

POLITECNICO DI MILANO
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Studi in Ingegneria Matematica
Tesi di Laurea Magistrale



RISCHIO DI CONTROPARTE IN UN FRAMEWORK ALLA BLACK-COX

FABIO BOFFELLI

RELATORE: DOTT. DANIELE MARAZZINA

Anno Accademico 2014-2015

Indice

1	Introduzione	5
2	Framework	7
2.1	Processi di Lévy	7
2.1.1	Moto browniano	8
2.1.2	NIG	9
2.1.3	Lévy multidimensionali con componenti dipendenti	9
2.2	Dinamiche degli asset	10
2.3	Contratti forward	11
3	CVA, DVA, BVA	12
3.1	Definizioni di CVA, DVA e BVA	12
3.2	Calcolo di CVA, DVA e BVA in un contratto forward	13
4	Calcolo delle survival probabilities	16
4.1	Metodo Monte Carlo	16
4.2	Metodi backward in time	18
4.2.1	Metodo COS backward	18
4.2.2	Metodo CONV backward	22
4.3	Metodi forward in time	26
4.3.1	Metodo COS forward	26
4.3.2	Metodo CONV forward	28
4.4	Confronto numerico	31
5	Calibrazione del modello	34
5.1	Bootstrap della curva dei tassi risk - free	34
5.1.1	Depositi	35
5.1.2	Forward rate agreement (FRA)	35
5.1.3	Interest rate swap (IRS)	36
5.1.4	Bootstrap della curva	36
5.2	Bootstrap delle survival probabilities	37

5.3	Calibrazione di X_1, X_2, K_1 e K_2	38
5.4	Calibrazione di X_3	39
5.5	Calibrazione di $Y_1, Y_2, Y_3, a_1, a_2, a_3$ e Z	39
	5.5.1 Dinamica Black & Scholes	40
	5.5.2 Dinamica NIG	41
5.6	Risultati della calibrazione	43
	5.6.1 Curva dei tassi risk - free dell'area euro	43
	5.6.2 Calibrazione dei credit spread	44
	5.6.3 Calibrazione di X_1, X_2, K_1 e K_2	45
	5.6.4 Calibrazione del processo X_3	46
	5.6.5 Calibrazione di $Y_1, Y_2, Y_3, a_1, a_2, a_3$ e Z	50
6	Simulazioni numeriche di CVA, DVA e BVA	52
6.1	Dinamiche di Black & Scholes	53
6.2	Dinamiche NIG	55
6.3	Wrong way risk e right way risk	57
	6.3.1 Wrong way risk	57
	6.3.2 Right way risk	59
	6.3.3 Riepilogo	61
7	Conclusioni	64
A	Prodotti matrice - vettore con matrici di Hankel e di Toeplitz	67
B	Cumulanti del moto browniano e del NIG	68
C	Dati di mercato per il bootstrap della curva risk - free dell'area euro	69
D	Credit default swap scritti su Deutsche Bank ed ENI	71
E	Dati di mercato relativi a Brent Crude Oil	72
F	Curva risk - free del dollaro americano	73
G	Codice MATLAB	74
G.1	Calcolo delle survival probabilities	74
	G.1.1 Monte Carlo con asset di Black & Scholes	74
	G.1.2 Monte Carlo con asset NIG	75
	G.1.3 COS backward	77
	G.1.4 COS forward	81
	G.1.5 CONV backward	85
	G.1.6 CONV forward	88

G.2	Calcolo di CVA, DVA e BVA	91
G.2.1	CVA, DVA e BVA	92
G.2.2	Valori attesi nel calcolo di CVA e DVA	95
G.2.3	Algoritmo di Carr-Madan	96
	Ringraziamenti	103

Capitolo 1

Introduzione

Il risk management costituisce attualmente una delle branche della finanza di maggiore rilievo. Le ragioni di questo fatto sono molteplici: anzitutto gli Accordi di Basilea, il primo dei quali risale al 1988, hanno progressivamente costretto gli istituti finanziari a prendere coscienza dei rischi insiti nei loro portafogli, a misurarli e gestirli in modo sempre più accurato. Con Basilea I l'attenzione si è focalizzata inizialmente sul rischio di credito, anche se la misurazione proposta dal Comitato, basata sul RWA (Risk-Weighted Assets), era ancora rudimentale. Nei successivi Accordi di Basilea II e Basilea III si sono introdotte tecniche più sofisticate, e si è posta l'attenzione su una sempre più vasta gamma di rischi: quelli di mercato, di controparte, di liquidità e operativo sono i principali. Grazie agli Accordi di Basilea oggi gli istituti finanziari sono tenuti a detenere delle riserve di capitale definite da standard internazionali per far fronte alle rischiosità dei propri portafogli. Il lavoro del Comitato è però tutt'altro che concluso, e le misure da esso raccomandate sono continuo oggetto di dibattito.

Un'altra causa di forte interesse per il risk management è la necessità di prevenire crisi gravi come quella scoppiata nel 2008, tuttora irrisolta in molti Paesi del mondo, compresa l'Italia. Per riuscire in questo intento è necessario un lavoro di ricerca ampio e approfondito nell'ambito della gestione del rischio, sia nel mondo accademico che all'interno delle aziende che operano in Borsa.

Gli istituti finanziari, infine, si stanno progressivamente rendendo conto che il risk management non rappresenta soltanto un costo, ma spesso è piuttosto una fonte di utili, in quanto permette di indirizzare le attività verso investimenti più sicuri. Spesso anche società non costrette per legge a seguire precisi standard di gestione del rischio preferiscono farlo, anche perché gli investitori sono maggiormente propensi a puntare su queste imprese.

All'interno di questa trattazione l'attenzione è focalizzata sul rischio di controparte. L'obiettivo è quello di definire un modello per il calcolo del rischio associato a un contratto forward scritto su un reference name non defaultabile (ad esempio una commodity). Si assume che ciascuna delle controparti possa fallire in qualsiasi istante antecedente la

scadenza del contratto, qualora il suo firm value raggiunga o superi una soglia inferiore calibrata tramite dati di mercato (Black e Cox, 1976). I driving processes che vengono presi in considerazione, sia per le controparti che per il reference name, sono processi di Lévy. In particolare in questa tesi vengono studiati nel dettaglio il moto browniano e il NIG, per evidenziare la differente misurazione del rischio associato al contratto qualora si considerino processi continui oppure dinamiche di puro salto, in grado di cogliere meglio lo smile di volatilità del mercato sulle brevi scadenze. Le misure adottate per valutare il rischio di controparte sono il Credit Valuation Adjustment (CVA), il Debt Valuation Adjustment (DVA) e il Bilateral Valuation Adjustment (BVA). Si rimanda a Ballotta e Fusai, 2014, per un'analisi nel framework à la Merton.

Oltre alla trattazione teorica del problema viene studiato nel dettaglio un contratto forward stipulato da ENI (posizione 'lunga') e Deutsche Bank (posizione 'corta') sul reference name Brent Crude Oil. Dopo aver calibrato il modello e calcolato CVA, DVA e BVA per entrambe le controparti lungo tutta la durata del contratto viene proposto anche uno studio del wrong way risk e del right way risk, tramite un'analisi di sensitività sulle correlazioni tra controparti e reference name.

Capitolo 2

Framework

In questo capitolo vengono anzitutto introdotti i processi di Lévy, di cui è fatto largo uso in finanza per descrivere i processi stocastici che governano l'andamento di azioni, obbligazioni e contratti derivati di diverso genere. Particolare attenzione viene riservata al moto browniano e al NIG, che hanno un ruolo centrale lungo l'intera trattazione. Successivamente questi processi vengono utilizzati per modellizzare le controparti e il reference name di un contratto forward, di cui nei capitoli successivi si intende analizzare la rischiosità. Per questa breve trattazione si fa riferimento a [1], [4], [5], [8] e [11].

2.1 Processi di Lévy

Siano Ω uno spazio campionario, \mathcal{F} una σ -algebra in Ω e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtrazione. Sia infine $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo stocastico reale adattato a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ si definisce processo di Lévy se è cadlag (continuo da destra e limitato da sinistra), se $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ e se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

incrementi indipendenti: $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ indipendenti $\forall 0 < t_0 < \dots < t_n$;

incrementi stazionari: $X_{t+h} - X_h \stackrel{d}{=} X_t \quad \forall t, h \geq 0$;

continuità stocastica: $\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\lim_{h \rightarrow 0} |X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Nella precedente definizione si è usato il simbolo $\stackrel{d}{=}$ per indicare l'uguaglianza in distribuzione. Per ogni processo di Lévy vale un'importante proprietà:

$$\exists! \psi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} : \phi_{X_t}(u) = e^{t\psi_X(u)}, \quad u \in \mathbb{R},$$

dove $\phi_{X_t}(\cdot)$ è la funzione caratteristica di X_t . La funzione ψ_X prende il nome di esponente caratteristico del processo di Lévy X .

Poiché l'esponente caratteristico di un processo di Lévy è unico, la sua conoscenza è sufficiente per identificare univocamente il processo. Spesso il modo più semplice per ottenere la sua espressione è servirsi della formula di Lévy - Khintchine (si veda, ad esempio, Cont e Tankov, 2004).

Alcuni esempi di processi di Lévy sono il moto browniano, che è un processo a traiettorie continue, i 'jump-diffusion' (alla componente continua se ne aggiunge una di salto), come il processo di Merton e quello di Kou, e i processi 'pure-jump', con una dinamica di salto sufficientemente ricca da non necessitare di alcuna componente continua. In quest'ultima categoria si trovano, ad esempio, il variance gamma (VG) e il normal inverse gaussian (NIG). Nel seguito vengono analizzati nel dettaglio il moto browniano e il NIG, mostrando le ragioni per cui il secondo processo sia spesso preferibile al primo nella modellizzazione di asset finanziari.

2.1.1 Moto browniano

Il moto browniano è un processo stocastico nato originariamente per descrivere il movimento disordinato di particelle sospese in un fluido. Nel 1900 esso è stato introdotto in finanza da Louis Jean Baptist Bachelier, ma soltanto dal 1973, con la celebre formula di Black & Scholes [5], esso è stato utilizzato per descrivere i titoli rischiosi come moti browniani geometrici, diventando uno strumento fondante della teoria finanziaria.

Un processo stocastico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ a valori reali si definisce moto browniano se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$;
2. $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s \forall 0 \leq s < t$;
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \forall 0 \leq s < t$.

Nel modello di Black & Scholes un titolo rischioso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ segue, sotto la misura di probabilità risk-neutral, la seguente dinamica:

$$S_t = S_0 e^{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

dove $r \in \mathbb{R}$ è il tasso di interesse risk-free, $q \in \mathbb{R}^+$ è il dividend yield continuo, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ è la volatilità del titolo rischioso e $\{W_t\}_{t \geq 0}$ è un moto browniano.

Il modello di Black & Scholes presenta diversi difetti, fra cui l'impossibilità di riprodurre lo smile di volatilità del mercato (si veda, ad esempio, Hull, 2014). Questa è la principale ragione per introdurre processi più complessi e dotati di un numero superiore di parametri da calibrare, come il NIG.

Il moto browniano appartiene alla classe dei processi di Lévy. In particolare si tratta di un processo a traiettorie continue, con un esponente caratteristico nella forma:

$$\psi_W(u) = -\frac{u^2 \sigma^2}{2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 NIG

Il NIG è un processo di Lévy ottenuto per subordinazione di un moto browniano tramite un processo inverse gaussian:

$$X(t) = \theta G(t) + \sigma W(G(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ è il drift del moto browniano $W(t)$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ è la volatilità del browniano, $G(t)$ è un processo inverse gaussian di parametri $(t/\sqrt{k}, 1/\sqrt{k})$ e $k \in \mathbb{R}^+$ è la varianza di $G(t)$.

La ragione per cui il processo NIG è particolarmente attraente per la modellizzazione di asset finanziari è la sua capacità di riprodurre in modo efficace lo smile di volatilità del mercato per brevi scadenze, grazie alla natura di salto di questo processo stocastico.

L'esponente caratteristico di un NIG è:

$$\psi_X(u) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2iuk\theta + u^2k\sigma^2}}{k}, \quad u \in \mathbb{R},$$

dunque un NIG è completamente descritto dalla terna di parametri (σ, k, θ) .

Un'estensione del modello di Black & Scholes che si serva di un NIG anziché di un moto browniano descrive la dinamica del titolo rischioso nel seguente modo:

$$S_t = S_0 e^{(r-q-\psi_X(-i))t + X_t},$$

dove $r \in \mathbb{R}$ è il tasso di interesse risk-free, $q \in \mathbb{R}^+$ è il dividend yield continuo e $\psi_X(\cdot)$ è l'esponente caratteristico del processo NIG X .

2.1.3 Lévy multidimensionali con componenti dipendenti

Fino a questo momento si sono trattati, per semplicità di notazione, processi di Lévy unidimensionali. L'estensione delle definizioni fin qui introdotte al caso multidimensionale è tuttavia elementare: si rimanda il lettore a Cont e Tankov, 2004.

Si consideri ora un processo di Lévy $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ in \mathbb{R}^n con componenti dipendenti. Come mostrato da Ballotta e Bongfiglioli, 2014, è possibile scomporre il processo \mathbf{X} nel seguente modo:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{Y}_t + \mathbf{a}Z_t, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

$\{\mathbf{Y}_t\}_{t \geq 0}$ è un vettore in \mathbb{R}^n di processi di Lévy indipendenti che rappresentano i fattori di rischio idiosincratico delle componenti di \mathbf{X} . $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ è un processo di Lévy in \mathbb{R} indipendente da \mathbf{Y} che rappresenta il rischio sistematico delle componenti di \mathbf{X} . Il vettore di costanti $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ infine cattura la dipendenza delle componenti di \mathbf{X} dal rischio sistematico $\{Z_t\}_{t \geq 0}$.

Una volta introdotta questa scomposizione per il processo \mathbf{X} la sua funzione caratteristica può essere scritta come segue:

$$\phi_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{u}) = \phi_{Z_t} \left(\sum_{j=1}^n a_j u_j \right) \prod_{j=1}^n \phi_{Y_{t_j}}(u_j), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$

dove $\phi_{Z_t}(\cdot)$ e $\phi_{Y_{t_j}}(\cdot)$ indicano rispettivamente la funzione caratteristica di Z_t e della componente j -esima di \mathbf{Y}_t .

Da questa espressione segue che per l'esponente caratteristico di ciascuna componente $j = 1, \dots, n$ del processo \mathbf{X} vale la seguente relazione:

$$\psi_{X_j}(u_j) = \psi_{Y_j}(u_j) + \psi_Z(a_j u_j).$$

La correlazione tra due componenti j e l del processo \mathbf{X} è inoltre data da:

$$\rho_{jl}^{\mathbf{X}} = \text{Corr}(X_j(1), X_l(1)) = \frac{a_j a_l \text{Var}(Z(1))}{\sqrt{\text{Var}(X_j(1))} \sqrt{\text{Var}(X_l(1))}}.$$

Si osservi che se a_j e a_l sono diversi da 0 la correlazione tra la j -esima e la l -esima componente di \mathbf{X} risulta nulla se e solo se Z è degenere, ossia se X_{t_j} e X_{t_l} sono indipendenti. Risulta invece $|\rho_{jl}^{\mathbf{X}}| = 1$ se e solo se è degenere \mathbf{Y} , cioè se le componenti di \mathbf{X} sono perfettamente (linearmente) dipendenti. Infine $\text{sign}(\rho_{jl}^{\mathbf{X}}) = \text{sign}(a_j a_l)$. Per le dimostrazioni si rimanda a Ballotta e Bonfiglioli, 2014.

2.2 Dinamiche degli asset

In questa sezione si introducono le dinamiche che governano i firm value delle due controparti e del reference name di un contratto forward. Siano $S_1(t)$ ed $S_2(t)$ rispettivamente il firm value della controparte 'corta' e di quella 'lunga' nel forward all'istante t e sia $S_3(t)$ il valore del sottostante del derivato all'istante t . Si ipotizzi che ciascuno di questi processi stocastici sia descritto nella dinamica risk-neutral¹ tramite l'equazione:

$$S_j(t) = S_j(0) e^{(r - q_j - \psi_{X_j}(-i))t + X_j(t)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

dove $X_j(t)$ è la j -esima componente di un processo di Lévy multivariato \mathbf{X} a componenti dipendenti, $r \in \mathbb{R}$ è il tasso di interesse privo di rischio, $q_j \in \mathbb{R}^+$ è il dividend yield continuo e $\psi_{X_j}(\cdot)$ è l'esponente caratteristico di X_j .

Si assuma ora trascurabile la probabilità di default del reference name, come è ragionevole ad esempio per una commodity. Per ciascuna delle due controparti si ipotizzi invece che il default possa avvenire in qualsiasi istante di tempo $t > 0$, qualora il firm value dell'azienda raggiunga una soglia inferiore K_j , $j = 1, 2$. Questa condizione può essere scritta nella seguente forma:

$$\ln S_j(0) + (r - q_j - \psi_{X_j}(-i))t + X_j(t) \leq \ln K_j, \quad j = 1, 2.$$

In maniera equivalente si può riscrivere la precedente relazione come:

$$Y_j(t) + a_j Z(t) \leq l_j, \quad (2.4)$$

¹Il mercato considerato è incompleto, perciò ci sono infinite possibili misure risk-neutral. Tramite il processo di calibrazione, tuttavia, ne viene determinata una in maniera univoca.

dove:

$$\begin{aligned}l_j &= h_j - \hat{\mu}_j t, \\h_j &= \ln(K_j/S_j(0)), \\ \hat{\mu}_j &= r - q_j - \psi_{X_j}(-i).\end{aligned}$$

Per i processi di Lévy $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ si prendono in analisi due possibili dinamiche: il moto browniano e il NIG. Poiché il NIG è in grado di riprodurre in modo decisamente più accurato lo smile di volatilità sulle brevi scadenze, i risultati ottenuti sotto questa dinamica risultano maggiormente realistici. Essendo tuttavia la specifica browniana computazionalmente meno onerosa, è interessante analizzare l'entità della discrepanza tra i risultati ottenuti ipotizzando dei reference name guidati da moti browniani oppure da processi NIG.

2.3 Contratti forward

Un forward è un contratto derivato con cui una controparte, detta 'lunga', si impegna ad acquistare dall'altra controparte, detta 'corta', un determinato sottostante a un prezzo prestabilito in una pattuita data futura. La controparte 'corta' si impegna a sua volta a vendere il sottostante alla controparte 'lunga'. Si osservi che nella data in cui il forward viene stipulato non avviene alcun flusso di cassa.

Il valore di questo contratto, ossia l'ammontare di denaro che la controparte 'lunga' deve pagare a scadenza alla controparte 'corta', è dato dalla seguente formula, ottenuta facendo uso del solo principio di non arbitraggio (si veda, ad esempio, Hull, 2014):

$$F(t, t, U) = S(t)e^{(r-q)(U-t)},$$

dove $S(t)$ è il valore del sottostante nell'istante in cui il contratto viene stipulato, $r \in \mathbb{R}$ è il tasso di interesse privo di rischio, $q \in \mathbb{R}^+$ è il dividend yield continuo del reference name e U è la data di expiry del contratto.

In un generico istante $T \in (t, U)$ il prezzo del contratto in posizione 'lunga' (che in generale non è nullo, diversamente da quanto accade all'istante t) è dato da:

$$F(t, T, U) = S(T)e^{-q(U-T)} - F(t, t, U)e^{-r(U-T)}. \quad (2.5)$$

Anche questa espressione è ottenuta facendo uso del solo principio di non arbitraggio.

Poiché i contratti forward sono OTC (over the counter), perciò non scambiati su un mercato regolamentato, essi non sono standardizzati e le controparti interagiscono direttamente, anziché tramite clearing houses, come per i contratti future. Da qui nasce, naturalmente, il rischio di controparte, che deve essere gestito da chi stipula un contratto di questo tipo. Nel prossimo capitolo verranno introdotti alcuni metodi di misurazione del rischio, ossia il CVA, il DVA e il BVA.

Capitolo 3

CVA, DVA, BVA

Questo capitolo è dedicato alla misurazione e al calcolo del rischio di controparte associato a un contratto derivato, con particolare attenzione alla tipologia forward. Vengono anzitutto introdotte le definizioni di CVA, DVA e BVA. Successivamente viene mostrato come calcolare queste misure di rischio nel caso di un contratto forward, ipotizzando che sia le controparti che il reference name del contratto siano guidati da processi di Lévy e che il default delle controparti possa avvenire in qualsiasi istante qualora il loro firm value raggiunga o superi una prestabilita soglia inferiore. Per questa breve trattazione si fa riferimento a [3], [7] e [12].

3.1 Definizioni di CVA, DVA e BVA

Si ipotizzi che due aziende, che saranno chiamate A e B, stipulino un contratto derivato. Qualora una di esse risulti insolvente prima della scadenza del contratto, la sua controparte subisce una perdita se il valore del derivato è a suo favore al momento del default. Per misurare il rischio associato a questa possibilità si introducono le nozioni di CVA (Credit Valuation Adjustment), DVA (Debt Valuation Adjustment) e BVA (Bilateral Valuation Adjustment).

Il CVA (bilaterale) per l'azienda B è il valore atteso della perdita che subirebbe nel caso in cui l'azienda A fallisse, B sopravvivesse e il valore del derivato fosse in suo favore.

Il DVA per l'azienda B, in maniera speculare, è il valore atteso della 'mancata perdita' che l'azienda B riscontrerebbe nel caso in cui essa fallisse, A sopravvivesse e il valore del derivato fosse in favore di A.

Il BVA è la differenza tra CVA e DVA.

Nella definizione di CVA si è specificato che si tratta del caso bilaterale. Nel CVA unilaterale la possibilità che la controparte B fallisca è trascurata, ottenendo una misura di rischio maggiormente conservativa.

Si osservi che secondo gli Accordi di Basilea (si veda Basel, 2010) il DVA non riduce il rischio di controparte di un contratto derivato, mentre lo fa secondo gli International Accounting Standards (IAS39 - si veda IASB, 2011).

Si noti inoltre che il DVA di B corrisponde al CVA di A, e viceversa, perciò è sufficiente porre l'attenzione su una delle due controparti per ottenere CVA e DVA di entrambe. Nel seguito verrà analizzata la tipologia di contratto forward, e verranno calcolate le misure di rischio riferite alla controparte 'lunga'.

3.2 Calcolo di CVA, DVA e BVA in un contratto forward

Si consideri un contratto forward scritto su un reference name con probabilità di default trascurabile. Si chiamino $S_1(t)$ il firm value all'istante $t \geq 0$ della controparte 'corta' nel forward (controparte 1) e $S_2(t)$ il firm value in t della controparte 'lunga' (controparte 2). Sia poi $S_3(t)$ il valore del reference name all'istante t .

Si assuma che ciascuno di questi processi stocastici sia descritto da:

$$S_j(t) = S_j(0)e^{(r-q_j-\psi_{X_j}(-i))t+X_j(t)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

dove ciascun termine assume lo stesso significato che ha nell'equazione (2.3). Allora, ipotizzando che il default della controparte $j = 1, 2$ avvenga se il suo firm value raggiunge o supera una soglia inferiore K_j , $j = 1, 2$ la condizione di default è quella espressa nella (2.4).

In tal caso il CVA per la controparte 'lunga' nel forward è dato da:

$$CVA_2 = (1 - R_1) \mathbb{E}[1_{\tau_1 \leq T} 1_{\tau_2 > \tau_1} \psi^+(S_3(\tau_1))],$$

dove:

$$\tau_j = \inf\{t \geq 0 : Y_j(t) + a_j Z(t) \leq l_j(t)\}, \quad j = 1, 2$$

è il time to default di ciascuna delle controparti,

$$\psi^+(S_3(\tau_1)) = \max(\psi(S_3(\tau_1)), 0)$$

è la parte positiva del valore attuale del contratto per la controparte 2 nell'istante di default della controparte 1 e R_1 è il recovery rate della controparte 1. Il valore di $\psi(S_3(\tau_1))$ è ottenuto dalla (2.5) ponendo $T = \tau_1$.

In maniera analoga il DVA per la controparte 'lunga' nel forward risulta essere:

$$DVA_2 = (1 - R_2) \mathbb{E}[1_{\tau_1 > \tau_2} 1_{\tau_2 \leq T} \psi^-(S_3(\tau_2))],$$

dove:

$$\psi^-(S_3(\tau_2)) = \max(-\psi(S_3(\tau_2)), 0)$$

è la parte negativa del valore attuale del contratto per la controparte 2 nell'istante del proprio default e R_2 è il recovery rate della controparte 2. Il valore di $\psi(S_3(\tau_2))$ è ottenuto dalla (2.5) ponendo $T = \tau_2$.

Il BVA per la controparte ‘lunga’ nel forward infine è:

$$BVA_2 = CVA_2 - DVA_2.$$

Il calcolo numerico di CVA_2 e DVA_2 può essere condotto in diversi modi. La tecnica più elementare consiste nell’ eseguire una simulazione di Monte Carlo. Ad ogni iterazione del metodo si rende necessario simulare i processi $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $Y_3(t)$ e $Z(t)$ per $t \in [0, T]$ e valutare le espressioni contenute nei valori attesi di CVA e DVA. Mediando i valori ottenuti nelle simulazioni si può così ottenere una stima delle misure di rischio associate alla controparte ‘lunga’ nel forward. Naturalmente è possibile valutare l’ accuratezza del risultato tramite un intervallo di confidenza asintotico. Si rimanda il lettore al capitolo ‘Calcolo delle survival probabilities’ per una trattazione più dettagliata del metodo Monte Carlo.

Esiste anche un modo alternativo di procedere. Si può infatti scrivere:

$$CVA_2 = (1 - R_1) \mathbb{E} [\mathbb{E} [1_{\tau_1 \leq T} 1_{\tau_2 > \tau_1} \psi^+(S_3(\tau_1)) | \{Z(t)\}_{t \in [0, T]}]].$$

Introducendo una discretizzazione temporale $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ con $t_{i+1} - t_i = \Delta$ $\forall i = 0 \dots N - 1$ e ammettendo che il default delle controparti del contratto possa avvenire solo negli istanti della griglia, l’ espressione precedente si può riscrivere nel modo seguente:

$$CVA_2 = (1 - R_1) \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \mathbb{P}_Z(\tau_1 = t_i) \mathbb{P}_Z(\tau_2 > t_i) \mathbb{E}_Z[\psi^+(S_3(t_i))] \right], \quad (3.1)$$

dove $\mathbb{P}_Z(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | \{Z(t)\}_{t \in [0, T]})$ e $\mathbb{E}_Z[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \{Z(t)\}_{t \in [0, T]}]$.

In maniera del tutto analoga il DVA si può riscrivere come segue:

$$DVA_2 = (1 - R_2) \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \mathbb{P}_Z(\tau_2 = t_i) \mathbb{P}_Z(\tau_1 > t_i) \mathbb{E}_Z[\psi^-(S_3(t_i))] \right]. \quad (3.2)$$

A questo punto si pongono due problemi: il calcolo delle probabilità di sopravvivenza e di default delle controparti e la valutazione dei valori attesi condizionati al processo Z di $\psi^+(S_3(t_i))$ e $\psi^-(S_3(t_i))$. Il primo problema sarà affrontato nel dettaglio all’ interno del prossimo capitolo, mentre per il secondo è possibile servirsi dell’ algoritmo di Carr-Madan [7].

In effetti:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Z[\psi^+(S_3(t_i))] &= e^{-rt_i} \mathbb{E}_Z[[S_3(t_i)e^{-q_3(U-t_i)} - K_3e^{-r(U-t_i)}]^+] \\ &= e^{-rt_i} \mathbb{E}_Z[[S_3(0)e^{(r-q_3-\psi_{X_3}(-i))t_i + Y_3(t_i) + a_3Z(t_i) - q_3(U-t_i)} - K_3e^{-r(U-t_i)}]^+] \\ &= e^{-q_3U - \psi_Z(-a_3i)t_i + a_3Z(t_i)} e^{-rt_i} \mathbb{E}_Z[[S_3(0)e^{(r-\psi_{Y_3}(-i))t_i + Y_3(t_i)} - K_3e^{-r(U-t_i) + q_3U + \psi_Z(-a_3i)t_i - a_3Z(t_i)}]^+] \\ &= e^{-q_3U - \psi_Z(-a_3i)t_i + a_3Z(t_i)} \text{Call}(S_3(0), t_i, r, K_3e^{-r(U-t_i) + q_3U + \psi_Z(-a_3i)t_i - a_3Z(t_i)}), \end{aligned}$$

dove $\text{Call}(S, T, r, K)$ rappresenta il prezzo di una call europea scritta su S , con time to maturity T , tasso di interesse risk-free r e strike K . Il driving process del sottostante

della call è Y_3 . Questo calcolo può essere rapidamente eseguito tramite l'algoritmo di Carr-Madan.

Invece:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Z[\psi^-(S_3(t_i))] &= e^{-rt_i} \mathbb{E}_Z[[K_3 e^{-r(U-t_i)} - S_3(t_i) e^{-q_3(U-t_i)}]^+] \\ &= e^{-q_3 U - \psi_Z(-a_3 i)t_i + a_3 Z(t_i)} e^{-rt_i} \mathbb{E}_Z[[K_3 e^{-r(U-t_i) + q_3 U + \psi_Z(-a_3 i)t_i - a_3 Z(t_i)} - S_3(0) e^{(r - \psi_{Y_3}(-i))t_i + Y_3(t_i)}]^+] \\ &= e^{-q_3 U - \psi_Z(-a_3 i)t_i + a_3 Z(t_i)} Put(S_3(0), t_i, r, K_3 e^{-r(U-t_i) + q_3 U + \psi_Z(-a_3 i)t_i - a_3 Z(t_i)}), \end{aligned}$$

dove $Put(S, T, r, K)$ rappresenta il prezzo di una put europea scritta su S , con time to maturity T , tasso di interesse risk-free r e strike K .

Utilizzando ora la put-call parity per opzioni europee ($C_t - P_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$) e indicando con $c = e^{q_3 U + \psi_Z(-a_3 i)t_i - a_3 Z(t_i)}$ si può proseguire il calcolo, ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Z[\psi^-(S_3(t_i))] &= c^{-1} [\mathbb{E}_Z[\psi^+(S_3(t_i))]c - S_3(0) + K_3 e^{-rU}c] \\ &= \mathbb{E}_Z[\psi^+(S_3(t_i))] - S_3(0)c^{-1} + K_3 e^{-rU}. \end{aligned}$$

A questo punto ciò che serve, per ottenere CVA e DVA per la controparte 'lunga' nel forward (e quindi anche per quella 'corta'), sono le survival e default probabilities delle due controparti negli istanti della griglia temporale. Il prossimo capitolo si concentrerà su questo problema.

Capitolo 4

Calcolo delle survival probabilities

Questo capitolo si focalizza sul calcolo delle probabilità di sopravvivenza di un'azienda il cui firm value sia guidato da un processo di Lévy o da un processo costituito da una componente di Lévy e una deterministica. Si prendono in analisi il metodo Monte Carlo, il COS backward e forward [10] e il CONV backward e forward [13], analizzando i pregi e i difetti di ciascuno di essi. Si propone infine un confronto numerico dei diversi algoritmi.

4.1 Metodo Monte Carlo

Il Monte Carlo è un metodo numerico che permette di prezzare un'enorme varietà di contratti finanziari, grazie al suo approccio estremamente generale. Anche il calcolo delle survival probabilities di un'azienda il cui firm value sia guidato da un processo X di Lévy o nella forma $X_t = Y_t + D_t$ con Y di Lévy e D che inglobi tutte le componenti deterministiche di X può essere condotto con questo metodo. Il difetto del Monte Carlo è la necessità di tempi di calcolo molto lunghi per ottenere risultati accurati. Nonostante ciò esso è molto diffuso, sia nel mondo accademico che nell'industria, per la sua estrema semplicità implementativa.

Siano Ω uno spazio campionario, \mathcal{F} una σ -algebra definita su Ω e \mathbb{P} una funzione di probabilità che mappi \mathcal{F} in $[0, 1]$. Allora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità.

Si definisca ora $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variabile aleatoria reale con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ e $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ e siano $\theta := \mathbb{E}[X]$ e $\sigma^2 := \text{Var}[X]$. Si introducano X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$ variabili aleatorie iid (indipendenti e identicamente distribuite) con la stessa legge di probabilità di X .

La statistica $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ è uno stimatore non distorto di θ . Si può anche facilmente mostrare che $\text{Var}[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{n} \text{Var}[X]$, che converge a 0 quando n tende all'infinito.

Essendo soddisfatte le ipotesi della legge forte dei grandi numeri, inoltre:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta\right) = 1.$$

Con le ipotesi introdotte sulla variabile aleatoria X è infine possibile applicare il teorema

centrale del limite, pertanto:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\theta}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

dove la convergenza è in distribuzione e $\mathcal{N}(0, 1)$ è una normale standard. È possibile allora fornire un intervallo di confidenza asintotico per θ :

$$IC_{1-\delta} = \left[\hat{\theta}_n - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \hat{\theta}_n + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right],$$

dove $1 - \delta$ ($\delta \in [0, 1]$) è la confidenza dell'intervallo, $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ con Φ funzione di ripartizione di una normale standard, $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\widehat{\sigma}_n^2}$ e $\widehat{\sigma}_n^2$ è uno stimatore non distorto di σ^2 .

Si osservi che il decadimento dell'ampiezza dell'intervallo di confidenza al crescere di n è lento. Per ovviare a questo problema esistono tecniche di riduzione della varianza che permettono di accelerare la convergenza della stima di θ , come il metodo basato su variabili antitetiche, quello basato su variabili di controllo e quello dell'importance sampling (si veda, ad esempio, Seydel, 2012).

Il metodo Monte Carlo prevede di individuare la variabile aleatoria X di cui calcolare il valore atteso e di simularla un numero elevato di volte, per poi servirsi del concetto di stimatore non distorto, della legge dei grandi numeri e del teorema centrale del limite per ottenere una stima affidabile di $\mathbb{E}[X]$. Come mostrato è anche possibile definire un intervallo di confidenza asintotico per il valore atteso calcolato.

Si consideri ora il problema di trovare la probabilità di sopravvivenza di un'azienda il cui firm value sia guidato da un processo di Lévy (eventualmente con l'aggiunta di una componente deterministica). Si assuma che il default avvenga nel primo istante $t > 0$ in cui il firm value raggiunga o superi una soglia inferiore pari a K volte il valore iniziale dell'azienda, con $K \in [0, 1)$. Nell'istante t vale la relazione:

$$S_t = S_0 e^{X_t} \leq K S_0.$$

Questa condizione può essere equivalentemente riscritta come:

$$X_t \leq \log(K).$$

Si introduca ora una griglia temporale equispaziata $t_0 < \dots < t_M$ in cui ogni istante disti dal successivo dt . Per ottenere la survival probability da t_0 a t_m , $m = 1, \dots, M$ è necessario calcolare:

$$P_{surv}(t_0, t_m) = \mathbb{P}(X_t > \log(K) \forall t \in [0, t_m]).$$

In maniera del tutto equivalente questa espressione può essere scritta nel seguente modo:

$$P_{surv}(t_0, t_m) = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{X_t > \log(K) \forall t \in [0, t_m]\}}],$$

dove $\mathbf{1}_{\{A\}}$ rappresenta la funzione indicatrice dell'evento A .

Tutto ciò che serve per ottenere una stima di $P_{surv}(t_0, t_m)$, $m = 1, \dots, M$ e un intervallo di confidenza per questa stima è perciò un algoritmo che permetta di simulare il processo X . In letteratura è possibile trovare algoritmi di simulazione per qualsiasi processo di Lévy adottato in finanza, tra cui il moto browniano e il NIG. Lo schema da seguire per ottenere la probabilità di sopravvivenza da t_0 a t_m , $m = 1, \dots, M$ è perciò il seguente:

1. Ripetere, per $i = 1, \dots, n$:
 simulazione del processo X da t_0 a t_m ,
 $p_i(t_0, t_m) = \mathbf{1}_{\{X_t > \log(K) \forall t \in [0, t_m]\}}$;
2. $\hat{P}_{surv}(t_0, t_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i(t_0, t_m)$;
3. $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i(t_0, t_m) - \hat{P}_{surv}(t_0, t_m))^2$;
4. $IC_{1-\delta} = \left[\hat{P}_{surv}(t_0, t_m) - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \hat{P}_{surv}(t_0, t_m) + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$.

4.2 Metodi backward in time

Il metodo Monte Carlo ha come principale difetto la lentezza di esecuzione. Come già anticipato, esistono altri modi per calcolare le survival probabilities di un'azienda, come il COS [10] e il CONV [13]. Entrambi questi algoritmi possono essere implementati con un approccio backward in time oppure uno forward in time.

Nel caso backward si definiscono anzitutto una griglia temporale e la condizione di sopravvivenza dell'azienda nell'ultimo nodo della griglia. Si ricava poi una relazione ricorsiva che, data la probabilità di sopravvivenza dal nodo i -esimo fino all'ultimo, fornisca la survival probability dal nodo $(i - 1)$ -esimo fino a scadenza. Iterando in modo ricorsivo questa relazione si può ricavare la probabilità che l'azienda sopravviva dall'istante iniziale a quello finale.

Nel caso forward si adotta un approccio speculare: anziché la condizione di sopravvivenza nell'istante finale, si introduce la condizione iniziale del firm value. Si ricava poi una relazione ricorsiva analoga a quella del caso backward ma che, questa volta, fornisca la probabilità di sopravvivenza dal nodo iniziale fino al nodo i -esimo conoscendo la survival probability dal primo nodo fino all' $(i - 1)$ -esimo.

In questa sezione viene discusso nel dettaglio l'approccio backward in time. La prossima sezione sarà invece dedicata ai metodi forward.

4.2.1 Metodo COS backward

Il COS (Fang e Oosterle, 2009) è un metodo numerico di pricing basato sull'approssimazione della funzione densità di un processo di Lévy tramite espansione in termini cosinusoidali. Inizialmente è nato per valutare bermuda options e opzioni barriera a monitoraggio discreto,

ma può essere utilizzato anche per calcolare le probabilità di sopravvivenza di un'azienda il cui firm value evolva secondo un processo exponential Lévy. È anche possibile rilassare l'ipotesi sul driving process ammettendo che il log-price sia, anziché un Lévy puro, un processo costituito da una componente deterministica e una stocastica di Lévy. Questa estensione risulta utile perché, nelle equazioni (3.1) e (3.2), per ottenere il CVA e il DVA è necessario calcolare le survival probabilities condizionatamente al processo Z .

L'equazione fondamentale sui cui si regge il metodo COS è la seguente approssimazione della densità condizionale di un processo di Lévy:

$$f_{X_t|X_s}(y|x) \simeq \frac{2}{b-a} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left[\phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a}, t-s \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right] \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right), \quad (4.1)$$

dove il primo termine della sommatoria ha peso $\frac{1}{2}$, $\phi_X(\cdot, \cdot)$ è la funzione caratteristica del processo X e i parametri a e b devono essere scelti in modo da mantenere l'errore di approssimazione al di sotto di una soglia di tolleranza. Nell'articolo di Fang e Oosterlee viene consigliata la seguente scelta di a e b :

$$a = c1 - L\sqrt{c2 + \sqrt{c4}},$$

$$b = c1 + L\sqrt{c2 + \sqrt{c4}},$$

dove $L \in [7.5, 10]$ e $c1$, $c2$, $c4$ sono la prima, la seconda e la quarta cumulante del processo di Lévy X .¹ Si vedrà come la precedente equazione sia il fulcro di un algoritmo molto efficiente per il calcolo delle survival probabilities.

In un modello Black-Cox il default di un'azienda avviene nel momento in cui il suo firm value raggiunga o superi una prestabilita soglia inferiore. Se si assume che il firm value sia guidato da un processo di Lévy X e che la soglia di default sia K volte il valore iniziale dell'azienda ($K \in [0, 1)$) il default avviene nel primo istante $t \geq 0$ tale che:

$$S_t = S_0 e^{X_t} \leq K S_0.$$

Questa condizione può essere equivalentemente riscritta come:

$$X_t \leq \log(K).$$

Si introduca ora una discretizzazione temporale equispaziata $t_0 < \dots < t_M$ in cui ogni istante temporale disti dal successivo dt . Si definisca inoltre $p(x, t_m)$ la probabilità di sopravvivenza da t_m fino a t_M noto $X_{t_m} = x$. Allora risulta possibile scrivere la seguente relazione ricorsiva:

¹Si rimanda all'Appendice B per le cumulanti del moto browniano e del NIG.

$$\begin{cases} p(x, t_M) = \begin{cases} 1 & x > \log(K), \\ 0 & x \leq \log(K); \end{cases} \\ p(x, t_m) = \int_{\log(K)}^{\infty} f_{X_{t_{m+1}}|X_{t_m}}(y|x)p(y, t_{m+1})dy, \quad m = M-1, \dots, 0; \\ P_{surv}(t_0, t_M) = p(x=0, t_0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Ora è possibile sfruttare l'approssimazione della densità di un processo di Lévy fornita dal metodo COS (equazione (4.1)), ottenendo:

$$p(x, t_m) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} {}' \phi_n^{m+1}(x) P_n(t_{m+1});$$

$$P_n(t_{m+1}) = \frac{2}{b-a} \int_{\log(K)}^b \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) p(y, t_{m+1}) dy, \quad n = 0, \dots, N-1;$$

$$\phi_n^{m+1}(x) = \text{Re} \left[\phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a}, dt \right) e^{in\pi \frac{x-a}{b-a}} \right], \quad n = 0, \dots, N-1;$$

dove b è lo stesso parametro di troncamento introdotto nella (4.1). Dalle precedenti relazioni discende che:

$$P_n(t_m) = \sum_{k=0}^{N-1} {}' \text{Re} \left[\phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a}, dt \right) \omega_{n,k} \right] P_k(t_{m+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

dove:

$$\omega_{n,k} = \frac{2}{b-a} \int_{\log(K)}^b e^{ik\pi \frac{y-a}{b-a}} \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy, \quad n, k = 0, \dots, N-1.$$

Si è dunque introdotto un metodo ricorsivo per calcolare la probabilità di sopravvivenza dall'istante t_0 fino all'istante t_M . Anzitutto è necessario calcolare $P_n(t_M)$ per ogni $n = 0 \dots N-1$. Da qui è possibile ricavare $P_n(t_{M-1})$ per ogni $n = 0 \dots N-1$ e procedendo in modo analogo si giunge fino a $P_n(t_1)$, $n = 0 \dots N-1$. Dall'equazione (4.2) si può allora ottenere la probabilità di sopravvivenza dell'azienda.

Sebbene procedere in questo modo sia possibile, il costo computazionale dell'algoritmo risulterebbe elevato. Un'alternativa consiste nell'adottare un approccio vettoriale, decisamente meno oneroso. Sia:

$$\mathbf{P}(t_m) = \begin{pmatrix} P_0(t_m) \\ P_1(t_m) \\ \vdots \\ P_{N-1}(t_m) \end{pmatrix}.$$

Allora le equazioni scalari (4.3) possono essere riscritte in forma vettoriale. Per farlo è necessario introdurre le seguenti matrici:

$$\Lambda = \text{diag} \left(\left[\phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a}, dt \right) \right]_{k=0}^{N-1} \right);$$

$$\Omega = H + T;$$

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{N-1} \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1} & \omega_N & \dots & \omega_{2N-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}; \quad T = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{N-1} \\ \omega_{-1} & \omega_0 & \dots & \omega_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1-N} & \omega_{2-N} & \dots & \omega_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N};$$

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{b - \log(K)}{b-a}, & j = 0, \\ -\frac{i}{\pi} \frac{e^{i\pi j} - e^{i\pi j \frac{\log(K)-a}{b-a}}}{j}, & j \neq 0. \end{cases}$$

A questo punto le equazioni (4.3) possono essere scritte in forma vettoriale:

$$\mathbf{P}(t_m) = \text{Re}(\Omega\Lambda)\mathbf{P}(t_{m+1}), \quad m = 1, \dots, M-1.$$

Osservando che le matrici H e T sono, rispettivamente, una matrice di Toeplitz e una di Hankel, è possibile sfruttare algoritmi basati sul metodo FFT (Fast Fourier Transform) per eseguire i prodotti matrice-vettore², rendendo la ricorsione molto rapida: ottenere il vettore $\mathbf{P}(t_1)$ ha un costo computazionale di $O((M-1)N \log_2(N))$.

Un punto di forza del metodo presentato è la possibilità di ottenere tutte le probabilità di sopravvivenza da t_0 a t_m , $m = 1, \dots, M$ all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. Per calcolare la survival probability da t_0 a t_1 infatti è sufficiente eseguire $\sum_{n=0}^{N-1} \phi_n^M(x=0)P_n(t_M)$, per quella da t_0 a t_2 $\sum_{n=0}^{N-1} \phi_n^{M-1}(x=0)P_n(t_{M-1})$, eccetera. Questo permette di ridurre notevolmente l'onere computazionale.

Processi deterministico - stocastici

È possibile generalizzare il metodo COS a processi costituiti da una componente deterministica e una stocastica di Lévy. Per semplicità di notazione si scriverà $X_t = Y_t + D_t$, dove il processo Y è un Lévy e nel processo D vengono inglobate tutte le componenti deterministiche del processo X . Si osservi che nella (3.1) e nella (3.2) $D_t = a_j Z_t - \psi_Z(-a_j i)t$. Per un processo X di questo tipo vale:

$$f_{X_t|X_s}(y|x) \simeq \frac{2}{b-a} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left[\phi_Y \left(\frac{k\pi}{b-a}, t-s \right) e^{\frac{ik\pi}{b-a}(D_t - D_s)} e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right] \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right).$$

²Si rimanda il lettore all'Appendice A.

La trattazione procede in modo analogo al caso di X processo di Lévy. Le uniche differenze si riscontrano in $P_{surv}(t_0, t_M) = p(x = D_{t_0}, t_0)$, nella definizione di $\phi_n^{m+1}(x)$ e in quella di Λ , che ora varia ad ogni passo temporale. Si ottiene, infatti:

$$\phi_n^{m+1}(x) = \text{Re} \left[\phi_Y \left(\frac{n\pi}{b-a}, dt \right) e^{\frac{in\pi}{b-a}(D_{t_{m+1}} - D_{t_m})} e^{in\pi \frac{x-a}{b-a}} \right], \quad n = 0, \dots, N-1;$$

$$\Lambda_{m+1} = \text{diag} \left(\left[\phi_Y \left(\frac{k\pi}{b-a}, dt \right) e^{\frac{ik\pi}{b-a}(D_{t_{m+1}} - D_{t_m})} \right]_{k=0}^{N-1} \right);$$

$$\mathbf{P}(t_m) = \text{Re}(\Omega \Lambda_{m+1}) \mathbf{P}(t_{m+1}), \quad m = 1, \dots, M-1.$$

Purtroppo, a differenza del caso in cui X sia un processo di Lévy, se $X_t = Y_t + D_t$ con D processo deterministico, non è possibile ottenere le survival probabilities da t_0 a qualsiasi istante della griglia temporale all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. Se X è un processo di Lévy, infatti, per calcolare $P_{surv}(t_0, t_1)$ si sfrutta la proprietà di stazionarietà e indipendenza degli incrementi del processo per affermare che $P_{surv}(t_0, t_1) = P_{surv}(t_{M-1}, t_M)$, imponendo $X_{t_{M-1}} = 0$. Se, invece, $X_t = Y_t + D_t$ con D deterministico, gli incrementi di X non soddisfano più la proprietà di stazionarietà, impedendo di agire come nel caso di X Lévy puro. Questo problema può essere risolto adottando un approccio forward in time anziché uno backward in time.

4.2.2 Metodo CONV backward

Il CONV (Lord, Fang, Bervoets e Oosterlee, 2007) è un metodo numerico di pricing basato sull'utilizzo della trasformata di Fourier. Così come il COS, è nato per prezzare principalmente opzioni barriera a monitoraggio discreto e bermuda options, ma è generalizzabile a una grande varietà di payoff. Il CONV può inoltre essere utilizzato per calcolare le probabilità di sopravvivenza di un'azienda il cui firm value sia guidato da un processo di Lévy, oppure da un processo costituito da una componente deterministica e una stocastica di Lévy. Quest'ultimo caso è particolarmente utile per la stima di (3.1) e (3.2), che richiedono il calcolo di un valore atteso condizionato al processo Z .

Si supponga che il default di un'azienda possa avvenire in qualsiasi istante a patto che il suo firm value raggiunga o superi una prestabilita soglia inferiore. Si assuma inoltre che il firm value sia guidato da un processo di Lévy X e che la soglia di default sia K volte il valore iniziale dell'azienda ($K \in [0, 1)$). Allora il fallimento avviene nel primo istante $t \geq 0$ tale che:

$$S_t = S_0 e^{X_t} \leq K S_0.$$

Ossia:

$$X_t \leq \log(K).$$

Si introduca ora una discretizzazione temporale equispaziata $t_0 < \dots < t_M$ in cui ogni istante temporale disti dal successivo dt . Si definisca inoltre $p(y, t_m)$ la probabilità di sopravvivenza da t_m fino a t_M noto $X_{t_m} = y$. Allora si può scrivere:

$$p(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(v, t_{m+1}) f_{X_{t_{m+1}}|X_{t_m}}(v|y) dv \mathbf{1}_{y > \log(K)}, \quad (4.4)$$

dove $\mathbf{1}_{y > \log(K)}$ rappresenta la funzione indicatrice dell'evento $y > \log(K)$ e $f(\cdot|X_{t_m})$ è la densità condizionale del processo X .

Per un processo di Lévy inoltre sussiste la seguente relazione:

$$f_{X_t|X_s}(y|x) = f_{X_{t-s}}(y-x), \quad 0 < s < t, \quad (4.5)$$

dove $f(\cdot)_{X_{t-s}}$ è la densità del processo X . Sostituendo questa espressione nella (4.4) e adoperando il cambio di variabile $w = v - y$ si ottiene:

$$p(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y+w, t_{m+1}) f(w) dw \mathbf{1}_{y > \log(K)},$$

dove $f(\cdot)$ è una notazione abbreviata per $f_{X_{dt}}(\cdot)$.

Per comodità si può considerare, equivalentemente:

$$p(y, t_m) = C(y, t_m) \mathbf{1}_{y > \log(K)}, \quad (4.6)$$

dove:

$$C(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y+w, t_{m+1}) f(w) dw. \quad (4.7)$$

Si introducano a questo punto la trasformata di Fourier di una funzione h e la sua inversa:

$$\hat{h}(u) = \mathcal{F}\{h(t)\}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iut} h(t) dt; \quad (4.8)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{h}(u)\}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iut} \hat{h}(u) du. \quad (4.9)$$

Eseguendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione (4.7) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \int_{\mathbb{R}} p(y+w, t_{m+1}) f(w) dw dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu(y+w)} p(y+w, t_{m+1}) f(w) e^{-iuy} dw dy. \end{aligned}$$

Cambiando ordine di integrazione ed eseguendo il cambio di variabile $y' = y + w$ si ha:

$$\mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuy'} p(y', t_{m+1}) dy' f(w) e^{-iuy} dw =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy'} p(y', t_{m+1}) dy' \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-iuw} dw.$$

Perciò, infine, si può affermare che:

$$\mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) = \mathcal{F}\{p(y', t_{m+1})\}(u) \phi_X(-u),$$

dove $\phi_X(\cdot)$ denota la funzione caratteristica di X_{dt} .

Grazie a questa formula è possibile introdurre un rapido algoritmo ricorsivo per calcolare la probabilità di sopravvivenza da t_0 fino a t_M . Si riportano schematicamente i passaggi da eseguire:

1. $p(y, t_M) = \mathbf{1}_{y > \log(K)}$;
2. Ripetere, per $m = M, \dots, 1$:
 $C(y, t_{m-1}) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p(y', t_{m+1})\}(u) \phi_X(-u)\}$,
 $p(y, t_{m-1}) = C(y, t_{m-1}) \mathbf{1}_{y > \log(K)}$;
3. $P_{surv}(t_0, t_M) = p(y = 0, t_0)$.

L'intero algoritmo ruota intorno alla trasformata di Fourier e alla sua inversa, perciò è cruciale eseguire queste operazioni in modo efficiente. Per fare questo è possibile servirsi dell'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Si rende perciò necessario anzitutto introdurre le seguenti griglie di discretizzazione:

$$u_j = u_0 + j\Delta u; \quad y_j = y_0 + j\Delta y; \quad w_j = w_0 + j\Delta w; \quad j = 0, \dots, N-1;$$

$$\Delta y = \Delta w; \quad \Delta y \Delta u = \frac{2\pi}{N}; \quad N = 2^{10}.$$

Per la scelta di $y_0, w_0, u_0, \Delta y, \Delta w$ e Δu nell'articolo di Lord, Fang, Bervoets e Oosterlee si suggerisce:

$$y_0 = w_0 = -\frac{L}{2}; \quad u_0 = -\frac{N}{2} \Delta u; \quad \Delta y = \Delta w = \frac{L}{N}; \quad \Delta u = \frac{2\pi}{L}.$$

Nelle precedenti espressioni L è così definito:

$$L = \delta \sqrt{-\phi''_{X_{t_M}}(0) + (\phi'_{X_{t_M}}(0))^2},$$

dove $\phi'_{X_{t_M}}(\cdot)$ e $\phi''_{X_{t_M}}(\cdot)$ sono rispettivamente la derivata prima e seconda di $\phi_{X_{t_M}}(\cdot)$ e dove $\delta = 20$ per il moto browniano e $\delta = 40$ per il NIG.

Ora è possibile ottenere in via approssimata $C(y, t_{m-1})$ servendosi dell'algoritmo FFT. Introducendo infatti $k_0 = k_{N-1} = \frac{1}{2}$ e $k_n = 1, n = 1, \dots, N-2$ si può scrivere:

$$C(y_p, t_{m-1}) \simeq \frac{\Delta u \Delta w}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j y_p} \phi(-u_j) \sum_{n=0}^{N-1} k_n e^{iu_j w_n} v(w_n) =$$

$$= \frac{e^{-iu_0(y_0+p\Delta w)}}{2\pi} \Delta u \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijp2\pi/N} e^{ij(w_0-y_0)\Delta u} \phi(-u_j) \hat{v}(u_j),$$

dove:

$$\hat{v}(u_j) \simeq e^{iu_0 w_0} \Delta w \sum_{n=0}^{N-1} e^{ijn2\pi/N} e^{inu_0 \Delta w} k_n v(w_n).$$

Perciò, infine:

$$C(y_p, t_{m-1}) \simeq e^{iu_0(w_0-y_0)} (-1)^p \mathcal{D}_p^{-1} \left[e^{ij(w_0-y_0)\Delta u} \phi(-u_j) \mathcal{D}_j \{ (-1)^n k_n v(w_n) \} \right],$$

dove \mathcal{D} e \mathcal{D}^{-1} rappresentano rispettivamente la trasformata discreta di Fourier e la sua inversa, definite come segue:

$$\mathcal{D}_j \{x_n\} := \sum_{n=0}^{N-1} e^{ijn2\pi/N} x_n; \quad \mathcal{D}_n^{-1} \{x_j\} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ijn2\pi/N} x_j.$$

Grazie all'utilizzo dell'algoritmo FFT per eseguire le trasformate discrete di Fourier dirette e inverse l'intera ricorsione del metodo CONV risulta molto rapida, avendo un costo computazionale complessivo pari a $O(MN \log_2(N))$.

Un punto di forza di questo algoritmo, come per il COS, è la possibilità di ottenere tutte le survival probabilities da t_0 a t_m , $m = 1, \dots, M$ all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. La probabilità di sopravvivenza da t_0 a t_1 è $p(x=0, t_{M-1})$, quella da t_0 a t_2 è $p(x=0, t_{M-2})$, eccetera. Questo permette di ridurre notevolmente l'onere computazionale.

Processi deterministico - stocastici

Si ipotizzi che il processo X non sia un Lévy puro, ma che sia possibile scrivere $X_t = Y_t + D_t$ dove Y è un processo di Lévy e D ingloba tutte le componenti deterministiche del processo X . Si osservi che nella (3.1) e nella (3.2) $D_t = a_j Z_t - \psi_Z(-a_j i)t$. Le relazioni (4.6) della sezione precedente devono essere sostituite con:

$$p(y, t_m) = C(y, t_m) \mathbf{1}_{y > \log(K) - D_{t_m}},$$

dove:

$$C(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y+w, t_{m+1}) f(w) dw.$$

L'algoritmo CONV risulta perciò identico a quello del caso di X Lévy eccetto per la modifica appena evidenziata. Purtroppo, tuttavia, l'introduzione della componente deterministica del processo X rende impossibile ottenere tutte le survival probabilities da t_0 a qualsiasi istante della griglia all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$, perché in tale situazione gli incrementi di X non sono stazionari. Questo inconveniente è del tutto analogo a quello riscontrato nel metodo COS backward, e anche in questo caso la soluzione al problema consiste nell'adottare un approccio forward in time.

4.3 Metodi forward in time

Nella precedente sezione si sono discussi gli algoritmi COS e CONV con un approccio backward in time. In entrambi i casi si è evidenziata la possibilità di calcolare all'interno della ricorsione necessaria per ottenere $P_{surv}(t_0, t_M)$ le probabilità di sopravvivenza dall'istante iniziale a ogni nodo della griglia temporale. Questa proprietà, tuttavia, è risultata valida soltanto qualora si assuma che il driving process del firm value sia un processo di Lévy. Aggiungendo una componente deterministica al processo la proprietà cade. Per ovviare a questo problema si può adottare un approccio forward in time: operando in questo modo è possibile calcolare la survival probability dall'istante iniziale a qualsiasi nodo della griglia in un'unica ricorsione, anche qualora il firm value dell'azienda sia guidato da un processo formato da una componente Lévy e una deterministica.

4.3.1 Metodo COS forward

Come nella trattazione del COS backward, l'obiettivo è calcolare le survival probabilities di un'azienda il cui firm value sia guidato da un processo di Lévy X e il cui default avvenga qualora il valore di questo processo raggiunga o superi una predefinita soglia inferiore $\log(K)$. Naturalmente è possibile generalizzare la trattazione al caso di un processo costituito da una parte stocastica di Lévy e una deterministica.

Si introduca una discretizzazione temporale equispaziata $t_0 < \dots < t_M$ in cui ogni istante temporale disti dal successivo dt . Si definisca inoltre $p(x, t_m)$ la probabilità che l'azienda sopravviva da t_0 fino a t_m e che $X_{t_m} = x$. Allora vale:

$$\begin{cases} p(x, t_0) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ 0 & x \neq 0; \end{cases} \\ p(x, t_{m+1}) = \int_{\log(K)}^{\infty} f_{X_{t_{m+1}}|X_{t_m}}(x|y)p(y, t_m)dy, & m = 0, \dots, M-1; \\ P_{surv}(t_m) = \int_{\log(K)}^{\infty} p(x, t_m)dx. \end{cases} \quad (4.10)$$

Sfruttando l'equazione (4.1):

$$p(x, t_{m+1}) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n^m(x) P_n(t_m); \quad (4.11)$$

$$P_n(t_m) = \text{Re} \left[\phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a}, dt \right) \int_{\log(K)}^b e^{in\pi \frac{y-a}{b-a}} p(y, t_m) dy \right], \quad n = 0, \dots, N-1; \quad (4.12)$$

$$\phi_n^m(x) = \frac{2}{b-a} \cos \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Dalle precedenti relazioni discende che:

$$P_n(t_m) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left[\phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a}, dt \right) \omega_{k,n} \right] P_k(t_{m-1}), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

dove:

$$\omega_{k,n} = \frac{2}{b-a} \int_{\log(K)}^b e^{in\pi \frac{y-a}{b-a}} \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy, \quad n, k = 0, \dots, N-1.$$

Come visto nel caso backward in time l'approccio migliore per ottimizzare il costo computazionale dell'algoritmo consiste nel trasformare le relazioni scalari (4.12) in relazioni vettoriali. Sia:

$$\mathbf{P}(t_m) = \begin{pmatrix} P_0(t_m) \\ P_1(t_m) \\ \vdots \\ P_{N-1}(t_m) \end{pmatrix}.$$

Allora le equazioni (4.12) possono essere riscritte in forma vettoriale. Per farlo è necessario introdurre le seguenti matrici:

$$\Lambda = \text{diag} \left(\left[\phi_X \left(\frac{n\pi}{b-a}, dt \right) \right]_{n=0}^{N-1} \right);$$

$$\Omega = H + T;$$

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{N-1} \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1} & \omega_N & \dots & \omega_{2N-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}; \quad T = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_{-1} & \dots & \omega_{1-N} \\ \omega_1 & \omega_0 & \dots & \omega_{2-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1} & \omega_{N-2} & \dots & \omega_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N};$$

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{b-\log(K)}{b-a}, & j = 0, \\ -\frac{i}{\pi} \frac{e^{i\pi j} - e^{-i\pi j} \frac{\log(K)-a}{b-a}}{j}, & j \neq 0. \end{cases}$$

A questo punto le equazioni (4.12) vengono riscritte nella forma:

$$\mathbf{P}(t_{m+1}) = \text{Re}(\Lambda\Omega) \mathbf{P}(t_m), \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Si osservi che le matrici H e T sono, rispettivamente, una matrice di Toeplitz e una di Hankel. Allora si possono utilizzare algoritmi basati sul metodo FFT (Fast Fourier Transform) per eseguire i prodotti matrice-vettore³, cosicché la ricorsione risulta molto rapida: il costo computazionale per ottenere $\mathbf{P}(t_M)$ è di $O((M-1)N \log_2(N))$.

³Si rimanda il lettore all'Appendice A.

Grazie alla relazione (4.11) è possibile ottenere $p(x, t_m)$ per qualsiasi istante della griglia temporale. Sfruttando poi la relazione (4.10) (con un'opportuna formula di quadratura) è possibile ricavare le probabilità di sopravvivenza da t_0 a qualsiasi istante della griglia temporale nel corso della ricorsione forward in time che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$.

Processi deterministico - stocastici

Come nel caso backward è possibile generalizzare il metodo COS forward a processi costituiti da una componente deterministica e una stocastica di Lévy. Si scriverà $X_t = Y_t + D_t$, dove il processo Y è un Lévy e nel processo D vengono inglobate tutte le componenti deterministiche del processo X . Si osservi che nella (3.1) e nella (3.2) $D_t = a_j Z_t - \psi_Z(-a_j i)t$.

La trattazione procede in modo identico al caso di X processo di Lévy, fatta eccezione per $p(x, t_0) = \mathbf{1}_{x=D_{t_0}}$, la definizione di $\phi_n^m(x)$, quella di Λ , che ora varia ad ogni passo temporale, e quella di $P_n(t_0)$. Si ottiene, infatti:

$$\begin{aligned}\phi_n^m(x) &= \frac{2}{b-a} \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) e^{\frac{in\pi}{b-a}(D_{t_{m+1}}-D_{t_m})}, \quad n = 0, \dots, N-1; \\ \Lambda_m &= \text{diag}\left(\left[\phi_X\left(\frac{n\pi}{b-a}, dt\right) e^{\frac{in\pi}{b-a}(D_{t_{m+1}}-D_{t_m})}\right]_{n=0}^{N-1}\right); \\ P_n(t_0) &= \text{Re}\left[\phi_X\left(\frac{n\pi}{b-a}, dt\right) e^{in\pi \frac{D_{t_0}-a}{b-a}} e^{\frac{in\pi}{b-a}(D_{t_1}-D_{t_0})}\right]; \\ \mathbf{P}(t_{m+1}) &= \text{Re}(\Lambda_m \Omega) \mathbf{P}(t_m), \quad m = 0, \dots, M-1.\end{aligned}$$

Nel COS backward, se $X_t = Y_t + D_t$ con D processo deterministico, non è possibile ottenere le survival probabilities da t_0 a ogni istante della griglia temporale all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. Nel COS forward questo è invece ancora possibile, perciò è altamente preferibile l'utilizzo di questo metodo numerico qualora X non sia un Lévy puro.

4.3.2 Metodo CONV forward

Così come per il CONV backward, l'obiettivo del CONV forward è quello di ottenere le probabilità di sopravvivenza di un'azienda con un firm value guidato da un processo di Lévy X e che fallisca qualora il valore di X tocchi o superi una predefinita soglia inferiore $\log(K)$. L'ipotesi sul driving process può essere anche rilassata ammettendo che esso incorpori una componente puramente deterministica.

Sia $t_0 < \dots < t_M$ una griglia temporale equispaziata in cui ogni istante disti dal successivo dt . Si definisca inoltre $p(y, t_m)$ la probabilità di sopravvivenza da t_0 fino a t_m con $X_{t_m} = y$. Allora si può scrivere:

$$p(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(v, t_{m-1}) f_{X_{t_m}|X_{t_{m-1}}}(y|v) dv \mathbf{1}_{y > \log(K)},$$

dove $\mathbf{1}_{y > \log(K)}$ rappresenta la funzione indicatrice dell'evento $y > \log(K)$ e $f(\cdot|\cdot)_{X_t|X_s}$ è la densità condizionale del processo X .

Servendosi dell'equazione (4.5) e operando il cambio di variabile $w = v - y$ si ottiene:

$$p(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y + w, t_{m-1}) f(-w) dw \mathbf{1}_{y > \log(K)},$$

dove $f(\cdot)$ è una notazione abbreviata per $f_{X_{dt}}(\cdot)$.

In maniera del tutto equivalente si può scrivere:

$$p(y, t_m) = C(y, t_m) \mathbf{1}_{y > \log(K)}, \quad (4.13)$$

dove:

$$C(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y + w, t_{m-1}) f(-w) dw.$$

Si introducano a questo punto la trasformata di Fourier e la sua inversa come nella (4.8) e nella (4.9). Trasformando entrambi i membri della precedente relazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \int_{\mathbb{R}} p(y + w, t_{m-1}) f(-w) dw dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu(y+w)} p(y + w, t_{m-1}) f(-w) e^{-iuw} dw dy. \end{aligned}$$

Cambiando ordine di integrazione e introducendo il cambio di variabile $y' = y + w$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuy'} p(y', t_{m-1}) dy' f(-w) e^{-iuw} dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy'} p(y', t_{m-1}) dy' \int_{\mathbb{R}} f(-w) e^{-iuw} dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy'} p(y', t_{m-1}) dy' \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{iww} dw. \end{aligned}$$

Perciò, infine, si ottiene:

$$\mathcal{F}\{C(y, t_m)\}(u) = \mathcal{F}\{p(y', t_{m-1})\}(u) \phi_X(u),$$

dove $\phi_X(\cdot)$ indica la funzione caratteristica di X_{dt} .

Da questa equazione nasce un metodo numerico molto efficiente per calcolare la probabilità di sopravvivenza dell'azienda dall'istante t_0 fino a t_M . Si riportano in forma schematica i passaggi da eseguire:

-
1. $p(y, t_0) = \mathbf{1}_{y=0}$;
 2. Ripetere, per $m = 1, \dots, M$:

$$C(y, t_m) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p(y', t_{m-1})\}(u)\phi_X(u)\},$$

$$p(y, t_m) = C(y, t_m)\mathbf{1}_{y>\log(K)};$$
 3. $P_{surv}(t_0, t_M) = \int_{\mathbb{R}} p(y, t_M)dy$.

Come nel caso backward in time, il fulcro del metodo numerico consiste nel calcolo di trasformate di Fourier dirette e inverse, che devono essere eseguite in modo efficiente per rendere rapido l'algoritmo. Ci si può dunque servire del metodo FFT (Fast Fourier Transform). Poiché i passaggi ricalcano perfettamente quelli proposti in 'CONV backward', si rimanda il lettore a quella sezione per i dettagli implementativi.

Un aspetto importante del metodo presentato è la possibilità di calcolare all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$ la survival probability da t_0 a qualsiasi istante della griglia temporale. In effetti $P_{surv}(t_0, t_1) = \int_{\mathbb{R}} p(y, t_1)dy$, $P_{surv}(t_0, t_2) = \int_{\mathbb{R}} p(y, t_2)dy$, eccetera. Inoltre il costo computazionale degli integrali contenuti in queste espressioni è nullo, perché possono essere ottenuti tramite $\mathcal{F}\{p(y, t_m)\}(0)$, $m = 1, \dots, M$, che è già calcolata all'interno dello schema numerico.

Processi deterministico - stocastici

Sia X un processo nella forma $X_t = Y_t + D_t$ dove Y è un Lévy e D ingloba tutte le componenti deterministiche del processo X . Si osservi che nella (3.1) e nella (3.2) $D_t = a_j Z_t - \psi_Z(-a_j i)t$. Rispetto alla sezione precedente le relazioni (4.13) devono essere sostituite con:

$$p(y, t_m) = C(y, t_m) \mathbf{1}_{y>\log(K)-D_{t_m}},$$

dove:

$$C(y, t_m) = \int_{\mathbb{R}} p(y + w, t_{m-1})f(-w)dw.$$

L'algoritmo per ottenere le survival probabilities risulta perciò analogo a quello del caso di X Lévy, eccetto per la modifica appena evidenziata.

Con il CONV backward, se X contiene una componente deterministica, non si possono ottenere le probabilità di sopravvivenza da t_0 a qualsiasi istante futuro all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. Tramite il CONV forward questo è invece possibile, perciò questo metodo risulta decisamente consigliabile nel caso in cui X non sia un Lévy puro.

4.4 Confronto numerico

Nelle precedenti sezioni si sono introdotti diversi algoritmi per il calcolo delle survival probabilities: il metodo Monte Carlo, il COS (backward e forward) e il CONV (backward e forward). Ora si desidera mostrare che tutti questi algoritmi sono in grado di fornire risultati di pari accuratezza, tramite alcune simulazioni numeriche. I driving processes che si prendono in analisi per il firm value dell'azienda sono il moto browniano e il NIG. In entrambi i casi si prova anche ad aggiungere una componente deterministica cosinusoidale.

Per il metodo Monte Carlo si eseguono 10^7 iterazioni. Per il COS si pongono $N = 2^{12}$ e $L = 10$. Nel caso forward in time i punti della griglia di integrazione sono 2^{11} . Per il CONV si sceglie infine $N = 2^{11}$.

Il valore iniziale dell'azienda è $S = 1$, mentre il livello di default è posto a $K = 0.3$. Si ipotizzano un dividend yield $q = 0.005$ e un tasso d'interesse risk-free costante $r = 0.01$. L'orizzonte temporale è di un anno. Per il moto browniano $\sigma = 0.4$, mentre per il NIG si assumono $\sigma = 0.2$, $k = 4$ e $\theta = -0.01$. Il processo deterministico è in ultimo nella forma $D_{t_m} = \frac{1}{10} \cos(m + 1)$.

Dai grafici emerge chiaramente che tutti i metodi risultano altrettanto validi in accuratezza, perciò la scelta dell'algoritmo da utilizzare deve essere guidata dal costo computazionale.

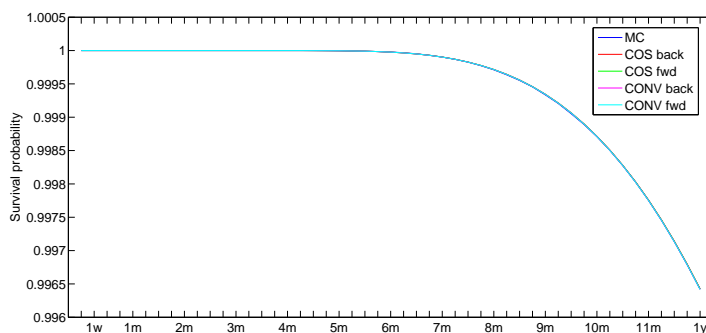


Figura 4.1: Driving process browniano.

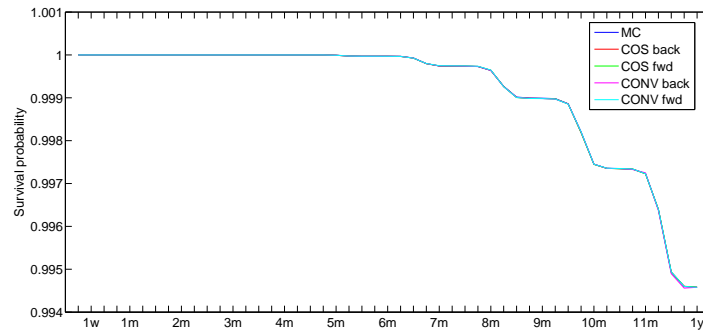


Figura 4.2: Driving process browniano con aggiunta della componente deterministica.

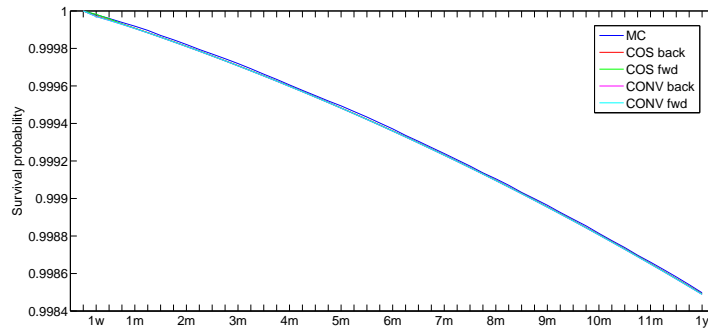


Figura 4.3: Driving process NIG.

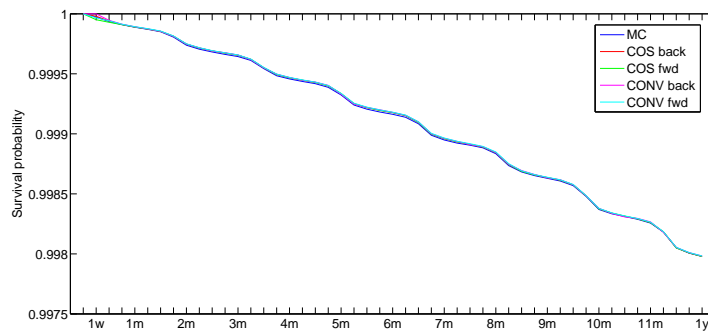


Figura 4.4: Driving process NIG con aggiunta della componente deterministica.

La tabella seguente riporta il tempo di esecuzione di ciascun metodo numerico per ognuna delle specifiche adottate per il firm value dell'azienda:

Tabella 4.1: Tempi di calcolo dei diversi schemi numerici (in secondi).

	Monte Carlo	COS back.	CONV back.	COS forw.	CONV forw.
B&S	42.6105	0.0766	0.0553	2.4041	0.0685
B&S+ D_t	42.9634	1.6147	0.9893	2.4045	0.0693
NIG	77.2538	0.0780	0.0607	2.4047	0.0727
NIG+ D_t	77.4747	1.6166	1.0132	2.4056	0.0729

Con D_t si indica la presenza di una componente deterministica nel processo che governa il firm value dell'azienda.

Il metodo Monte Carlo è evidentemente l'algoritmo più oneroso. Inoltre, mentre gli altri schemi numerici forniscono tempi di calcolo paragonabili se la specifica del driving process è Black & Scholes oppure NIG, nel Monte Carlo i tempi di esecuzione del caso NIG sono quasi doppi rispetto a quelli del caso Black & Scholes.

Come già discusso nei paragrafi precedenti, se il processo che governa il firm value dell'azienda contiene una componente deterministica, con gli algoritmi backward in time non è possibile ottenere tutte le $P_{surv}(t_0, t_m)$, $m = 1, \dots, M$ all'interno della ricorsione che fornisce $P_{surv}(t_0, t_M)$. Per questa ragione i tempi di esecuzione crescono notevolmente, rendendo questi schemi numerici sconsigliabili.

Il problema dell'approccio backward è risolto nelle varianti forward di COS e CONV. Il COS, tuttavia, risulta molto oneroso, a causa del calcolo dell'integrale nella (4.10), eseguito numericamente. Affinché il metodo risulti sufficientemente preciso il numero di nodi di integrazione deve essere molto elevato, soprattutto nel caso NIG, e ciò si riflette in un costo computazionale notevole.

Il CONV forward, invece, risulta il metodo numerico migliore nel caso in cui sia presente una componente deterministica nel driving process, e ha un costo paragonabile a quello dei metodi backward in assenza di questa. In conclusione, qualora il processo che governa il firm value dell'azienda sia un Lévy puro l'algoritmo meno oneroso a parità di accuratezza è il CONV backward, con un costo tuttavia paragonabile alla sua versione forward e al COS backward. Qualora invece il driving process presenti una componente deterministica lo schema numerico da preferirsi è il CONV forward.

Capitolo 5

Calibrazione del modello

Nei precedenti capitoli si sono introdotti i processi di Lévy, utilizzati per descrivere le controparti e il reference name di un contratto forward. Si sono inoltre definiti il CVA, il DVA e il BVA, e si è mostrata la relazione di uguaglianza tra il CVA di una controparte e il DVA dell'altra. Si è poi studiato come ottenere queste misure di rischio, e si è riscontrata la necessità di calcolare le probabilità di sopravvivenza di un'azienda. Nel capitolo 4 sono stati presentati quindi differenti approcci a questo problema, evidenziandone pregi e difetti.

In questo capitolo si introduce un esempio di contratto forward, stipulato da ENI (posizione 'lunga') e Deutsche Bank (posizione 'corta') sul reference name Brent Crude Oil. Prima di procedere con la valutazione del rischio di controparte associato a questo contratto è necessario calibrare la curva dei tassi di interesse, i livelli di default per ENI e DB e i processi di Lévy che governano i firm value delle controparti e il reference name. Anzitutto deve essere calibrata la curva dei tassi tramite depositi, future e IRS. Successivamente si può procedere con la calibrazione dei processi X_j , $j = 1, 2$ e dei livelli di default K_j , $j = 1, 2$. Si ricorda che il pedice 1 è riservato alla controparte 'corta', perciò DB, mentre il pedice 2 è riservato a quella 'lunga', perciò ENI. Per eseguire questa calibrazione si minimizza la differenza tra gli spread di credito del mercato e quelli previsti dal modello. In seguito viene calibrato il processo X_3 , ossia il reference name Brent Crude Oil, sfruttando opzioni europee call e put out of the money (le più liquide). Infine vengono calibrati Y_j , $j = 1, 2, 3$ e a_j , $j = 1, 2, 3$, studiando le correlazioni tra i tre asset tramite una serie storica di cinque anni.

5.1 Bootstrap della curva dei tassi risk - free

In questa sezione si mostra come ottenere la curva dei tassi di sconto risk-free a partire dai dati di mercato. Gli strumenti utilizzati sono i depositi, i future su tassi d'interesse e gli interest rate swaps (IRS), in quanto questi contratti possono essere considerati in prima approssimazione privi di rischio. Per ogni scadenza è opportuno servirsi dello strumento

più liquido presente sul mercato al fine di ottenere il tasso di sconto relativo a quella data. Si utilizzano perciò i depositi esclusivamente per le date antecedenti alla settlement date del primo future disponibile, per poi servirsi dei future fino a due anni. A partire da questa scadenza lo strumento più liquido diviene l'IRS, che viene utilizzato per ricostruire il resto della curva.

5.1.1 Depositi

Sia $L(t_0, t_0, t_1)$ il tasso d'interesse Euribor (spot) applicato ai depositi per il periodo dalla data t_0 a t_1 . Si indichi con $\delta(t_0, t_1)$ la frazione d'anno tra le due scadenze, secondo la convenzione ACT/360. Vale la seguente relazione (si rimanda, ad esempio, a Brigo e Mercurio, 2006):

$$B(t_0, t_0, t_1) = \frac{1}{1 + \delta(t_0, t_1)L(t_0, t_0, t_1)}, \quad (5.1)$$

dove $B(t_0, t_0, t_1)$ è il tasso di sconto (spot) privo di rischio tra la data t_0 e la data t_1 . Grazie a questa relazione, osservando il tasso d'interesse Euribor sui depositi, è possibile ricostruire il tasso di sconto dalla reference date t_0 alle scadenze per cui i depositi sono quotati.

5.1.2 Forward rate agreement (FRA)

Un forward rate agreement è un contratto derivato sui tassi d'interesse Euribor. Nel giorno t_0 , detto reference date, le due controparti A e B determinano due scadenze future, $t_1 < t_2$. La controparte A si impegna a pagare a B in t_2 l'interesse maturato tra t_1 e t_2 tramite il tasso $L(t_1, t_1, t_2)$, ricevendo in cambio da B il tasso $L(t_0, t_1, t_2)$. $L(t_1, t_1, t_2)$ è il tasso Euribor spot da t_1 a t_2 , mentre $L(t_0, t_1, t_2)$ è il forward Euribor in t_0 per un prestito risk-free da t_1 a t_2 . Si osservi che in t_0 non avviene alcun flusso di denaro.

Dall'applicazione del principio di non arbitraggio a questo contratto si ottiene la seguente relazione (Brigo e Mercurio, 2006):

$$B(t_0, t_0, t_2) = \frac{B(t_0, t_0, t_1)}{1 + \delta(t_1, t_2)L(t_0, t_1, t_2)}, \quad (5.2)$$

dove $B(t_0, t_0, t_j)$ è il tasso di sconto (spot) privo di rischio tra la data t_0 e la data t_j , $j = 1, 2$ e dove $\delta(t_1, t_2)$ è la frazione d'anno compresa tra t_1 e t_2 secondo la convenzione ACT/360.

Poiché i FRA sono contratti OTC (over the counter), essi non sono sufficientemente liquidi per eseguire una procedura di bootstrap accurata. Risulta perciò preferibile servirsi dei future sull'Euribor, che sono invece contratti standardizzati. Essi sono molto più liquidi, e per scadenze sufficientemente brevi la relazione (5.2) resta ragionevolmente valida, in quanto il prezzo di FRA e future è molto allineato.

Grazie alla (5.2) è possibile ottenere il tasso di sconto dalla reference date alla data t_2 (expiry del future) a patto di conoscere il tasso di sconto per la data di settlement del contratto t_1 e il forward Euribor applicato.

5.1.3 Interest rate swap (IRS)

Un interest rate swap è un contratto derivato sui tassi Euribor. Nel giorno t_0 le controparti A e B si accordano sul tasso d'interesse costante s che A pagherà annualmente a B fino al termine del contratto. In cambio B pagherà trimestralmente l'Euribor3M ad A. Gli IRS scambiati sul mercato hanno expiry distanziate di un anno l'una dall'altra. Si osservi che in un contratto di questo tipo non c'è alcun flusso di denaro in t_0 .

Siano ora $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ date equidistanziate di un anno e si introducano $\delta(t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \dots, n$ frazioni d'anno secondo la convenzione 30/360. Siano inoltre $B(t_0, t_0, t_j)$ i tassi di sconto risk-free (spot) dalla data t_0 alle date t_j , con $j = 1, \dots, n$. Allora vale la seguente relazione (Brigo e Mercurio, 2006):

$$B(t_0, t_0, t_n) = \frac{1 - s \sum_{j=1}^{n-1} \delta(t_{j-1}, t_j) B(t_0, t_0, t_j)}{1 + s \delta(t_{n-1}, t_n)}, \quad (5.3)$$

dove s è il tasso d'interesse fisso di un IRS di durata da t_0 a t_n in cui la gamba fissa paga annualmente il tasso s e la gamba variabile paga trimestralmente il tasso Euribor.

Grazie alla (5.3) è possibile ottenere il tasso di sconto dalla reference date t_0 alla data t_n a patto di conoscere i tassi di sconto per le scadenze intermedie e il tasso d'interesse della gamba fissa dell'IRS.

5.1.4 Bootstrap della curva

Nei precedenti paragrafi si sono introdotte le tre importanti relazioni (5.1), (5.2) e (5.3). Facendo uso di queste equazioni è possibile estrapolare dalle quotazioni di mercato la curva dei tassi di sconto risk-free. Per farlo è sufficiente operare i seguenti passaggi:

- si ottengono i tassi di sconto fino alla settlement date del primo future disponibile tramite i depositi (relazione (5.1));
- si sfrutta la relazione (5.2) per ottenere i tassi di sconto fino alla scadenza di due anni;
- tramite la relazione (5.3) si ricavano i tassi per scadenze pari o superiori a due anni.

Nell'implementazione dell'algoritmo talvolta risulta necessario conoscere il tasso di sconto relativo a una data prossima, ma non coincidente, a una scadenza per cui il tasso risk-free è già stato calcolato. Il modo più semplice di procedere, in tale situazione, è eseguire un'interpolazione lineare. Non è tuttavia consigliabile operare questa procedura sui tassi di sconto. È decisamente preferibile agire sugli zero rates, così definiti:

$$y(t_0, t_i) := -\frac{\log(B(t_0, t_0, t_i))}{\delta(t_0, t_i)}, \quad (5.4)$$

dove $\delta(t_0, t_i)$ è la frazione d'anno tra t_0 e t_i secondo la convenzione ACT/365.

Si supponga ad esempio di disporre dei tassi di sconto $B(t_0, t_0, t_1)$ e $B(t_0, t_0, t_3)$, ma di necessitare del tasso $B(t_0, t_0, t_2)$, dove $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Allora si può procedere come segue:

- a partire da $B(t_0, t_0, t_1)$ e $B(t_0, t_0, t_3)$ si ricavano $y(t_0, t_1)$ e $y(t_0, t_3)$, grazie alla relazione (5.4);
- tramite interpolazione lineare si ottiene $y(t_0, t_2)$;
- invertendo la (5.4) si ottiene $B(t_0, t_0, t_2)$.

La formula di interpolazione lineare è la seguente:

$$y(t_0, t_2) := \frac{\delta(t_0, t_2) - \delta(t_0, t_1)}{\delta(t_0, t_3) - \delta(t_0, t_1)} [y(t_0, t_3) - y(t_0, t_1)].$$

Si osservi che la procedura di bootstrap della curva risk-free fornisce soltanto i tassi di sconto relativi ad alcune scadenze. Qualora sia necessario conoscere anche i tassi reativi ad altre date si può operare, come già mostrato nella procedura di costruzione della curva, un'interpolazione lineare sugli zero rates. Si rimanda a Brigo e Mercurio, 2006, per ulteriori dettagli.

5.2 Bootstrap delle survival probabilities

In questa sezione si propone un algoritmo sviluppato da O'Kane e Turnbull, 2003, per l'estrapolazione delle probabilità di sopravvivenza di un'azienda a partire dagli spread dei credit default swap (CDS) scritti su di essa.

Un CDS è un contratto derivato in cui una controparte A garantisce alla controparte B il pagamento di un tasso d'interesse costante (spread del CDS) trimestralmente fino alla scadenza del contratto o fino al default del reference name su cui è scritto il derivato. Qualora il default avvenga, la controparte B è tenuta a versare ad A la loss given default ($1 - R$, dove R è il recovery rate del reference name). Si osservi che non avviene alcun flusso di denaro nella data in cui il contratto viene stipulato.

Si ipotizzi che sul mercato siano disponibili i CDS scritti su un determinato reference name per le scadenze di 1, 3, 5 e 7 anni. Nel modello di O'Kane e Turnbull si assume che la probabilità di sopravvivenza del reference name da $t_0 = 0$ fino a $\tau > 0$ sia descritta da:

$$P_{surv}(t_0, \tau) = \begin{cases} e^{-\lambda_{0,1}\tau}, & 0 < \tau \leq 1; \\ e^{-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,3}(\tau-1)}, & 1 < \tau \leq 3; \\ e^{-\lambda_{0,1} - 2\lambda_{1,3} - \lambda_{3,5}(\tau-3)}, & 3 < \tau \leq 5; \\ e^{-\lambda_{0,1} - 2\lambda_{1,3} - 2\lambda_{3,5} - \lambda_{5,7}(\tau-5)}, & 5 < \tau \leq 7; \\ e^{-\lambda_{0,1} - 2\lambda_{1,3} - 2\lambda_{3,5} - 2\lambda_{5,7} - \lambda_{7,10}(\tau-7)}, & \tau > 7. \end{cases} \quad (5.5)$$

In questa espressione $\lambda_{i,j}$ prende il nome di ‘hazard rate’ per il periodo che intercorre tra l’anno i e l’anno j . L’hazard rate è assunto costante a tratti per semplicità modellistica: sarebbe possibile ipotizzarlo lineare a tratti, ma le probabilità di sopravvivenza resterebbero pressoché immutate.

Servendosi del principio di non arbitraggio applicato al CDS di durata pari a un anno è possibile scrivere la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{s(t_0, t_0 + 1_{year})}{1 - R} \sum_{n=3,6,9,12} \delta(t_{n-3}, t_n) B(t_0, t_0, t_n) e^{-\lambda_{0,1} \tau(t_0, t_n)} = \\ = \sum_{m=1}^{12} B(t_0, t_0, t_m) (e^{-\lambda_{0,1} \tau(t_0, t_{m-1})} - e^{-\lambda_{0,1} \tau(t_0, t_m)}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

In questa equazione $s(t_0, t_0 + 1_{year})$ è lo spread del CDS di durata pari a un anno. $\delta(t_{n-3}, t_n)$, $n = 3, 6, 9, 12$ rappresenta la frazione d’anno secondo la convenzione ACT/360 tra t_{n-3} e t_n , date consecutive di pagamento dello spread. $B(t_0, t_0, t_j)$ è invece il tasso di sconto privo di rischio (spot) da $t_0 = 0$ fino alla data t_j . In ultimo $\tau(t_0, t_j)$ è la frazione d’anno tra t_0 e t_j secondo la convenzione ACT/365.

Invertendo l’equazione (5.6) si ricava $\lambda_{0,1}$. A questo punto è possibile scrivere un’analogha equazione relativa allo spread del CDS con scadenza pari a 3 anni, e ricavare $\lambda_{1,3}$. Allo stesso modo si possono ottenere anche $\lambda_{3,5}$, $\lambda_{5,7}$ e $\lambda_{7,10}$. Infine grazie alla relazione (5.5) si hanno le probabilità di sopravvivenza per qualsiasi scadenza $\tau > 0$.

5.3 Calibrazione di X_1 , X_2 , K_1 e K_2

Si è mostrato come, grazie all’algoritmo di O’Kane e Turnbull, si possano ottenere le survival probabilities sia per ENI che per DB a partire dagli spread dei CDS scritti su queste aziende. A questo punto risulta possibile calibrare i processi di Lévy X_1 e X_2 e i livelli di default K_1 e K_2 . Si ricorda che il pedice 1 è associato a DB mentre il pedice 2 è associato a ENI. Si definisca il credit spread dall’istante $t_0 = 0$ all’istante t_i , $i = 1, \dots, n$ come:

$$CS(t_0, t_i) = -\frac{1}{\delta(t_0, t_i)} \log[1 - P_{def}(t_0, t_i) + R P_{def}(t_0, t_i)],$$

dove $P_{def}(t_0, t_i)$ è la probabilità che l’azienda fallisca nell’intervallo di tempo compreso tra t_0 e t_i , $\delta(t_0, t_i)$ è la frazione d’anno che intercorre tra t_0 e t_i secondo la convenzione ACT/365 e R è il recovery rate dall’azienda.

Come detto le $P_{def}(t_0, t_i)$, $i = 1, \dots, n$ possono essere calibrate sulla base dei dati di mercato, tramite l’algoritmo di O’Kane e Turnbull. Se tuttavia si ipotizza una dinamica exponential Lévy per il firm value dell’azienda, è possibile calcolare queste probabilità anche con una delle tecniche proposte nel capitolo 4 (Monte Carlo, COS o CONV). Questa osservazione suggerisce un metodo molto efficace per calibrare i processi X_1 e X_2 e i livelli

di default K_1 e K_2 . Si fissi l'attenzione su X_1 e K_1 (per X_2 e K_2 l'algoritmo è identico): anzitutto si ottengono dal mercato i credit spread di DB relativi alle date di expiry dei CDS (in questi istanti il metodo di O'Kane e Turnbull raggiunge il massimo della propria precisione). Si esegue allora la calibrazione dei parametri di X_1 e di K_1 tramite la minimizzazione seguente:

$$\min_{h_1, \lambda_1} \sum_{i=1}^n \left[CS_1^{mkt}(t_0, t_i) - CS_1^{model}(t_0, t_i; h_1, \lambda_1) \right]^2, \quad (5.7)$$

dove $h_1 = \ln(\frac{K_1}{S_1(t_0)})$, $CS_1^{mkt}(t_0, t_i)$ è il credit spread di DB calibrato dal mercato per il periodo da t_0 a t_1 , $CS_1^{model}(t_0, t_i; h_1, \lambda_1)$ è il credit spread previsto dal modello e λ_1 rappresenta i parametri del firm value di DB. Nel caso in cui si scelga una specifica Black & Scholes $\lambda_1 = (\sigma_1, q_1)$. Nel caso in cui si scelga una dinamica NIG $\lambda_1 = (\sigma_1, k_1, \theta_1, q_1)$.

Utilizzando un algoritmo numerico di minimizzazione è possibile calibrare i parametri del processo di Lévy X_1 e la soglia del default K_1 . Il procedimento si ripete in modo del tutto analogo per la calibrazione di X_2 e di K_2 .

5.4 Calibrazione di X_3

La calibrazione del processo di Lévy X_3 (associato al reference name Brent Crude Oil) non può essere eseguita con la stessa procedura utilizzata per X_1 e X_2 , perché per questo asset si ipotizza che la probabilità di default sia, naturalmente, trascurabile. Ci si serve, invece, delle opzioni call e put out of the money (le più liquide) scritte su Brent e si opera la seguente minimizzazione numerica:

$$\min_{\lambda_3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [O^{mkt}(K_j, t_i) - O^{model}(K_j, t_i; \lambda_3)]^2,$$

dove $t_i, i = 1, \dots, n$ sono i time to maturity delle opzioni quotate, $K_j, j = 1, \dots, m$ sono gli strike delle opzioni out of the money, $O^{mkt}(K_j, t_i)$ è il prezzo di mercato dell'opzione con maturity t_i e strike K_j , $O^{model}(K_j, t_i; \lambda_3)$ è il prezzo del modello e λ_3 rappresenta i parametri del Lévy driving process dell'asset Brent Crude Oil. Nel caso in cui si scelga una specifica Black & Scholes $\lambda_3 = (\sigma_3, q_3)$. Nel caso in cui si scelga una dinamica NIG $\lambda_3 = (\sigma_3, k_3, \theta_3, q_3)$.

5.5 Calibrazione di $Y_1, Y_2, Y_3, a_1, a_2, a_3$ e Z

Si è mostrato come calibrare i processi $X_j, j = 1, 2, 3$ e i livelli di default K_1 e K_2 . Terminata questa operazione è possibile occuparsi dei processi $Y_j, j = 1, 2, 3$, del processo Z e dei coefficienti $a_j, j = 1, 2, 3$.

Indicando con $S_j(t)$ il prezzo dell'asset $j = 1, 2, 3$ nel giorno t si può scrivere:

$$S_j(t + dt) = S_j(t)e^{(r - q_j - \psi_{X_j}(-i))dt + \Delta Y_j(t, t+dt) + a_j \Delta Z(t, t+dt)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

dove $r \in \mathbb{R}$ è il tasso d'interesse risk-free, $q_j \in \mathbb{R}^+$ è il dividend yield continuo di S_j e $\psi_{X_j}(\cdot)$ è l'esponente caratteristico di X_j . Allora il log-return giornaliero tra t e $t + dt$ [11] è dato dall'espressione:

$$r_j(t, t+dt) = \log \left(\frac{S_j(t + dt)}{S_j(t)} \right) = (r - q_j - \psi_{X_j}(-i))dt + \Delta Y_j(t, t+dt) + a_j \Delta Z(t, t+dt), \quad j = 1, 2, 3.$$

Ne consegue che, poiché $\Delta Y_j(t, t + dt) + a_j \Delta Z(t, t + dt) = \Delta X_j(t, t + dt)$:

$$\text{Cov}[r_i(t, t + dt), r_j(t, t + dt)] = \begin{cases} a_i a_j \text{Var}[\Delta Z(t, t + dt)], & i \neq j, \\ \text{Var}[\Delta X_i(t, t + dt)], & i = j. \end{cases} \quad (5.8)$$

Da questo punto il procedimento differisce a seconda che si adottino specifiche Black & Scholes oppure NIG, perciò si trattano separatamente i due casi.

5.5.1 Dinamica Black & Scholes

Se la dinamica dei processi Z , X_j e Y_j , $j = 1, 2, 3$ è browniana, procedendo come in Ballotta e Fusai, 2014, l'equazione (5.8) diviene:

$$\text{Cov}[r_i(t, t + dt), r_j(t, t + dt)] = \begin{cases} a_i a_j \sigma_Z^2 dt, & i \neq j, \\ \sigma_{X_i}^2 dt, & i = j. \end{cases}$$

Peranto la correlazione tra i log-return $r_i(t, t + dt)$ e $r_j(t, t + dt)$ risulta essere:

$$\text{Corr}[r_i(t, t + dt), r_j(t, t + dt)] = \begin{cases} \frac{a_i a_j \sigma_Z^2}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Se si pone, senza alcuna perdita di generalità, $\sigma_Z = 1$, la matrice di correlazione dei log-return tra il giorno t e il giorno successivo $t + dt$ è:

$$\text{Corr}(t, t + dt) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_1 a_2}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} & \frac{a_1 a_3}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_3}} \\ \frac{a_2 a_1}{\sigma_{X_2} \sigma_{X_1}} & 1 & \frac{a_2 a_3}{\sigma_{X_2} \sigma_{X_3}} \\ \frac{a_3 a_1}{\sigma_{X_3} \sigma_{X_1}} & \frac{a_3 a_2}{\sigma_{X_3} \sigma_{X_2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di correlazione può essere stimata a partire dai dati di mercato, prendendo in considerazione i log-return giornalieri degli asset DB, ENI e Brent Crude Oil per cinque anni

consecutivi e calcolando la correlazione campionaria. Indicando allora con C_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ la componente (i, j) della matrice di correlazione stimata si può scrivere:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{C_{12}}{a_2} \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}, \\ a_2 = \sqrt{\frac{C_{12} C_{23}}{C_{13}}} \sigma_{X_2}^2, \\ a_3 = \frac{\sigma_{X_3} C_{13}}{\sigma_{X_2} C_{12}} a_2. \end{cases} \quad (5.9)$$

Finora si sono calibrati Z e a_j , $j = 1, 2, 3$. Restano da calibrare Y_j , $j = 1, 2, 3$. Poiché tuttavia $\sigma_{X_j}^2 = \sigma_{Y_j}^2 + a_j^2 \sigma_Z^2$, valgono le relazioni:

$$\sigma_{Y_j} = \sqrt{\sigma_{X_j}^2 - a_j^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

La calibrazione del modello è a questo punto terminata, ed è possibile procedere con le simulazioni numeriche per ottenere le misure di rischio associate al contratto forward stipulato da DB e ENI sul reference name Brent Crude Oil.

5.5.2 Dinamica NIG

Supporre che Z e Y_j , $j = 1, 2, 3$ siano dei NIG non è sufficiente per garantire che X_j , $j = 1, 2, 3$ siano processi NIG (si veda Ballotta e Fusai, 2014). Nella pratica si scelgono i parametri di Z in modo che questa condizione sia rispettata, intendendo con ciò che le prime quattro cumulanti del processo X_j ottenute ipotizzando X_j NIG devono eguagliare le prime quattro cumulanti di $Y_j + a_j Z$, $j = 1, 2, 3$. Non è possibile imporre ulteriori condizioni perché i parametri del modello non sono sufficientemente numerosi.

Nel caso di dinamica NIG l'equazione (5.8) diviene:

$$\text{Cov}[r_i(t, t + dt), r_j(t, t + dt)] = \begin{cases} a_i a_j (\sigma_Z^2 + \theta_Z^2 k_Z) dt, & i \neq j, \\ (\sigma_{X_i}^2 + \theta_{X_i}^2 k_{X_i}) dt, & i = j. \end{cases}$$

Da ciò segue che la matrice (simmetrica) di correlazione dei log-return tra il giorno t e il giorno successivo $t + dt$ è la seguente:

$$\text{Corr}(t, t + dt) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_1 a_2 (\sigma_Z^2 + \theta_Z^2 k_Z)}{\sqrt{(\sigma_{X_1}^2 + \theta_{X_1}^2 k_{X_1})(\sigma_{X_2}^2 + \theta_{X_2}^2 k_{X_2})}} & \frac{a_1 a_3 (\sigma_Z^2 + \theta_Z^2 k_Z)}{\sqrt{(\sigma_{X_1}^2 + \theta_{X_1}^2 k_{X_1})(\sigma_{X_3}^2 + \theta_{X_3}^2 k_{X_3})}} \\ & 1 & \frac{a_2 a_3 (\sigma_Z^2 + \theta_Z^2 k_Z)}{\sqrt{(\sigma_{X_2}^2 + \theta_{X_2}^2 k_{X_2})(\sigma_{X_3}^2 + \theta_{X_3}^2 k_{X_3})}} \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

È possibile stimare la matrice di correlazione dai log-return giornalieri degli asset DB, ENI e Brent Crude Oil di cinque anni consecutivi, calcolando la correlazione campionaria.

Si indichi allora con \mathbb{C}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ la componente (i, j) della matrice di correlazione stimata. Siano inoltre $V_j := \sigma_{X_j}^2 + \theta_{X_j}^2 k_{X_j}$, $j = 1, 2, 3$ e $V_Z := \sigma_Z^2 + \theta_Z^2 k_Z$. Allora:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{V_1 V_2} \mathbb{C}_{12}}{V_Z} a_2, \\ a_2 = \sqrt{\frac{V_2}{V_Z} \frac{\mathbb{C}_{12} \mathbb{C}_{23}}{\mathbb{C}_{13}}}, \\ a_3 = \sqrt{\frac{V_3}{V_2} \frac{\mathbb{C}_{13}}{\mathbb{C}_{12}}} a_2. \end{cases}$$

Nel contempo le prime quattro cumulanti $c_k^{Y_j}$, $k = 1, \dots, 4$ di Y_j , $j = 1, 2, 3$ devono rispettare la relazione:

$$c_k^{Y_j} = c_k^{X_j} - a_j c_k^Z, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, \dots, 4,$$

dove $c_k^{X_j}$ e c_k^Z sono ottenibili tramite semplici formule chiuse.¹ Da queste relazioni si possono ricavare i parametri dei processi Y_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \theta_{Y_j} = \frac{3c_2^2 c_3}{-4c_3^2 + 3c_2 c_4}, \\ \sigma_{Y_j}^2 = \frac{c_2(-5c_3^2 + 3c_2 c_4)}{-4c_3^2 + 3c_2 c_4}, \\ k_{Y_j} = \frac{-4c_3^2 + 3c_2 c_4}{9c_2^3}, \\ \mu_{y_j} = c_1 - \theta_{X_j}; \end{cases}$$

dove per semplicità di notazione si sottintende che $c_k = c_k^{Y_j}$.

Ora si può introdurre la funzione obiettivo da minimizzare:

$$\sum_{j=1}^3 \int |\psi_{X_j}(u) - (\psi_{Y_j}(u) + \psi_Z(a_j u))|^2 du, \quad (5.11)$$

dove $\psi_{X_j}(\cdot)$ è l'esponente caratteristico di X_j , $\psi_{Y_j}(\cdot)$ è l'esponente caratteristico di Y_j e $\psi_Z(\cdot)$ è l'esponente caratteristico di Z . La calibrazione procede allora nel seguente modo:

- guess iniziale sui parametri di Z ;
- calcolo di a_j , $j = 1, 2, 3$;
- calcolo dei parametri di Y_j , $j = 1, 2, 3$;
- valutazione della funzione obiettivo;
- ripetizione dei passaggi precedenti se non si è raggiunta la convergenza.

¹Si rimanda il lettore all'Appendice B.

Naturalmente per eseguire i passaggi elencati ci si affida a un algoritmo di minimizzazione numerica.

A questo punto il modello è interamente calibrato, ed è possibile effettuare le simulazioni per ottenere CVA, DVA e BVA associati al contratto forward stipulato da DB e ENI sul reference name Brent Crude Oil.

5.6 Risultati della calibrazione

Nelle precedenti sezioni si è mostrato come calibrare la curva dei tassi risk free e gli asset di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil. Di seguito vengono presentati i risultati numerici, sia per dinamiche di Black & Scholes che per processi NIG.

5.6.1 Curva dei tassi risk - free dell'area euro

La reference date considerata è il 18 Giugno 2015. In Appendice C sono riportati i dati relativi a depositi, future sull'Euribor3M e IRS usati per eseguire la procedura di bootstrap. La curva dei tassi di sconto dell'area euro e quella degli zero rates associati sono le seguenti:

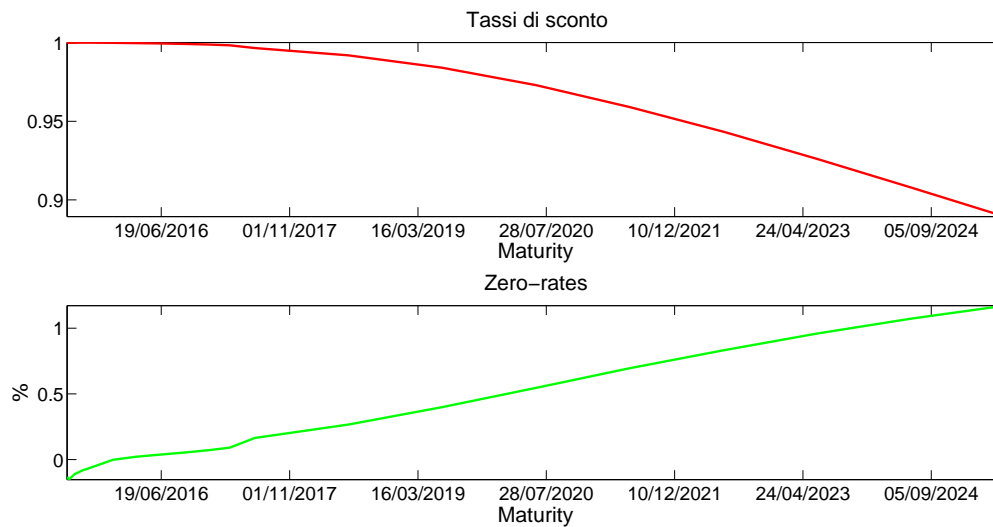


Figura 5.1: Bootstrap della curva dei tassi risk-free dell'area euro.

5.6.2 Calibrazione dei credit spread

In Appendice D sono riportati gli spread dei CDS scritti su ENI e Deutsche Bank. Servendosi dell'algoritmo di O'Kane e Turnbull [14] si possono sfruttare questi dati per ricavare i credit spread delle due aziende. La tabella seguente mostra i risultati così ottenuti.

Tabella 5.1: Credit spread calibrati tramite l'algoritmo di O'Kane e Turnbull.

Maturity	Deutsche Bank	ENI
6 mesi	0.3582%	0.1587%
1 anno	0.4277%	0.1813%
2 anni	0.5708%	0.2829%
3 anni	0.7109%	0.4048%
4 anni	0.8245%	0.5531%
5 anni	0.9332%	0.7062%
7 anni	1.0812%	0.9414%
10 anni	1.3399%	1.2235%

Prima colonna: maturity dei CDS. Seconda (terza) colonna: credit spread di ENI (DB) ottenuti dal mercato tramite il metodo bootstrap di O'Kane e Turnbull.

Di seguito sono riportate anche le curve di probabilità di sopravvivenza delle due aziende ottenute tramite la procedura di O'Kane e Turnbull.

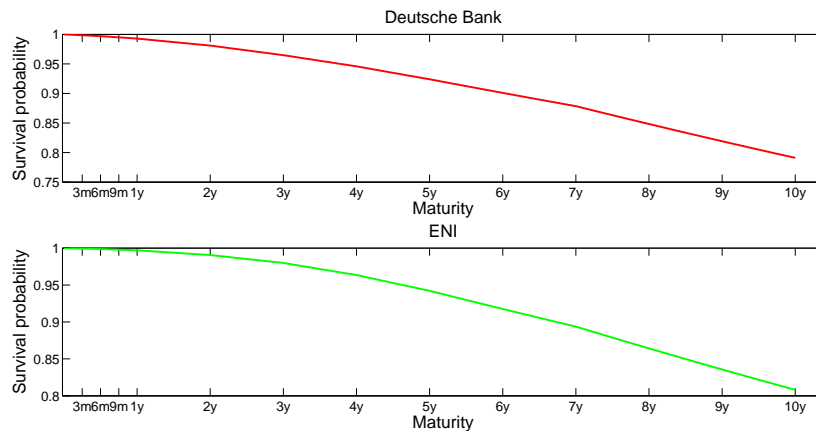


Figura 5.2: Probabilità di sopravvivenza calibrate dal mercato, servendosi dell'algoritmo di O'Kane e Turnbull.

5.6.3 Calibrazione di X_1 , X_2 , K_1 e K_2

Al fine di calibrare i driving processes X_1 e X_2 relativi a Deutsche Bank ed ENI e le soglie di default K_1 e K_2 si opera una minimizzazione numerica della (5.7). Le probabilità di sopravvivenza sono ottenute tramite l'algoritmo CONV forward, in virtù delle osservazioni del capitolo 4. La seguente tabella riassume i risultati ottenuti in questo modo:

Tabella 5.2: Credit spread per ENI e Deutsche Bank (DB).

Maturity	DB CS	B&S	NIG	ENI CS	B&S	NIG
6 mesi	0.3582%	0.0000%	0.3561%	0.1587%	0.0000%	0.1481%
1 anno	0.4277%	0.0011%	0.4234%	0.1813%	0.0005%	0.1910%
2 anni	0.5708%	0.0913%	0.5607%	0.2829%	0.0583%	0.2917%
3 anni	0.7109%	0.3558%	0.6978%	0.4048%	0.2597%	0.4128%
4 anni	0.8245%	0.6648%	0.8281%	0.5531%	0.5185%	0.5482%
5 anni	0.9332%	0.9354%	0.9460%	0.7062%	0.7585%	0.6886%
7 anni	1.0812%	1.3056%	1.1335%	0.9414%	1.1055%	0.9489%
10 anni	1.3399%	1.5526%	1.2980%	1.2235%	1.3558%	1.2248%
RMSE		0.8874%	0.0705%		0.4216%	0.02711%

Prima colonna: maturity dei CDS. Seconda (quinta) colonna: credit spread di DB (ENI) ottenuti con il bootstrap di O'Kane e Turnbull. Terza (sesta) colonna: credit spread di DB (ENI) ottenuti con un modello di Black & Scholes calibrato. Quarta (settima) colonna: credit spread di DB (ENI) ottenuti con un modello NIG calibrato.

Si osservi che, se gli asset di ENI e Deutsche Bank sono modellizzati tramite processi NIG, la struttura a termine dei credit spread viene riprodotta in modo soddisfacente. Nel caso in cui, invece, si adottino specifiche di Black & Scholes, non è possibile riprodurre in modo accurato gli spread di credito. In effetti i parametri su cui si può agire sono, in tal caso, il livello di default dell'azienda K , il dividend yield q e la volatilità del browniano σ . Il valore di K è legato al rapporto tra equity e debito dell'azienda e non sarebbe verosimile un valore superiore al 50%, mentre q non può ragionevolmente influenzare in modo sensibile le probabilità di default. Aumentare la volatilità σ del browniano che governa il firm value di un'azienda porta l'asset ad essere più volatile, aumentando le probabilità di default (e quindi i credit spread) per tutte le scadenze, ma in modo particolare per quelle più distanti nel tempo. Le brevi scadenze, invece, sono destinate ad avere un credit spread prossimo allo zero, a causa della proprietà di continuità del moto browniano. Il mercato tuttavia mostra, soprattutto per Deutsche Bank, credit spread significativamente superiori a zero già per una maturity di 6 mesi. Ne consegue che il modello di Black & Scholes non può cogliere adeguatamente la term structure reale. Al contrario il NIG, non essendo un processo continuo bensì uno di puro salto, è in grado di descrivere il mercato in modo soddisfacente.

I parametri calibrati ipotizzando dinamiche di Black & Scholes per i firm value delle aziende ENI e Deutsche Bank sono riportati nella seguente tabella:

Tabella 5.3: Parametri calibrati per ENI e Deutsche Bank con dinamiche di Black & Scholes.

	K	q	σ
DB	0.3867	0.0005	0.2196
ENI	0.4066	0.0010	0.2006

K è la soglia del default rapportata al valore iniziale dell'azienda. I parametri q e σ rappresentano rispettivamente il dividend yield dell'azienda e la volatilità del browniano che guida il firm value.

Qualora si assuma invece che i firm value di ENI e Deutsche Bank siano guidati da processi NIG si ottengono i seguenti risultati di calibrazione:

Tabella 5.4: Parametri calibrati per ENI e Deutsche Bank con dinamiche NIG.

	K	q	σ	k	θ
DB	0.4274	0.0050	0.2012	3.4015	-0.0262
ENI	0.3867	0.0049	0.2163	3.4214	0.0067

K è la soglia del default rapportata al valore iniziale dell'azienda, il parametro q rappresenta il dividend yield dell'azienda e (σ, k, θ) sono i parametri del NIG che governa il firm value.

5.6.4 Calibrazione del processo X_3

Per calibrare il processo stocastico che governa il firm value di Brent Crude Oil si utilizzano i dati di mercato riportati in Appendice E relativi a call e put out of the money scritte su Brent. Sebbene il time to maturity del forward stipulato da ENI e Deutsche Bank sia di un anno, i dati utilizzati sono relativi soltanto a un periodo di sei mesi. Ciò è necessario affinché il NIG sia in grado di riprodurre in modo accurato lo smile di volatilità delle opzioni: considerare call e put di expiry pari o inferiore a un anno porterebbe a ottenere una superficie di volatilità differente da quella del mercato. Si rimanda, in merito, a Cont e Tankov, 2009.

Per ottenere i prezzi delle opzioni a partire dalla superficie di volatilità quotata è necessario conoscere la curva dei tassi di sconto privi di rischio per il dollaro americano. Questa volta, anziché eseguire una procedura di bootstrap, si utilizza la curva fornita da Thomson Reuters, riportata in Appendice F.

Ipotizzando una dinamica di Black & Scholes per l'asset Brent Crude Oil si ottengono i risultati riportati nella seguente tabella:

Tabella 5.5: Parametri calibrati per Brent Crude Oil con dinamica di Black & Scholes.

	q	σ
Brent	0.0110	0.3110

q e σ rappresentano rispettivamente il dividend yield e la volatilità del browniano che guida il firm value.

Il fit dei dati di mercato è estremamente povero, come evidenziato dal grafico che confronta i prezzi secondo il mercato e secondo il modello Black & Scholes:

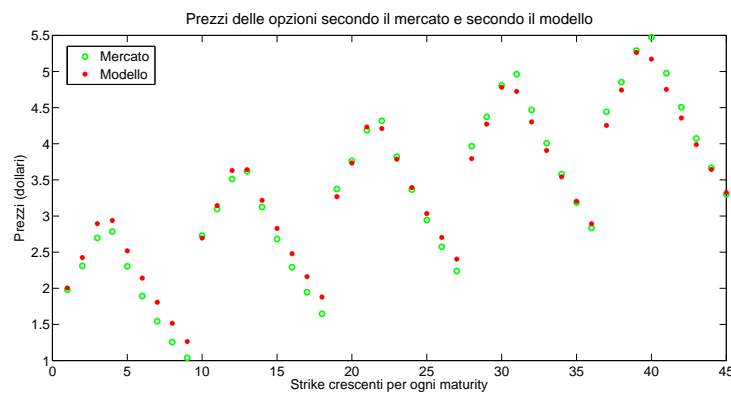


Figura 5.3: Prezzi delle opzioni scritte su Brent Crude Oil secondo il mercato e secondo il modello Black & Scholes. Ogni gruppo di 9 opzioni a partire da sinistra è caratterizzato da una maturity fissata (due, tre, quattro, cinque e sei mesi rispettivamente). Si fa riferimento all'Appendice E per le specifiche dei contratti.

Si osservi che i prezzi del mercato sono diversi da quelli che il modello è in grado di predire. Come già per ENI e Deutsche Bank, dunque, il modello di Black & Scholes non è in grado di descrivere accuratamente l'asset. Ciò è confermato dai grafici delle superfici di volatilità implicite, che sono completamente differenti per il mercato e per il modello.

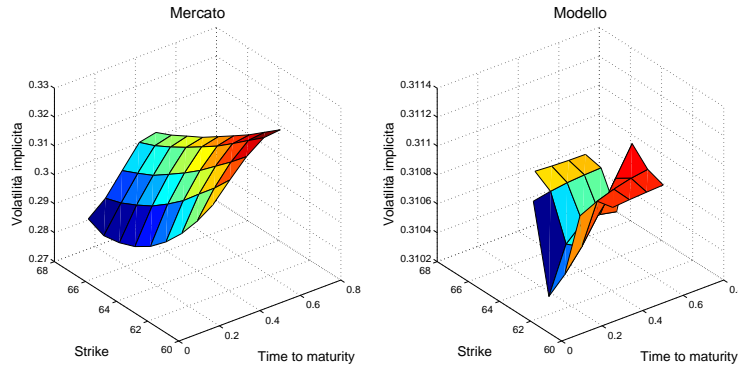


Figura 5.4: Superfici di volatilità implicite delle opzioni call e put europee out of the money scritte su Brent Crude Oil. A sinistra è riportata la superficie di volatilità del mercato, a destra quella del modello Black & Scholes. Nel secondo grafico sono rappresentate solo le opzioni per cui l’algoritmo `blsimpv` di MATLAB è giunto a convergenza.

Se si ipotizza, anziché una dinamica di Black & Scholes, un firm value guidato da un processo NIG, si ottengono risultati decisamente migliori in termini di accuratezza della riproduzione dei dati di mercato. Si osservi che per eseguire il pricing delle opzioni è possibile servirsi dell’algoritmo di Carr-Madan [7], di complessità $O(N \log N)$, dunque molto rapido. I parametri calibrati sono riportati in tabella:

Tabella 5.6: Parametri calibrati per Brent Crude Oil con dinamiche NIG.

	q	σ	k	θ
Brent	0.0017	0.3197	0.3026	-0.3095

q rappresenta il dividend yield, mentre (σ, k, θ) sono i parametri del NIG che governa il firm value.

In questo caso il fit dei dati di mercato è ottimo. Nel grafico in alto a pagina seguente si confrontano i prezzi di mercato delle opzioni put e call europee utilizzate per la calibrazione con i prezzi forniti dal modello NIG. Nel grafico in basso vengono invece confrontate la superficie di volatilità implicita riprodotta dal modello e quella del mercato, che risultano molto simili. Ne consegue che il modello NIG si dimostra molto più adatto rispetto alla dinamica Black & Scholes per descrivere l’asset Brent Crude Oil, in quanto la calibrazione del processo porta a riprodurre accuratamente i prezzi delle opzioni europee scritte sul reference name Brent.

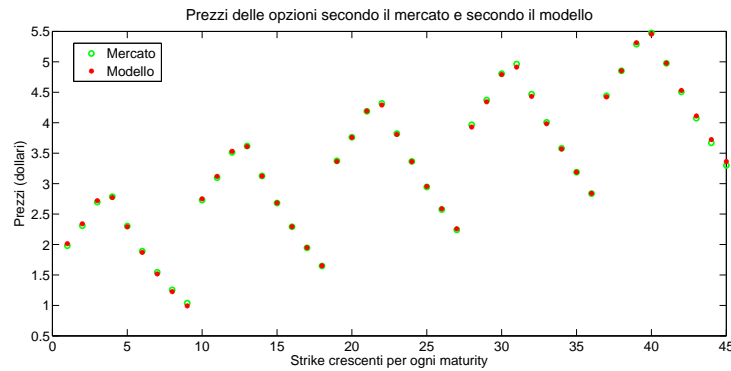


Figura 5.5: Prezzi delle opzioni scritte su Brent Crude Oil secondo il mercato e secondo il modello NIG. Ogni gruppo di 9 opzioni a partire da sinistra è caratterizzato da una maturity fissata (due, tre, quattro, cinque e sei mesi rispettivamente). Si fa riferimento all'Appendice E per le specifiche dei contratti.

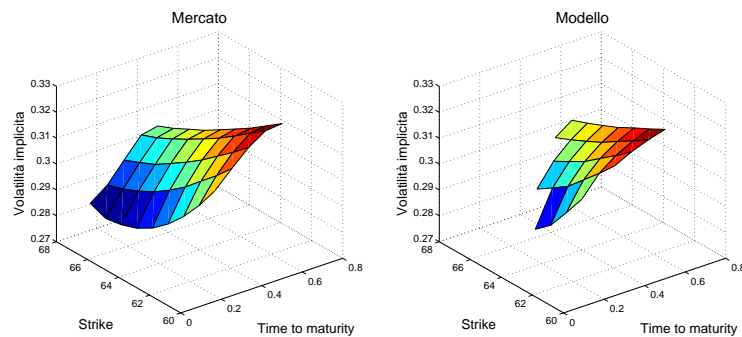


Figura 5.6: Superfici di volatilità implicite delle opzioni call e put europee out of the money scritte su Brent Crude Oil. A sinistra è riportata la superficie di volatilità del mercato, a destra quella del modello NIG. Nel secondo grafico sono rappresentate solo le opzioni per cui l'algoritmo blsimpv di MATLAB è giunto a convergenza.

5.6.5 Calibrazione di $Y_1, Y_2, Y_3, a_1, a_2, a_3$ e Z

Anzitutto si rende necessario costruire la matrice di correlazione dei log-return giornalieri di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil. Utilizzando una finestra temporale di cinque anni si ottiene:

Tabella 5.7: Matrice di correlazione dei log-return.

	DB	ENI	Brent
DB	1.0000	0.6312	0.2349
ENI	-	1.0000	0.3316
Brent	-	-	1.0000

La matrice (simmetrica) di correlazione è costruita utilizzando le quotazioni di mercato fornite da Thomson Reuters per una finestra temporale di cinque anni con reference date 18 Giugno 2015.

Se si ipotizza una dinamica di Black & Scholes per i tre asset si possono calibrare i processi Y_j , $j = 1, 2, 3$ e Z e i coefficienti a_j , $j = 1, 2, 3$ servendosi delle equazioni (5.9) e (5.10) e ponendo $\sigma_Z = 1$. In tal caso si ottiene:

Tabella 5.8: Calibrazione dei processi marginali di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil con dinamiche di Black & Scholes.

	σ_Y	a
DB	0.1633	0.1468
ENI	0.0661	0.1893
Brent	0.2911	0.1092

σ_Y rappresenta la volatilità della componente del driving process indipendente da Z , mentre a è il coefficiente di sensibilità di X al processo Z .

Nel caso in cui le dinamiche dei firm value siano governate da processi NIG è necessario minimizzare la funzione obiettivo (5.11) tramite un algoritmo numerico. Poiché l'integrale contenuto nella (5.11) ha dominio su tutto il piano complesso, si rende inevitabile una restrizione del dominio. Per ottenere i valori riportati nelle seguenti tabelle si è scelto di integrare su un quadrato di lato 4 con centro di simmetria nell'origine, controllando poi la bontà dei risultati di calibrazione su un dominio più esteso, ossia un quadrato di lato 16. Si noti che la soluzione non è unica: facendo riferimento all'equazione (2.1) e alla (2.2) si osserva che moltiplicando il vettore \mathbf{a} per una costante e dividendo σ_Z e θ_Z per la stessa costante il processo che ne risulta è identico a quello di partenza.

Tabella 5.9: Calibrazione dei processi marginali di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil con dinamiche NIG.

	σ_Y	k_Y	θ_Y	a
DB	0.1731	5.5036	-0.0137	1.6178
ENI	0.1632	4.3785	0.0254	2.3918
Brent	0.3049	0.3015	-0.3011	1.4877

σ_Y , k_Y e θ_Y rappresentano i parametri del NIG indipendente da Z , mentre a è il coefficiente di sensibilità di X al processo Z .

Tabella 5.10: Calibrazione del fattore di rischio comune Z con dinamiche NIG.

σ_Z	k_Z	θ_Z
0.0758	10.0045	-0.0125

σ_Z , k_Z e θ_Z sono i parametri del NIG Z .

A questo punto la calibrazione dei processi stocastici che guidano i firm value di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil è terminata. È allora possibile studiare il CVA, il DVA e il BVA associati a un contratto forward stipulato da ENI e Deutsche Bank con reference name Brent Crude Oil. Questo sarà l'oggetto del prossimo capitolo.

Capitolo 6

Simulazioni numeriche di CVA, DVA e BVA

All'interno del precedente capitolo si è anzitutto presa in analisi la curva dei tassi di sconto risk-free sulla base dei dati di mercato. In seguito si è affrontato il problema di determinare i parametri che identificano i processi di Lévy (moto browniano e NIG in particolare) che governano i firm value delle controparti e del reference name di un contratto forward. Si sono infine utilizzati i risultati teorici esposti per calibrare i processi che guidano Deutsche Bank (posizione 'corta' nel forward), ENI (posizione 'lunga') e Brent Crude Oil (reference name). Ora è possibile studiare alcune misure di rischio associate al contratto (CVA, DVA e BVA) lungo l'intera durata del forward, servendosi delle metodologie introdotte nei capitoli 3 e 4. L'attenzione viene posta sulla controparte 'lunga' nel contratto, perciò ENI. Il CVA di Deutsche Bank corrisponde tuttavia al DVA di ENI, e il DVA di Deutsche Bank al CVA di ENI: l'analisi risulta dunque esaustiva per lo studio del rischio di controparte associato ad entrambe le aziende. Per i firm value vengono prese in considerazione sia la dinamica di Black & Scholes che quella NIG, illustrando le differenze ottenute con le due specifiche. In ultimo vengono analizzati gli effetti del wrong way risk e del right way risk tramite un'analisi di sensitività. La correlazione tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil viene ipotizzata nel primo caso inferiore e nel secondo superiore rispetto a quella calibrata con i dati di mercato. Si analizza perciò la variazione di CVA, DVA e BVA in ciascuna di queste situazioni e si confrontano i risultati ottenuti perturbando la matrice di correlazione con quelli ricavati servendosi delle correlazioni reali tra gli asset. Tutti i grafici riportati all'interno del capitolo sono ottenuti stimando le equazioni (3.1) e (3.2) tramite 200.000 simulazioni del processo Z . Per il calcolo delle survival probabilities contenute in queste formule viene utilizzato il metodo CONV forward, ponendo $N = 2^{11}$. Il nozionale del contratto è assunto pari a 1\$. Il tempo impiegato per eseguire il codice relativo a CVA, DVA e BVA in ciascuna delle situazioni presentate è di 3448 secondi, servendosi di un Lenovo-U330 (RAM: 8 GB, processore: Intel i5 4200U).

6.1 Dinamiche di Black & Scholes

Se si descrivono i processi che governano i firm value di Deutsche Bank, ENI e Brent Crude Oil tramite il modello di Black & Scholes con i parametri calibrati nel capitolo 5, si ottengono per CVA, DVA e BVA di ENI i grafici riportati di seguito. Da essi emerge che il modello di Black & Scholes non è in grado di riflettere adeguatamente il rischio di controparte insito nel contratto. I valori delle misure di rischio sono estremamente ridotti per tutta la durata del forward, suggerendo erroneamente che il rischio sia trascurabile. Questo risultato è dovuto all'incapacità del modello di cogliere correttamente le probabilità di default delle due aziende. In effetti la tabella 5.2 mostra che la dinamica di Black & Scholes non è in grado di riprodurre i credit spread del mercato associati a ENI e Deutsche Bank, e li sottostima ampiamente per tutto il primo anno. Questo si traduce, naturalmente, in misure di rischio di controparte esageratamente contenute per il contratto in esame.

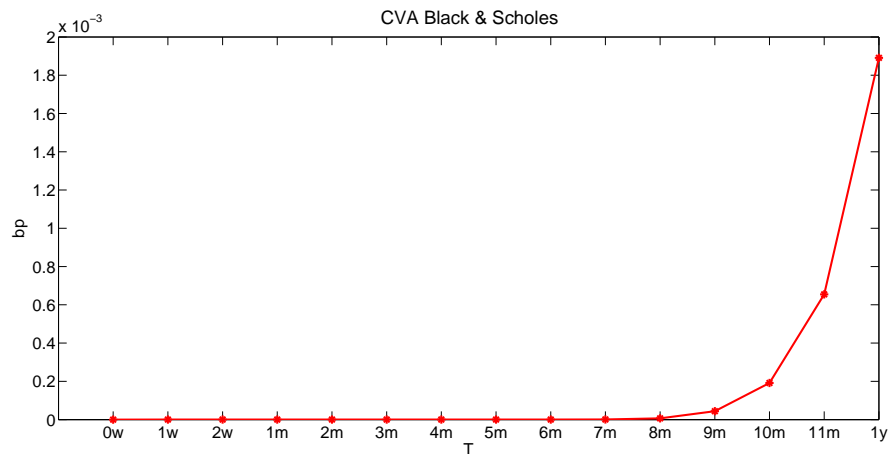


Figura 6.1: Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

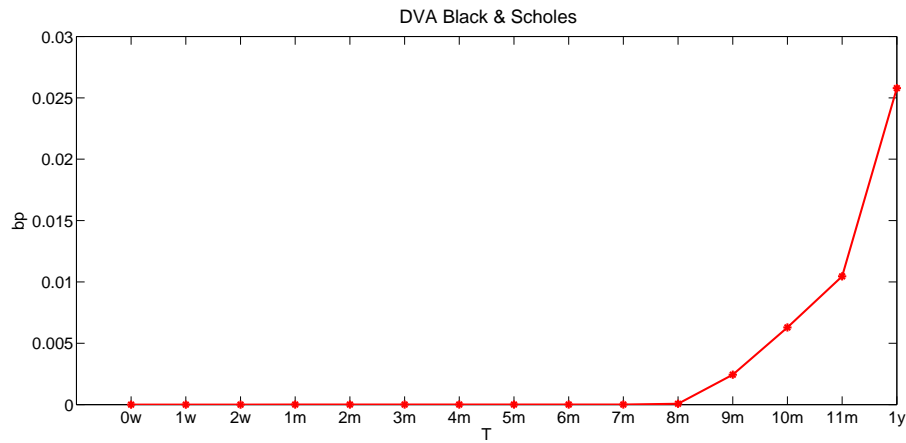


Figura 6.2: Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

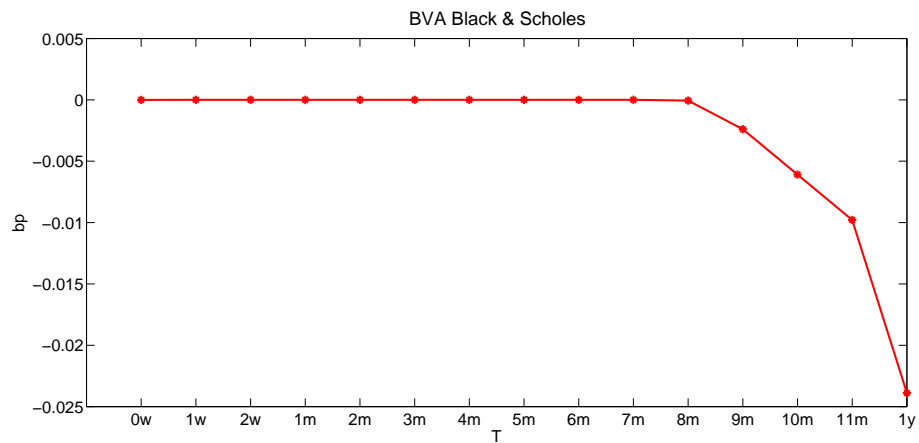


Figura 6.3: Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

6.2 Dinamiche NIG

Si è mostrato che il modello di Black & Scholes non è in grado di cogliere il rischio di controparte insito nel contratto considerato, e si è identificato il problema nell'incapacità del modello di replicare i credit spread del mercato per maturity pari o inferiori a un anno. La dinamica NIG, invece, è sufficientemente ricca da descrivere adeguatamente i credit spread, dunque ci si aspetta che tramite essa sia possibile modellizzare il rischio di controparte del forward. Questo è proprio ciò che emerge dai grafici riportati di seguito, in cui CVA, DVA e BVA sono dell'ordine dei basis point (o decine di bp). Il rischio dunque, diversamente da quanto appare servendosi del modello di Black & Scholes per descrivere i firm value, non è trascurabile, ed è modellizzabile accuratamente adottando driving processes NIG per gli asset. Si osservi in particolare che per ENI il CVA è positivo e crescente nel tempo, mentre il BVA è negativo e decrescente (d'altronde $BVA = CVA - DVA$, e il DVA cresce più rapidamente del CVA). Questo significa che misurare il rischio di controparte secondo uno o l'altro criterio porta a conclusioni differenti. Si ricordi che secondo gli Accordi di Basilea la misura corretta da utilizzare è il CVA (si veda Basel, 2010), mentre per gli International Accounting Standards è il BVA (IAS39 - si veda IASB, 2011). La differenza tra i due approcci è notevole, e dai grafici qui riportati ciò appare chiaramente.

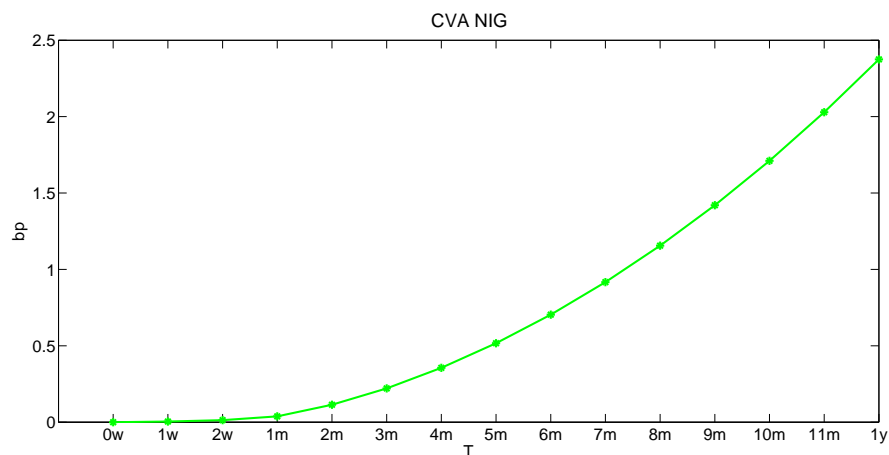


Figura 6.4: Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

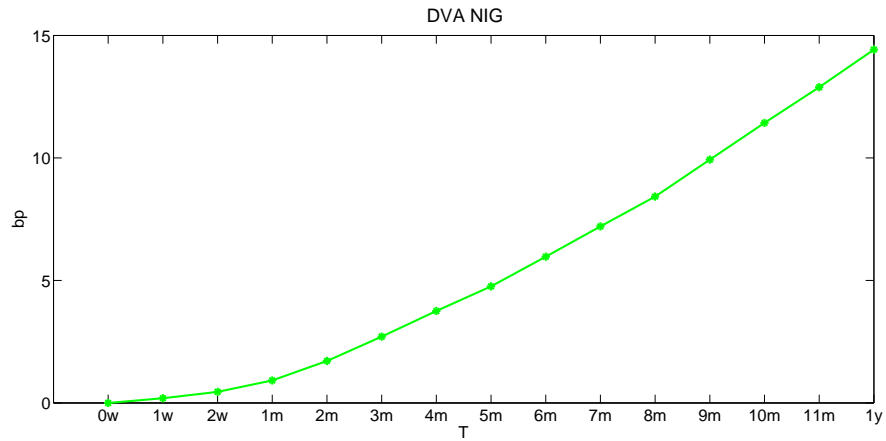


Figura 6.5: Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

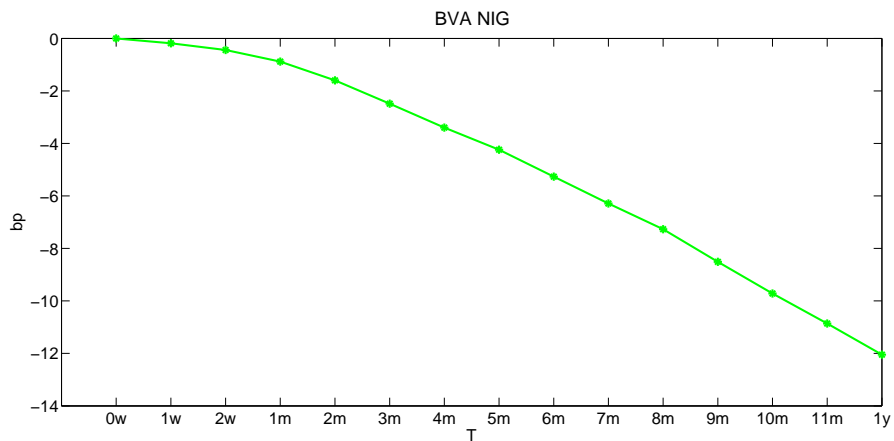


Figura 6.6: Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.

6.3 Wrong way risk e right way risk

Come visto, adottare la dinamica di Black & Scholes per modellizzare gli asset non permette di cogliere il rischio di controparte insito in un contratto forward. Diversamente, servendosi di specifiche NIG, questo risulta possibile. In questa sezione si ipotizzeranno perciò dei driving processes NIG, con i parametri calibrati nel capitolo 5. L'obiettivo è analizzare l'effetto del wrong way risk e del right way risk per ENI. Per un'azienda che stipuli un contratto derivato, il wrong way risk consiste in una correlazione positiva tra l'esposizione nei confronti della controparte e la probabilità che questa risulti insolvente; al contrario il right way risk consiste in una correlazione negativa tra questi due eventi. Ci si aspetta dunque che riducendo la correlazione tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil e lasciando invariati tutti gli altri parametri il rischio di controparte per ENI cresca. Viceversa il rischio deve diminuire se la correlazione tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil viene aumentata. La tabella 5.7 mostra sulla prima riga, nella terza colonna, la correlazione reale tra i due asset, che è pari a $\rho_{1,3} = 0.2349$. Per lo studio del wrong way risk si porrà $\rho_{1,3} = 0.15$, mentre per il right way risk si sceglierà $\rho_{1,3} = 0.3$.

6.3.1 Wrong way risk

Perturbare la matrice di correlazione riducendo la dipendenza tra l'andamento di Deutsche Bank e quello di Brent Crude Oil ha un duplice effetto sulle misure di rischio di controparte relative a ENI. Da una parte diviene maggiormente probabile che, qualora Deutsche Bank fallisca, il valore del forward sia positivo per ENI, perché l'andamento di Brent Crude Oil è meno legato a quello di Deutsche Bank rispetto al caso non perturbato. D'altra parte, per la stessa ragione aumenta anche la probabilità che, nell'istante dell'eventuale default di ENI, Deutsche Bank non sia fallita mentre il prezzo di Brent Crude Oil sia calato, rendendo il valore del forward negativo per ENI. Da queste osservazioni discende che in una situazione di wrong way risk il CVA di ENI deve aumentare, ma anche il DVA deve farlo. Misurare il rischio di controparte tramite il CVA porta dunque a registrare una maggiore rischiosità del derivato qualora la correlazione tra controparte e reference name venga ridotta, mentre l'analisi del BVA è più complessa e potrebbe condurre a un risultato opposto: questo è proprio ciò che emerge dai grafici presentati di seguito. Sia la curva del CVA che quella del DVA sono, nel caso perturbato, punto a punto superiori rispetto a quelle ottenute con la correlazione stimata sulla base dei dati di mercato. Poiché tuttavia questo fenomeno è poco marcato per il CVA e decisamente più accentuato nel DVA, il BVA risulta complessivamente inferiore nella situazione di wrong way risk che in quella con la matrice di correlazione non perturbata.

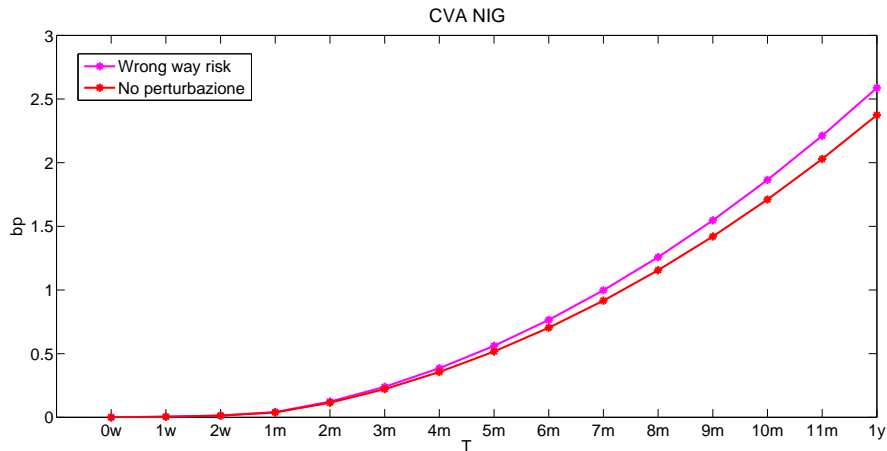


Figura 6.7: Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

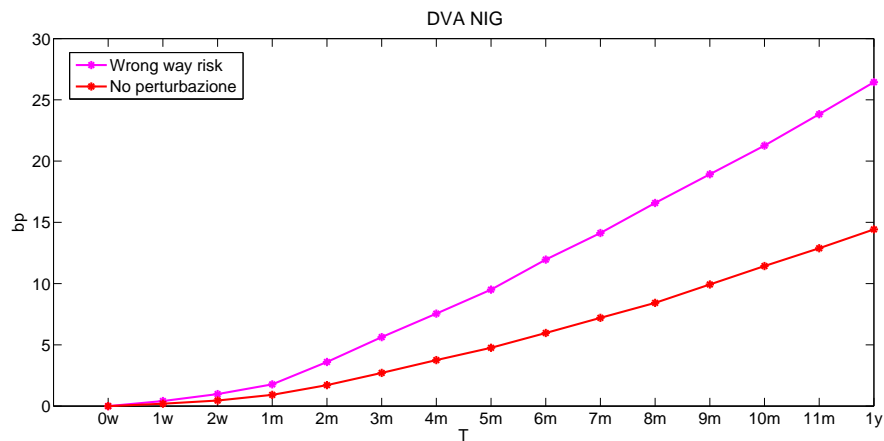


Figura 6.8: Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

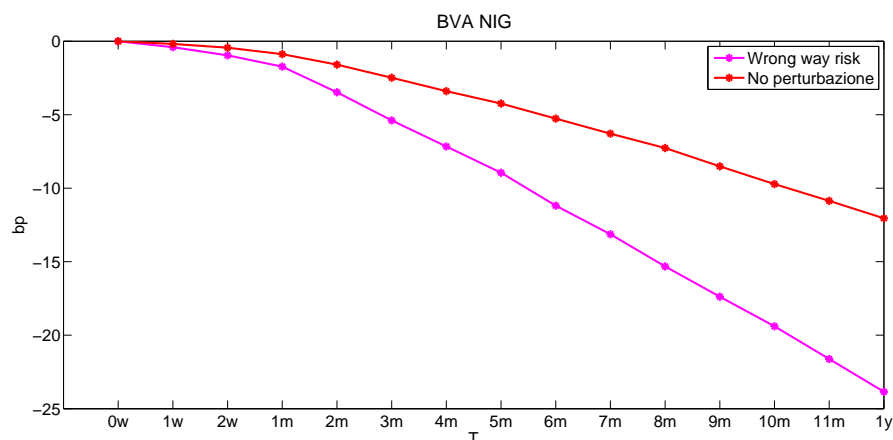


Figura 6.9: Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

6.3.2 Right way risk

Nel caso del right way risk la situazione è speculare rispetto a quella del wrong way risk: aumentando la correlazione tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, il loro andamento risulta maggiormente allineato. Ne consegue che la probabilità che Deutsche Bank fallisca e il valore del forward sia positivo per ENI deve ridursi, così come la probabilità che nell'istante di default di ENI il valore del derivato sia per lei negativo e Deutsche Bank non sia fallita. Sia CVA che DVA relativi a ENI dunque devono diminuire, come si osserva nei grafici riportati di seguito. Come nel caso del wrong way risk, l'analisi del BVA è più complessa: esso potrebbe aumentare o diminuire, a seconda che la riduzione più significativa riguardi il DVA o il CVA. Nel caso studiato, in particolare, il BVA risulta accresciuto rispetto al caso in cui la matrice di correlazione non venga perturbata.

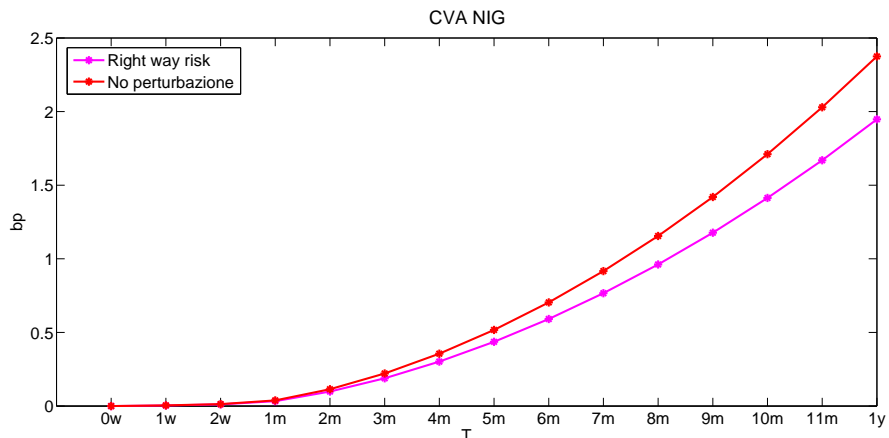


Figura 6.10: Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

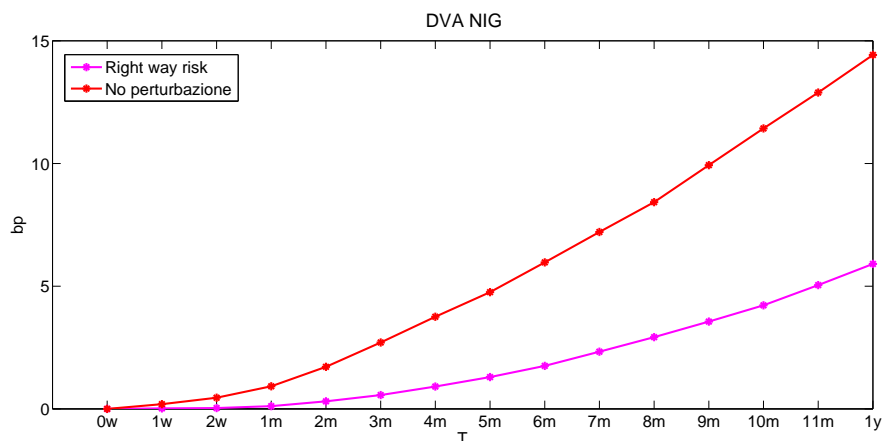


Figura 6.11: Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

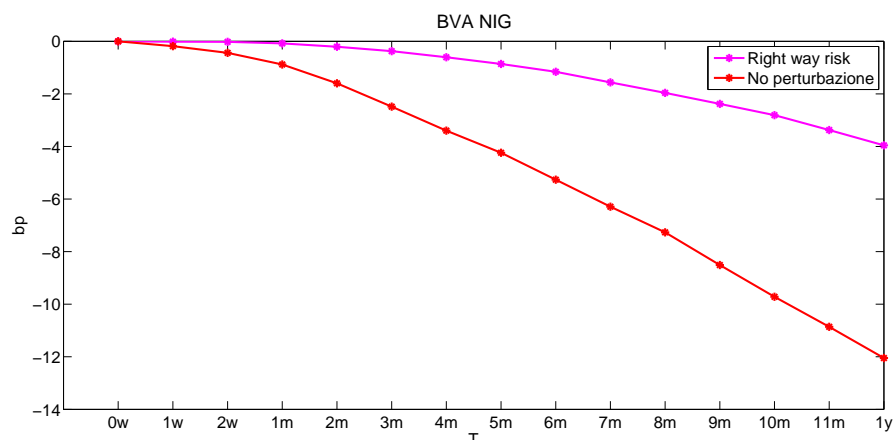


Figura 6.12: Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.

6.3.3 Riepilogo

Il rischio di controparte di ENI può essere misurato in termini di CVA o di BVA. Come illustrato esiste una differenza notevole tra i due approcci: nel contratto preso in esame in questo capitolo il CVA è una funzione positiva e crescente nel tempo, mentre il BVA è negativo e decrescente. Diversa è anche la risposta che queste misure di rischio dimostrano al wrong way risk e al right way risk: mentre il CVA aumenta nel primo caso e diminuisce nel secondo, per il BVA può accadere il contrario, come visto nell'esempio proposto. La misura di rischio maggiormente conservativa, in virtù di queste osservazioni, è senza dubbio il Credit Valuation Adjustment. Di seguito sono riportati dei grafici riassuntivi in cui vengono rappresentati CVA, DVA e BVA di ENI qualora la matrice di correlazione tra gli asset sia quella stimata dalle serie storiche o qualora essa sia perturbata per creare una situazione di wrong way risk o una di right way risk.

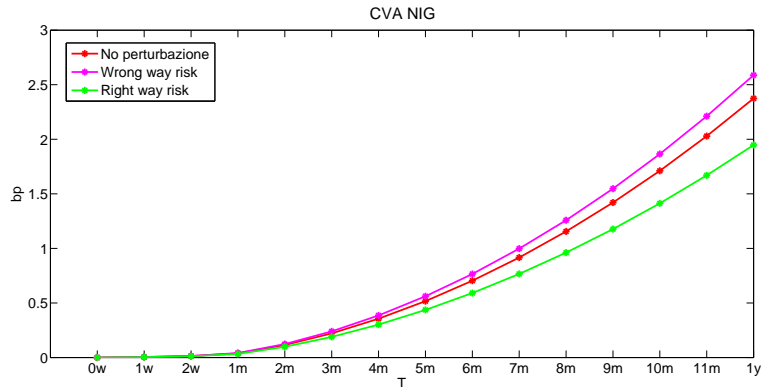


Figura 6.13: Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.

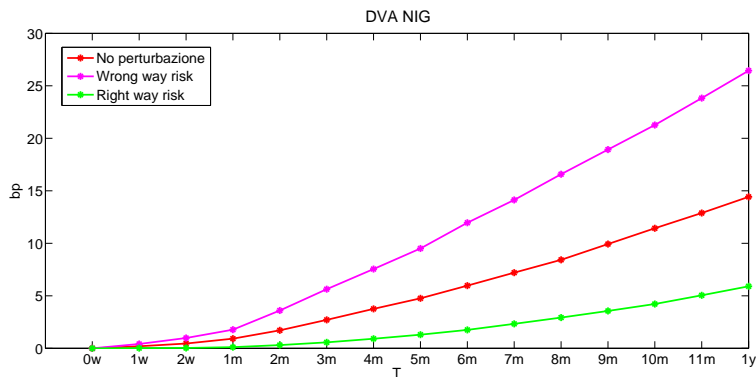


Figura 6.14: Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.

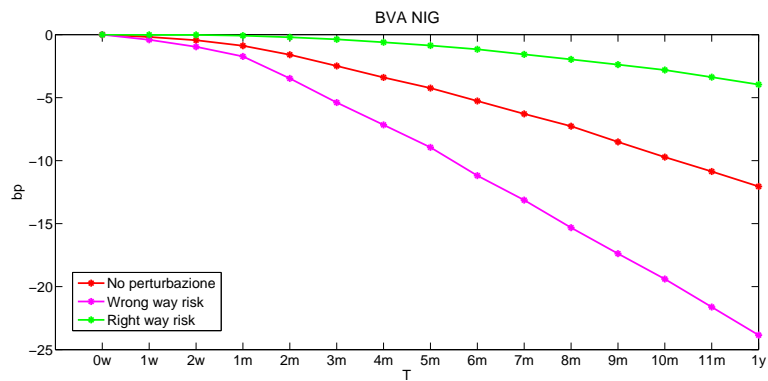


Figura 6.15: Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.

Capitolo 7

Conclusioni

L'oggetto di questa tesi è stato il rischio di controparte insito in un contratto forward. A differenza dei future, infatti, i forward sono dei prodotti OTC, pertanto l'interazione tra le controparti è diretta e non mediata da clearing houses, uno dei cui scopi è proprio mitigare il rischio di controparte. Si sono perciò definiti il Credit Valuation Adjustment, il Debt Valuation Adjustment e il Bilateral Valuation Adjustment, con lo scopo di valutare il rischio di controparte per entrambe le aziende che stipulano il derivato. Si sono inoltre mostrate differenti tecniche per calcolarli, e si è confrontato il costo computazionale di ciascuna di esse. È risultato che l'approccio meno oneroso a parità di accuratezza consiste nell'utilizzo del metodo CONV forward per calcolare le probabilità di sopravvivenza e di default nelle equazioni (3.1) e (3.2). Al termine dell'analisi teorica del problema della misura del rischio di controparte si è introdotto un esempio concreto di contratto forward stipulato da Deutsche Bank (posizione 'corta') e ENI (posizione 'lunga') sul reference name Brent Crude Oil. In questo contesto si sono anzitutto ricavate le curve di CVA, DVA e BVA per tutta la durata del contratto, per poi studiare l'effetto del wrong way risk e del right way risk tramite un'analisi di sensitività sulle correlazioni tra gli asset. Si è osservato anzitutto che il modello di Black & Scholes è inadatto al calcolo del rischio di controparte del derivato, mentre la dinamica NIG permette di calcolare adeguatamente CVA, DVA e BVA. Si è poi mostrato che l'aumento della correlazione tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil fa crescere il CVA di ENI, in accordo con il concetto di wrong way risk. Viceversa un abbassamento di questa correlazione riduce il CVA, per effetto del right way risk. Per il BVA l'analisi si è dimostrata più complicata, tanto che nell'esempio studiato esso si comporta in modo opposto rispetto al CVA. Sebbene l'attenzione sia stata incentrata su contratti forward, un'interessante estensione del lavoro presentato consisterebbe nello studio del rischio associato a prodotti più complessi. In questa tesi inoltre si sono utilizzati processi di Lévy per descrivere gli asset di controparti e reference name, ma qualora l'orizzonte temporale del contratto sia medio-lungo un modello che includa la volatilità stocastica potrebbe dimostrarsi più adatto.

Bibliografia

- [1] Ballotta, L., Bonfiglioli, E., 2014. Multivariate asset models using Lévy processes and applications. *The European Journal of Finance*, Volume 35, Issue 1, pp 1-31.
- [2] Ballotta, L., Fusai, G., 2015. Counterparty credit risk in a multivariate structural model with jumps. *Finance Journal*, Volume 36, Issue 1, 39-74.
- [3] Basel, 2010. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>.
- [4] Black, F., Cox, J., 1976. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, Volume 31, Issue 2, pp 351-367.
- [5] Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, Volume 81, Issue 3, pp 637-654.
- [6] Brigo, D., Mercurio, F., 2006. *Interest rate models - theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer finance.
- [7] Carr, P., Madan, D., 1999. Option valuation using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, Volume 2, Issue 4, pp 61-73.
- [8] Cont, R., Tankov, P., 2009. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC. Financial Mathematics Series.
- [9] Fang, F., Oosterlee, C., 2008. A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansion. *SIAM Journal of Scientific Computing*, Volume 31, Issue 2, pp 826-848.
- [10] Fang, F., Oosterlee, C., 2009. Pricing early-exercise and discrete barrier options by Fourier - cosine series expansions. *Numerische Mathematik*, Volume 114, Issue 1, pp 27-62.
- [11] Hull, J.C., 2014. *Options, futures and other derivatives*, 9th edition. Pearson Prentice Hall.

-
- [12] IASB, 2011. International Accounting Standards 39 - Financial instruments: recognition and measurement. URL: http://ec.europa.eu/internal_market/accounting/docs/consolidated/ias39_en.pdf.
- [13] Lord, R., Fang, F., Bervoets, F., Oosterlee, C., 2007. A fast and accurate FFT - based method for pricing early-exercise options under Lévy processes. SIAM Journal of Scientific Computing, Volume 30, Issue 4, pp 1678–1705.
- [14] O’Kane, D., Turnbull, S., 2003. Valuation of credit default swaps, in: Fixed income quantitative credit research, Lehman Brothers.
- [15] Seydel, R., 2012. Tools for computational finance, 5th edition. Springer.

Appendice A

Prodotti matrice - vettore con matrici di Hankel e di Toeplitz

Teorema A.0.1. Siano $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ un vettore e $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di Toeplitz nella forma:

$$T = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{N-1} \\ \omega_{-1} & \omega_0 & \dots & \omega_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1-N} & \omega_{2-N} & \dots & \omega_0 \end{pmatrix}.$$

Allora il prodotto $T\mathbf{v}$ è dato dai primi N elementi del prodotto di convoluzione dei vettori \mathbf{w}_{Toep} e \mathbf{u} , dove $\mathbf{w}_{Toep} = [\omega_0, \omega_{-1}, \dots, \omega_{1-N}, 0, \omega_{N-1}, \omega_{N-2}, \dots, \omega_1]' \in \mathbb{R}^{2N}$ e $\mathbf{u} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, 0, \dots, 0]' \in \mathbb{R}^{2N}$.

Teorema A.0.2. Siano $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ un vettore e $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di Hankel nella forma:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{N-1} \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1} & \omega_N & \dots & \omega_{2N-2} \end{pmatrix}.$$

Allora il prodotto $H\mathbf{v}$ è dato dai primi N elementi in ordine inverso del prodotto di convoluzione dei vettori \mathbf{w}_{Hank} e \mathbf{u} , dove $\mathbf{w}_{Hank} = [\omega_{2N-1}, \omega_{2N-2}, \dots, \omega_0]' \in \mathbb{R}^{2N}$ e $\mathbf{u} = [v_0, -v_1, v_2, -v_3, \dots, v_{N-2}, -v_{N-1}, 0, \dots, 0]' \in \mathbb{R}^{2N}$.

Teorema A.0.3. Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$. Allora il prodotto di convoluzione $x \otimes y$ soddisfa la relazione:

$$x \otimes y = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}(x) \cdot \mathcal{D}(y)),$$

dove \mathcal{D} e \mathcal{D}^{-1} indicano rispettivamente la trasformata di Fourier discreta e la sua inversa e \cdot il prodotto scalare tra due vettori.

Appendice B

Cumulanti del moto browniano e del NIG

Le cumulanti di una variabile aleatoria reale X sono definite tramite la funzione generatrice delle cumulanti:

$$g(t) := \log(\mathbb{E}[e^{tX}]).$$

La cumulante k -esima di X è allora data dalla derivata k -esima della funzione $g(\cdot)$ valutata nell'origine, ossia:

$$c_X^k = g^{(k)}(0).$$

Sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano di volatilità σ e con drift μ . Allora le sue prime quattro cumulanti sono:

$$c_X^1 = \mu t,$$

$$c_X^2 = \sigma^2 t,$$

$$c_X^3 = 0,$$

$$c_X^4 = 0.$$

Sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo NIG di parametri σ , k , θ e con drift μ . Allora le sue prime quattro cumulanti sono:

$$c_X^1 = (\mu + \theta)t,$$

$$c_X^2 = (k\theta^2 + \sigma^2)t,$$

$$c_X^3 = (3k^2\theta^3 + 3k\theta\sigma^2)t,$$

$$c_X^4 = (18k^2\theta^2\sigma^2 + 15k^3\theta^4 + 3k\sigma^4)t.$$

Appendice C

Dati di mercato per il bootstrap della curva risk - free dell'area euro

In questa appendice vengono riportati i dati di mercato utilizzati per la calibrazione della curva dei tassi di sconto risk-free. Si tratta dei depositi dell'area euro, dei future sull'Euribor3M e degli interest rate swap (IRS) sull'Euribor3M. Le quotazioni dei future sono estrapolate dal mercato LIFFE (London International Financial Futures and Options Exchange), poiché si tratta del mercato più liquido su cui questi prodotti vengono scambiati. Depositi e IRS sono invece quelli riportati da Thomson Reuters nella apposita pagina 'Thomson Reuters Euro Money Markets Overview'. La data in cui sono state ottenute le quotazioni è il 16 Giugno 2015. La reference date è perciò il 18 Giugno 2015.

Tabella C.1: Tassi d'interesse sui depositi interbancari dell'area euro.

Expiry	Bid	Ask
19 Giugno 2015	-0.1800%	-0.0800%
25 Giugno 2015	-0.2000%	-0.1000%
17 Luglio 2015	-0.1600%	-0.0600%
18 Agosto 2015	-0.1300%	-0.0300%
18 Settembre 2015	-0.1100%	-0.0100%

Prima colonna: data di expiry del deposito. Seconda colonna: tasso d'interesse bid sul deposito. Terza colonna: tasso d'interesse ask sul deposito.

Tabella C.2: Prezzi dei future sull'Euribor3M.

Settlement	Expiry	Bid	Ask
14 Settembre 2015	14 Dicembre 2015	99.9400	99.9450
14 Dicembre 2015	14 Marzo 2016	99.9300	99.9350
11 Marzo 2016	13 Giugno 2016	99.9150	99.9200
17 Giugno 2016	19 Settembre 2016	99.8850	99.8900
19 Settembre 2016	19 Dicembre 2016	99.8400	99.8450
13 Dicembre 2016	13 Marzo 2017	99.7850	99.7900
17 Marzo 2017	19 Giugno 2017	99.7250	99.7300
16 Giugno 2017	18 Settembre 2017	99.6650	99.6700
18 Settembre 2017	18 Dicembre 2017	99.5950	99.6000

Prima colonna: data di settlement del future. Seconda colonna: data di expiry del future. Terza colonna: Prezzo bid. Quarta colonna: prezzo ask.

Tabella C.3: Tassi d'interesse degli IRS sull'Euribor3M.

Expiry	Bid	Ask
20 Giugno 2016	0.0336%	0.0404%
19 Giugno 2017	0.1600%	0.1700%
18 Giugno 2018	0.2466%	0.2866%
18 Giugno 2019	0.3940%	0.4040%
18 Giugno 2020	0.5350%	0.5550%
18 Giugno 2021	0.6824%	0.7024%
20 Giugno 2022	0.8168%	0.8368%
19 Giugno 2023	0.9460%	0.9560%
18 Giugno 2024	1.0560%	1.0660%
18 Giugno 2025	1.5100%	1.6100%

Prima colonna: data di expiry dell'interest rate swap. Seconda colonna: tasso d'interesse bid dell'IRS. Terza colonna: tasso d'interesse ask dell'IRS.

Appendice D

Credit default swap scritti su Deutsche Bank ed ENI

In questa appendice si riportano gli spread dei credit default swap scritti su Deutsche Bank e ENI per maturity fino a 10 anni. La fonte da cui si sono ottenuti gli spread dei CDS è Reuters EOD Composite (CDS/Analytics). La reference date è per tutte le quotazioni il 18 Giugno 2015.

Tabella D.1: Spread dei CDS scritti su ENI e Deutsche Bank (in basis points).

	6 mesi	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni	5 anni	7 anni	10 anni
DB	35.33	42.16	56.38	70.36	81.75	92.61	107.76	120.11
ENI	15.63	17.86	27.90	39.94	54.54	69.53	92.70	106.28

Prima (seconda) riga: spread dei credit default swap scritti su Deutsche Bank (ENI). Le quotazioni sono espresse in basis points (1 bp= 0.01%). I recovery rate sono assunti pari al 40% per entrambe le aziende.

Appendice E

Dati di mercato relativi a Brent Crude Oil

In questa appendice si riportano i dati relativi alle opzioni call e put europee out of the money scritte su Brent Crude Oil. La fonte da cui si sono ottenuti i dati è ICE (InterContinental Exchange). La reference date è il 18 Giugno 2015.

Tabella E.1: Superficie di volatilità per opzioni call e put out of the money scritte su Brent Crude Oil.

	60\$P	61\$P	62\$P	63\$C	64\$C	65\$C	66\$C	67\$C	68\$C
2 mesi	31.26	30.36	29.59	28.96	28.46	28.11	27.90	27.80	28.04
3 mesi	31.91	31.28	30.73	30.16	29.70	29.29	28.98	28.71	28.53
4 mesi	32.50	31.97	31.48	30.99	30.56	30.17	29.79	29.52	29.27
5 mesi	32.93	32.49	32.04	31.61	31.24	30.88	30.55	30.25	30.02
6 mesi	32.99	32.56	32.13	31.75	31.38	31.01	30.71	30.40	30.15

La prima riga della tabella riporta lo strike relativo all'opzione e indica se si tratta di una call o una put. La prima colonna riporta la maturity dell'opzione. I valori delle volatilità sono da intendersi come percentuali. Lo spot price nella reference date è pari a 62.61\$.

Appendice F

Curva risk - free del dollaro americano

In questa appendice si riporta la curva dei tassi di sconto risk-free con reference date 18 Giugno 2015 per il dollaro americano. I dati sono stati ottenuti da Thomson Reuters alla pagina ‘Thomson Reuters Dollar Moneymkts Multicontributor Overview’.

Tabella F.1: Curva dei tassi di sconto risk-free del dollaro americano.

Maturity	Tasso di sconto
19 Giugno 2015	0.9999789
25 Giugno 2015	0.9999503
17 Luglio 2015	0.9998231
18 Agosto 2025	0.9995764
23 Settembre 2015	0.9992696
23 Dicembre 2015	0.9982883
23 Marzo 2016	0.9968584
23 Giugno 2016	0.9949590

Prima colonna: maturity a cui è associato il tasso di sconto. Seconda riga: tasso di sconto risk-free.

Appendice G

Codice MATLAB

G.1 Calcolo delle survival probabilities

In questa sezione si riportano gli algoritmi trattati nel capitolo 4 per calcolare le probabilità di sopravvivenza di aziende con firm value guidati da processi di Lévy.

G.1.1 Monte Carlo con asset di Black & Scholes

Nel caso in cui il firm value dell'azienda sia descritto tramite un modello di Black & Scholes, il metodo Monte Carlo per calcolare le survival probabilities può essere implementato come segue.

```
function p=survival_probability_MC_BS(S,K,q,sigma,r,T,M,d,N,Z)
%function p=survival_probability_MC_BS(S,K,q,sigma,r,T,M,d,N,Z)
%Calcolo delle survival probabilities dall'istante 0 all'istante T
%tramite il metodo Monte Carlo, assumendo che il driving process sia nella
%forma  $X=Y+Z$ , con Z processo deterministico e Y moto browniano. Il
%default avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda
%diviene uguale o inferiore a K.
%INPUT:
%S: valore iniziale dell'azienda
%K: livello di default dell'azienda
%q: dividend yield
%sigma: parametro del browniano Y
%r: tasso risk-free
%T: istante finale
%M: numero di passi temporali
%d: numero di cicli di simulazioni
%N: numero di simulazioni per ogni ciclo
%Z: monitoraggio discreto del processo Z sulla griglia temporale
%OUTPUT:
%p: survival probability in ogni istante della griglia

%% Variabili
```

```

dt=T/N; % Passo temporale
default=zeros(M,N+1);
Z=kron(ones(M,1),Z);

%% Iterazioni (d iterazioni di M simulazioni ciascuna)
for i=1:d
    % Simulazione delle variabili gaussiane
    GX=randn(M,N);

    % Simulazione del processo di Levy
    aux=zeros(M,1);
    X=cumsum(sigma*sqrt(dt)*[aux GX],2);
    X=X+Z;

    % Barriera del default
    M1=ones(M,1);
    M2=0:N;
    MM=kron(M1,M2);
    l=log(K/S)-(r-q-sigma^2/2)*dt*MM; % Barriera del default

    % Istanti di default
    aux_def=[(X-l<=0) ones(M,1)]; % Firm value sotto la barriera
    [~,default_time]=max(aux_def,[],2);
    M1=zeros(N+2,M);
    M1(default_time+(0:N+2:(M-1)*(N+2)))=1;
    M1=M1';
    default=default+cumsum(M1(:,1:end-1),2);
end

%% Survival probability
p=1-sum(default)/(M*d);

end

```

G.1.2 Monte Carlo con asset NIG

Qualora il firm value dell'azienda sia descritto tramite un modello NIG, il metodo Monte Carlo per calcolare le survival probabilities può essere implementato come segue.

```

function p=survival_probability_MC_NIG(S,K,q,sigma,k,theta,r,T,M,d,N,Z)
%function p=survival_probability_MC_NIG(S,K,q,sigma,k,theta,r,T,M,d,N,Z)
%Calcolo delle survival probabilities dall'istante 0 all'istante T
%tramite il metodo Monte Carlo, assumendo che il driving process sia nella
%forma X=Y+Z, con Z processo deterministico e Y processo NIG. Il
%default avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda
%diviene uguale o inferiore a K.
%INPUT:
%S:valore iniziale dell'azienda
%K: livello di default dell'azienda

```

```

%q: dividend yield
%(sigma,k,theta): parametri del NIG Y
%r: tasso risk-free
%T: istante finale
%M: numero di passi temporali
%d: numero di cicli di simulazioni
%N: numero di simulazioni per ogni ciclo
%Z: monitoraggio discreto del processo Z sulla griglia temporale
%OUTPUT:
%p: survival probability in ogni istante della griglia

%% Variabili
dt=T/N; % Passo temporale
default=zeros(M,N+1);
Z=kron(ones(M,1),Z);

%% Iterazioni (d iterazioni di M simulazioni ciascuna)
for i=1:d
    % Simulazione delle variabili gaussiane
    G=randn(M,N);

    % Simulazione del subordinatore
    dS=IG_simulation(dt,dt^2/k,M,N);

    % Esponente caratteristico
    psi=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*k*(-1i)^2-2*1i*theta*k*(-1i));

    % Simulazione del processo di Levy
    aux=zeros(M,1);
    X=[aux cumsum(theta*dS+sigma*sqrt(dS).*G,2)];
    X=X+Z;

    % Barriera del default
    M1=ones(M,1);
    M2=0:N;
    MM=kron(M1,M2);
    l=log(K/S)-(r-q-psi)*dt*MM;

    % Istanti di default
    aux_def=[(X-l<=0) ones(M,1)]; % Firm value sotto la barriera
    [~,default_time]=max(aux_def,[],2);
    M1=zeros(N+2,M);
    M1(default_time+(0:N+2:(M-1)*(N+2)))'=1;
    M1=M1';
    default=default_time+cumsum(M1(:,1:end-1),2);
end

%% Survival probabilities
p=1-sum(default)/(M*d);

```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function X=IG_simulation(mu,lambda,M,N)  
%Simulazione di una matrice MxN di variabili inverse gamma iid di parametri  
%mu e lambda.  
Z=randn(M,N);  
Y=Z.^2;  
X=mu+0.5*mu^2/lambda*Y-0.5*mu/lambda*sqrt(4*mu*lambda*Y+mu^2*Y.^2);  
U=rand(M,N);  
idx=find(U>mu./(X+mu));  
X(idx)=mu^2./X(idx);  
end
```

G.1.3 COS backward

Al fine di ottenere le probabilità di sopravvivenza di un'azienda il cui firm value sia descritto tramite un modello di Black & Scholes oppure NIG si può procedere come segue, con un algoritmo COS backward in time.

```
function p=survival_probability_COS_method_bck(T,r,q,model,param,K,L,M,N,dZ,x)  
%function p=survival_probability_COS_method_bck(T,r,q,model,param,K,L,M,N,dZ,x)  
%Calcolo della survival probability dall'istante 0 all'istante T  
%tramite il metodo COS, assumendo che il driving process sia nella forma  
%X=Y+Z, con Z processo deterministico e Y processo di Levy. Il default  
%avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda diviene  
%uguale o inferiore ad K volte il valore iniziale.  
%INPUT:  
%T: istante finale  
%r: tasso risk-free  
%q: dividend yield  
%model: 0->BS 1->NIG  
%param: parametri del processo di Levy Y  
%      model=0 -> sigma (parametro del browniano)  
%      model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)  
%K: livello di default come percentuale del valore iniziale del firm value  
%L: parametro di troncamento del metodo COS  
%M: numero di passi temporali  
%N: numero di termini dell'espansione in serie di coseni  
%dZ: incrementi del processo Z. Nel caso Z sia una matrice, ogni riga  
%     rappresenta gli incrementi di un processo deterministico. In tal  
%     caso, le survival probabilities vengono calcolate per ciascuno dei  
%     processi in Z.  
%x: valore iniziale del processo Z  
%OUTPUT:  
%p: survival probability
```

```

%% Caso di Levy puro
if nargin<10
    det=0;
    dZ=zeros(1,M);
    x=0;
else
    det=1;
end

%% Variabili
dt=T/M;
[c1 c2 c4]=cumulants(model,param,T,r,q);
a=c1-L*sqrt(c2+sqrt(c4));
b=c1+L*sqrt(c2+sqrt(c4));
h=max(a,log(K));
NsimZ=size(dZ,1);
dZ=dZ';

%% Calcolo di P(t_M)
P=zeros(N,1);
P(1)=2*(b-h)/(b-a);
temp=(1:N-1);
P(2:end)=- (2./(pi*temp)).*sin(pi*temp*(h-a)/(b-a));
P=kron(ones(1,NsimZ),P);

%% Costruzione di w_Toep e w_Hank
w_Toep=transpose([w_j(a,b,h,(0:-1:1-N)) 0 w_j(a,b,h,(N-1:-1:1))]);
w_Hank=transpose(w_j(a,b,h,(2*N-1:-1:0)));

%% Trasformate di Fourier discrete di w_Toep e w_Hank
sign=ones(size(w_Hank));
sign(2:2:end)=-1;
D_w_Toep=fft(w_Toep);
D_w_Hank=fft(w_Hank).*sign;

%% Parte costante della diagonale della matrice lambda
temp=(0:N-1)';
Lambda_diag_const=char_fun(temp*pi/(b-a),dt,r,q,model,param);
Lambda_diag_const(1)=0.5*Lambda_diag_const(1);

%% Vettore phi
x=x';
phi=real(bsxfun(@times,...
    char_fun(temp*pi/(b-a),dt,r,q,model,param),...
    exp(1i*pi/(b-a)*temp*(x-a)).*...
    exp(1i*pi/(b-a)*temp*dZ(1,:))));
phi(1,:)=0.5*phi(1,:);

%% Vettore delle survival probability
if det==0

```

```

        p=zeros(1,M+1);
        p(1)=1;
    else
        p=zeros(1,NsimZ);
    end

    end

    %% Calcolo di P(t_1)
    for m=M:-1:2
        % Survival probability
        if det==0
            p(1,M+2-m)=sum(phi.*P);
        end
        % Prodotto lambda per P(t_m)
        Lambda_P=bsxfun(@times,P,Lambda_diag_const).*exp(1i*pi/(b-a)*temp*dZ(m,:));
        % Costruzione di u
        u=[Lambda_P; zeros(N,NsimZ)];
        % Trasformata di Fourier discreta di u
        D_u=fft(u);
        % Inversione del prodotto di convoluzione
        inv_trasf1=ifft(bsxfun(@times,D_u,D_w_Toep));
        inv_trasf2=ifft(bsxfun(@times,D_u,D_w_Hank));
        conv_prod1=inv_trasf1(1:N,:);
        conv_prod2=inv_trasf2(N:-1:1,:);
        % P(t_m-1)
        P=real(conv_prod1+conv_prod2);
    end

    end

    %% Survival probability
    if det==0
        p(end)=sum(phi.*P);
    else
        p=sum(phi.*P);
    end

    end

    end

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    function coeff=w_j(a,b,h,j)
    %Calcolo di w_j
    coeff=zeros(size(j));
    idx1=find(j==0);
    coeff(idx1)=(b-h)/(b-a);
    idx2=find(j~=0);
    coeff(idx2)=-(1i./(pi*j(idx2))).*(exp(1i*j(idx2)*pi)...
        -exp(1i*j(idx2)*((h-a)*pi/(b-a))));
    end

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
function p=psi(model,param)
%Valutazione dell'esponente caratterisitico di un Levy in -i (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    p=sigma^2/2;
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    p=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*k*(-1i)^2-2*1i*theta*k*(-1i));
end
end
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
function [c1 c2 c4]=cumulants(model,param,T,r,q)
%Cumulanti di un processo di Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    mu=r-q-psi(model,param);
    c1=mu*T;
    c2=sigma^2*T;
    c4=0;
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    mu=r-q-psi(model,param);
    c1=(mu+theta)*T;
    c2=(k*theta^2+sigma^2)*T;
    c4=(15*k^3*theta^4+18*k^2*sigma^2*theta^2+3*sigma^4*k)*T;
end
end
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
function f=char_fun(u,t,r,q,model,param)
%Funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))-sigma^2/2*u.^2));
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))+1/k...
```

```

        -1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u));
end
end

```

G.1.4 COS forward

Si è visto nella precedente sottosezione come implementare il metodo COS backward in time per il calcolo di probabilità disopravvivenza. Di seguito viene proposta una versione forward in time.

```

function surv_prob=survival_probability_COS_method_fwd...
    (T,r,q,model,param,dZ,Z0,K,L,M,N,NN)
%function surv_prob=survival_probability_COS_method_fwd...
%    (T,r,q,model,param,dZ,Z0,K,L,M,N,NN)
%Calcolo delle survival probabilities dall'istante 0 all'istante T
%tramite il metodo COS, assumendo che il driving process sia nella forma
%X=Y+Z, con Z processo deterministico e Y processo di Levy. Il default
%avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda diviene
%uguale o inferiore ad K volte il valore iniziale.
%INPUT:
%T: istante finale
%r: tasso risk-free
%q: dividend yield
%model: 0->BS 1->NIG
%param: parametri del processo di Levy Y
%       model=0 -> sigma (parametro del browniano)
%       model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)
%dZ: incrementi del processo Z. Nel caso in cui Z sia una matrice, ogni
%     riga rappresenta gli incrementi di un processo deterministico.
%     In tal caso, le survival probabilities vengono calcolate
%     per ciascuno dei processi in Z.
%z0: valore iniziale del processo Z
%K: livello di default come percentuale del valore iniziale del firm value
%L: parametro di troncamento del metodo COS
%M: numero di passi temporali
%N: numero di termini dell'espansione in serie di coseni
%NN: precisione nel calcolo dell'integrale
%OUTPUT:
%surv_prob: survival probability

%% Variabili
dt=T/M;
[c1 c2 c4]=cumulants(model,param,T,r,q);
a=c1-L*sqrt(c2+sqrt(c4));
b=c1+L*sqrt(c2+sqrt(c4));
NsimZ=size(dZ,1);
h=max(a,log(K));
surv_prob=zeros(M+1,NsimZ);
surv_prob(1,:)=1;

```

```

if model==0
    delta=20;
else
    delta=40;
end
L=delta*sqrt(-d2phi(0,T,r,q,model,param)+(dphi(0,T,r,q,model,param))^2);
j=(0:NN-1)';
k=ones(NN,1); k(1)=0.5; k(end)=0.5;
dx=L/NN;
x0=-L/2;
x=x0+j*dx;
temp=(0:N-1)';
dZ=dZ';
Z0=Z0';

%% Parte costante della diagonale della matrice lambda
Lambda_diag_const=phi(temp*pi/(b-a),dt,r,q,model,param);
Lambda_diag_const(1)=0.5*Lambda_diag_const(1);

%% Matrice cos
cos_matrix=cos(pi*(x-a)/(b-a)*(temp'));

%% Calcolo di P(t_0)
P=real(bsxfun(@times,exp(1i*pi/(b-a)*temp*dZ(1,:))...
    .*exp(1i*pi/(b-a)*temp*(Z0-a)),Lambda_diag_const));

%% Costruzione di w_Toep e w_Hank
w_Toep=transpose([w_j(a,b,h,(0:N-1)) 0 w_j(a,b,h,(1-N:-1))]);
w_Hank=transpose(w_j(a,b,h,(2*N-1:-1:0)));

%% Trasformate di Fourier discrete di w_Toep e w_Hank
sign=ones(size(w_Hank));
sign(2:2:end)=-1;
D_w_Toep=fft(w_Toep);
D_w_Hank=fft(w_Hank).*sign;

%% Survival probability in t1
% p(t1)
p=2/(b-a)*cos_matrix*P;
% survival probability in t1
surv_prob(2,:)=sum(bsxfun(@times,p,k.*(x>h)*dx));

%% Forward in time
for m=2:M
    % Costruzione di u
    u=[P; zeros(N,NsimZ)];
    % Trasformata di Fourier discreta di u
    D_u=fft(u);
    % Inversione del prodotto di convoluzione
    inv_trasf1=ifft(bsxfun(@times,D_u,D_w_Toep));

```

```

inv_trasf2=ifft(bsxfun(@times,D_u,D_w_Hank));
conv_prod1=inv_trasf1(1:N,:);
conv_prod2=inv_trasf2(N:-1:1,:);
% P(tm)
P=real(bsxfun(@times,conv_prod1+conv_prod2,Lambda_diag_const)...
.*exp(1i*pi/(b-a)*temp*dZ(m,:)));
% p(tm)
p=2/(b-a)*cos_matrix*P;
% Survival probability in tm
surv_prob(m+1,:)=sum(bsxfun(@times,p,k.*(x>h)*dx));
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function coeff=w_j(a,b,h,j)
%Calcolo di w_j
coeff=zeros(size(j));
idx1=find(j==0);
coeff(idx1)=(b-h)/(b-a);
idx2=find(j~=0);
coeff(idx2)=-(1i./(pi*j(idx2))).*(exp(1i*j(idx2)*pi)...
-exp(1i*j(idx2)*((h-a)*pi/(b-a))));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function p=psi(model,param)
%Valutazione dell'esponente caratterisitico di un Levy in -i (BS o NIG)
if model==0 % BBS
sigma=param(1);
p=sigma^2/2;
else % NIG
sigma=param(1);
k=param(2);
theta=param(3);
p=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*k*(-1i)^2-2*1i*theta*k*(-1i));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [c1 c2 c4]=cumulants(model,param,T,r,q)
%Cumulanti di un processo di Levy (BS o NIG)
if model==0 % BBS
sigma=param(1);

```

```

mu=r-q-psi(model,param);
c1=mu*T;
c2=sigma^2*T;
c4=0;
else % NIG
sigma=param(1);
k=param(2);
theta=param(3);
mu=r-q-psi(model,param);
c1=(mu+theta)*T;
c2=(k*theta^2+sigma^2)*T;
c4=(15*k^3*theta^4+18*k^2*sigma^2*theta^2+3*sigma^4*k)*T;
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=phi(u,t,r,q,model,param)
%Funzione caratteristica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
sigma=param(1);
f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))-sigma^2/2*u.^2));
else % NIG
sigma=param(1);
k=param(2);
theta=param(3);
f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))+1/k...
-1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u)));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=dphi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata della funzione caratteristica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
sigma=param(1);
gamma=r-q-psi(model,param);
f=(-sigma^2*t+t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
sigma=param(1);
k=param(2);
theta=param(3);
gamma=r-q-psi(model,param);
f=t*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
/sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=d2phi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata seconda della funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2-sigma^2*t)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
        /sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))^2+...
        -t/k*(sigma^2*k*(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*theta*k*u)...
        -(sigma^2*k*u-1i*theta*k)^2)...
        /(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u)^1.5)*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

```

G.1.5 CONV backward

Un algoritmo backward in time alternativo al COS per calcolare le probabilità di sopravvivenza di un'azienda con un firm value guidato da un browniano o da un NIG è il CONV backward. Di seguito viene proposto il codice MATLAB per implementare questo metodo.

```

function p=survival_probability_CONV_method_bck(S0,H,T,r,q,model,param,M,N,Z)
%function p=survival_probability_CONV_method_bck(S0,H,T,r,q,model,param,M,N,Z)
%Calcolo delle survival probabilities dall'istante 0 all'istante T
%tramite il metodo CONV, assumendo che il driving process sia nella forma
%X=Y+Z, con Z processo deterministico e Y processo di Levy. Il default
%avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda diviene
%uguale o inferiore ad H.
%INPUT:
%S0: valore iniziale dell'azienda
%H: livello di default dell'azienda
%T: istante finale
%r: tasso risk-free
%q: dividend yield
%model: 0->BS 1->NIG
%param: parametri del processo di Levy Y
%      model=0 -> sigma (parametro del browniano)
%      model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)
%M: numero di passo temporali
%N: parametro di precisione del metodo CONV
%Z: monitoraggio discreto del processo Z sulla griglia temporale

```

```

%OUTPUT:
%p: survival probability

%% Caso di Levy puro
if nargin<10
    det=0;
    Z=zeros(1,M+1);
else
    det=1;
end

%% Griglie e variabili
h=log(H/S0);
dt=T/M;
if model==0
    delta=20;
else
    delta=40+40*(T<0.5);
end
L=delta*sqrt(-d2phi(0,T,r,q,model,param)+(dphi(0,T,r,q,model,param))^2);
j=(0:N-1)';
k=ones(N,1); k(1)=0.5; k(end)=0.5;
du=2*pi/L;
dy=L/N;
u0=-N/2*du;
y0=-L/2;
u=u0+j*du;
y=y0+j*dy;
w0=-L/2;
Z=transpose(Z);
NsimZ=size(Z,2);

%% V(t_M)
V=(kron(ones(1,NsimZ),y)>kron(ones(N,1),h-Z(end,:)));

%% Vettore delle survival probability
if det==0
    p=zeros(1,M+1);
else
    p=zeros(1,NsimZ);
end

%% Backward in time
for m=M-1:-1:0
    % Survival probability
    if det==0
        p(M-m)=V(N/2+1,:);
    end
    % Convoluzione
    c=bsxfun(@times,fft(bsxfun(@times,ifft(bsxfun(@times,V,(-1).^j.*k)),...

```

```

exp(1i*j*(w0-y0)*du).*phi(-u,dt,r,q,model,param)),...
exp(1i*u0*(w0-y0))*(-1).^j);
% V(t_m)
V=(kron(ones(1,NsimZ),y)>kron(ones(N,1),h-Z(m+1,:))).*real(c);
end

%% Survival probability
if det==0
    p(end)=V(N/2+1,:);
else
    p=V(N/2+1,:);
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function p=psi(model,param)
%Valutazione dell'esponente caratterisitico di un Levy in -i (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    p=sigma^2/2;
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    p=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*k*(-1i)^2-2*1i*theta*k*(-1i));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f=phi(u,t,r,q,model,param)
%Funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BBS
    sigma=param(1);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))-sigma^2/2*u.^2));
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))+1/k...
        -1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u)));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function f=dphi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata della funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(-sigma^2*t+t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=t*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
        /sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=d2phi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata seconda della funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2-sigma^2*t)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
        /sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))^2+...
        -t/k*(sigma^2*k*(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*theta*k*u)...
        -(sigma^2*k*u-1i*theta*k)^2)...
        /(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u)^1.5)*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

```

G.1.6 CONV forward

Un'alternativa al metodo CONV backward per il calcolo di probabilità di sopravvivenza di aziende guidate da moti browniani o NIG è il CONV forward. La sua implementazione è presentata di seguito.

```

function p=survival_probability_CONV_method_fwd(S0,H,T,r,q,model,param,M,N,Z)
%function p=survival_probability_CONV_method_fwd(S0,H,T,r,q,model,param,M,N,Z)
%Calcolo delle survival probabilities dall'istante 0 all'istante T
%tramite il metodo CONV, assumendo che il driving process sia nella forma

```

```

% $X=Y+Z$ , con  $Z$  processo deterministico e  $Y$  processo di Levy. Il default
%avviene se in un qualunque istante di tempo il valore dell'azienda diviene
%uguale o inferiore ad  $H$ .
%INPUT:
% $S_0$ : valore iniziale dell'azienda
%H: livello di default dell'azienda
% $T$ : istante finale
% $r$ : tasso risk-free
% $q$ : dividend yield
%model: 0->BS 1->NIG
%param: parametri del processo di Levy  $Y$ 
%      model=0 -> sigma (parametro del browniano)
%      model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)
%M: numero di passo temporali
%N: parametro di precisione del metodo CONV
%Z: monitoraggio discreto del processo  $Z$  sulla griglia temporale
%OUTPUT:
%p: survival probability in ciascun punto della griglia temporale

%% Griglie e variabili
h=log(H/S0);
dt=T/M;
if model==0
    delta=20;
else
    delta=40;
end
L=delta*sqrt(-d2phi(0,T,r,q,model,param)+(dphi(0,T,r,q,model,param))^2);
j=(0:N-1)';
k=ones(N,1); k(1)=0.5; k(end)=0.5;
du=2*pi/L;
dy=L/N;
u0=-N/2*du;
y0=-L/2;
u=u0+j*du;
y=y0+j*dy;
w0=-L/2;
Z=transpose(Z);
NsimZ=size(Z,2);
p=zeros(M+1,NsimZ);
p(1,:)=1;

%%  $V(t_0)$ 
c=1/N*exp(-1i*u0*y0)*(-1).^j.*fft(exp(-1i*j*y0*du).*phi(u,dt,r,q,model,param));
V=bsxfun(@times,(kron(ones(1,NsimZ),y)>kron(ones(N,1),h-Z(2,:))),real(c));
IV=bsxfun(@times,ifft(bsxfun(@times,V,(-1).^j.*k)),...
    exp(1i*u0*y0)*exp(1i*j*y0*du)*N);
p(2,:)=IV(N/2+1,:);

%% Forward in time

```

```

for m=2:M
    % Convoluzione
    c=bsxfun(@times,fft(bsxfun(@times,IV,...
    exp(1i*j*(w0-2*y0)*du).*phi(u,dt,r,q,model,param))),...
    exp(1i*u0*(w0-2*y0))*(-1).^j/N);
    % V(t_m)
    V=(kron(ones(1,NsimZ),y)>kron(ones(N,1),h-Z(m+1,:))).*real(c);
    IV=bsxfun(@times,ifft(bsxfun(@times,V,(-1).^j.*k)),...
    exp(1i*u0*y0)*exp(1i*j*y0*du)*N);
    % Survival probability
    p(m+1,:)=IV(N/2+1,:);
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function p=psi(model,param)
%Valutazione dell'esponente caratterisitico di un Levy in -i (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    p=sigma^2/2;
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    p=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*k*(-1i)^2-2*1i*theta*k*(-1i));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=phi(u,t,r,q,model,param)
%Funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))-sigma^2/2*u.^2));
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    f=exp(t*(1i*u*(r-q-psi(model,param))+1/k...
    -1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u)));
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function f=dphi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata della funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(-sigma^2*t+t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=t*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
        /sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=d2phi(u,t,r,q,model,param)
%Derivata seconda della funzione caratterisitica di un Levy (BS o NIG)
if model==0 % BBS
    sigma=param(1);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-sigma^2*u)^2-sigma^2*t)*phi(u,t,r,q,model,param);
else % NIG
    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    gamma=r-q-psi(model,param);
    f=(t^2*(1i*gamma-(sigma^2*u-1i*theta)...
        /sqrt(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u))^2+...
        -t/k*(sigma^2*k*(1+u^2*sigma^2*k-2*1i*theta*k*u)...
        -(sigma^2*k*u-1i*theta*k)^2)...
        /((1+u^2*sigma^2*k-2*1i*k*theta*u)^1.5))*phi(u,t,r,q,model,param);
end
end

```

G.2 Calcolo di CVA, DVA e BVA

Questa sezione è dedicata al calcolo di CVA, DVA e BVA di un contratto forward, seguendo le metodologie espone nel capitolo 3. Per il calcolo delle probabilità di sopravvivenza viene utilizzato un approccio CONV forward in time.

G.2.1 CVA, DVA e BVA

Questa funzione permette di calcolare il CVA, il DVA e il BVA di un'azienda con un firm value guidato da un moto browniano oppure da un processo NIG.

```
function [CVA2 DVA2 BVA2]=CONV_CVA_DVA_BVA_fwd(S1,S2,S3,T,U,r_e,r_d,a1,a2,a3,...
    q1,q2,q3,K1,K2,K3,model,param1,param2,param3,paramZ,R1,R2,N,NsimZ,M_week,d)
%function [CVA2 DVA2 BVA2]=CONV_CVA_DVA_BVA_fwd(S1,S2,S3,T,U,r_e,r_d,a1,a2,a3,...
%    q1,q2,q3,K1,K2,K3,model,param1,param2,param3,paramZ,R1,R2,N,NsimZ,M_week,d)
%Credit value adjustment, debt value adjustment e bilateral counterparty
%value adjustment per le controparti di un contratto forward per periodi
%di 1 settimana, 2 settimane, 1 mese, 2 mesi, 3 mesi eccetera fino
%all'istante T.
%La controparte 1 sia corta e la controparte 2 sia lunga nel forward.
%Siccome il CVA della controparte 1 corrisponde al DVA della controparte 2 e vice
%versa, risulta sufficiente focalizzarsi su una controparte. Gli output sono CVA,
%DVA e BVA per la controparte 2, quella lunga nel contratto.
%Le controparti falliscono se attraversano, in qualsiasi istante, il loro
%livello di default (K1 e K2 rispettivamente).
%Viene adottato un approccio CONV forward in time.
%S1,S2,S3: valore iniziale dei firm value di controparti e reference name
%T: finestra temporale per CVA, DVA e BVA (numero di anni)
%U: maturity del contratto forward (numero di anni)
%r_e: tasso risk-free dell'euro
%r_d: tasso risk-free del dollaro
%a1,a2,a3: coefficienti di dipendenza da Z di  $X_j=Y_j+a_j*Z$   $j=1,2,3$ 
%q1,q2,q3: dividend yield delle controparti e del reference name
%K1,K2: livelli di default delle controparti
%K3: prezzo del forward
%model: 0->BGS 1->NIG
%param1 ,param2 param3, paramZ:
%
%           model=0 -> sigma (parametro del browniano)
%           model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)
%R1, R2: recovery rate delle due controparti
%N: parametro di precisione per il metodo CONV
%NsimZ*d: numero di simulazioni di CVA, DVA e BVA
%M_week: numero di passi temporali in una settimana
%OUTPUT:
%CVA2: credit value adjustment per la controparte 2 per periodi di 1
%       settimana, due settimane, un mese, due mesi, tre mesi ecc. fino
%       all'istante T.
%DVA2: debt value adjustment per la controparte 2 per periodi di 1
%       settimana, due settimane, un mese, due mesi, tre mesi ecc. fino
%       all'istante T.
%BVA2: bilateral counterparty adjustment per la controparte 2 per periodi
%       di 1 settimana, due settimane, un mese, due mesi, tre mesi ecc. fino
%       all'istante T.

%% Variabili
M=48*M_week*T; % 48 settimane all'anno-> ogni mese ha 4 settimane
dt=T/M;
```

```

t=dt*(1:M);
E_CVA=zeros(M,NsimZ);
E_DVA=zeros(M,NsimZ);
temp=M_week*(1 2 4:4:48*T);
CVA2=zeros(d,length(temp));
DVA2=zeros(d,length(temp));

%% Esponente caratteristico di Z valutato in -a*i
exp1=psi(-a1*i,model,paramZ);
exp2=psi(-a2*i,model,paramZ);

%% Forward rates sul dollaro
r_f=(r_d(end)*t(end)-r_d.*t)./(t(end)-t);
r_f(end)=0;

%% Ciclo
for k=1:d
    % Simulazione del processo Z
    Z=asset_simulation(model,paramZ,T,NsimZ,M);

    % Survival e default probabilities
    Z1=a1*Z-exp1*kron(ones(NsimZ,1),[0 t]);
    Z2=a2*Z-exp2*kron(ones(NsimZ,1),[0 t]);
    psurv1=survival_probability_CONV_method_fwd...
        (S1,K1*S1,T,r_e,q1,model,param1,M,N,Z1);
    psurv2=survival_probability_CONV_method_fwd...
        (S2,K2*S2,T,r_e,q2,model,param2,M,N,Z2);
    pdef1=psurv1(1:end-1,:)-psurv1(2:end,:);
    pdef2=psurv2(1:end-1,:)-psurv2(2:end,:);

    % Valore atteso del payoff scontato
    for j=1:M
        [E_CVA(j,:) E_DVA(j,)] = conditional_expected_values...
            (S3,K3,a3,q3,r_d(j),r_d(end),r_f(j),U,t(j),Z(:,j+1)),...
            model,paramZ,param3);
    end

    % Simulazioni di CVA e DVA
    aux_CVA=pdef1.*psurv2(2:end,:).*E_CVA;
    aux_DVA=pdef2.*psurv1(2:end,:).*E_DVA;

    % CVA, DVA, BVA
    for i=1:length(temp)
        CVA2(k,i)=(1-R1)*mean(sum(aux_CVA(1:temp(i),:),1));
        DVA2(k,i)=(1-R2)*mean(sum(aux_DVA(1:temp(i),:),1));
    end
end

CVA2=sum(CVA2,1)/d;
DVA2=sum(DVA2,1)/d;

```

```

BVA2=CVA2-DVA2;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function Z=asset_simulation(model,param,T,M,N)
%Simulazione di un processo di Levy (moto browniano o NIG)
if model==0 % Moto browniano
    sigmaZ=param(1);
    dt=T/N;
    GZ=randn(M,N);
    aux=zeros(M,1);
    Z=cumsum(sigmaZ*sqrt(dt)*[aux GZ],2);
else % NIG
    sigmaZ=param(1);
    kZ=param(2);
    thetaZ=param(3);
    dt=T/N;
    GZ=randn(M,N);
    dSZ=IG_simulation(dt,dt^2/kZ,M,N);
    aux=zeros(M,1);
    Z=[aux cumsum(thetaZ*dSZ+sigmaZ*sqrt(dSZ).*GZ,2)];
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function X=IG_simulation(mu,lambda,M,N)
%Simulazione di una matrice MxN di variabili inverse gamma iid di parametri
%mu e lambda.
Z=randn(M,N);
Y=Z.^2;
X=mu+0.5*mu^2/lambda*Y-0.5*mu/lambda*sqrt(4*mu*lambda*Y+mu^2*Y.^2);
U=rand(M,N);
idx=find(U>mu./(X+mu));
X(idx)=mu^2./X(idx);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function exponent=psi(u,model,param)
%Esponente caratteristico di un Levy (BS o NIG) valutato in u
if model==0 % BS
    sigma=param(1);
    exponent=-sigma^2/2*u.^2;
else % NIG

```

```

    sigma=param(1);
    k=param(2);
    theta=param(3);
    exponent=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u);
end
end

```

G.2.2 Valori attesi nel calcolo di CVA e DVA

Questa è una funzione ausiliaria chiamata all'interno di quella appena riportata. L'obiettivo consiste nel calcolare i valori attesi dei payoff scontati negli istanti della griglia di discretizzazione temporale, condizionatamente al processo Z .

```

function [E_CVA E_DVA]=conditional_expected_values...
    (S3,K3,a3,q3,r_i,r_U,r_f,U,ti,Z_ti,model,paramZ,paramY_3)
%function [E_CVA E_DVA]=conditional_expected_values...
%    (S3,K3,a3,q3,r_i,r_U,r_f,U,ti,Z_ti,model,paramZ,paramY_3)
%Calcolo dei valori attesi condizionati necessari per ottenere CVA e DVA.
%INPUT:
%S3: Valore iniziale del sottostante
%K3: prezzo del forward
%a3: coefficienti di dipendenza da Z di  $X_j=Y_j+a_j*Z$   $j=1,2,3$ 
%q3: dividend yield di S3
%r_i: tasso risk-free fino all'istante ti
%r_U: tasso risk-free fino all'istante U
%r_f: forward rate da ti a U
%U: maturity del forward
%ti: istante del possibile default
%Z_ti: valutazione del processo Z in ti
%model: 0->BS 1->NIG
%paramZ, paramY_3:
%
%           model=0 -> sigma (parametro del browniano)
%           model=1 -> (sigma,k,theta) (parametri del NIG)
%OUTPUT:
%E_CVA: valore atteso necessario per ottenere il CVA
%E_DVA: valore atteso necessario per ottenere il DVA

const=exp(-q3*U-psiZ(-a3*1i,model,paramZ)*ti+a3*Z_ti);
E_CVA=const.*Carr_Madan(S3,K3*exp(-r_f*(U-ti))./const,ti,r_i,0,model,paramY_3);
E_DVA=E_CVA-S3*const+K3*exp(-r_U*U);

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function exponent=psiZ(u,model,param)
%Esponente caratteristico di un Levy (BS o NIG) valutato in u
if model==0 % BS

```

```

        sigma=param(1);
        exponent=-sigma^2/2*u.^2;
else % NIG
        sigma=param(1);
        k=param(2);
        theta=param(3);
        exponent=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u);
end
end

```

G.2.3 Algoritmo di Carr-Madan

Di seguito è riportato l'algoritmo per il pricing di opzioni call europee secondo l'approccio di Carr-Madan.

```

function prezzo=Carr_Madan(S0,K,T,r,q,flag,parametri)
%function prezzo=Carr_Madan(S0,K,T,r,flag,parametri)
%Pricing di un'opzione call europea tramite il metodo di Carr-Madan.
%INPUT:
%S0: valore spot del sottostante
%K: strike dell'opzione
%T: time to maturity dell'opzione
%r: tassi d'interesse risk-free
%q: dividend yield
%flag: se flag==0 viene adottato un modello BS per il firm value
%      se flag==1 viene adottato un modello NIG per il firm value

%parametri: parametri del modello per il sottostante, contenente:
%           - nel caso BS (vedi flag) sigma
%           - nel caso NIG (sigma,k,theta)
%
%OUTPUT:
%prezzo: prezzo dell'opzione call

%% Parametri
A=600;
M=15;
N=2^M;
Delta=A/N;

%% Griglie
l=0:N-1;
k=(2*pi)/(N*Delta)*(1-N/2);
v=Delta*l;
v(1)=10^-22;
w=ones(1,N);
w(1)=0.5;
w(end)=0.5;

```

```

%% Pricing
g=exp(1i*v*r*T)/(1i*v.*(1+1i*v)).*(exp(T*(esp_car(v-1i,flag,parametri)...
    -1i*(v-1i)*esp_car(-1i,flag,parametri)))-1);
Z=real(fft(exp(1i*pi*l).*w.*g)*Delta/pi);
C=Z+max(0,1-exp(k-r*T));
Ps=S0*exp(-q*T)*C;
Ks=S0*exp(-q*T)*exp(k);

%% Risultati
idx=find(Ks>0.1*min(K) & Ks<3*max(K));
Ps=Ps(idx);
Ks=Ks(idx);
prezzo=interp1(Ks,Ps,K,'spline');

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=esp_car(u,flag,parametri)
% Esponente caratteristico del modello.
switch flag
    case 0
        sigma=parametri;
        f=-sigma^2/2*u.^2;

    case 1
        sigma=parametri(1);
        k=parametri(2);
        theta=parametri(3);
        f=1/k-1/k*sqrt(1+sigma^2*u.^2*k-2*1i*theta*k*u);
end

end

```

Elenco delle figure

4.1	Driving process browniano.	31
4.2	Driving process browniano con aggiunta della componente deterministica.	32
4.3	Driving process NIG.	32
4.4	Driving process NIG con aggiunta della componente deterministica.	32
5.1	Bootstrap della curva dei tassi risk-free dell'area euro.	43
5.2	Probabilità di sopravvivenza calibrate dal mercato, servendosi dell'algoritmo di O'Kane e Turnbull.	44
5.3	Prezzi delle opzioni scritte su Brent Crude Oil secondo il mercato e secondo il modello Black & Scholes. Ogni gruppo di 9 opzioni a partire da sinistra è caratterizzato da una maturity fissata (due, tre, quattro, cinque e sei mesi rispettivamente). Si fa riferimento all'Appendice E per le specifiche dei contratti.	47
5.4	Superfici di volatilità implicite delle opzioni call e put europee out of the money scritte su Brent Crude Oil. A sinistra è riportata la superficie di volatilità del mercato, a destra quella del modello Black & Scholes. Nel secondo grafico sono rappresentate solo le opzioni per cui l'algoritmo blsimpv di MATLAB è giunto a convergenza.	48
5.5	Prezzi delle opzioni scritte su Brent Crude Oil secondo il mercato e secondo il modello NIG. Ogni gruppo di 9 opzioni a partire da sinistra è caratterizzato da una maturity fissata (due, tre, quattro, cinque e sei mesi rispettivamente). Si fa riferimento all'Appendice E per le specifiche dei contratti.	49
5.6	Superfici di volatilità implicite delle opzioni call e put europee out of the money scritte su Brent Crude Oil. A sinistra è riportata la superficie di volatilità del mercato, a destra quella del modello NIG. Nel secondo grafico sono rappresentate solo le opzioni per cui l'algoritmo blsimpv di MATLAB è giunto a convergenza.	49

6.1	Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	53
6.2	Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	54
6.3	Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello di Black & Scholes. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	54
6.4	Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	55
6.5	Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	56
6.6	Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. I parametri calibrati sono quelli riportati all'interno del capitolo 5.	56
6.7	Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	58

6.8	Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	58
6.9	Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	59
6.10	Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	60
6.11	Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	60
6.12	Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di right way risk si è imposta una correlazione pari a 0.3 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil.	61

6.13	Credit Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.	62
6.14	Debt Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.	62
6.15	Bilateral Valuation Adjustment (in basis point) per ENI lungo l'intera durata di un contratto forward annuale con controparte Deutsche Bank e reference name Brent Crude Oil. Il modello adottato per i processi che governano i firm value è quello NIG. Per ottenere la curva priva di perturbazione si sono utilizzati i parametri calibrati riportati all'interno del capitolo 5. Per la curva in situazione di wrong way risk si è imposta una correlazione pari a 0.15 tra Deutsche Bank e Brent Crude Oil, mentre per quella in situazione di right way risk essa è imposta pari a 0.3.	63

Elenco delle tabelle

4.1	Tempi di calcolo dei diversi schemi numerici (in secondi).	33
5.1	Credit spread calibrati tramite l'algoritmo di O'Kane e Turnbull.	44
5.2	Credit spread per ENI e Deutsche Bank (DB).	45
5.3	Parametri calibrati per ENI e Deutsche Bank con dinamiche di Black & Scholes.	46
5.4	Parametri calibrati per ENI e Deutsche Bank con dinamiche NIG.	46
5.5	Parametri calibrati per Brent Crude Oil con dinamica di Black & Scholes.	47
5.6	Parametri calibrati per Brent Crude Oil con dinamiche NIG.	48
5.7	Matrice di correlazione dei log-return.	50
5.8	Calibrazione dei processi marginali di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil con dinamiche di Black & Scholes.	50
5.9	Calibrazione dei processi marginali di ENI, Deutsche Bank e Brent Crude Oil con dinamiche NIG.	51
5.10	Calibrazione del fattore di rischio comune Z con dinamiche NIG.	51
C.1	Tassi d'interesse sui depositi interbancari dell'area euro.	69
C.2	Prezzi dei future sull'Euribor3M.	70
C.3	Tassi d'interesse degli IRS sull'Euribor3M.	70
D.1	Spread dei CDS scritti su ENI e Deutsche Bank (in basis points).	71
E.1	Superficie di volatilità per opzioni call e put out of the money scritte su Brent Crude Oil.	72
F.1	Curva dei tassi di sconto risk-free del dollaro americano.	73

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professor Marazzina, mio relatore, che mi ha seguito molto attentamente per tutto il periodo di svolgimento della tesi. Ringrazio i miei compagni di corso, sia quelli rimasti fino alla fine sia quelli che hanno preso altre strade nel corso degli anni. Ringrazio anche la mia famiglia, che mi ha incoraggiato negli studi e sostenuto durante tutto il percorso. Devo citare a parte mia nonna Claudia, che sarà al settimo cielo leggendo il suo nome: grazie nonna. Naturalmente ringrazio i miei amici, in particolare Laura e Francesco, che hanno reso più piacevoli questi cinque anni. Infine ringrazio Giulia, che mi ha sopportato con affetto fino alla fine e che si merita, fra l'altro, la sua parte di laurea in ingegneria matematica. Grazie a tutti voi.