].
- un sensore GPS per rilevare istantaneamente e direttamente la velocità del veicolo, posizionato in prossimità dell'unità frenante posteriore.

- Intrinseco nella strumentazione è implementato un filtro passa basso il cui diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza è rappresentato dalla figura (4.2)

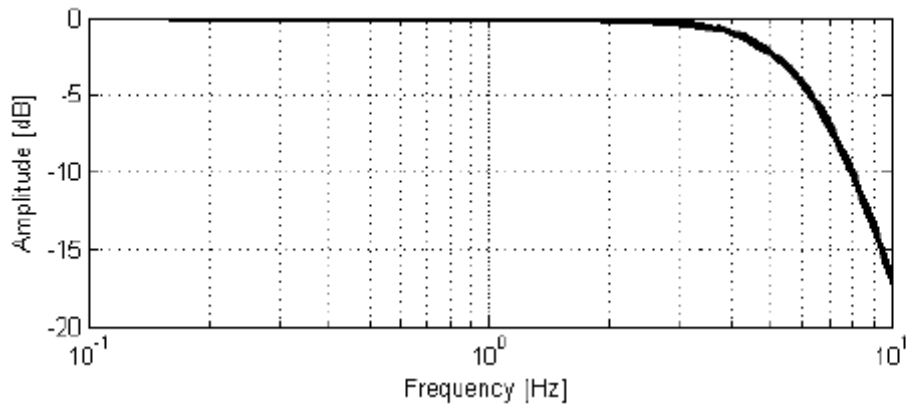


Fig.7.2 Diagramma di Bode del modulo del filtro passa-basso implementato nella strumentazione.

7.3 Analisi dei dati nel dominio del tempo

7.3.1 Andamento delle accelerazioni laterali e della velocità del veicolo

Le analisi nel dominio del tempo sono state condotte a partire dal moto di oscillazione laterale rappresentato dalle accelerazioni A_{y1} e A_{z2} in quanto sono i segnali che più marcatamente, per la loro ampiezza evidenziano il fenomeno dello shimmy. Di notevole ampiezza risultano anche le velocità angolari di imbardata W_{z1} e W_{x2} e di rollio in particolare la W_{x1} , quella registrata dalla IMU1. In figura 4.1 si riportano l'evoluzione di tutta la storia temporale delle accelerazioni laterali del veicolo rilevate dalle IMU e la relativa velocità alla quale si manifestano, nello studio della shimmy infatti è importante mettere in relazione ampiezza e frequenza delle oscillazioni con la velocità della bicicletta. Come si intuisce dalla figura in coincidenza con lo stadio di maggiore amplificazione di accelerazione il ricostruttore ha perso il segnale GPS. Sul

grafico si riporta una stima della velocità ricostruita sulla base di alcuni punti, rilevati tramite un dispositivo digitale contachilometri montato a bordo del veicolo e visionato a posteriore attraverso l'ausilio del filmato della prova sperimentale.

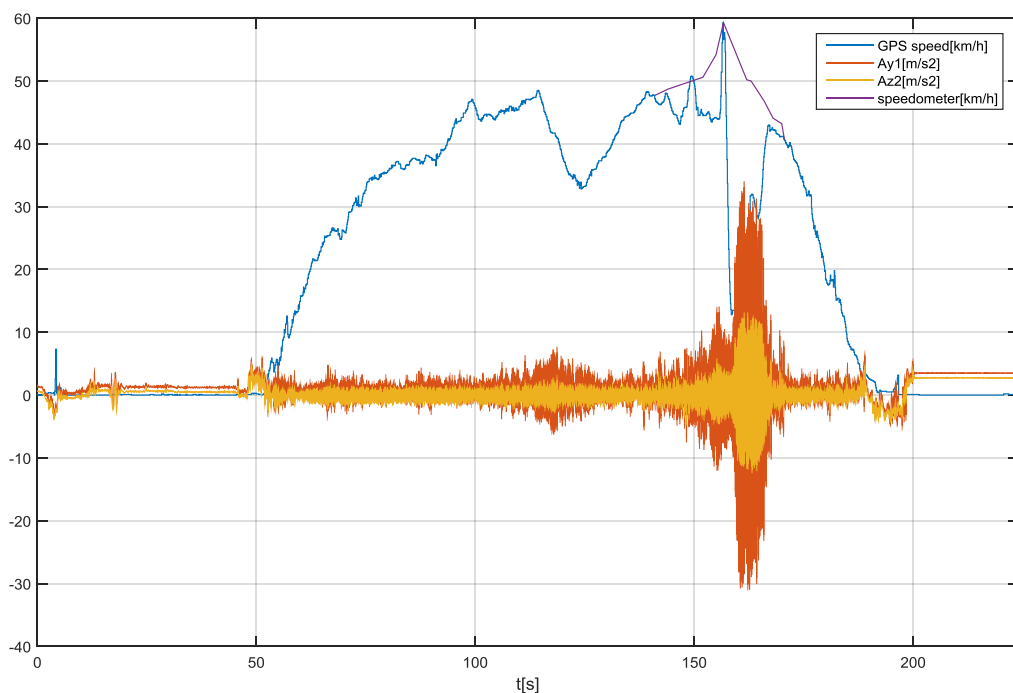


Fig.7.1 Andamento accelerazioni laterali A_{y1} , A_{z2} al variare della velocità

In figura (7.2) viene riportato uno zoom delle accelerazioni laterali in un tratto dai 70[s] ai 74[s] in cui emerge già un tratto di oscillazione sinusoidale regolare ad una frequenza di circa 7 [Hz]. Tale frequenza come si illustrerà in seguito rimarrà sostanzialmente costante al variare della velocità. È interessante notare in questo grafico come le oscillazioni si inneschino, ma si poi si smorzino come se il sistema (linearizzato) alla velocità di circa 30 km/h esibisse già una coppia di poli complessi e coniugati, ma ancora abbastanza lontani dall'asse

immaginario da non permettere l'instaurarsi di una oscillazione permanente. Anche la frequenza un po' più bassa è coerente con la presenza di un termine di smorzamento ξ non troppo piccolo. Ad esempio uno smorzamento $\xi=0.4$ è coerente con un fattore di riduzione della frequenza di circa il 9% ($\sqrt{1 - (\xi)^2} \cong 0.91$).

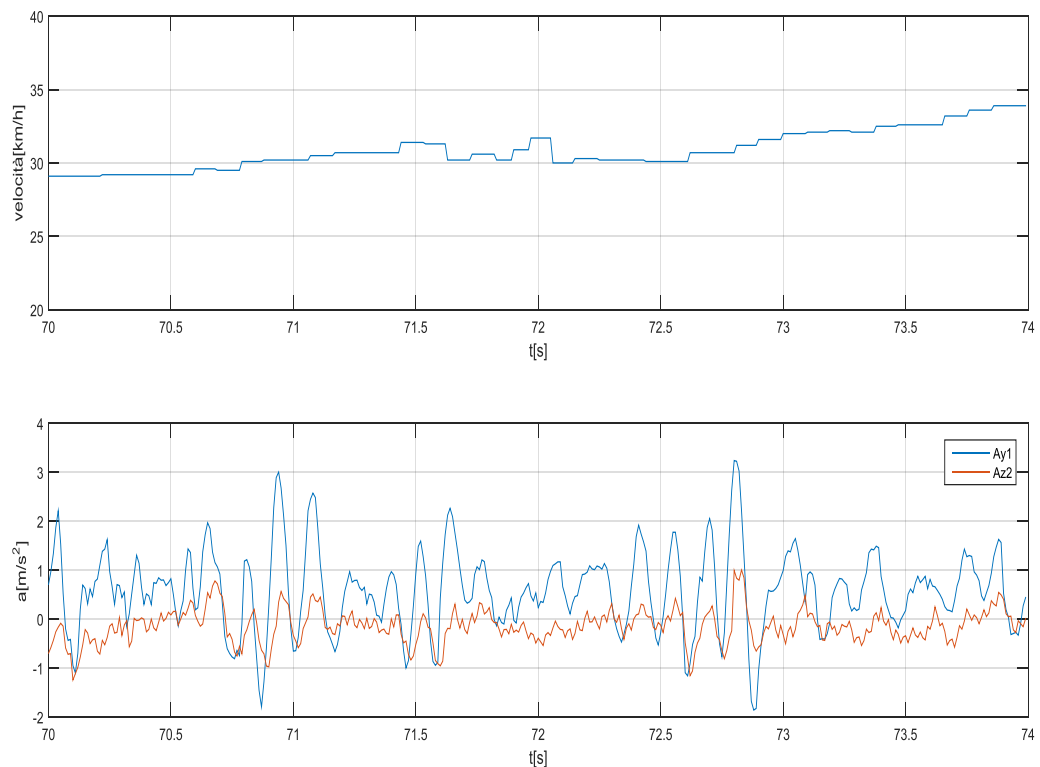


Fig 7.2 Accelerazione laterale nel tratto da70 [s] a 74 [s]

Nel grafico di figura (7.3) è riportato nella parte alta l'andamento della velocità del veicolo in funzione del tempo, rilevata sia dal dispositivo GPS che ricostruita tramite alcuni punti rilevati dal tachimetro posto sul veicolo, mentre nella parte inferiore si possono osservare gli andamenti delle accelerazioni laterali rilevate dalle due IMU, anch'esse in funzione del tempo nel tratto di

analisi da 154[s] a 159[s]. Confrontando la velocità del veicolo con le accelerazioni laterali è possibile rilevare l'indipendenza che vi è tra la velocità della bicicletta e la frequenza del wobble. A fronte di un progressivo incremento di velocità tale frequenza continua ad essere costante e pari a circa 7.75[Hz] per tutta la durata in cui il fenomeno si instaura. Si nota come lo smorzamento associato al modo sia fortemente diminuito a causa della maggiore velocità raggiunta dal mezzo, dando possibilità alla vibrazione di esibirsi in maniera sinusoidale regolare ad una frequenza di poco maggiore del tratto precedentemente analizzato. I valori delle accelerazioni effettivamente percepite dal ciclista sono, considerando l'attenuazione del filtro, di circa 3g.

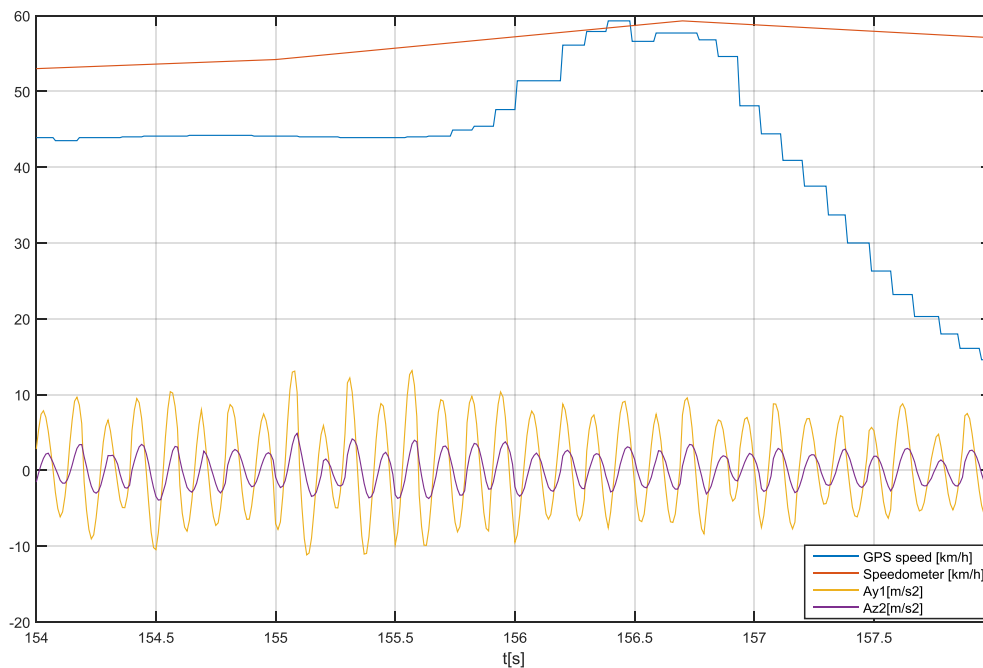


Fig.7.3 Confronto tra velocità del veicolo e accelerazioni laterali tra 154 [s] e 159 [s]

7.3.2 Confronto fra accelerazioni laterali del veicolo

In Figura 7.4 è possibile osservare un confronto fra gli andamenti temporali delle accelerazioni laterali $Ay1$ e $Az2$. Si può notare come esse siano sostanzialmente in fase tra loro (una differenza di un solo campione di ritardo per la $Az2$, che ad una frequenza come quella del fenomeno osservato corrisponderebbe a circa 25° di sfasamento, che come tale potrebbe essere dovuto al sistema di acquisizioni delle due IMU), ed abbiano un andamento sinusoidale regolare e il valore assoluto della $Ay1$ sia notevolmente superiore di quello della $Az2$.

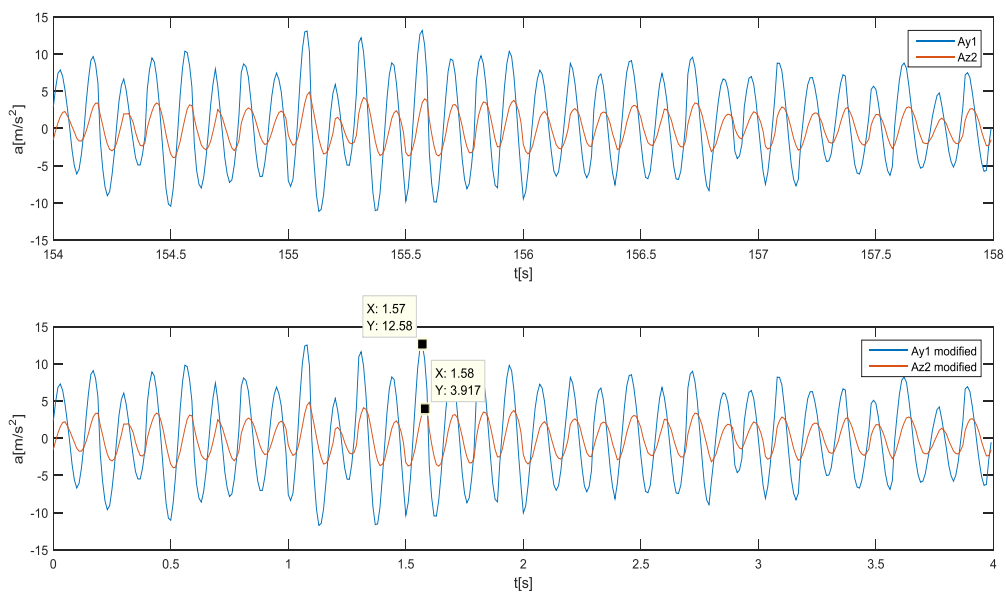


Fig.7.4 Confronto fra accelerazioni laterali e accelerazioni tangenziali su IMU1 e IMU2

La media di entrambe le accelerazioni risulta non nulla. Probabilmente a seguito di un non precisissimo fissaggio degli accelerometri. In seguito verranno utilizzate le $Ay1$ modified e $Az2$ modified, ricavate dalle rispettive accelerazioni laterali a cui è stato sottratto il valore medio per compensare l'errore di

montaggio. L'andamento di tali accelerazioni è riportato nel grafico fig.7.5 dove a seguito della trasformazione i dati oscillano attorno a valore medio nullo.

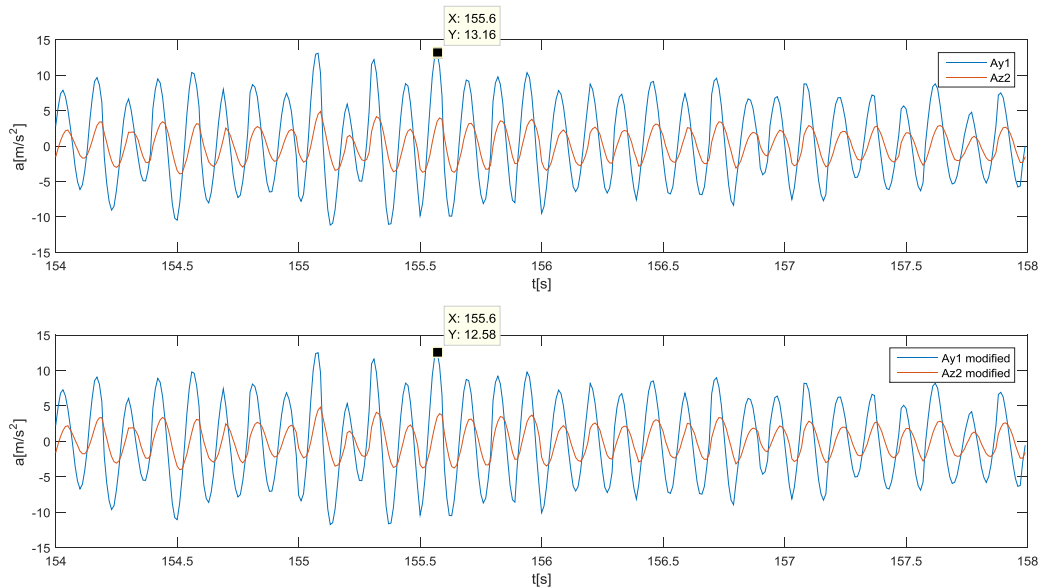


Fig.7.5 Confronto tra le accelerazioni laterali rilevate dalle IMU a valore medio nullo

7.3.3 Confronto fra accelerazioni lineari laterali e accelerazioni tangenziali

In Figura 7.6 sono riportati in alto i confronti operati fra le accelerazioni laterali misurate in $[m/s^2]$ direttamente dalle IMU montate sulla bicicletta e le accelerazioni tangenziali $acc.Wz1$ e $acc.Wx2$, misurate in $[rad/s^2]$, ottenute derivando numericamente nel dominio del tempo le velocità angolari $Wz1$ e $Wx2$, che sono rispettivamente la velocità angolare della IMU1 riferita all'asse Z e la velocità angolare della IMU2 riferita all'asse X, entrambe registrate direttamente dalle due IMU in $[deg/s]$, operando successivamente la conversione in radianti e considerando un raggio unitario.

$$acc\ Wz1 = \frac{d(Wz1)}{dt} \left[\frac{rad}{s^2} \right];$$

$$acc\ Wx2 = \frac{d(Wx2)}{dt} \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

Queste accelerazioni tangenziali, come le velocità angolari dalle quali sono state ricavate, risultano in modulo uguali fra loro per la IMU1 e la IMU2, ad indicare, nel dominio del tempo, un moto rigido intorno ad un asse fisso nello spazio.

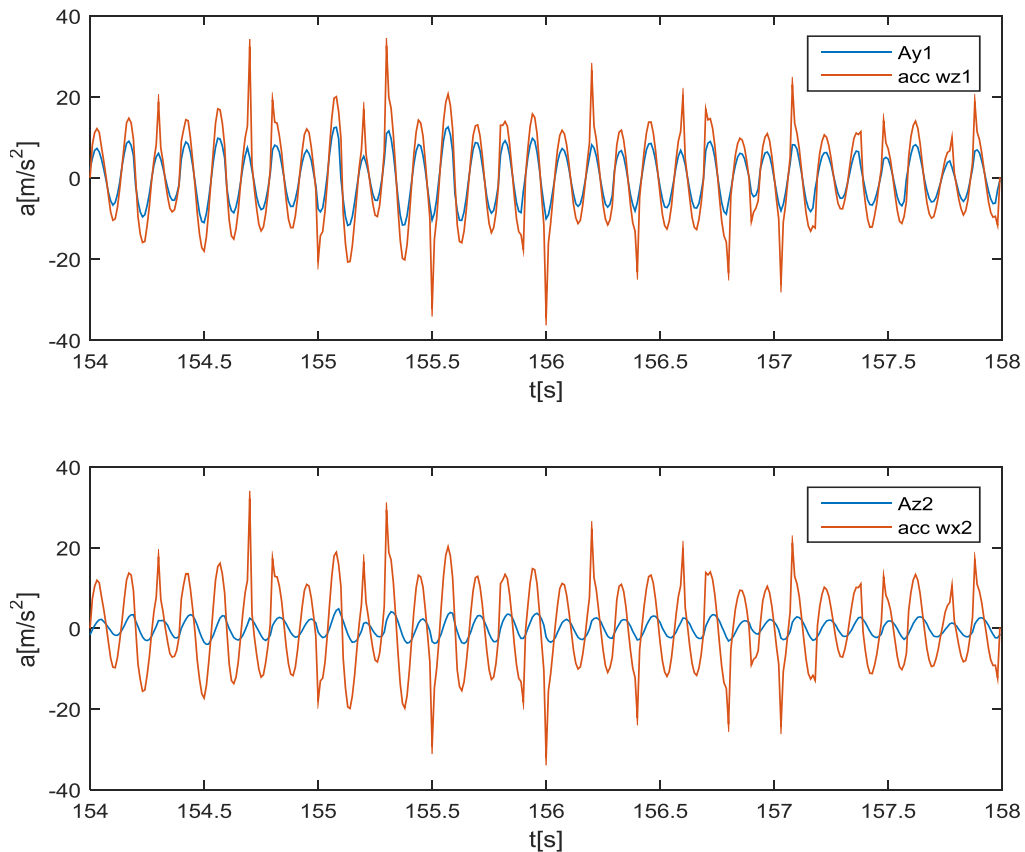


Fig.7.6 Confronto tra accelerazioni laterali e accelerazioni tangenziali su IMU1 e IMU2

7.3.4 Confronto tra le velocità angolari di imbardata

In figura 4.8 sotto si riportano l'andamento delle velocità angolari $Wz1$ e $Wx2$ registrate dalle due IMU, esse risultano sostanzialmente sovrapposte ed in fase tra loro, a rimarcare un moto rigido del retrotreno alla frequenza di oscillazione di manifestazione del fenomeno.

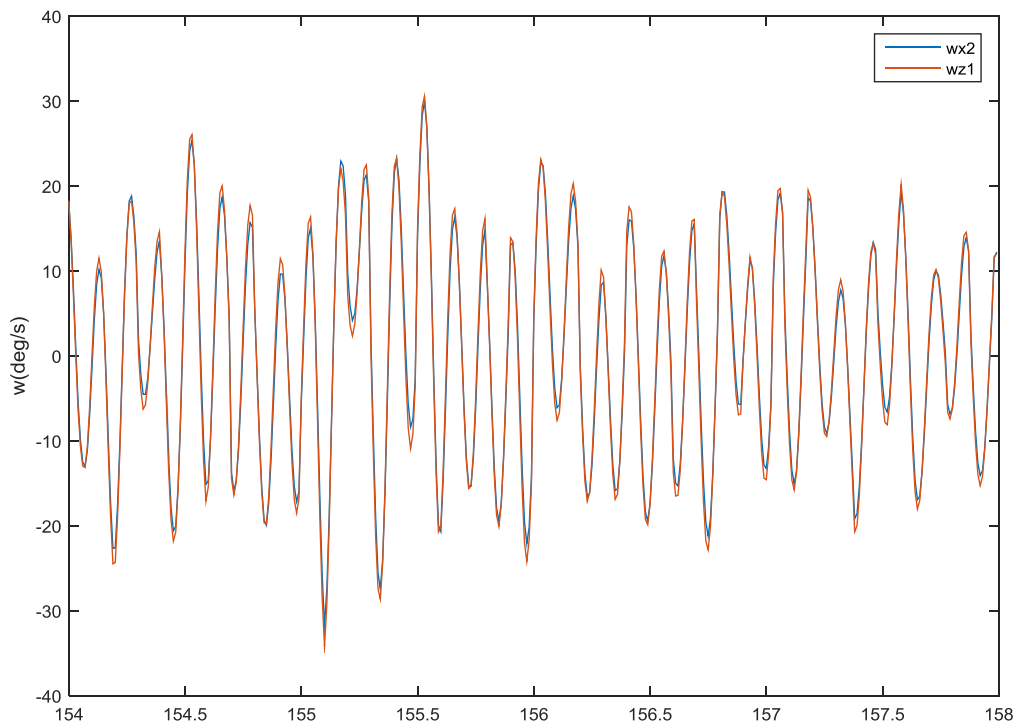


Fig.7.7 Velocità angolari delle due IMU attorno agli assi di imbardata Z1 e X2 della bicicletta

7.4 Analisi del modo di vibrare shimmy

7.4.1 Confronto moto di rollio e imbardata

In Figura 6.14 si illustra il confronto tra moto di rollio e moto di imbardata sulla IMU1, in prossimità del cannotto di sterzo, effettuato nel dominio del tempo. Tale grafico è ottenuto sovrapponendo la velocità angolare $Wx1$ che indica il rollio, e la velocità angolare $Wz1$, che si riferisce all'imbardata. E' possibile notare come esse siano in controfase. Nel momento in cui la velocità di imbardata $Wz1$ è massima, ossia quando il telaio si trova allineato con la direzione di marcia, la velocità di rollio (o torsione del tubo orizzontale) si trova ad un minimo relativo. Considerando i sistemi di riferimento delle IMU, terna della mano sinistra e quindi velocità positive in senso orario intorno agli assi nelle direzioni descritte, osservando il telaio della bicicletta dal lato posteriore, ad una velocità di rotazione antioraria attorno all'asse longitudinale x rispetto al piano della bicicletta (torsione del telaio), corrisponde una rotazione oraria di imbardata di tutto il telaio corrispondente al moto rigido dello stesso. Il telaio devia dalla direzione di marcia verso sinistra ed in prossimità del cannotto di sterzo la torsione (rollio) è antioraria. Questo fatto è dovuto al vincolo che si crea al contatto ruota- strada ed obbliga il telaio ad una torsione osservata.

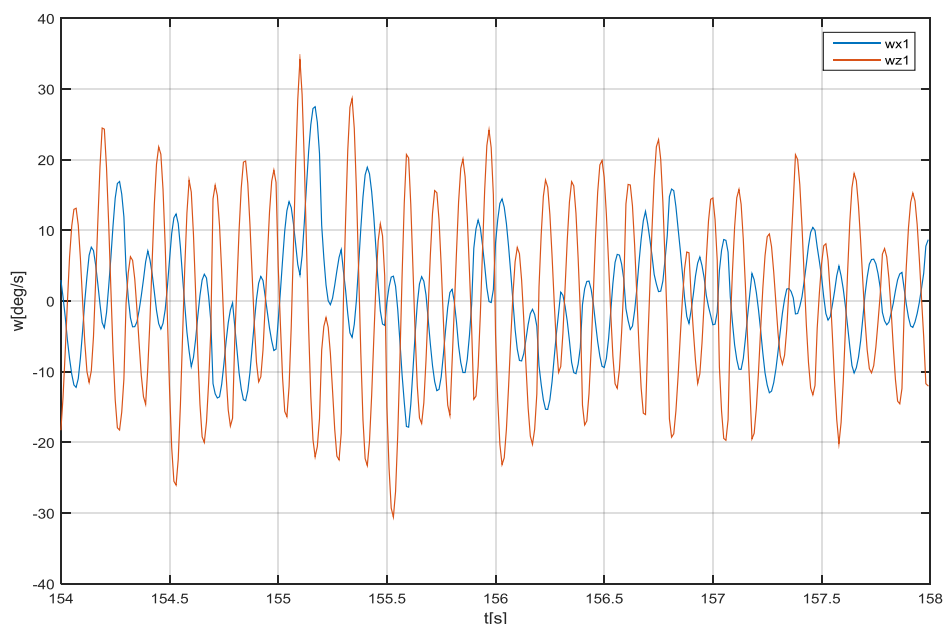


Fig.7.8 Confronto temporale tra le velocità angolari $Wx1$ e $Wz1$

In figura 7.9 è riportato uno zoom delle due velocità angolari in cui si nota più marcatamente come siano sostanzialmente in controfase tenendo conto di un fenomeno di battimento sulla velocità angolare di rollio espressa dalla $Wx1$, dovuto ad un battimento legato ad una componente a più bassa frequenza all'interno del segnale imputabile ad un modo vibrare del veicolo quale il weave.

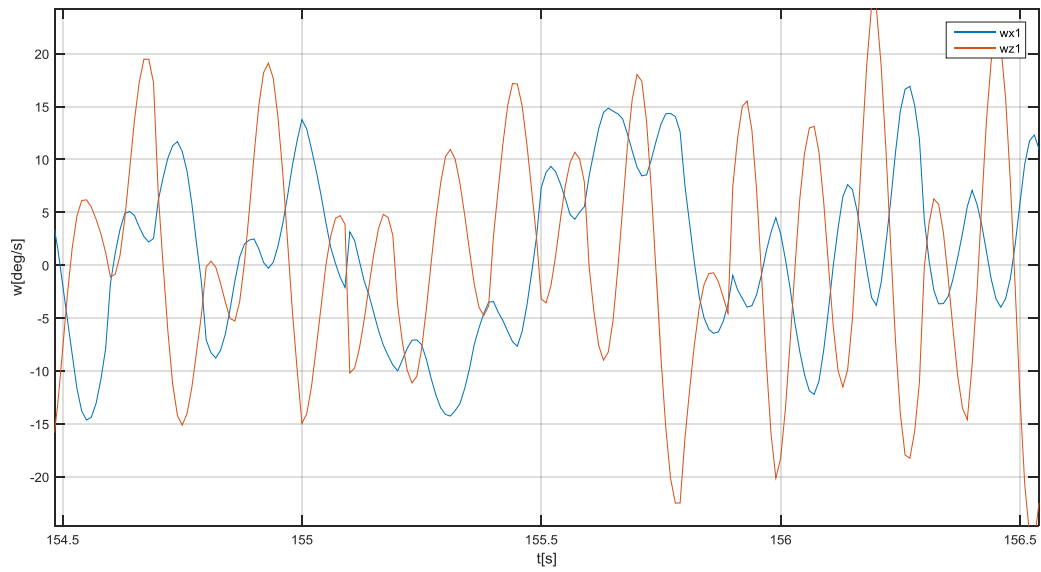


Fig.7.9 Zoom tra le velocità angolari $Wx1$ e $Wz1$

7.5 Analisi nel dominio delle frequenze

7.5.1 Analisi spettrale

Lo studio dei dati acquisiti del fenomeno vibratorio prosegue con l'analisi spettrale allo scopo di identificarne la frequenza di oscillazione, valutarne possibili variazioni e cercare di descrivere il moto assunto dalla bicicletta qualora sia soggetta allo shimmy. In figura (4.3) sono riportati gli andamenti nel tempo delle accelerazioni laterali A_{y1} e A_{x2} registrate dalle IMU, dal momento in cui l'oscillazione incomincia a manifestarsi in modo permanente a bassa intensità, fino a quando l'ampiezza bruscamente scompare e la velocità è scesa all'incirca sotto i 40 km/h. Le osservazioni sulla perdita del segnale di velocità GPS sono state condotte nel paragrafo 4.3.

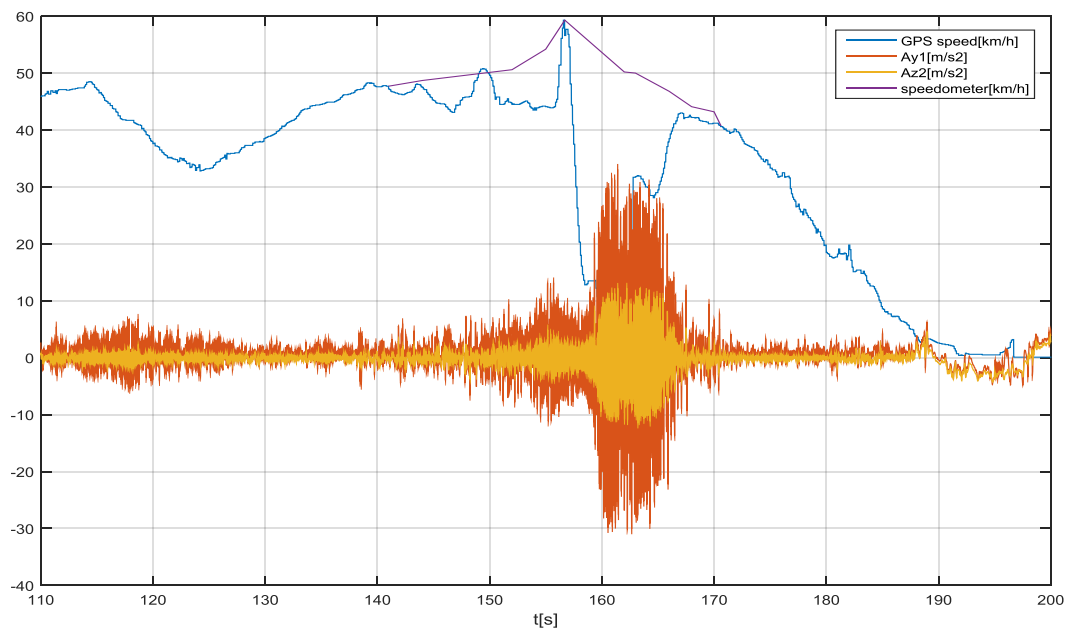


Fig.7.10 Andamento nel tempo delle accelerazioni laterali registrate dalle IMU

Dati acquisizione segnale: 1° record:

- Tempo inizio Acquisizione (T_s) = 154 s
- Tempo fine acquisizione (T_e) = 158.4 s
- Frequenza acquisizione (f_{samp}) = 100 Hz
- Periodo campionamento (dt) = 0.01 s
- Durata acquisizione (T_{acq}): $[T_e - T_s] = 4.04$ s
- Risoluzione in frequenza dell'analisi spettrale (df): $1/[T_e - T_s] = 0.2272$ Hz

7.5.2 Accelerazioni nel dominio delle frequenze

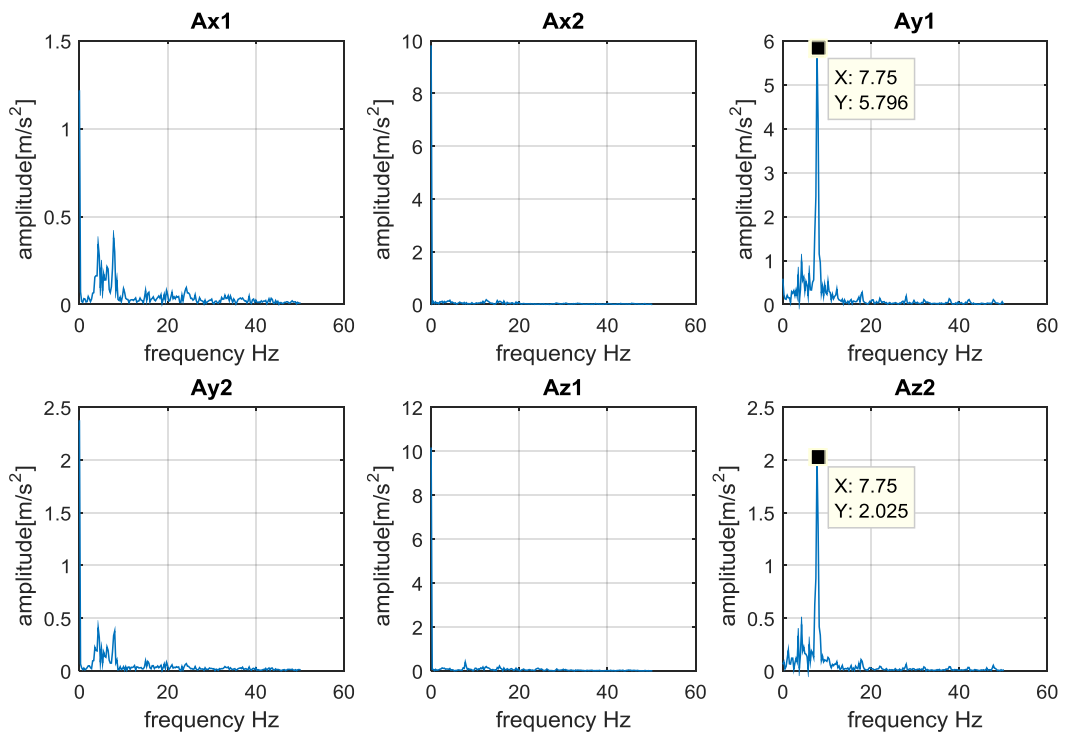


Fig.7.11 Analisi spettrali delle accelerazioni da IMU1 e IMU2

Dai grafici ottenuti dall'analisi in frequenza delle accelerazioni rilevate dai sensori IMU1 e IMU2 fig.(7.5) è possibile notare come la direzione più sollecitata risulti essere quella laterale, ossia quella indicata dagli assi y_1 e z_2 . Il picco di ampiezza presenta in entrambe le accelerazioni laterali (A_{y1} e A_{z2}) una frequenza pari a 7.75 [Hz]. Le accelerazioni lungo l'asse del tubo orizzontale A_{x1} e A_{y2} non hanno un contributo rilevante a tale frequenza, ed hanno un contenuto energetico distribuito in un ampio range di frequenze. Le accelerazioni in direzione verticali (A_{x2} e A_{z1}) delle due IMU risultano su scale molto larga poiché a frequenza 0 [Hz] gli accelerometri misurano la componente dell'accelerazione di gravità $9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$ e a tutte le altre frequenze non si rilevano contributi apprezzabili. I valori in ampiezza dello spettro sono stati soggetti ad un filtraggio effettuato dal sistema di acquisizione per ridurre la presenza di rumore di misura. Dal diagramma del modulo del filtro si vede che il segnale a questa frequenza è attenuato di quasi il 70 % (circa 10 dB) per cui le ampiezza vanno moltiplicate per un fattore di circa 3.2.

7.5.3 Velocità angolari nel dominio delle frequenze

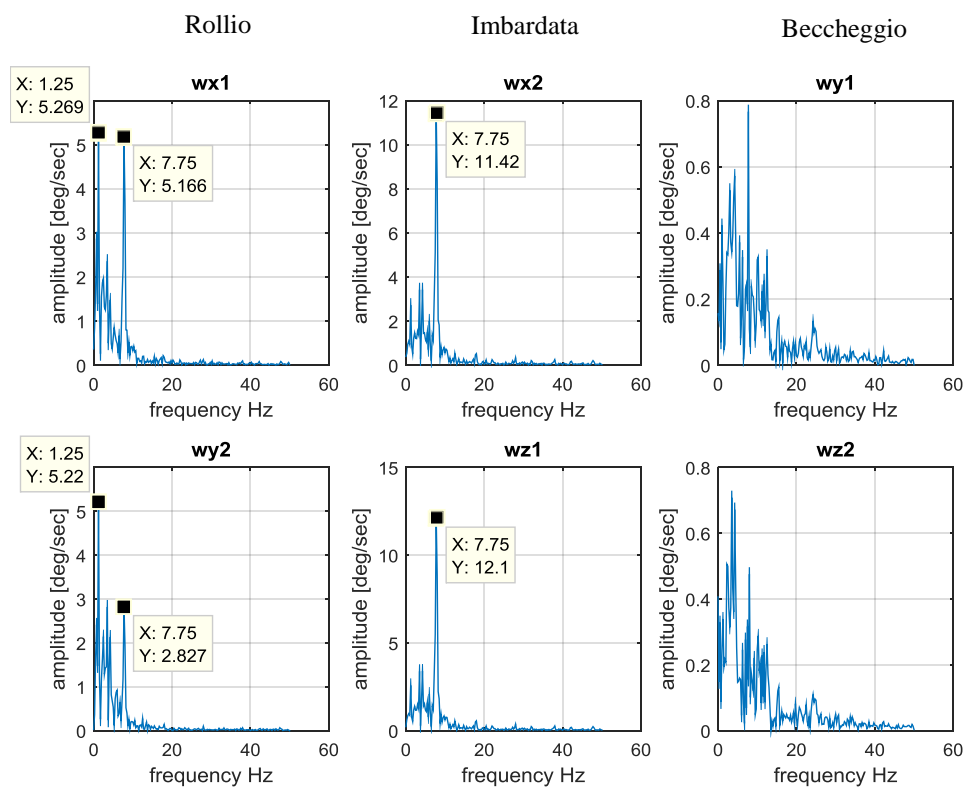


Fig.7.12 Analisi spettrale delle velocità angolari su IMU1 e IMU2

In Figura 7.6 si riporta invece l'analisi spettrale delle velocità angolari dove è possibile notare come, in corrispondenza della frequenza di manifestazione della shimmy sopra citata, il maggior contributo all'accelerazione laterale sia dovuto al moto di imbardata della bicicletta, riportato dalle relative velocità angolari w_{z1} e w_{x2} , le cui ampiezze sono molto simili a dimostrazione del fatto che tutto il retrotreno si comporta sostanzialmente come un corpo rigido dotato quindi della stessa velocità angolare rispetto ad un asse verticale.

Sempre a tale frequenza è però opportuno notare che, in particolare per la IMU1, sia presente anche una marcata componente $Wx1$ che evidenzia la presenza di moti di rollio o torsione del tubo orizzontale e del canotto di sterzo.

Anche per la IMU2 è presente la componente $Wy2$ che evidenzia lo stesso moto di rollio, ma in misura molto minore rispetto a quanto rilevato dalla IMU1. Si può infatti osservare come la componente alla frequenza 7.75 [Hz] della $Wx1$ sia circa il doppio di quella alla stessa frequenza dalla $Wy2$. Ciò significa sostanzialmente che il telaio si torce in modo molto più marcato in prossimità del canotto di sterzo. Si segnalano delle armoniche di più bassa frequenza dell'ordine di 1:2 [Hz] per il moto di rollio della bicicletta rappresentato dalle $Wx1$ e $Wy2$ da imputare ad un modo di vibrare instabile della bicicletta definito weave. Per il moto di beccheggio rappresentato dalle velocità angolari $Wy1$ e $Wz2$ si rilevano ampiezze non significative.

7.6 Analisi nel dominio del tempo 2° record

In figura 7.17 viene riportata l'accelerazione laterale $Ay1$ nel tempo registrata dalla IMU1, essa è la più significativa in termini di ampiezza ed è rilevata in prossimità del cannotto di sterzo. Nel tratto in analisi l'ampiezza risulta contenuta in un ciclo limite e di valore quasi pari a 9g (considerando la riduzione del filtro). Il salto di amplificazione si registra tra il 159[s] ed 160[s] avvenuto, quando la strada aveva poca pendenza e la velocità stava calando dai 60 km/h a 50 km/h, senza un apparente ragione. Il fenomeno dopo circa 5 [s] diminuisce in modo impulsivo solo in seguito alla diminuzione della velocità registrata dal GPS che nell'ultima parte riaggancia il segnale e ne registra un valore di circa 45:50 [km/h].

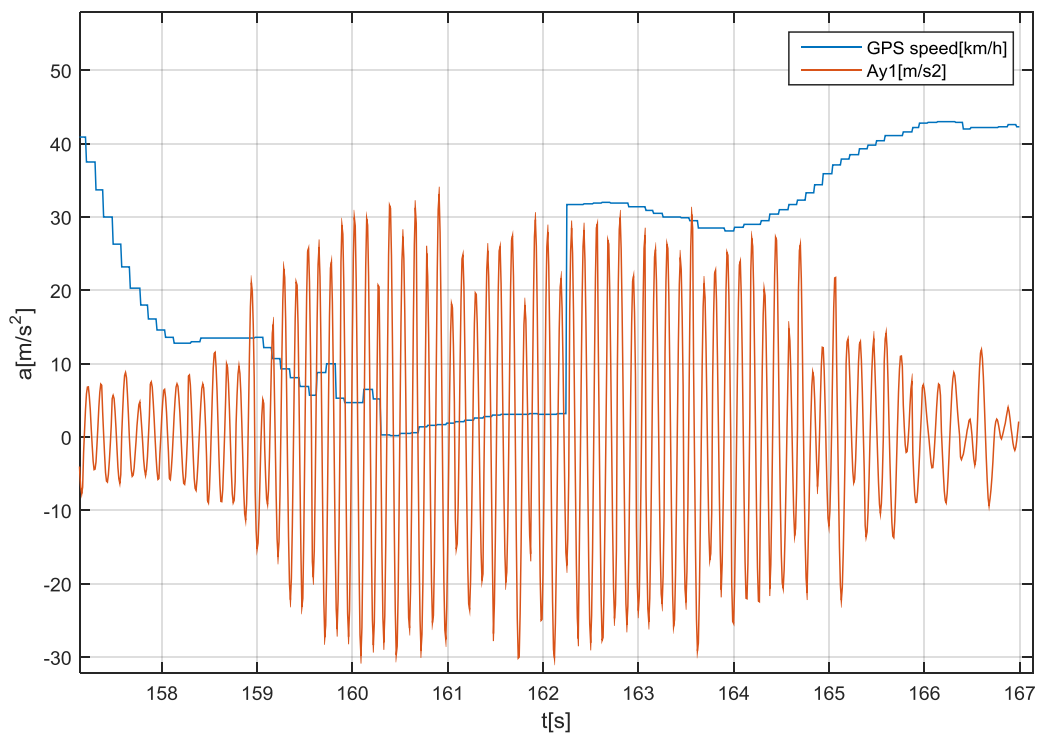


Fig.7.13 Accelerazione laterale e velocità del GPS

7.7 Analisi nel dominio delle frequenze 2° record

Si procede ora con l'analisi nel tratto temporale in cui la vibrazione si è bruscamente molto amplificata.

Dati acquisizione segnale: 2° record

- Tempo inizio Acquisizione (T_s) = 159.81 s
- Tempo fine acquisizione (T_e) = 164.65 s
- Frequenza acquisizione (f_{samp}) = 100 Hz
- Periodo di campionamento (dt) = 0.01 s
- Durata acquisizione (T_{acq}): $[T_e - T_s] = 5.84$ s
- Risoluzione in frequenza dello spettro (df): $1/[T_e - T_s] = 0.171$ Hz
-

7.7.1 Accelerazioni nel dominio delle frequenze 2° record

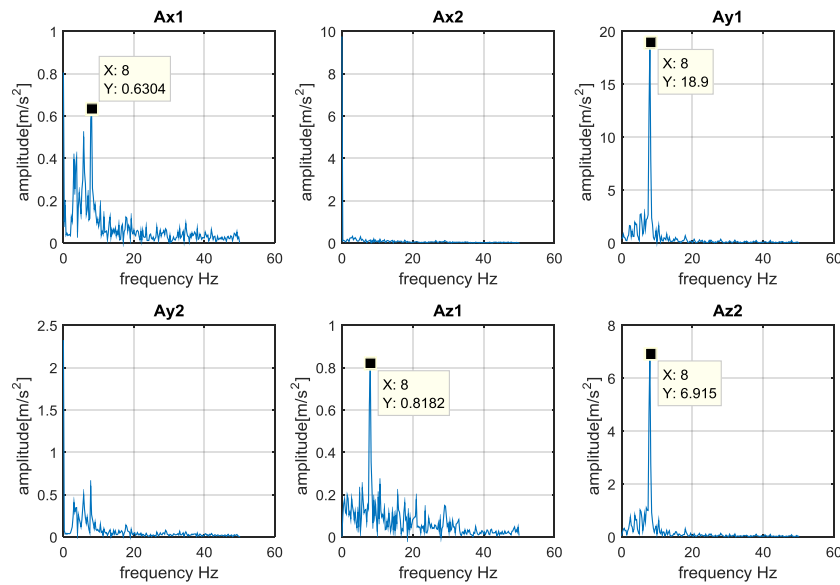


Fig.7.14 Analisi spettri accelerazione

I risultati ottenuti sono schematizzati in tabella sottostante

Frequenza shimmy 8 [Hz]					
Modulo spettro [m/s ²]					
acc.longitudinale		acc. Verticale		acc.laterale	
Ax1	0.63	Ax2	-	Ay1	18.9
Ay2	0.59	Az1	0.818	Az2	6.91

Fig.7.15 Schema analisi spettrale accelerazioni

Dai risultati ottenuti di figura 7.14 si osserva una sostanziale equivalenza della frequenza di oscillazione. Le ampiezza delle accelerazioni laterali sono di circa 3 volte maggiori, come ci aspettavamo. Alla frequenza di oscillazione compare nel moto verticale, rilevato dall' accelerazione Az1, una componente di circa 1 [m/s²], ciò evidenzia un movimento di saltellamento della bicicletta, accentuato in prossimità del canotto di sterzo, dove è collocato il sensore IMU1. Questo aspetto andrebbe approfondito per dare una stima delle forze di contatto pneumatico- strada Anche la componente di accelerazione longitudinale espressa dalla Ax1 risente della vibrazione. L'amplificazione della rotazione dello sterzo ha un effetto di decelerare e accelerare il moto longitudinale della bicicletta di un modulo di circa 0.63 [m/s²] alla frequenza di vibrazione. Aspetto quest'ultimo che potrebbe servirci per il calcolo della componente delle forza longitudinale (nel senso del moto) che si scarica a terra nel contatto pneumatico –strada.

7.7.2 Velocità angolari nel dominio delle frequenze 2° record

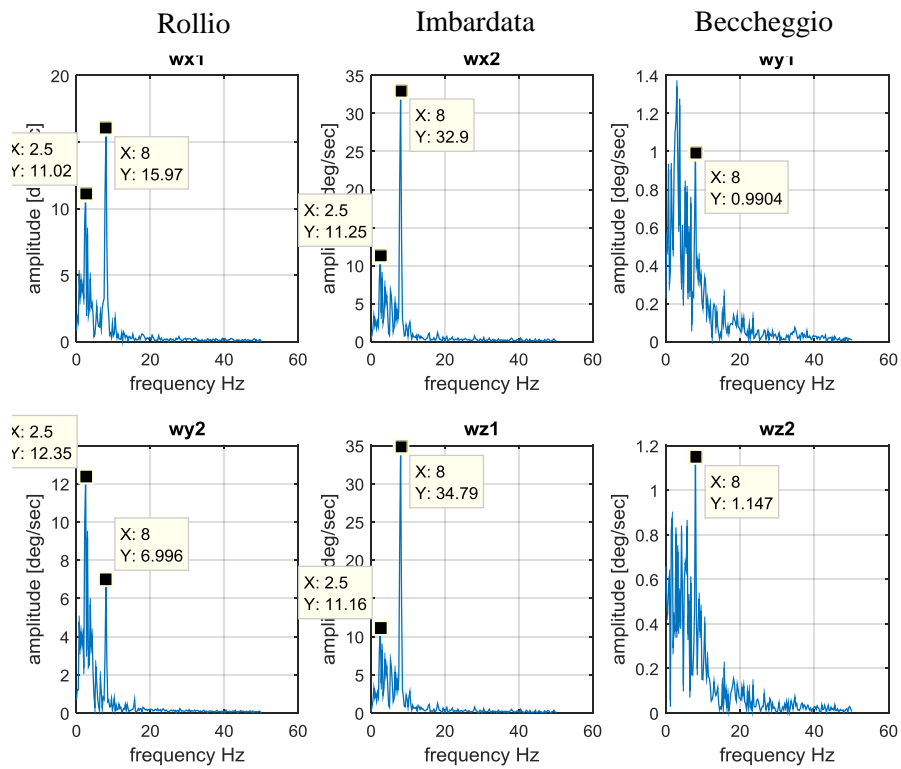


Fig.7.16 Analisi spettri velocità angolari

Frequenza shimmy					
8 [Hz]					
Modulo spettro [°/s]					
ROLLIO(torsione)		IMBARDATA		BECCHEGGIO	
W_{x1}	15.97	W_{x2}	32.9	W_{y1}	0.99
W_{y2}	6.99	W_{z1}	34.79	W_{z2}	1.14

Tabella 7.17 moduli spettri e frequenza shimmy di velocità angolari

In Figura 7.16 si riporta l'analisi spettrale delle velocità angolari dove è possibile notare come, ancora una volta in corrispondenza della frequenza rilevata, il maggior contributo all'accelerazione laterale sia dovuto al moto di imbardata della bicicletta, descritto dalle velocità angolari W_{z1} e W_{x2} . Si nota inoltre come le loro ampiezze seppur rimanendo molto simili si discostino di più tra loro, ma sostanzialmente rimane valido il movimento rigido del telaio attorno ad un asse fisso.

Sempre a tale frequenza è presente anche una intensa componente W_{x1} , che evidenzia la presenza torsione del tubo orizzontale nella regione del sensore IMU1 e del il canotto di sterzo.

Nell'analisi emergono come indicato in tabella 7.18 inoltre armoniche di bassa frequenza dell'ordine di 2: 3 [Hz] per il moto di rollio e imbardata che concorrono nella descrizione del modo di vibrare instabile della bicicletta definito Weave. A questa più bassa frequenza può essere presumibile che il moto del telaio sia rollio vero e proprio e non torsione.

<p style="text-align: center;">Frequenza WEAVE</p> <p style="text-align: center;">2.5 [Hz]</p>					
<p style="text-align: center;">Modulo spettro [°/s]</p>					
ROLLIO		IMBARDATA		BECCHEGGIO	
W_{x1}	11.02	W_{x2}	11.25	W_{y1}	–
W_{y2}	12.35	W_{z1}	11.16	W_{z2}	–

Tabella 7.18 moduli spettri e frequenza del modo Weave

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro si è cercato di indagare il complesso sistema dinamico di una bicicletta. Una prima parte è dedicata alla definizione di modelli matematici descrittivi della bicicletta: vengono dapprima ricavati sistemi non lineari, dai quali in seguito alla linearizzazione, si perviene a funzioni di trasferimento e a modelli di stato, giustificando alcuni aspetti legati principalmente al problema della stabilità in senso stretto. La bicicletta d'altra parte esplica la sua funzione in movimento, una naturale evoluzione ci ha condotto attraverso modelli via via più elaborati a cercare di inquadrare problema circa l'evoluzione del moto. La velocità assume un ruolo più complesso, non è più solo ragione del suo sostentamento, ma inficia alla sua stabilità.

Proprio nell'ambito di questa problematica sono state condotte delle prove su di una bicicletta da corsa lanciata a forte velocità in discesa. Grazie ad una strumentazione adeguata, siamo stati in grado di descrivere come si muovesse effettivamente telaio ed avantreno, qualora sia soggetta ad una particolare forma di instabilità chiamata shimmy.

Tale oscillazione emergere solo qualora il sistema dinamico possa essere descritto con un ulteriore grado di libertà che caratterizzi la rigidità del telaio e che ne permetta un movimento relativo spostandosi lateralmente trascinando con se anche la forcella stessa.

In primo momento si è considerato un modello semplificato ad un grado di libertà che disaccoppia l'avantreno della bicicletta e si è riusciti ad evidenziarne l'evoluzione temporale in termini di smorzamento e frequenza alla quale si desta tale fenomeno.

Non si è riusciti tuttavia a fare un modello che descrivesse la forcella della bicicletta con la possibilità di un ulteriore grado di libertà, ma si è preso una descrizione del fenomeno dello shimmy che si trova in letteratura che è in accordo con ciò che abbiamo detto e che prevede un moto di una parte del telaio (piantone) la cui cedevolezza ne permette una traslazione laterale. Dall'analisi risultante emergerebbero delle condizioni geometriche ed inerziali per cui si verificherebbe l'insorgere del fenomeno.

Tuttavia il legame con la velocità emergerebbe solo con l'inserzione di un elemento dissipativo posto alla rotazione del avantreno, che nella bicicletta è

assente. Si ritiene che per il modello bicicletta sia pertanto fondamentale una descrizione più accurata del contatto pneumatico – strada e nell’analisi dei dati forniamo utile informazione circa le forze scambiate durante l’innescò di tale oscillazione.

Bibliografia

Pellecchia ,A. *Analisi e caratterizzazione del wooble ad elevate velocità di una bicicletta da corsa* , tesi Politecnico Milano ,Relatore Prof. Gianantonio Magnani

Di Massa,G, *La ruota girevole (caster)*

Åstrom, K. J. 2000. *Limitations on control system performance*. European Journal of Control, Vol. 6, N. 1, pp. 2-20.

Bloch, A. M. 2003. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 24. ISBN 0-387-95535-6.

Cossalter, V. 1997. *Cinematica e dinamica della motocicletta*. Edizioni Progetto Padova. ISBN 88-87331-03-0.

Fajans, J. 2000. *Steering in bicycles and motorcycles*. American Journal of Physics, Vol. 68, pp. 654-656.

Freudenberg, J. S., Looze, D. P. 1985. *Right Half Plane Poles and Design Tradeoffs in Feedback Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-30, pp.555-565.

Hand, R. S. May 1988. *Comparisons and Stability Analysis of Linearized Equations of Motion for a Basic Bicycle model*. MSc Thesis, Cornell University.

Jones, D. E. H. 1970. *The stability of the bicycle*. Physics Today, Vol. 23(4), pp. 34-40.

Klein, R. E. 1989. Using bicycles to teach system dynamics. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 9, N. 3, pp. 4-9.

Klein, R. E. 1991. *The Bicycle Project Approach – A Vehicle to Relevancy and Motivation*. Proceedings of the IEEE Frontiers in Education Conference.

Klein, R. E. 1990. *Teaching Linear Systems Theory using Cramer's Rule*. IEEE Transactions on Education, Vol. 33, N. 3, pp.258-267.

D.E.H.Sharp, *The stability and control of motorcycles*, Journal of Mechanical Engineering Science, 13, 1971

R.S.Sharp, C.J. Alstead, The influence of structural flexibilities on the Straight-Running Stability of motorcycles, Vehicle System Dynamics, Vol. 9,1980

Carvallo, E., 1901, "*Théorie du mouvement du monocycle. Part 2: Théorie de la bicyclette*," J. Ec. Polytech. _Paris_, **6**, pp. 1–118.

Whipple, F. J. W., 1899, "*The Stability of the Motion of a Bicycle*," Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, **30**, pp. 312–348.

Meijaard, J. P., Papadopoulos, J. M., Ruina, A., and Schwab, A. L., 2007, "*Linearized Dynamics Equations for the Balance and Steer of a Bicycle: A Benchmark and Review*," Proc. R. Soc. London, Ser. A, **463**, pp. 1955–1982.

Meijaard, J. P., and Schwab, A. L., 2006, "*Linearized Equations for an Extended Bicycle Model*,"

Wilson, D. G., 2004, "*Bicycling Science*", MIT, Cambridge, MA.

Juden, C., 1988, "*Shimmy*," Cycletouring, June/July, pp. 208–209.

Sharp, R. S., and Limebeer, D. J. N., 2001, "*A Motorcycle Model for Stability and Control Analysis*," Multibody Syst. Dyn., **6_2_**, pp. 123–142.

Collins, R. N. 1963 "*A mathematical analysis of the stability of two-wheeled vehicles*". Ph.D. thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Wisconsin.

Fajans, J 2000 "*Steering in bicycles and motorcycles*", Am. J. Phys. 68(7), July, 654–659

Franke, G., Suhr, W. & Rieß, F. 1990 "*An advanced model of bicycle dynamics*." Eur. J. Physics. 11(2), 116–121.

Ge, Zheng-Ming 1966” *Kinematical and Dynamic Studies of a Bicycle*”,
Publishing House of Shanghai Chiao Tung University.
<http://wwwdata.me.nctu.edu.tw/dynamic/chaos.htm>

“Wobble of a racing bicycle with a rider hands on and hands off the handlebar” Florian
Klingera, Julia Nusimea, Johannes Edelmann & Manfred Plöchl 2014. *Vehicle
System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*