

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Meccanica



**CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI IN UN ROTORE TRAMITE CUSCINETTI
ATTIVI A PATTINI OSCILLANTI**

Relatore: Prof. Paolo PENNACCHI
Correlatore: Ing. Steven CHATTERTON

Tesi di Laurea di:

Andrea PARON
Matr. 804346

Anno Accademico 2014 – 2015

Ringraziamenti

Arrivato alla fine del mio percorso di studi volevo ringraziare principalmente la mia famiglia per avermi sostenuto moralmente e materialmente in ogni momento, senza di voi non sarei mai arrivato a questo punto.

Ringrazio inoltre il prof. Chatterton per la disponibilità e per il supporto dato durante il lavoro.

Indice

Introduzione	15
Capitolo 1 Riduzione delle vibrazioni nelle macchine rotanti:	
Stato dell'arte	17
1.1 Floating bush bearing	18
1.2 Squeeze damper	20
1.2.1 O-ring.....	20
1.2.2 Integral Squeeze Film Dampers (ISFD):	21
1.2.3 Squeeze damper attivi.....	22
1.3 Cuscinetti a geometria variabile	23
1.4 Cuscinetti magnetici	23
1.5 Pattini a lubrificazione attiva	24
1.6 TPJB con controllo classico.....	26
Capitolo 2 Teoria della lubrificazione e studio di un caso	
analitico	29
2.1 Teoria della lubrificazione ed equazione di Reynolds.....	29
2.1.1 Equazione di Reynolds	30
2.1.2 Meccanismi di generazione della pressione.....	32
2.2 Modello monodimensionale di un pattino attivo	34
2.2.1 Soluzioni analitiche dell'equazione di Reynolds per il pattino	
oscillante monodimensionale	35
2.2.2 Analisi statica.....	39
2.2.3 Analisi dinamica.....	39
2.3 Esempio numerico	41
2.3.1 Controllo sulla traslazione del pivot.....	43
2.3.2 Controllo sliding mode.....	44
2.3.3 Controllo della rotazione	49
Capitolo 3 Cuscinetti tilting pad.....	53
3.1 Grandezze caratteristiche	53
3.2 Statica del TPJB.....	61
3.3 Modello dinamico	66
3.3.1 Linearizzazione del campo di forze del film d'olio	67
3.3.2 Dipendenza dei coefficienti da posizione e velocità.....	73
3.4 Sintesi del controllore	77
3.4.1 Attuatori	80

3.5 Risultati numerici	83
3.5.1 <i>Analisi dello sbilanciamento</i>	83
3.5.2 <i>Inserimento improvviso del controllore</i>	87
3.5.3 <i>Effetti del numero di pattini attuati</i>	89
Capitolo 4 Dinamica del rotore con cuscinetti attivi	91
4.1 Modello FEM	92
4.1.1 <i>Modellizzazione della forzante</i>	97
4.2 Analisi del sistema non controllato	99
4.2.1 <i>Analisi frequenze proprie</i>	100
4.2.2 <i>Dinamica del sistema non controllato</i>	102
4.3 Analisi del sistema controllato	105
4.3.1 <i>Collocazione dei sensori</i>	105
4.4 Risultati numerici	107
4.4.1 <i>Soppressione delle vibrazioni presso la prima velocità critica</i>	107
4.4.2 <i>Effetti del secondo modo di vibrare</i>	112
4.4.3 <i>Soppressione delle vibrazioni nel transitorio di avvio</i>	114
Capitolo 5 Conclusioni e sviluppi futuri.....	117
Allegato A Metodo delle differenze finite	119
Allegato B Calcolo dello spessore del meato	125
Allegato C Controllo sliding mode	129
Bibliografia	143

Elenco delle figure

Figura 1-1:varie tipologie di cuscinetti	18
Figura 1-2: <i>Floating Bush Bearing</i>	19
Figura 1-3: schema di un rotore: 1) rotore, 2) <i>floating bush</i> , 3) meato interno 4) meato esterno.....	19
Figura 1-4: O-ring con un TPJB.....	20
Figura 1-5: ISFD con <i>flexural pivot</i>	21
Figura 1-6: cuscinetto VGJB.....	23
Figura 1-7: cuscinetto magnetico	24
Figura 1-8: ALB con iniettori	25
Figura 1-9: schematizzazione del pattino secondo Decker	27
Figura 2-1: meato e sistemi di riferimento	30
Figura 2-2:: meccanismi di generazione della pressione: a) effetto <i>wedge</i> , b) effetto <i>stretch</i> , c) effetto <i>squeeze</i>	33
Figura 2-3: generazione di pressione per l'effetto: a) <i>wedge</i> , b) <i>squeeze</i>	33
Figura 2-4: pattino Michell	34
Figura 2-5: schematizzazione del problema.....	35
Figura 2-6:andamento della pressione normalizzata.....	37
Figura 2-7: andamento della risultante del campo di pressione	37
Figura 2-8:andamento del centro di pressione	38
Figura 2-9: schematizzazione del pattino.....	39
Figura 2-10: spostamenti del <i>runner</i> per il sistema linearizzato e non	42
Figura 2-11: confronto tra l'andamento dello spostamento del <i>runner</i> (in rosso) e quello della rotazione del <i>pad</i> (in nero).....	42
Figura 2-12: schematizzazione di <i>runner</i> , <i>pad</i> e attuazione	43
Figura 2-13: schema a blocchi per il sistema controllato.....	43
Figura 2-14: vibrazioni sul <i>runner</i> con il controllore PD	44
Figura 2-15: vibrazioni sul <i>runner</i> con un controllo SMC	48
Figura 2-16: andamento nel tempo delle azioni di controllo	49
Figura 2-17: schematizzazione di <i>runner</i> , <i>pad</i> e attuazione tramite la traslazione del pattino	49
Figura 2-18: vibrazioni del <i>runner</i> per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione.....	50
Figura 2-19: rotazione del pattino per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione.....	51
Figura 2-20: andamento del meato in uscita per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione.....	51
Figura 3-1: immagine di un TPJB a 4 pattini	53
Figura 3-2: possibile contatto tra <i>pad</i> e rotore	54
Figura 3-3: rappresentazione di precarico positivo, nullo e negativo	55
Figura 3-4: raffigurazione del precarico	55

Figura 3-5: effetti dell' <i>offset</i> sullo spessore del meato in ingresso	56
Figura 3-6: a) TPJB con <i>pivot rocker</i> b) TPJB con <i>pivot</i> sferico.....	57
Figura 3-7: TPJB con <i>pivot</i> a flessione.....	58
Figura 3-8: effetto della flessibilità del <i>pivot</i>	59
Figura 3-9: a) variazione di K_{xx} al variare del numero di pattini,	60
Figura 3-10: rappresentazione dell' <i>attitude angle</i> θ e dell' eccentricità	62
Figura 3-11: a) andamento della posizione dell' albero, b) andamento degli angoli di rotazione dei pattini all' infittimento della <i>mesh</i>	63
Figura 3-12: andamento delle pressioni sul cuscinetto.....	64
Figura 3-13: campo di pressioni su un <i>pad</i>	64
Figura 3-14: pressioni sul cuscinetto (in basso) e sul pattino(in alto)	65
Figura 3-15: cuscinetto a 5 pattini LBP controllato tramite la traslazione dei pattini	66
Figura 3-16: schema per il calcolo dei coefficienti di rigidità.....	70
Figura 3-17: orbita del centro a partire dalla posizione di equilibrio statico.....	73
Figura 3-18: andamento nel tempo della posizione del centro	73
Figura 3-19: procedimento per trovare i coefficienti su un nodo della griglia.....	74
Figura 3-20: mappa del coefficiente K_{yy} sul primo <i>pad</i>	75
Figura 3-21: orbita con il sistema linearizzato e mappato	76
Figura 3-22: legame tra rigidità e velocità.....	77
Figura 3-23: immagine e ingombro di un attuatore <i>stack</i>	81
Figura 3-24: legame tra tensione di alimentazione e spostamento per l'attuatore controllato e non.....	81
Figura 3-25: orbita del sistema sotto controllo	84
Figura 3-26: azione di controllo complessiva.....	84
Figura 3-27: forze richieste dagli attuatori	85
Figura 3-28: orbita del sistema non controllato e controllato con la sola componente di raggiungibilità.....	86
Figura 3-29: differenza istantanea Δu dello spostamento dell'attuatore per un intervallo di tempo.....	86
Figura 3-30: andamento del tempo: in verde il sistema sotto controllo, in blu il sistema non controllato	87
Figura 3-31: orbite attorno alla posizione di equilibrio per la simulazione.....	88
Figura 3-32: azione di controllo per l' inserimento brusco	88
Figura 3-33: diagramma di fase.....	89
Figura 3-34: confronto tra le azioni di controllo per il primo <i>pad</i> (a destra) e il secondo se si attivano due o tutti i pattini.....	89
Figura 4-1: elemento finito di tipo <i>beam</i> e gradi di libertà.....	93
Figura 4-2: assemblaggio della matrice di rigidità	96
Figura 4-3: alcune forzanti agenti: a) squilibrio, b) ingobbamento, c) disallineamento angolare e radiale	98

Figura 4-4: modello FEM utilizzato.....	99
Figura 4-5: diagramma di Campbell per il sistema in rosso la forzante 1x, in verde la 2x ed in blu la 3x.....	101
Figura 4-6: diagramma <i>waterfall</i> del sistema.....	101
Figura 4-7: frequenze naturali e modi di vibrare	102
Figura 4-8: orbite a regime attorno alla deformata dell'albero	103
Figura 4-9: risposta in frequenza sui supporti.....	103
Figura 4-10: confronto tra le orbite eccitate dal primo e dal secondo modo	104
Figura 4-11: orbite per il primo ed il secondo modo	105
Figura 4-12: confronto tra le orbite al centro e all'uscita del cuscinetto	106
Figura 4-13: orbite attorno alla deformata statica per il sistema controllato	107
Figura 4-14: andamento nel tempo dello spostamento verticale del primo supporto.....	108
Figura 4-15: risposta in frequenza del primo supporto	108
Figura 4-16: andamento nel tempo del sistema controllato (in verde) e non (in rosso)	109
Figura 4-17: spostamenti del pattino.....	109
Figura 4-18: forza richiesta dagli attuatori.....	110
Figura 4-19: differenza tra orbite del sistema controllato e non per il sistema nella configurazione indeformata	110
Figura 4-20: confronto delle vibrazioni al centro	111
Figura 4-21: forze richieste dagli attuatori a regime	112
Figura 4-22: spostamenti dei pattini.....	112
Figura 4-23: confronto delle vibrazioni tra il sistema controllato e non per un intervallo di tempo con il secondo modo attivo.....	113
Figura 4-24: orbite eccitate dal secondo modo di vibrare nel caso di sistema di controllo inserito e non	113
Figura 4-25: intervallo di frequenze considerato	114
Figura 4-26: vibrazioni nella direzione verticale sul primo supporto durante l'avvio	115
Figura 4-27: azioni di controllo durante l'avviamento	115
Figura A-1: griglie per il metodo delle differenze finite.....	121
Figura A-2: campo di pressioni su un cuscinetto	123
Figura A-3: sviluppo piano del cuscinetto	124
Figura B-1: schema per il calcolo dello spessore del meato	125
Figura B-2: effetto del precarico	126
Figura B-3: effetto della rotazione del <i>pad</i>	127
Figura B-4: andamento degli spessori del meato lungo l'intero pattino	128
Figura C-1: significato geometrico della condizione di raggiungibilità	133
Figura C-2: diagramma di fase di uno <i>sliding mode</i>	136
Figura C-3: rappresentazione del <i>chattering</i>	137
Figura C-4: forma della legge con a) saturatore b) tangente iperbolica.....	138

Figura C-5: diagramma di fase con: a) <i>sliding mode</i> con funzione segno,	
b) pseudo <i>sliding mode</i>	139
Figura C-6:traiettoria dello stato per un sistema MIMO	140

Elenco delle tabelle

Tabella 1: grandezze caratteristiche del sistema considerato.....	41
Tabella 2: grandezze caratteristiche del cuscinetto in esame.....	66
Tabella 3: coefficienti di rigidità per un numero di Sommerfeld di 0.7542.....	71
Tabella 4: dati della macchina.....	99

Sommario

Negli ultimi anni sono state proposte varie soluzioni per costruire dei cuscinetti a pattini oscillanti (TPJB) attivi al fine di ridurre le vibrazioni nelle macchine rotanti.

In questa tesi si è implementata una logica di controllo a struttura variabile detta *sliding mode*, comandando la traslazione del pattino nella direzione radiale al fine di modificare il campo di forze del film d'olio. Tale logica di controllo garantisce una grande robustezza al sistema sotto controllo, risolvendo il problema della difficile implementazione del modello del cuscinetto.

Tuttavia non si è trascurato uno studio rigoroso della lubrificazione tra cuscinetto e albero al fine di poter avere una maggiore conoscenza del problema e avere un modello del sistema preciso.

Infine si è studiato numericamente il comportamento di un rotore di grossa taglia con dei cuscinetti attivi al fine di verificarne le prestazioni durante le fasi operative più critiche come il passaggio delle velocità critiche flessionali.

Parole chiave: cuscinetti a pattini oscillanti, TPJB, controllo attivo delle vibrazioni, lubrificazione idrodinamica, *sliding mode*, dinamica dei rotori

Abstract

In recent years have been proposed various solutions to build active tilting pad bearings in order to reduce vibration in rotating machines.

In this thesis has been implemented a variable structure control logic named sliding mode by controlling the translation of the pad in the radial direction in order to change the force field of the oil film. Such control logic guarantees a great robustness to the system under control, solving the problem of difficult implementation of the bearing's model.

However it hasn't been neglected a rigorous study of the lubrication between the bearing and the shaft in order to have a better understanding of the problem and have a precise model of the system.

Finally, it was studied numerically the behavior of a rotor of large size with active bearing in order to verify the performances during the most critical operating phases as the passage of flexural critical speeds.

Keywords: *tilting pad bearings, TPJB, active vibration control, hydrodynamic lubrication, sliding mode, rotor dynamics*

Introduzione

Questo lavoro di tesi ha lo scopo di studiare il comportamento di un cuscinetto portante a pattini attivi, analizzandone le problematiche dal punto di vista della dinamica dei rotori, della lubrificazione e del controllo.

Le vibrazioni nei rotori sono un problema di grossa entità nelle macchine industriali, possono portare in casi gravi a contatti tra il cuscinetto e l'albero, strisciamenti sulle tenute, provocando in genere un abbassamento dell'efficienza della macchina.

I cuscinetti idrodinamici sono una particolare categoria di cuscinetti in cui le due superfici, in movimento relativo fra loro, sono separate da un film d'olio. Questo è possibile grazie alla lubrificazione idrodinamica (da qui il nome cuscinetti idrodinamici), ossia quel fenomeno che crea nel meato un campo di pressione la cui risultante è in opposizione al carico applicato all'albero.

Essi sono principalmente impiegati su macchine rotanti ad elevate prestazioni in cui si hanno carichi e velocità elevate, che si contraddistinguono per condizioni di lavoro continuative, come le macchine rotanti per la produzione di energia elettrica, per l'estrazione di petrolio o per impieghi ausiliari.

I cuscinetti attualmente più utilizzati in ambito industriale sono quelli a pattini oscillanti TPJB (*tilting pad journal bearing*): essi godono delle migliori proprietà di stabilità e soppressione delle vibrazioni; in particolare la loro costruzione si presta ad una possibile attuazione controllata della posizione dei pattini, al fine di implementare un sistema di controllo attivo delle vibrazioni sull'albero. Una possibile soluzione per l'attuazione dei pattini consiste nella loro traslazione nella direzione radiale, che modifica il campo di pressione del meato, generando una forza risultante che si può opporre alla forza che squilibra il sistema.

Per studiare il legame tra il pattino oscillante e il perno, accoppiati per mezzo del film d'olio, è stato prima creato un modello dinamico, basato sulla soluzione analitica dell'equazione della lubrificazione di Reynolds, per un cuscinetto oscillante assiale, nel caso monodimensionale. Studiando il comportamento di tale sistema è possibile capire molte problematiche che verranno incontrate nello studio del modello completo.

Infatti, la modellizzazione di un cuscinetto portante, è un procedimento molto complesso, in quanto non esistono soluzioni in forma chiusa per il problema della lubrificazione, si rende quindi necessario risolvere in maniera numerica il campo del film d'olio, al fine di ricavarne le proprietà statiche e dinamiche del sistema.

Dallo studio dell'accoppiamento tra il perno e il cuscinetto, risulta facile osservare come le semplificazioni e le ipotesi adottate, portino alla scrittura di

un modello che può anche essere abbastanza lontano dalla realtà, per controllare il sistema quindi è opportuno utilizzare logiche di controllo robusto.

In questa tesi si è studiato l'utilizzo di un controllore a moto scivolato (*sliding mode control*) la cui prerogativa più interessante è il conferimento al sistema di una notevole robustezza, rispetto all'incertezza del modello che descrive il sistema sotto controllo: tanto quella che riguarda il valore dei parametri, quanto quella relativa ai disturbi o alle cosiddette dinamiche non modellate. Fra gli ambiti applicativi nei quali questa tecnica ha trovato più ampio impiego si può citare il controllo di motori elettrici e la mecatronica in generale, le reti elettriche di potenza e il controllo dei processi; in ingegneria aerospaziale: il controllo del volo di aeromobili, la manovra di veicoli orbitanti e il controllo di strutture spaziali di grandi dimensioni.

In letteratura lo studio dei TPJB attivi è stato fatto usando come modelli dei piccoli rotor presenti nei banchi prova; non esiste traccia di uno studio su un rotore di grossa taglia, pertanto nella parte finale della tesi verrà studiato il caso di una macchina in modo da mostrare il comportamento del controllore nel sistema completo composto dall'accoppiamento tra il cuscinetto attivo e il rotore flessibile.

Nel Capitolo 1 sarà introdotto il problema della riduzione delle vibrazioni nelle macchine rotanti, illustrando lo stato dell'arte a partire dalle soluzioni usate comunemente in ambito industriale fino a nuove soluzioni su cui la ricerca è molto attiva.

All'inizio del Capitolo 2 verranno riprese brevemente le basi della teoria della lubrificazione, mostrando l'equazione di Reynolds e i meccanismi di generazione della pressione. Una volta illustrati i principi teorici verrà studiato il semplice caso monodimensionale di un cuscinetto tiltante assiale per cui esistono delle soluzioni in forma chiusa dell'equazione di Reynolds; tramite lo studio di questo modello verranno mostrate le varie scelte per controllare le vibrazioni dell'albero.

Nel Capitolo 3 verrà studiato l'accoppiamento tra un rotore e un cuscinetto a pattini oscillanti portante, creando un modello semplificato in grado di tener conto degli effetti del film d'olio, e sintetizzando un controllore robusto adatto a controllare il sistema.

Il cuscinetto in questione sarà un 5 pattini LBP in quanto è una delle configurazioni più diffuse e permette di considerare il caso più generico possibile.

Infine nel Capitolo 4 verrà studiato un caso di una macchina equipaggiata con una coppia di cuscinetti attivi, al fine di verificarne le prestazioni anche in presenza delle dinamiche date dal rotore, quali risonanze e sbilanciamenti.

Capitolo 1

Riduzione delle vibrazioni nelle macchine rotanti: Stato dell'arte

Un rotore è una macchina rotante collegata a terra per mezzo di cuscinetti.

Come già detto nell'introduzione, in ambito industriale per macchine non piccole, la soluzione più usata è quella di utilizzare cuscinetti a lubrificazione idrodinamica.

Tali cuscinetti influenzano la stabilità delle macchine rotanti in cui vengono applicati e se non adeguatamente progettati possono creare problemi di vibrazioni che possono limitare la vita della macchina.

Lo studio del loro comportamento meccanico assume quindi un ruolo determinante nella fase di progettazione della macchina su cui verranno applicati.

Tra le varie tipologie di cuscinetti idrodinamici disponibili in campo industriale troviamo:

- *Circular bearing* (a), nei quali la sezione del *bearing metal* (la superficie esterna su cui si trova l'olio del meato) è perfettamente circolare. Per la loro semplicità costruttiva sono i più diffusi cuscinetti idrodinamici presenti in commercio;
- *Partial bearing* (b), caratterizzati dall'aver il *bearing metal* a profilo semicircolare solo sulla parte caricata del cuscinetto. Consentono una riduzione delle perdite di attrito rispetto ai cuscinetti a profilo completo, per questo motivo, spesso vengono utilizzati in presenza di carichi elevati;
- *Two arc bearings* (c) e *three arc bearings* (d), i quali hanno un profilo che deriva dall'unione di due o tre sezioni a forma di arco circolare (lobo). Questi cuscinetti sono più complicati e costosi, ma consentono una maggiore stabilità di rotazione durante l'esercizio;
- *Tilting pad bearings* (e), costituiti da più pad incernierati che possono inclinarsi liberamente. Questa soluzione costruttiva è quella che garantisce la maggior stabilità della rotazione, eliminando tutti i problemi legati al fenomeno dell'*oil whip*. Sono perciò indicati in condizioni di carico ridotto ed alte velocità in cui facilmente si instaurano fenomeni di instabilità;
- *Floating bush bearings* (f), i quali hanno un sottile strato di metallo interposto tra l'albero e il *bearing metal*. Questa soluzione è utilizzata per eliminare fenomeni legati alle vibrazioni.

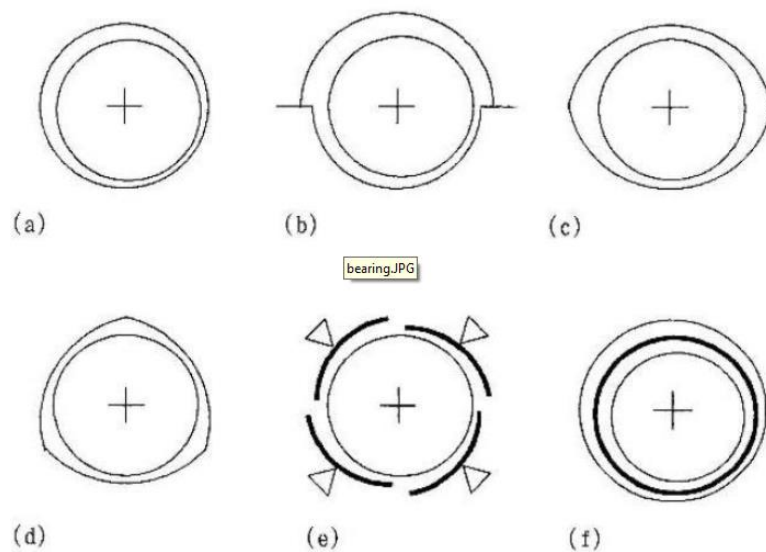


Figura 1-1:varie tipologie di cuscinetti

La scelta del cuscinetto è di fondamentale importanza in quanto esso è il principale componente che introduce smorzamento nel sistema e di conseguenza permette di limitare le vibrazioni sulla macchina. Tali vibrazioni possono essere molto pericolose quando vengono attraversate le frequenze proprie della macchina, in quanto risentono dell'amplificazione dinamica data dalla condizione di risonanza. In tali condizioni esiste il rischio concreto di contatto tra il rotore ed i supporti con conseguenze che possono essere molto gravi soprattutto per le macchine di grossa taglia. In aggiunta tali macchine di norma devono avere una grande affidabilità in quanto spesso sono un elemento critico e spesso sono sottoposte a condizioni di lavoro continuative per lunghi periodi (si pensi ad una turbina per la generazione di energia in un grosso centro industriale).

Si capisce quindi come lo studio riguardante la limitazione delle vibrazioni (soprattutto nella condizione di risonanza), sia di fondamentale importanza.

In questo capitolo verranno mostrate le principali soluzioni utilizzate per la riduzione delle vibrazioni sia in ambito industriale, sia nel campo della ricerca.

1.1 Floating bush bearing

I *Floating Bush Bearings* (Figura 1-2) sono dei cuscinetti che hanno un sottile strato in grado di spostarsi liberamente, posto in mezzo al film d'olio tra il *bearing metal* e l'albero. Lo strato intermedio fu inizialmente adottato per ridurre la generazione di calore nel meato, ma il suo principale uso è diventato

lo smorzamento delle vibrazioni, causate sia da fenomeni esterni quali le risonanze sia dalle vibrazioni auto eccitate quali l'*oil whip* [28].

Una possibile schematizzazione tramite un modello a parametri concentrati è riportata in Figura 1-3, dove i due gruppi di molle e smorzatori posti in serie rappresentano rispettivamente il campo di forze del film d'olio all'interno e all'esterno della lamina interna.

Altri vantaggi di questa tipologia di cuscinetto sono le basse perdite di potenza e un buon valore di smorzamento, mentre il loro principale utilizzo è in macchine molto veloci quali i turbocompressori.

Tuttavia pur essendo relativamente economici risentono del fenomeno dell'*oil whirl*, un tipo di instabilità sub-sincrona che normalmente avviene a circa metà della prima frequenza propria della macchina [2].

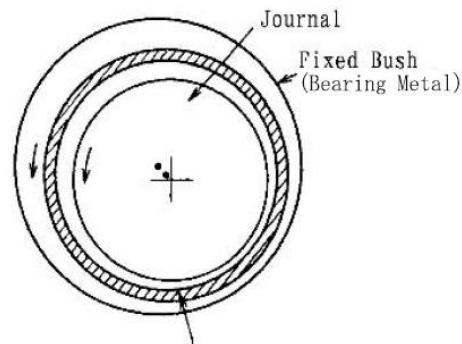


Figura 1-2: *Floating Bush Bearing*

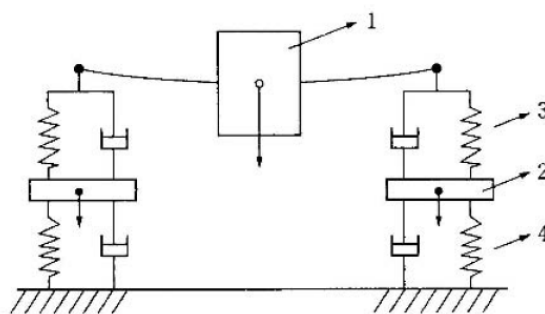


Figura 1-3: schema di un rotore: 1) rotore, 2) *floating bush*, 3) meato interno 4) meato esterno

1.2 *Squeeze damper*

Il metodo tradizionale per limitare le vibrazioni di una macchina rotante consiste nell'utilizzo di smorzatori detti *squeeze film damper* (SFD) [1], come si può intuire dal nome il loro principio di funzionamento si basa sull'effetto *squeeze*: ovvero si ha una generazione di pressione dipendente dallo schiacciamento della vena di fluido.

Gli *SFD* vengono utilizzati insieme ai cuscinetti per risolvere problemi di stabilità o di limitazione delle vibrazioni aggiungendo smorzamento al sistema in situazioni in cui il campo di forze prodotto dal film d'olio da solo non riesce a garantire le prestazioni desiderate.

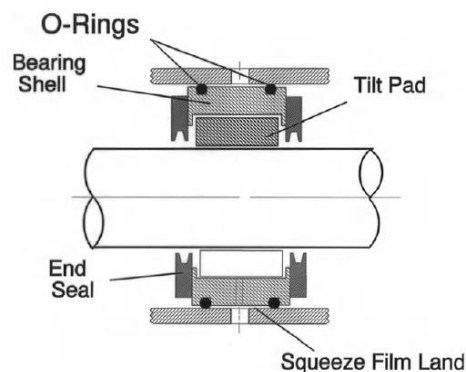


Figura 1-4: O-ring con un TPJB

1.2.1 O-ring

Il metodo più semplice per realizzare uno *squeeze damper* si basa sull'inserimento di una membrana in materiale elastomerico (O-ring) in direzione radiale [1]. La soluzione costruttiva (rappresentata in Figura 1-4) è molto semplice ed occupa poco spazio nella direzione radiale, rendendo tale procedimento adatto per modificare cuscinetti già esistenti, inoltre l'O-ring si comporta come una tenuta impedendo perdite di fluido.

Lo smorzamento prodotto con tale sistema è dovuto a due contributi: uno dovuto all'effetto *squeeze* nel film d'olio dello smorzatore e l'altro dovuto alla membrana. Tuttavia la rigidità e lo smorzamento del materiale elastomerico sono fortemente dipendenti dalla temperatura e risentono del *creep* [1], oltre a

non essere in grado di supportare carichi assiali. A causa di tutti queste limitazioni vengono impiegati per applicazioni relativamente leggere.

Gli O-ring vengono comunemente utilizzati in compressori ad alta velocità e montati in serie con cuscinetti a pattini oscillanti per aumentare la stabilità della macchina.

Tuttavia i cuscinetti *tilting pad* hanno intrinsecamente un buon smorzamento ma anche una grande rigidità e può accadere che non ci sia abbastanza movimento all'interno del film d'olio per dissipare energia, inoltre un tale accoppiamento tra lo smorzatore ed il cuscinetto permette di ridurre la risposta sincrona dovuta a sbilanciamenti ed altre forzanti agenti sul sistema.

1.2.2 Integral Squeeze Film Dampers (ISFD):

Un'altra soluzione costruttiva è detta *Integral Squeeze Film Dampers* (ISFD). Essa consiste in un meato sotto il *bearing metal* in cui si trova del fluido che agisce da smorzatore a cui vengono integrate delle molle, tipicamente a forma di S (che tendono a distribuire in maniera uniforme gli sforzi), aventi una rigidità molto minore rispetto a quella del film d'olio [4]. Tale soluzione è detta integrale perché si tende ad assemblare lo smorzatore insieme al cuscinetto.

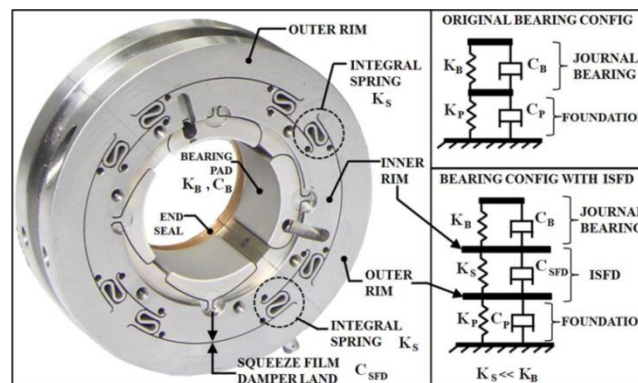


Figura 1-5: ISFD con *flexural pivot*

Gli ISFD riescono a sopportare grossi carichi statici e grazie alla precisione costruttiva resa possibile grazie alla lavorazione per elettroerosione EDM (*Electro Discharge Machining*), è possibile che ogni pad o il gioco nei vari

smorzatori sia diverso in modo da bilanciare in maniera efficace il carico statico [1].

I coefficienti dinamici dello *squeeze damper* in generale vengono calcolati in maniera simile alla risoluzione di un cuscinetto a lubrificazione idrodinamica: ovvero il campo di pressione soluzione dell'equazione di Reynolds (in cui il termine preponderante sarà lo *squeeze*) viene linearizzato nell'intorno della posizione di equilibrio statico.

1.2.3 Squeeze damper attivi

Un approccio più moderno alla riduzione delle vibrazioni, consiste nel rendere gli *squeeze damper* attivi: ovvero modificare le proprietà dello smorzatore tramite un sistema di controllo al fine di avere un maggiore campo di stabilità. Molte macchine moderne hanno come condizione di funzionamento una velocità di rotazione maggiore della prima frequenza propria (macchine super-critiche) in tali condizioni si hanno generalmente migliori prestazioni, inoltre per tali sistemi sarebbe preferibile avere uno smorzamento non troppo alto in maniera da poter limitare le forze trasmesse tra il rotore ed il cuscinetto al fine di allungarne la vita operativa ([1],[7]). Tuttavia per un sicuro passaggio delle risonanze durante l'avviamento o lo spegnimento della macchina è comunque richiesto un certo valore di smorzamento per limitare le vibrazioni. Di norma quindi lo *squeeze damper* è tarato per avere un compromesso tra le due condizioni. Per ovviare a tale problema in letteratura sono stati proposti vari metodi per poter variare i parametri dello smorzatore.

A. El-Shafei e M. El-Hakim [6] hanno proposto di realizzare un SFD attivo detto *hybrid squeeze film damper* (HSFD) tramite il controllo sulla pressione nello smorzatore agendo su una servovalvola che regola la quantità di fluido presente nella camera dello smorzatore. In precedenza Santos in [10],[11], aveva studiato il controllo dello smorzatore sia con un attuatore piezoelettrico che con un cilindro idraulico.

Un metodo recente [7], si basa sull'utilizzo di fluidi magneto-reologici che fanno parte dei cosiddetti *smart materials*. Questi particolari fluidi sono controllabili attivamente tramite un campo magnetico, essendo composti da olii minerali o a base di silicone con un'aggiunta di piccolissime particelle ferromagnetiche. In assenza di un campo magnetico la viscosità del fluido è simile a quella di un normale olio, viceversa se sottoposte al campo magnetico le piccole particelle si comportano da dipoli magnetici allineandosi lungo le linee del campo. In questa maniera viene variata in maniera estremamente rapida la viscosità del fluido in base all'intensità del campo applicato, di conseguenza è possibile cambiare il valore dello smorzamento tramite un semplice regolatore in retroazione.

1.3 Cuscinetti a geometria variabile

Un'altra applicazione recente descritta in [3],[4], è costituita dai cuscinetti a geometria variabile VGJB (*variable geometry journal bearing*): come mostrato in Figura 1-6 essi sono essenzialmente composti da due parti: il cuscinetto fisso in alto e una parte in basso mobile collegata ad una molla ed uno smorzatore.

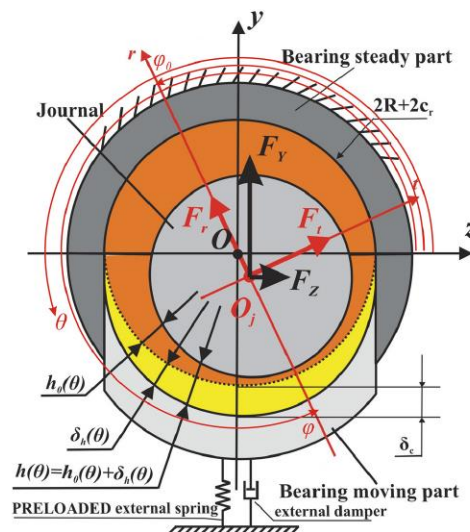


Figura 1-6: cuscinetto VGJB

Tale configurazione si limita a modificare le proprietà dinamiche del sistema variando i coefficienti di smorzamento e di rigidità del sistema nella sola condizione di risonanza, prove sperimentali hanno mostrato una riduzione del 50% delle vibrazioni in tale condizione. La molla e il dissipatore si attivano da soli quando la forza del film d'olio eccede il loro precarico permettendo al sistema di incrementare lo smorzamento solo in condizioni di risonanza.

1.4 Cuscinetti magnetici

Una delle soluzioni più usate per la riduzione delle vibrazioni in rotori relativamente leggeri è data dall'uso di cuscinetti magnetici ([8],[9]). Per questa tipologia di supporti non esiste un contatto diretto tra il perno e il cuscinetto, la forza che sostiene il rotore è data da un campo magnetico, il quale può essere pilotato in maniera da ridurre le vibrazioni.



Figura 1-7: cuscinetto magnetico

Uno dei principali vantaggi di tale sistema è l'assenza di un contatto diretto tra le superfici, mentre nei tradizionali cuscinetti idrodinamici esiste il contatto tra il *bearing metal* e il lubrificante; in questa maniera vengono notevolmente limitati gli attriti e l'usura dei componenti garantendo elevate velocità di rotazione. Tuttavia questi cuscinetti sono costosi e devono essere accoppiati ad un normale cuscinetto per prevenire eventuali contatti causati da guasti del sistema di alimentazione del cuscinetto [20].

1.5 Pattini a lubrificazione attiva

Un approccio per il controllo di un TPJB completamente diverso dai precedenti è dovuto grazie alle ricerche di Santos ([12],[13]): esso si basa sull'iniezione di olio in pressione direttamente all'interno del meato di un cuscinetto a pattini oscillanti, andando così a modificare il campo di pressione al suo interno e con esso le forze agenti sul rotore. L'olio in pressione viene fatto passare attraverso una servovalvola la cui apertura viene decisa istante per istante dal controllore in retroazione. I cuscinetti che utilizzano questa tecnologia sono detti ALB (*active lubricated pad*).

Tale approccio è molto attraente: per il controllo non si hanno spostamenti di parti meccaniche del pattino e quindi la distanza relativa tra l'albero e il cuscinetto non viene variata, tuttavia la difficoltà di modellizzare correttamente il fenomeno è molto elevata.

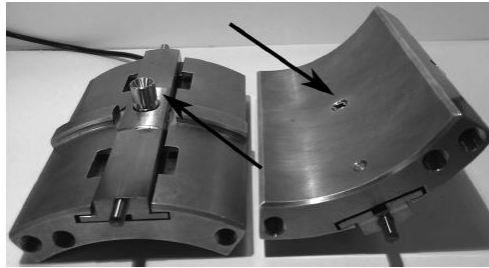


Figura 1-8: ALB con iniettori

La funzione di trasferimento tra il segnale in ingresso al controllore $U(s)$ e la forza agente sul rotore $F_{rot}(s)$ viene detta funzione di calibrazione:

$$C(s) = \frac{F_{rot}(s)}{U(s)}$$

La difficoltà di questo approccio risiede proprio nel trovare tale funzione, infatti essa può essere trovata sperimentalmente oppure tramite simulazioni.

Il modello numerico usato da Santos per trovare $C(s)$ considera [13]:

- una formulazione dell'equazione di Reynolds con l'aggiunta di un termine in grado di tener conto dell'iniezione di fluido nel meato;
- il fenomeno di scambio termico tra il fluido nelle vicinanze del pattino e del rotore, modellato tramite l'equazione di Fourier per la trasmissione del calore insieme alle equazioni di conservazione dell'energia sul pattino e sul rotore;
- la deformabilità del *pivot*;
- un modello dinamico per il sistema idraulico e per la servovalvola.

In seguito le equazioni che governano l'ALB vengono linearizzate, e tramite il loro studio è possibile ricavare la funzione di calibrazione frequenza per frequenza.

Come si può osservare la ricerca della funzione di calibrazione è un problema molto complesso e di non facile implementazione.

1.6 TPJB con controllo classico

Un differente approccio rispetto ai cuscinetti ad iniezione è rappresentato dal controllo classico: ovvero un attuatore muove un componente del pattino per modificare il campo di pressione all'interno del meato ai fini di controllare le vibrazioni sul rotore.

I tradizionali cuscinetti a geometria fissa pur essendo relativamente facili da costruire e progettare soffrono di alcuni problemi di stabilità a velocità superiori alla prima frequenza propria, inoltre sono molto suscettibili alle variazioni dei parametri di funzionamento quali carico e allineamento. Per questi motivi nel corso degli ultimi anni si è assistito al trend di sostituire i cuscinetti idrodinamici a geometria fissa con cuscinetti a pattini oscillanti [1], in particolar modo nelle applicazioni in cui è richiesta una grande velocità, come nelle macchine con velocità di funzionamento super-critiche (ovvero superiori alla prima frequenza propria del sistema).

Il motivo di tale successo è dovuto all'intrinseca stabilità di questa particolare tipologia di supporto: si potuto passare da velocità di circa 6000 *rpm*, a velocità fino a 14000 *rpm* [32]. La grande stabilità dei TPJB è dovuta all'insensibilità rispetto al problema dell'*oil whirl*, che è una instabilità del film d'olio che avviene per alte velocità di rotazione, causata dai coefficienti di rigidità e smorzamento misti del sistema linearizzato, infatti per particolari condizioni di carico e simmetria questi termini che possono essere instabilizzanti, sono nulli o molto inferiori rispetto ai termini diretti.

Tuttavia la grande stabilità è osteggiata da un maggior costo causato dal numero superiore di componenti e dalle difficoltà di progettazione: le varie grandezze caratteristiche (*offset*, *precarico*...) sono ottenute tramite la minimizzazione di una funzione obiettivo estremamente non lineare tramite particolari tecniche come gli algoritmi genetici [29].

Uno dei primi brevetti su un cuscinetto TPJB dotato di un attuatore per migliorare le sue proprietà dinamiche [14], aveva un pattino attuato che in condizioni di risonanza veniva spostato tramite un piezoelettrico al fine di variare le caratteristiche del film d'olio e quindi cambiare le frequenze proprie del sistema, in maniera da spostare la risonanza. Una volta passata la risonanza, il pattino viene rimesso dal controllore nella posizione iniziale. Tale metodo non era in grado di controllare le vibrazioni fuori dalla risonanza ma solo di limitarle nella peggiore condizione agendo quindi in maniera analoga ad uno *squeeze damper*.

Il primo contributo allo stato dell'arte per un TPJB controllato è dovuto agli studi di Decker ([15],[16],[17]): tramite un modello semplificato basato su forti ipotesi approssimative del sistema del rotore, quali perfetta simmetria del pattino e negazione dei termini misti del campo di forze del film d'olio propose un controllore PD agente sulla traslazione del pattino, ed in seguito un controllore

LQR ai fini di effettuare un controllo sulle vibrazioni del pattino. Il regolatore quadratico lineare è stato sintetizzato sulla base di un modello linearizzato dove si è trascurata l'inerzia del pattino, riducendo così il sistema dinamico alle equazioni di moto linearizzate delle dinamiche orizzontali e verticali del rotore. Il campo del film d'olio viene così modellizzato con una molla ed uno smorzatore che genereranno una forza se compresse o allungate dallo spostamento del rotore o del pattino.

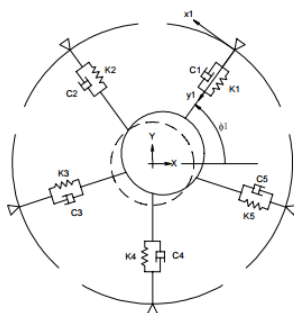


Figura 1-9: schematizzazione del pattino secondo Decker

In seguito il lavoro fu portato avanti da Cai e Queroz ([18],[19]), che partendo da ipotesi simili proposero un controllore più avanzato: ovvero un controllore adattivo in *backstepping*. I risultati pubblicati delle simulazioni mostrano prestazioni interessanti, tuttavia dal lato della modellizzazione del problema il sistema risente ancora di eccessive semplificazioni e una mancanza di validità generale per altre configurazioni dei pattini come la LBP (*load between pad*, ovvero il carico statico è assorbito da due pattini). Il sistema considerato in questi studi si basa su un TPJB a quattro pattini con configurazione LOP (*load on pad*, ovvero il carico statico è assorbito da un solo pattino), infatti con una configurazione diversa da questa, l'asse del pattino non è orientato come l'asse orizzontale o verticale del cuscinetto, la traslazione del cuscinetto come si vedrà in seguito avrà un effetto su entrambe le dinamiche accoppiandole.

In maniera simile il lavoro di Wu [20] ripropone un controllore adattivo di tipo *backstepping*, considerando però la molla e lo smorzatore come non lineari. È inoltre presente il primo test sperimentale su un banco prova. Inoltre per la prima volta viene studiata la possibilità di poter controllare al posto della traslazione del pattino la sua rotazione, situazione che verrà analizzata in dettaglio in questa tesi nel paragrafo 2.3.3.

Come si nota il trend degli ultimi studi consiste nell'effettuare una modellizzazione semplificata dell'accoppiamento cuscinetto e rotore senza

considerare la dinamica della macchina ovvero ipotizzando il rotore rigido e di inserire un regolatore in grado di variare il suo valore in base allo stato del suo sistema come il *backstepping*, il quale è sostanzialmente una tecnica ricorsiva basata sullo studio di stabilità alla Lyapunov che permette di costruire una legge di controllo in retroazione dallo stato, garantendo forti proprietà di stabilità globale o locale, oltre ad una buona robustezza.

Tuttavia la modellizzazione del film d'olio e della macchina in questi studi sono adatte a solo alcune particolari situazioni di simmetria e lo studio è effettuato solo per piccole macchine presenti nei banchi prova.

Capitolo 2

Teoria della lubrificazione e studio di un caso analitico

2.1 Teoria della lubrificazione ed equazione di Reynolds

I problemi inerenti alla lubrificazione sono spesso complicati a causa delle molte variabili in gioco: fenomeni come la deformabilità dei corpi, la presenza di flusso turbolento e la dipendenza della viscosità dalla temperatura sono solo alcuni dei fenomeni che rendono difficile la completa modellizzazione del problema.

I primi studi riguardanti il problema risalgono a Reynolds, che nel 1886 basandosi sugli esperimenti di Tower propose un modello semplificato di un generico accoppiamento tra due superfici in moto relativo tra di loro con interposto un film di lubrificante. Tale accoppiamento è in grado di creare una lubrificazione di tipo idrodinamico, ovvero si ha la formazione di un campo di pressione all'interno di un meato che garantisce un distacco tra le superfici.

L'equazione di Reynolds è alla base della teoria della lubrificazione, essa permette di ottenere la pressione generata in un fluido causata da due superfici in moto relativo tra di loro.

Formalmente una modellizzazione completa dell'accoppiamento tra perno e cuscinetto deve tener conto:

- Della fluidodinamica, questo poiché tra le due superfici si ha un fluido in movimento;
- Della termodinamica a causa della generazione di calore nel lubrificante causata dalle perdite viscosive, inoltre tale calore viene trasmesso all'albero e al pattino;
- Della meccanica dei solidi, perché l'elevata pressione nel meato genera sforzi e deformazioni sia nel pattino che nell'albero.

Lo studio completo considerando tutti questi effetti prende il nome di modello termo-elasto-idrodinamico TEHD.

In questa sede verranno solo considerati gli effetti fluidodinamici.

2.1.1 Equazione di Reynolds

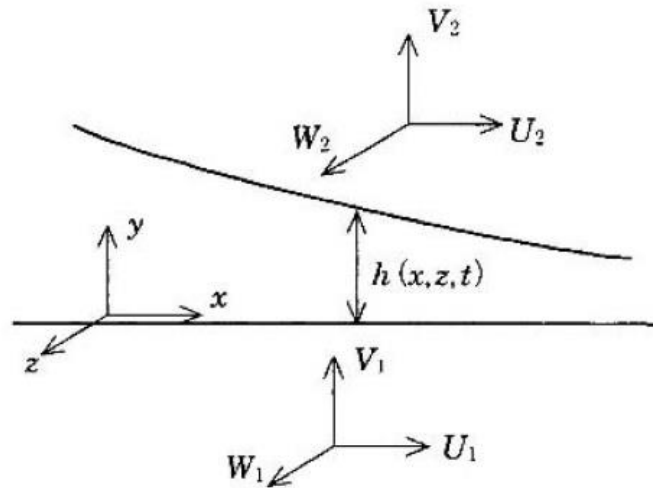


Figura 2-1: meato e sistemi di riferimento

In Figura 2-1 è riportata la schematizzazione del film di lubrificante, con il pedice 1 si sono indicate le velocità della superficie inferiore, mentre con il 2 quelle della superficie superiore. La velocità di ogni superficie è descritta dalla terna u, v, w che rappresenta nel caso di un accoppiamento perno-cuscinetto portante, le velocità rispettivamente nella direzione circonferenziale, radiale e assiale del cuscinetto o del perno.

In molti casi pratici si ha che $w_1 = w_2 = 0$ ovvero non si ha moto relativo lungo la direzione assiale dell'albero.

Sotto il seguente set di ipotesi:

- 1) Flusso laminare;
- 2) Le forze di gravità e inerziali sono trascurabili rispetto a quelle viscosive;
- 3) Fluido incomprimibile;
- 4) Fluido newtoniano con viscosità costante;
- 5) La pressione del fluido non varia lungo lo spessore del film;
- 6) La variazione di velocità di u e w è trascurabile rispetto alla variazione di v ;
- 7) Nessun fenomeno di scorrimento tra il fluido e la superficie solida.

E' possibile ricavare l'equazione di Reynolds con due diversi approcci: considerandola un caso particolare dalle equazione di Navier-Stokes può essere derivata da queste, oppure tramite il seguente procedimento (riportato in [28]):

- 1) Si scrivono le equazioni di equilibrio su un cubetto infinitesimo di fluido;
- 2) Le equazioni di equilibrio vengono integrate per trovare i flussi di velocità lungo il meato;
- 3) Scrittura dell'equazione di continuità su un volume di controllo che contenga tutta l'altezza del meato;
- 4) Inserimento nell'equazione di continuità dei flussi di velocità trovati in precedenza.

Alla fine si ottiene l'equazione di Reynolds nella forma più generale: essa è in grado di tener conto della variazione della viscosità all'interno del meato e della deformabilità dei corpi grazie ai termini che rappresentano un'espansione o una contrazione delle superfici:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + h \frac{\partial}{\partial z} (W_1 + W_2) + 2(V_2 + V_1) \right]$$

Tuttavia come detto in precedenza nella maggior parte dei casi pratici l'asse x può essere considerato come la direzione del moto relativo tra le superfici, in questo caso si ha $V_1 = W_1 = W_2 = 0$ e l'equazione di Reynolds si presenta nella seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 2V_2 \right] \quad (2.1)$$

Inserendo l'ipotesi di superfici rigide, il secondo termine del membro destro dell'equazione è nullo, si ottiene così la forma più nota dell'equazione della lubrificazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2V_2 \right] \quad (2.2)$$

Il caso più semplice possibile è quello di moto monodimensionale con una sola superficie in movimento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu U_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.3)$$

2.1.2 Meccanismi di generazione della pressione

Si consideri l'equazione (2.1) in cui una sola delle superfici sia in movimento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[U_1 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} U_1 + 2V_2 \right] \quad (2.4)$$

Il membro sinistro dell'equazione rappresenta l'andamento della curvatura del campo di pressioni, se questo termine è negativo la distribuzione di pressione sarà convessa verso l'alto, ovvero la pressione risultante sarà positiva.

Il termine di destra rappresenta le cause della generazione della pressione e ai tre termini che lo compongono corrispondono i tre meccanismi responsabili:

- 1) Il primo termine rappresenta l'effetto *wedge* : ovvero la generazione di pressione dovuta alla variazione dello spessore del meato lungo la direzione x ; si nota subito come per generare una pressione positiva il meato debba necessariamente decrescere di spessore lungo la direzione di x ;
- 2) Il secondo termine rappresenta l'effetto *stretch*: ovvero la generazione di pressione a causa di una variazione di velocità lungo la superficie;

- 3) Il terzo termine rappresenta l'effetto *squeeze*: ovvero la generazione di pressione causata dalla velocità in direzione radiale della superficie lungo la direzione y . È da notare che tale termine introduce smorzamento nel cuscinetto.

Tra i tre meccanismi visti, sicuramente l'effetto *wedge* è quello con il contributo predominante, l'effetto *squeeze* è importante per piccoli cuscinetti oppure nel caso di un TPJB controllato tramite la traslazione del pad, mentre il contributo di *stretch* può essere trascurato nella grande maggioranza dei casi pratici in quanto ha una certa importanza solo se le superfici sono fatte di materiale elastico, come la gomma.

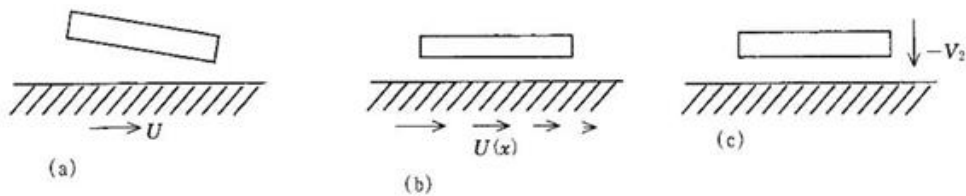


Figura 2-2:: meccanismi di generazione della pressione: a) effetto *wedge*, b) effetto *stretch*, c) effetto *squeeze*

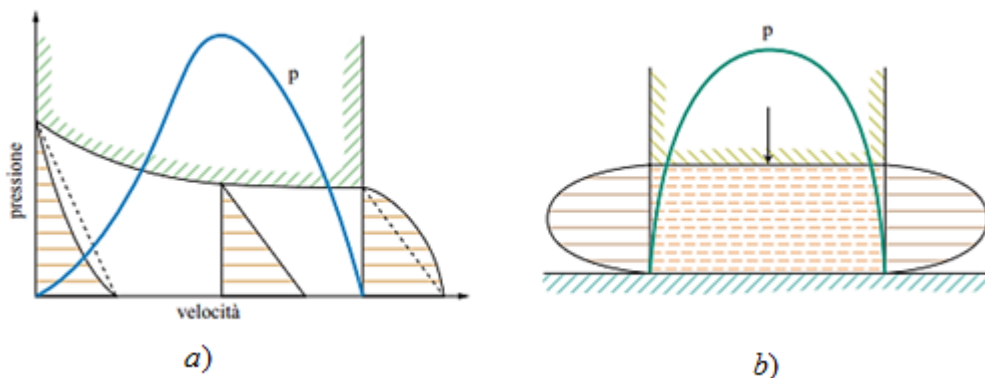


Figura 2-3: generazione di pressione per l'effetto: a) *wedge*, b) *squeeze*

2.2 Modello monodimensionale di un pattino attivo

Per verificare la fattibilità di un cuscinetto attivo a pattini oscillanti si è ricorso allo studio di un caso semplice: un cuscinetto assiale (*thrust bearing*), dove per il caso monodimensionale esistono delle soluzioni analitiche in forma chiusa dell'equazione di Reynolds. In questa maniera partendo dal modello analitico semplificato è possibile fare considerazioni di carattere generale sul problema di un TBP controllato, quali la scelta del metodo di attuazione del pattino e la tipologia di controllo da utilizzare, oltre a trarre varie considerazioni riguardanti il problema di un accoppiamento fluidodinamico tra una superficie in grado di tiltare ed una di spostarsi.

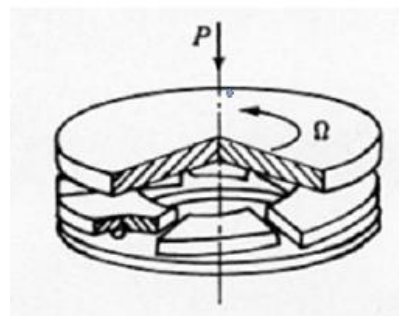
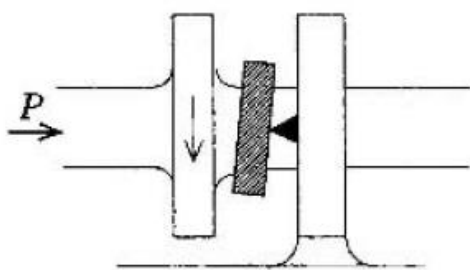


Figura 2-4: pattino Michell

In un cuscinetto portante tradizionale (*journal bearing*), il film d'olio si forma in maniera spontanea grazie all'eccentricità dell'albero causata da un carico esterno, quindi la pressione è generata dalla presenza del carico stesso. In un cuscinetto assiale (ovvero il cui compito è supportare il rotore lungo il suo asse di rotazione), un film d'olio convergente non si forma in maniera spontanea, quindi si devono realizzare delle speciali soluzioni costruttive. Tra queste la più utilizzata è il cuscinetto Michell dal nome del suo inventore, detto più comunemente cuscinetto a pattini oscillanti. Esso si basa sull'idea che un pattino libero di ruotare posto sopra un *pivot* fisso, è in grado di variare la propria inclinazione in base al carico e alla geometria per formare un cuneo di film d'olio, generando così tramite l'effetto *wedge* una pressione.

2.2.1 Soluzioni analitiche dell'equazione di Reynolds per il pattino oscillante monodimensionale

Come mostrato nella Figura 2-5 il sistema perno (detto anche *runner*) e il cuscinetto è schematizzato come due superfici in moto relativo tra di loro tra le quali è frapposto un film di lubrificante:

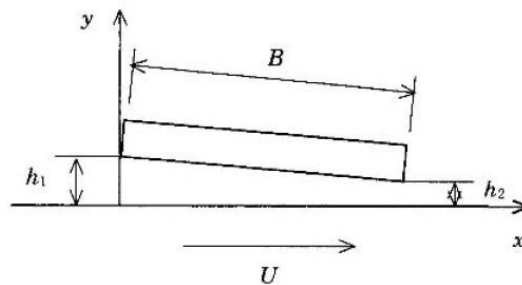


Figura 2-5: schematizzazione del problema

Per semplicità si è assunto che la lunghezza del pattino nella direzione normale alla figura sia infinita o molto più grande della sua lunghezza B, permettendo di trascurare gli effetti di bordo e di scrivere l'equazione di Reynolds nel caso monodimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu U_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.5)$$

Lo spessore del film d'olio tra le superfici è ipotizzato essere funzione lineare della coordinata x

$$h(x) = h_1 - \frac{x}{B} (h_1 - h_2) \quad (2.6)$$

Dove h_1 e h_2 rappresentano rispettivamente gli spessori all'ingresso e all'uscita del meato.

Ai fine della risoluzione della (2.5) vengono introdotte le seguenti quantità adimensionali, indicanti rispettivamente l'inclinazione del pattino la coordinata lungo la direzione circonferenziale e lo spessore del meato anche questo in forma adimensionale:

$$m = \frac{h_1}{h_2} \quad \bar{x} = \frac{x}{B} \quad \bar{h} = \frac{h}{h_2}$$

Quindi lo spessore del film d'olio in forma adimensionale può essere scritto come

$$\bar{h}(\bar{x}) = m - \bar{x} (m - 1) \quad (2.7)$$

Per la derivazione della forma chiusa della pressione si rimanda a [28].

L'integrazione dell'equazione (2.5) rispetto a x , imponendo come condizioni al contorno una pressione pari a quella atmosferica all'ingresso e all'uscita del pattino permette di scrivere la pressione in funzione delle coordinate adimensionali \bar{x} .

$$p(\bar{x}) = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \frac{(m-1)(1-\bar{x})\bar{x}}{(m+1)(m-m\bar{x}+\bar{x}^2)^2} \equiv \frac{6\mu UB}{h_2^2} \bar{p}(\bar{x}) \quad (2.8)$$

Con p la pressione e con \bar{p} la sua espressione adimensionalizzata.

In Figura 2-6 è rappresentato l'andamento di tale pressione adimensionale per varie inclinazioni del pad: si può osservare come al crescere dell'inclinazione e quindi di un effetto *wedge* più marcato, si ha un crescita del valore massimo di pressione e un suo spostamento verso la fine del pattino, seguito da una brusca diminuzione.

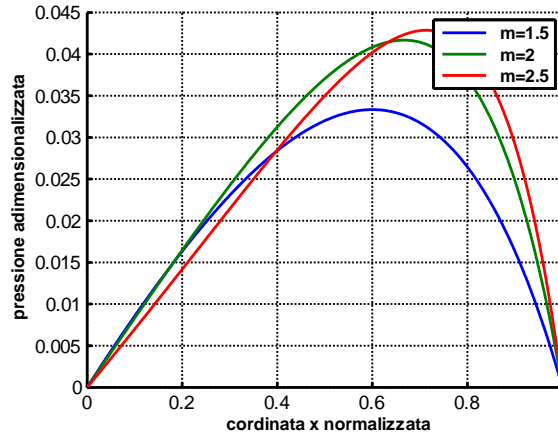


Figura 2-6: andamento della pressione normalizzata

Nota il campo di pressione nel meato integrandolo lungo il pattino si può ricavare la forza P esercitata dal film d'olio:

$$P = \int_{h_1}^{h_2} p dx = \frac{6\mu UB^2}{h_2^2} \frac{1}{(m-1)^2} \left[\ln(m) - \frac{2(m-1)}{(m+1)} \right] \equiv \frac{6\mu UB^2}{h_2^2} \bar{P}(m) \quad (2.9)$$

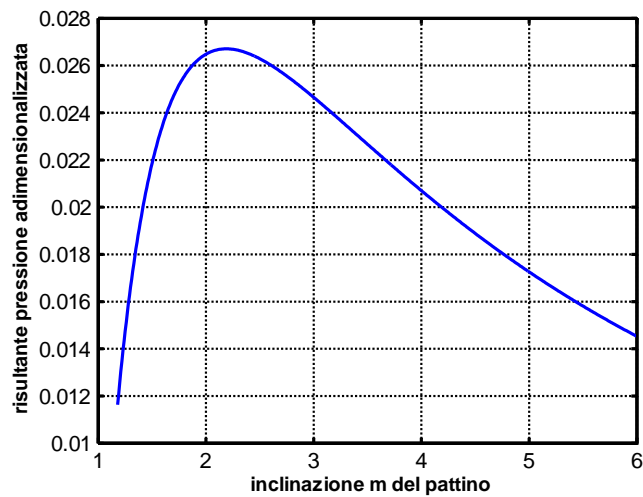


Figura 2-7: andamento della risultante del campo di pressione

Dal grafico sopra riportato, rappresentante l'andamento della risultante adimensionalizzata \bar{P} del campo di pressione rispetto all'inclinazione m , si vede come il massimo valore della risultante si abbia per un'inclinazione del *pad* (definita come rapporto tra lo spessore in ingresso e uscita del meato) pari a circa 2.2, valore che rappresenta l'inclinazione che consente la massima generazione di pressione.

Infine è possibile calcolare il centro di pressione del pattino, che nella condizione di equilibrio statico coincide con la posizione del *pivot*, essendo nulla la risultante del momento sul pattino.

$$x_c = \frac{1}{P} \int_{h_1}^{h_2} p x dx$$

Svolgendo l'integrale si ricava il centro di pressione in funzione del valore di inclinazione del pattino.

$$\bar{x}_c = \frac{2m(m+2)\ln(m) - (m-1)(5m+1)}{2(m-1)[(1+m)\ln(m) - 2(m-1)]} \quad (2.10)$$

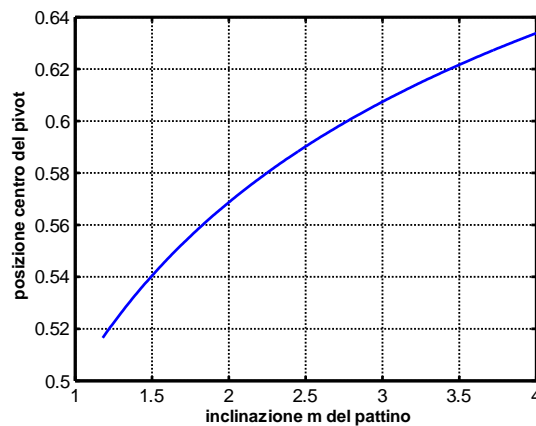


Figura 2-8:andamento del centro di pressione

2.2.2 Analisi statica

La posizione di equilibrio statico del sistema albero e pattino è funzione di due variabili: l'inclinazione m del pattino e lo spessore del meato h_1 all'ingresso (o in maniera equivalente dipende dai due spessori del meato).

Imponendo che il momento sul pattino e la risultante delle forze verticale sul pattino siano nulle si ha un sistema di due equazioni non lineari funzione di due variabili.

$$\begin{cases} P_{carico}(m, h_1) - R = 0 \\ (\bar{x}_{pivot} - \bar{x}_c(m, h_1)) B \cdot P_{load}(m, h_1) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Dove R è il carico statico esterno lungo la direzione assiale agente sull'albero, \bar{x}_{pivot} è la posizione del *pivot* lungo il pattino in termini adimensionali, detta anche *offset*.

La posizione di equilibrio del sistema si trova risolvendo il sistema non lineare (2.11) tramite opportune tecniche iterative come ad esempio Newton-Raphson.

2.2.3 Analisi dinamica

Ipotizzando di trascurare la deformabilità del *pivot* e quindi la presenza di un vincolo di cerniera ideale per il pattino, il sistema dinamico composto dal sistema pattino e albero può essere schematizzato nel seguente modo:

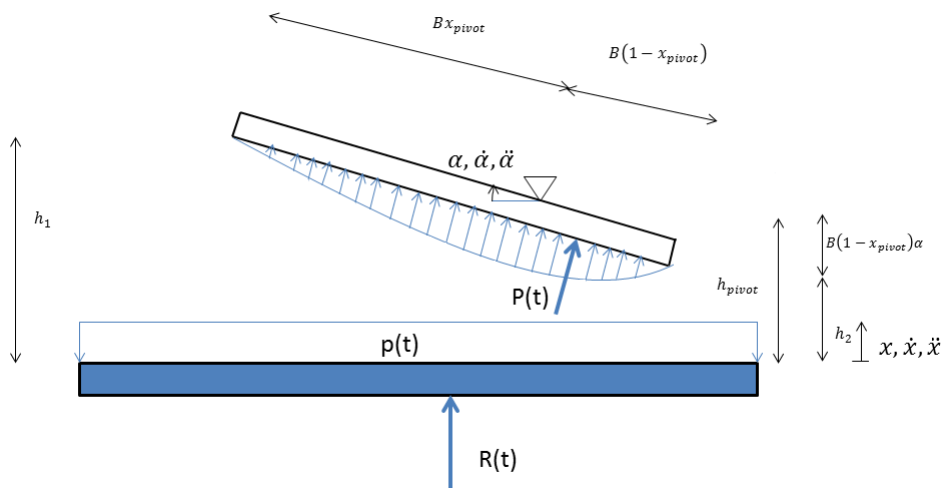


Figura 2-9: schematizzazione del pattino

Le equazioni di equilibrio dinamico per il sistema lungo la direzione assiale x e per la rotazione del *pad* sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + P(m, t) = R(t) \\ J\ddot{\alpha}(t) + B(x_{press}(m, t) - x_{pivot})P(m, t) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Una limitazione di questo modello è che non avendo inserito termini dipendenti dalla velocità del *pad* e del *runner*, non è in grado di tener conto dello smorzamento del film d'olio, tuttavia il contributo preponderante del campo di pressione nel film d'olio è dipendente dallo spostamento di *pad* e *runner* e non dalla loro velocità.

La posizione del centro di pressione e la risultante del campo di pressioni come visto nelle equazioni (2.9),(2.10) dipendono dall'inclinazione adimensionale m dipendente a sua volta dagli spessori del meato in ingresso ed uscita. Rimaneggiando la definizione dell'inclinazione adimensionale si perviene alla relazione (2.14) che mostra come m dipenda dalla rotazione del *pad* e dallo spessore del meato in uscita:

$$m = \frac{\alpha B}{h_2} + 1 \quad (2.13)$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\alpha B + h_2}{h_2}$$

$$h_2 = (h_{pivot} - x) - B(1 - x_{pivot}) \sin \alpha \approx (h_{pivot} - x) - B(1 - x_{pivot}) \alpha \quad (2.14)$$

Si nota quindi come le principali grandezze che compongono le equazioni di moto siano dipendenti in maniera non lineare dalla rotazione del pattino e dalla vibrazione dell'albero.

$$\begin{cases} \ddot{x} = f_1(x, \alpha, u) \\ \ddot{\alpha} = f_2(x, \alpha) \end{cases} \quad (2.15)$$

2.3 Esempio numerico

Come esempio viene considerato un sistema composto da un singolo pattino e da un albero rotante schematizzabile come visto in Figura 2-9.

Grandezze cuscinetto	Simbolo	Valore
Carico statico	$R [N]$	120000
Velocità albero	$U [m/s]$	0.24125
Lunghezza pattino	$B [mm]$	0.5
Viscosità dinamica	$\mu [kg/(m \cdot s)]$	0.02593
Spessore pattino	$s [mm]$	50
Massa pattino	$M [kg/m]$	0.5
Inerzia pattino	$J [kg \cdot m^2/m]$	0.246
Carico dinamico	R_{din}	20%
Posizione del pivot	x_{pivot}	0.6

Tabella 1: grandezze caratteristiche del sistema considerato

Il sistema le cui grandezze sono mostrate in Tabella 1, è sottoposto ad un carico di tipo sinusoidale agente sull'albero (che può modellare disturbi o fenomeni dipendenti dalla frequenza di rotazione della macchina come uno sbilanciamento o altri fenomeni) e partendo dalla condizione di equilibrio statico si è studiato l'andamento della posizione di albero e pattino.

Si può notare come la risposta del sistema linearizzato sia come traslata rispetto a quella del sistema completo: questo avviene poiché la linearizzazione non permette di considerare che il meato del film d'olio non sia ugualmente rigido, ma come si vede dalla Figura 2-10, esso sia più rigido (ovvero si abbiano spostamenti minori) quando la distanza relativa tra *pad* e *runner* diminuisce, mentre al contrario quando si allontanano la rigidezza del film decresce. Questo implica che per il sistema linearizzato che semplifica il campo di forze del meato attraverso una rigidezza (a cui andrebbe affiancato per completezza uno smorzatore), per una più accurata modellizzazione andrebbe considerata una molla di tipo non lineare.

Dalla Figura 2-11 si osserva come la risposta del sistema sia sinusoidale e la rotazione del *pad* sia sfasata rispetto allo spostamento dell'albero, infatti uno spostamento del *runner* causato dalla forzante provoca un aumento della

pressione per effetto *squeeze*, che viene compensato dalla rotazione del *pad* tramite l'effetto *wedge*.

È possibile poi osservare un'oscillazione picco-picco del pattino dell'ordine di grandezza di circa un millesimo di radiante e uno spostamento nell'ordine del micrometro.

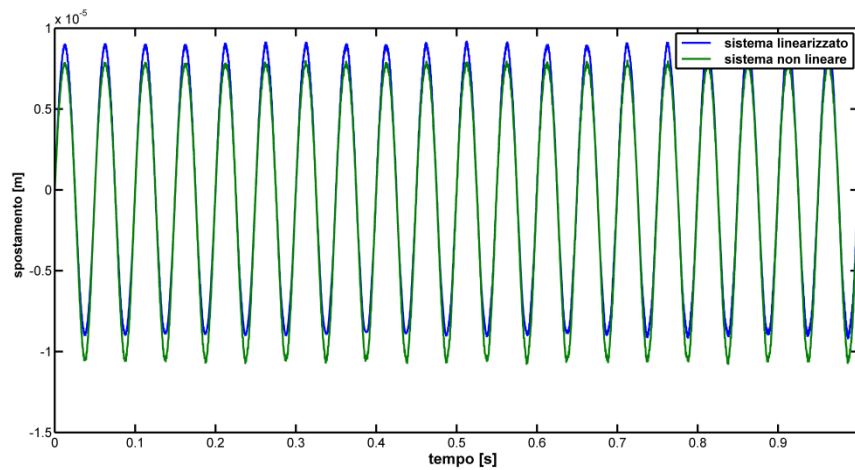


Figura 2-10: spostamenti del *runner* per il sistema linearizzato e non

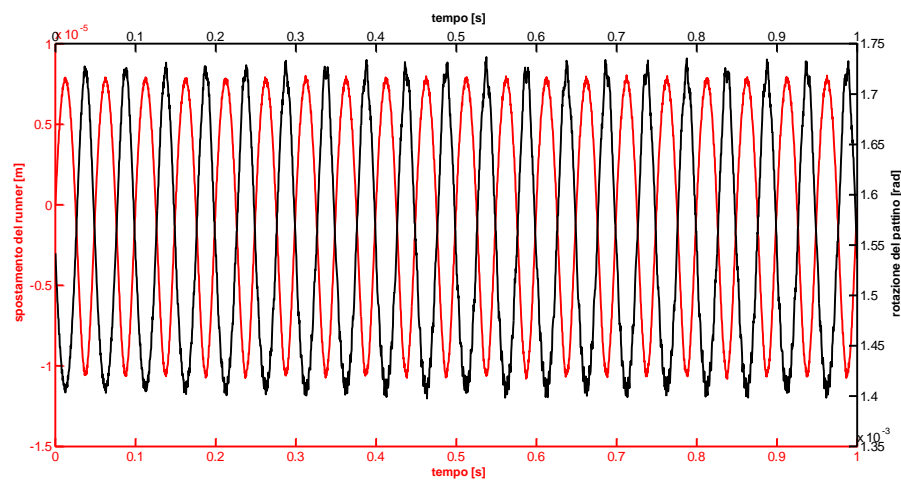


Figura 2-11: confronto tra l'andamento dello spostamento del *runner* (in rosso) e quello della rotazione del *pad* (in nero)

2.3.1 Controllo sulla traslazione del *pivot*

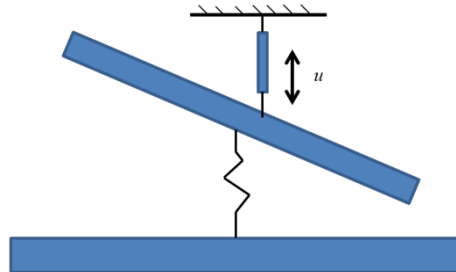


Figura 2-12: schematizzazione di *runner*, *pad* e attuazione

Come prima azione di controllo per il sistema non lineare (2.15) si è assunto che l'azione di controllo sia lo spostamento lungo la direzione assiale del pattino (per un cuscinetto portante sarebbe lungo la direzione radiale), con l'obiettivo di ridurre o aumentare il meato e di conseguenza variare il campo di pressioni in maniera tale da annullare lo spostamento dell'albero. Tale traslazione entra in maniera implicita nella (2.14), modificando lo spessore del meato:

$$h_2 = (h_{pivot} - x + u) - B(1 - x_{pivot})\alpha \quad (2.16)$$

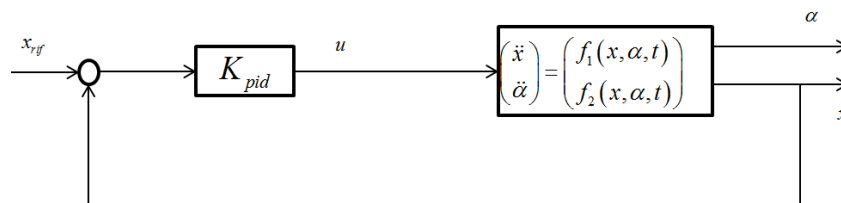


Figura 2-13: schema a blocchi per il sistema controllato

Di conseguenza a causa di una traslazione del *pad* varieranno tutti i termini influenzati da questa grandezza come ad esempio la forza risultante del campo di pressione e la posizione del centro di pressione.

Si è provato a controllare il sistema tramite un semplice regolatore PD, agente sull'errore della velocità e sulla posizione del *runner* lasciando libera la rotazione del *pad*.

$$u = k_p x + k_d \dot{x} \quad (2.17)$$

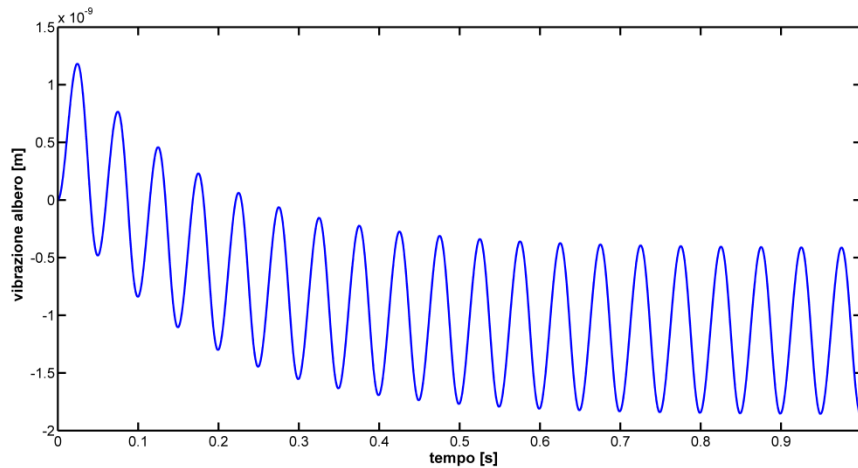


Figura 2-14: vibrazioni sul *runner* con il controllore PD

Tuttavia i regolatori industriali di tipo PID non sono adatti al controllo di sistemi con grosse incertezze e con grandi non linearità, come il sistema completo del *journal bearing*, che verrà studiato in seguito. Pertanto si è passati all'utilizzo come controllore di uno *sliding mode* per le sue proprietà di robustezza e insensibilità ai disturbi.

2.3.2 Controllo *sliding mode*

Il controllo *sliding mode* è una particolare tipologia di controllo adattivo dotato di grandi proprietà di robustezza e insensibilità ai disturbi.

Il riferimento del sistema di controllo è una funzione (di norma lineare ma non è strettamente necessario) dello stato del sistema che viene chiamata superficie di scivolamento o *sliding surface*, è possibile dimostrare che sopra di essa la dinamica del sistema sia insensibile ai disturbi e sia di ordine inferiore rispetto a quella del sistema originario.

Per mantenere lo stato del sistema sotto controllo nei pressi di tale superficie di scivolamento si usa un'azione di controllo di tipo discontinuo, che può produrre delle oscillazioni ad alta frequenza che possono usurare gli attuatori. Questo

fenomeno noto come *chattering* è il principale limite di questa logica di controllo.

In questo paragrafo verrà mostrata la sintesi del controllore per il caso di un generico sistema non lineare a singolo ingresso, per una trattazione completa dello *sliding mode* (condizioni di validità, risoluzione del *chattering* e sintesi dell'azione di controllo per sistemi MIMO) si rimanda all' Allegato C.

Dato il generico sistema non lineare a singolo ingresso:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u(t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, u, t) \quad (2.18)$$

Dove con $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, u, t)$ si sono indicati i disturbi, le dinamiche non modellate nel sistema nominale e gli effetti degli errori di modellizzazione.

Per tale sistema si richiede di sintetizzare un controllore $u(\mathbf{x}(t))$ che annulli lo stato del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Scelta la funzione lineare $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ detta superficie di *sliding*:

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n] \quad (2.19)$$

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_{n-1} x_{n-1} + s_n x_n = 0$$

Tale funzione rappresenta lo spazio dove le traiettorie del sistema controllato andranno a "scivolare". I coefficienti della (2.19) possono essere scelti tramite simulazioni oppure tramite opportune tecniche basate sulla minimizzazione di un funzionale di costo [21].

Considerata la seguente funzione candidata di Lyapunov:

$$V(s(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} s^T(\mathbf{x}) \cdot s(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

Condizione sufficiente affinché il sistema sia stabile attorno al punto $s = 0$ è che nell'intorno di tale punto la derivata di tale funzione sia negativa:

$$\dot{V} = s^T \cdot \dot{s} < 0 \quad (2.21)$$

$$\dot{s} = \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) u(t) \quad (2.22)$$

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t))} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \quad (2.23)$$

Dalla (2.21) detta condizione di raggiungibilità è possibile ricavare l'azione di controllo equivalente (2.23) che annulla la dinamica del sistema.

$$u_{eq}(t) = u_{ragg}(t) + u_{chatt}(t) \quad (2.24)$$

Tale azione di controllo può essere scomposta nelle due componenti della (2.24), dove il primo termine u_{ragg} rappresenta la componente di raggiungibilità, ovvero la componente che permette di raggiungere la superficie di *sliding*. Concettualmente essa rappresenta la parte *model based* del controllo e può essere pensata come un generico controllo in retroazione dello stato.

$$u_{ragg}(t) = -\frac{1}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t))} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.25)$$

Invece u_{chatt} rappresenta la componente robusta in grado di tenere il sistema sul piano di scivolamento anche di fronte a disturbi e incertezze di modellizzazione, essa viene di norma scritta per un sistema SISO nel seguente modo:

$$u_{chatt}(t) = -k(s) \text{sign}(s) \quad (2.26)$$

La funzione segno presente nella (2.26) gode della seguente importante proprietà:

$$\text{sign} = \begin{cases} -1 & \text{se } s < 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \\ +1 & \text{se } s > 0 \end{cases}$$

In pratica a fronte di disturbi ed errori di modellizzazione che tenderebbero ad allontanare il sistema dalla superficie di *sliding* l'azione di *chattering* risponde con un'azione di controllo discontinua in grado di tenersi sopra la superficie di scivolamento.

Tale componente discontinua dell'azione di controllo porta al problema del *chattering*, ovvero alla presenza di oscillazioni spurie in alta frequenza: questo effetto è causato dal fatto che vicino alla superficie di *sliding* il controllore cambia segno in continuazione, questo potrebbe eccitare eventuali dinamiche di ordine superiore trascurate nel modello, oltre ad usurare fortemente gli attuatori. È comunque possibile modificare la legge di controllo sostituendo alla funzione segno un saturatore o una tangente iperbolica in modo da avere una regolazione più morbida [24].

Per il sistema (2.12) la superficie di *sliding* è stata presa lineare e in maniera tale da pesare solo la posizione e la velocità dell'albero disinteressandosi delle grandezze inerenti al pattino, che è libero di oscillare in modo da tenere equilibrato il sistema.

$$s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_{vel} & s_{pos} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ \dot{\alpha} \\ \alpha \end{bmatrix} = s_{vel} \dot{x} + s_{pos} x \quad (2.27)$$

La componente robusta è stata ottenuta sostituendo alla funzione segno della componente discontinua la tangente iperbolica, al fine di prevenire il fenomeno del *chattering*, mentre la componente di raggiungibilità, ovvero la parte *model based* è stata costruita sulla base del modello linearizzato del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \\ u &= u_{ragg} + u_{chatt} = -(\mathbf{s} \cdot [\mathbf{B}])^{-1} \mathbf{s} \cdot [\mathbf{A}] \mathbf{x} - K_c \tanh(s) \end{aligned} \quad (2.28)$$

In Figura 2-15 e in Figura 2-16 è riportato l'andamento delle vibrazioni del sistema sotto controllo, come si può osservare il controllore riesce a controllare in modo soddisfacente le vibrazioni sul *runner*, abbattendo di circa due ordini di grandezza i picchi.

Dalla Figura 2-19 si osserva come il pattino oscilli in maniera analoga a prima, in quanto per controllare il sistema il pattino si muove della quantità con cui si sarebbe spostato il *runner* se fosse stato privo di controllo. Questo avviene poiché il sistema semplificato può essere visto come una massa collegata a terra da una molla di rigidità molto elevata, alla cui altra estremità è vista come uno spostamento di vincolo controllato.

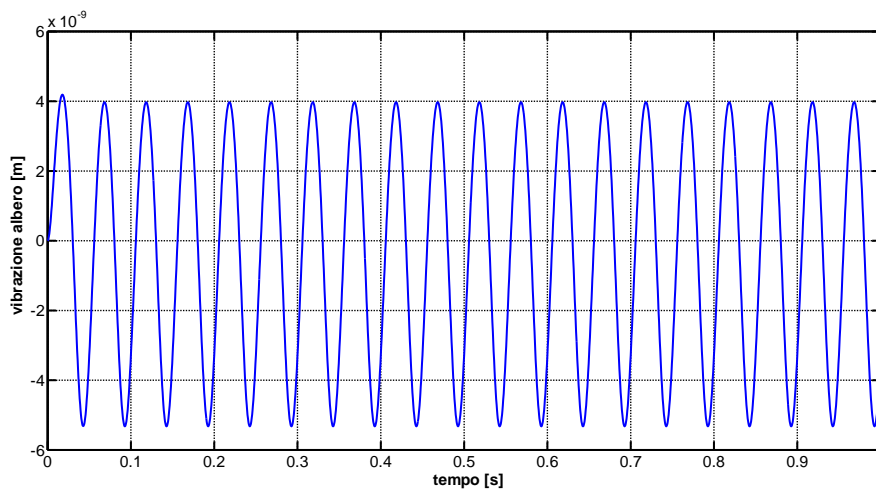


Figura 2-15: vibrazioni sul *runner* con un controllo SMC

L'azione di controllo come mostrato dalla (2.24) è composta da due componenti: una *model based* sintetizzata sul modello linearizzato, che permette di annullare la dinamica del sistema, e l'altra che si occupa dei disturbi e degli errori di modellizzazione. La somma delle due componenti è mostrata in Figura 2-16.

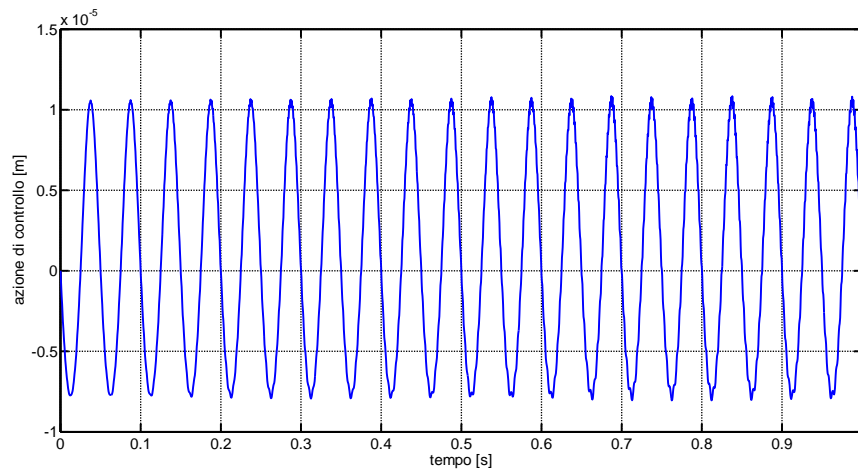


Figura 2-16: andamento nel tempo delle azioni di controllo

Si è verificato poi che il massimo valore di forza erogato dall'attuatore piezoelettrico sia circa di 40000 N , valore alto ma che può essere fornito da un grosso attuatore di questo tipo. Inoltre per limitare le forze richieste dal singolo attuatore in gioco si potrebbero montare due attuatori in parallelo.

2.3.3 Controllo della rotazione

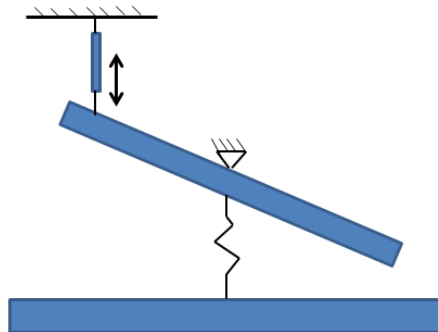


Figura 2-17: schematizzazione di *runner*, *pad* e attuazione tramite la traslazione del pattino

Un'alternativa al metodo di controllo visto in precedenza, consiste nel controllare la rotazione del pattino tramite un attuatore dietro il *pad* in maniera da variarne l'inclinazione al fine di generare un momento tale da modificare il campo di pressione nel meato tramite l'effetto *wedge*.

Si nota subito come questo metodo sia più complesso rispetto al precedente: infatti in precedenza l'effetto della traslazione poteva essere visto come lo spostamento di un estremo di una molla molto rigida rappresentante il campo di pressione del film d'olio, ora invece l'azione di controllo è ancora meno collegata alla grandezza controllata.

A causa del controllo non-colocato il sistema può soffrire di problemi di instabilità, per questo motivo si è creato un anello di controllo interno basato sul posizionamento dei poli in maniera tale da portare i poli del sistema linearizzato ad avere una parte reale negativa nel piano complesso ottenendo così un nuovo sistema da controllare che sia stabile. All'esterno di questo si è inserito un regolatore PD per controllare il nuovo sistema.

Al fine di verificare le prestazioni per le due diverse logiche di attuazione si è effettuato un confronto: in Figura 2-20 è riportato il valore dell'altezza del meato in uscita, che rappresenta il punto in cui la distanza tra *pad* e *runner* è minima, ovvero il punto in cui il rischio di contatto è più elevato; come si vede la rotazione del pattino provoca oscillazioni più grandi rispetto alla semplice traslazione, problematica destinata a peggiorare al crescere della lunghezza dei pattini.

Inoltre poiché gli spostamenti dell'angolo del pattino sono maggiori, varierà l'inclinazione e con essa la posizione del centro di pressione, causando un incremento del momento sul pattino che andrà controbilanciato con una azione di controllo maggiore.

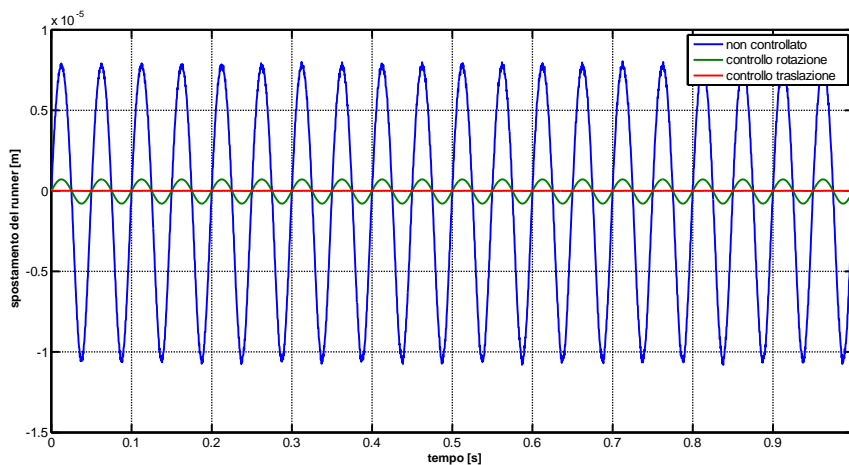


Figura 2-18: vibrazioni del *runner* per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione

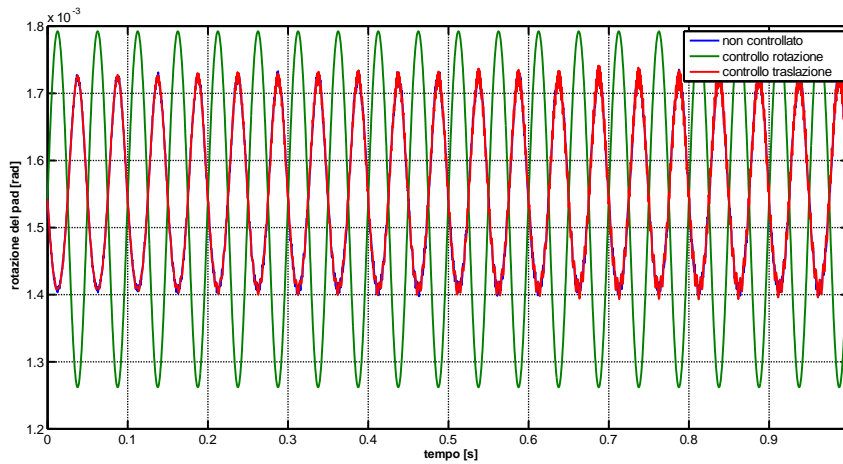


Figura 2-19: rotazione del pattino per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione

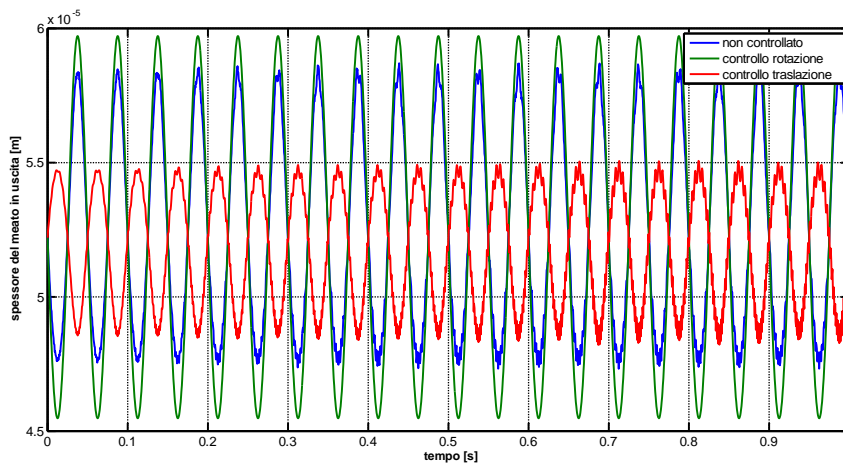


Figura 2-20: andamento del meato in uscita per il sistema non controllato e controllato con le due differenti logiche di attuazione

Si può affermare che il controllo delle vibrazioni agendo sulla rotazione del pattino necessita di una logica di controllo più complessa, aumenta il rischio di contatto tra *pad* e *runner* e come si vedrà in 3.3.1 richiede un modello molto più raffinato del sistema, in quanto non è possibile trascurare le inerzie del pattino, aggiungendo un grado di libertà per pattino.

Tuttavia tale metodo ha il vantaggio di richiedere minori forze agli attuatori.

Capitolo 3

Cuscinetti tilting pad

In questo capitolo verrà ripresa l'idea del controllo delle vibrazioni di un rotore mediante l'attuazione dei pattini di un cuscinetto portante (*journal bearing*) a pattini oscillanti.

Verranno inizialmente descritte le grandezze caratteristiche di tali cuscinetti al fine di mostrarne gli effetti sulle proprietà statiche e dinamiche.

In seguito verrà creato un modello dinamico linearizzato del cuscinetto, realizzato risolvendo numericamente il campo di pressione sui pattini tramite il metodo delle differenze finite.

Successivamente il controllo introdotto nel Capitolo 2 per un semplice pattino assiale monodimensionale verrà implementato sul modello realizzato, permettendo di studiare l'accoppiamento tra rotore e cuscinetto attivo.

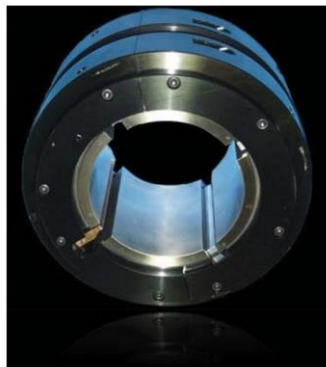


Figura 3-1: immagine di un TPJB a 4 pattini

3.1 Grandezze caratteristiche

Un cuscinetto tradizionale ha come principale scelta di progettazione il gioco tra il rotore e il cuscinetto detto *machined clearance*. In un TPJB i parametri sono molto maggiori rispetto ad un cuscinetto a geometria fissa e ognuno di essi ha una certa influenza sul campo di pressione nel meato, modificando quindi le proprietà statiche e dinamiche del cuscinetto.

Nella seguente sezione verranno esaminate una per una le principali grandezze di interesse e i loro effetti sulle proprietà statiche e dinamiche del cuscinetto.

Machined clearance: definita in maniera analoga al caso di un cuscinetto a geometria fissa, ovvero come la differenza tra il raggio del cuscinetto e quello dell'albero.

$$C_p = r_b - r_a$$

Assembled clearance: è una grandezza propria dei TPJB, è definita come la differenza tra la distanza dal centro del cuscinetto al pattino con il raggio dell'albero.

$$C_b = r_{pivot} - r_a$$

Prearico: il prearico tiene conto del fatto che il raggio di curvatura del pattino e cuscinetto non coincidono. Un prearico nullo in condizioni di carico può essere pericoloso poiché a causa delle tolleranze costruttive tale valore in realtà può essere negativo riducendo la quantità di olio passante nel meato e portando a rischi di instabilità.

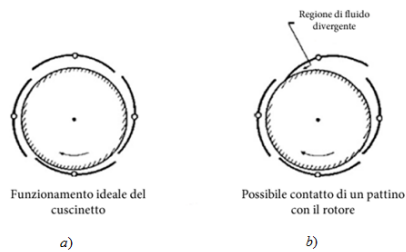


Figura 3-2: possibile contatto tra *pad* e rotore

Inoltre esiste un rischio di contatto tra l'estremità del pattino e l'albero ed è quindi importante che tale valore sia sempre diverso da zero per avere, anche in condizione di carico nullo, una buona rigidità del cuscinetto Figura 3-2.

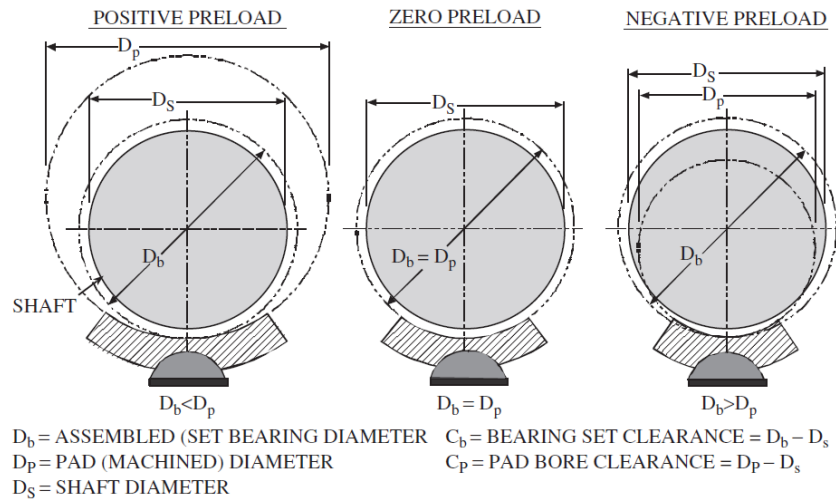


Figura 3-3: rappresentazione di precarico positivo, nullo e negativo

Matematicamente il precarico può essere espresso o in forma dimensionale, definendolo come la distanza dal centro del cuscinetto rispetto al centro di curvatura del pattino $r_p = C_p - C_a$, oppure tramite un coefficiente adimensionale:

$$m = 1 - \frac{C_p}{C_b}$$

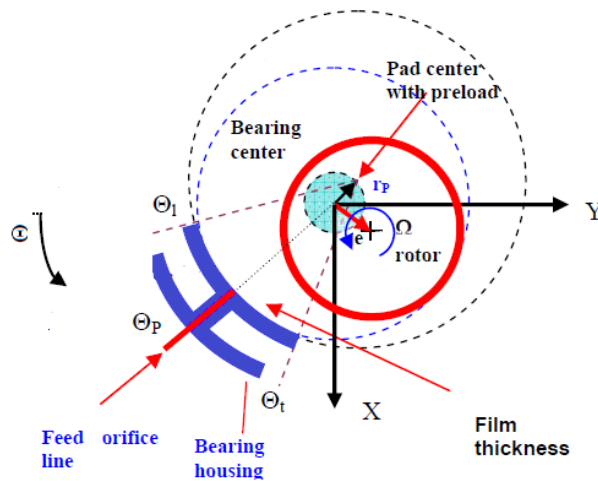


Figura 3-4: raffigurazione del precarico

Questo parametro è di fondamentale importanza per le caratteristiche statiche e dinamiche del supporto: infatti incrementando tale valore salirà la rigidezza del cuscinetto, in particolar modo per alti numeri di Sommerfeld¹ (condizione di cuscinetto poco caricato). Tale condizione potrebbe essere desiderabile ad esempio per evitare di passare per una frequenza propria che si trovi poco sopra la condizione di funzionamento. Tuttavia alzare troppo tale parametro porta in genere ad un abbassamento dello smorzamento effettivo del sistema aumentando le vibrazioni durante le risonanze [1].

Offset: identifica la posizione del *pivot* lungo l'arco del pattino, viene definito come il rapporto tra la posizione angolare del *pivot* (a partire dall'inizio del *pad*) e l'arco del *pad*.

$$offset = \frac{\theta_{pivot}}{\theta_{pad}}$$

Tale valore influenza a parità della posizione angolare del pattino lo spessore del meato in ingresso, questo può variare il campo di pressioni e la temperatura nel meato (che causa una variazione nella viscosità).

Valori tipici dell'*offset* sono compresi tra 0.5 e 0.6.

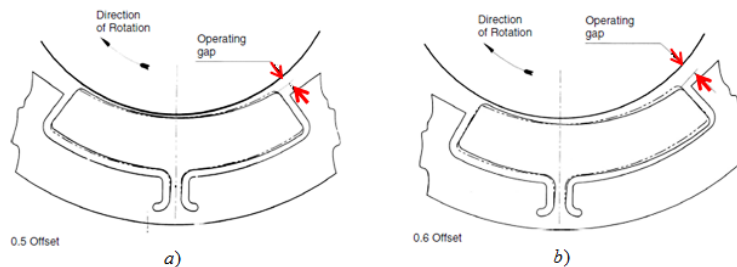


Figura 3-5: effetti dell' *offset* sullo spessore del meato in ingresso

¹ Il numero di Sommerfeld è un gruppo adimensionale usato nella dinamica dei rotori per definire tutti i parametri geometrici e di funzionamento del cuscinetto. Ad alti valori di questo parametro corrispondono cuscinetti poco caricati, viceversa a bassi valori corrispondono cuscinetti molto caricati.

$$S = \left(\frac{r}{C} \right)^2 \frac{\mu N}{W_0}$$

con r raggio dell'albero, C la *bearing clearance* e N il numero di giri in Hz (alcune trattazioni considerano invece i radianti al secondo), W_0 è il carico statico e μ la viscosità dinamica.

Tipologia di *pivot* e sua cedevolezza: La rigidità del *pivot* dipende fortemente dalla soluzione costruttiva con cui lo si realizza ed è uno dei parametri che maggiormente influiscono sulle caratteristiche del sistema ed anche uno dei più difficili da identificare e modellare.

Tra le soluzioni costruttive più diffuse si citano i *pivot* Rocker e sferici. I primi permettono al pattino di rotolare senza slittare attorno ad un *pivot* cilindrico all'interno del cuscinetto. I secondi permettono la rotazione del *pad* attorno ad un *pivot* di forma sferica fissato all'interno del cuscinetto.

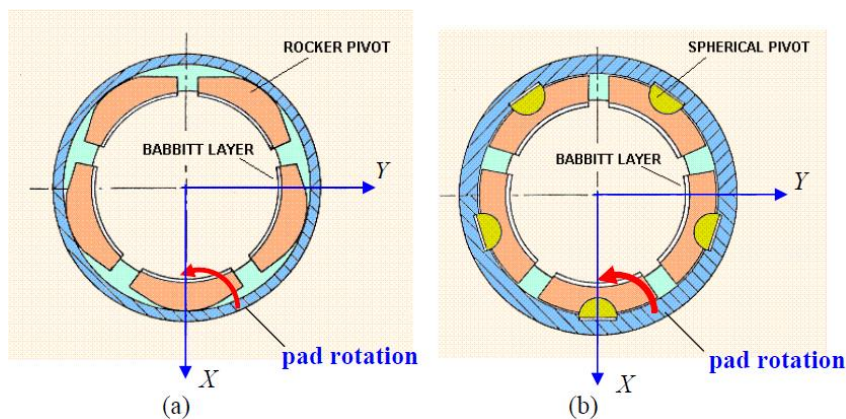


Figura 3-6: a) TPJB con *pivot* rocker b) TPJB con *pivot* sferico

Una terza tipologia è il *pivot* a flessione (*flexure pivot*), dove il pattino è collegato alla cassa del cuscinetto tramite una sottile membrana, mentre nei casi precedenti l'orientazione del pattino era causata dallo scorrimento del *pivot* sulla struttura portante, qui si ottiene lo stesso risultato per mezzo della flessione dello stesso. I vantaggi di questa configurazione sono la riduzione dei problemi dovuti alla tolleranze costruttive, all'usura del *pivot* causata da fenomeni di strisciamento e dagli elevati sforzi di contatto. Inoltre l'aver introdotto una rigidità flessionale aumenta le frequenze proprie del sistema eliminando il problema del *pad flutter* [38], fenomeno spesso verificatosi per cuscinetti a pattini oscillanti con precarico nullo.

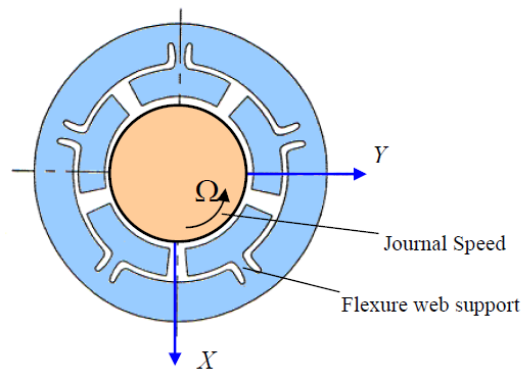


Figura 3-7: TPJB con *pivot* a flessione

Di norma nelle analisi di un *tilting pad* si assume o un punto ideale di contatto oppure una linea ideale di contatto insieme all'ipotesi di trascurare la resistenza alla rotazione del *pad* (vincolo di cerniera ideale) e la sua cedevolezza nella direzione radiale.

Gli effetti della deformabilità del *pivot* sono tra i più importanti e più difficili da quantificare (lo stesso valore della rigidità del pattino è funzione non lineare del carico agente sul pattino). Infatti formalmente la rigidità del *pivot* è posta in serie con quella del film d'olio; si viene quindi a modificare sia la statica che le proprietà dinamiche del sistema.

In Figura 3-8 è riportato l'andamento della posizione del centro dell'albero adimensionalizzata rispetto alla *clearance* del cuscinetto, in funzione del carico statico (grafico estratto da [38]): come ci si potrebbe aspettare la discrepanza tra i differenti modelli è più marcata per carichi elevati, per una trattazione completa del fenomeno si rimanda a [38].

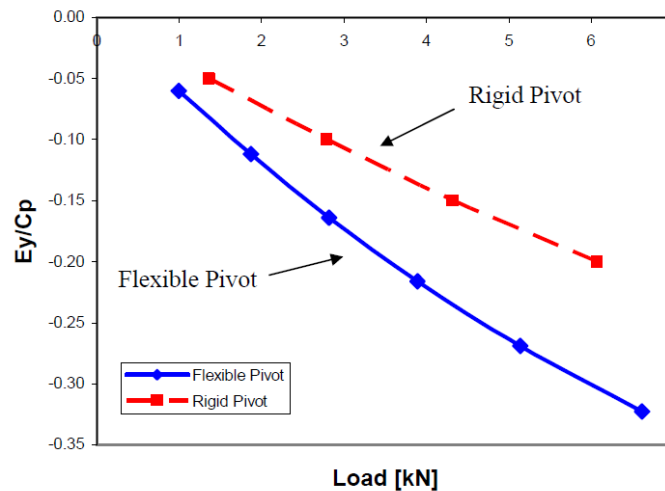


Figura 3-8: effetto della flessibilità del *pivot*

Numero di pattini e loro disposizione: il numero dei pattini è un'altra grandezza di fondamentale importanza, da cui dipendono molte caratteristiche del sistema. In passato il numero più diffuso era cinque, il trend attuale si sta spostando verso l'utilizzo di quattro *pad* [1]. Questo perché questi ultimi tendono ad avere migliori capacità di carico ed in genere hanno migliori caratteristiche nella risposta sincrona.

I pattini possono essere disposti attraverso due configurazioni: una in cui il precarico statico è supportato da un singolo pattino detta LOP (*load on pad*), l'altra in cui questo si scarica su due pattini adiacenti detta LBP (*load between pad*).

In molti casi (ad esempio alcuni riduttori industriali) può succedere che il carico cambi la sua orientazione durante il funzionamento della macchina, di conseguenza varieranno pure i termini di rigidità; in Figura 3-9 è riportato l'andamento del termine K_{xx} al variare dell'angolo con cui agisce il carico:

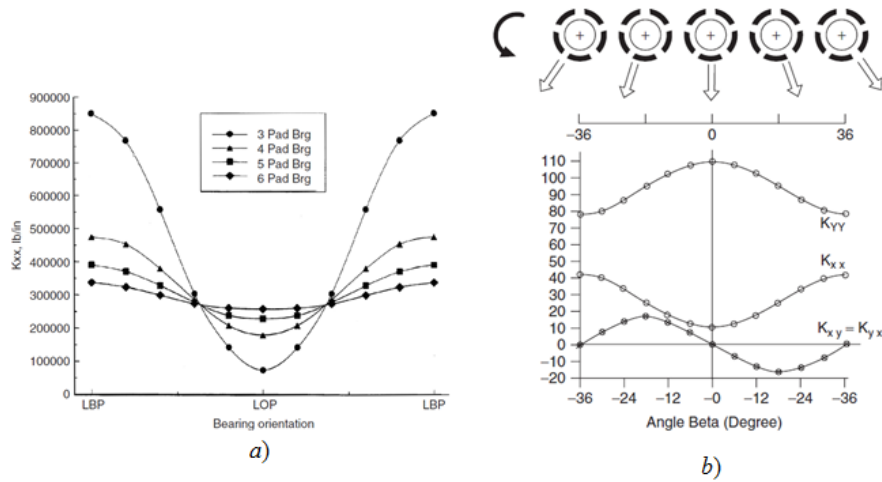


Figura 3-9: a) variazione di K_{xx} al variare del numero di pattini,

b) variazione dei coefficienti dinamici al variare dell'inclinazione del precarico

Si nota come un numero elevato di pattini permetta una variazione minore della rigidità del cuscinetto e quindi un funzionamento più robusto e stabile rispetto alle piccole variazioni della direzione del carico.

Un'altra condizione in cui può essere conveniente aumentare il numero di *pad* si ha nel caso di uno scarso gioco radiale: in questo caso si preferisce avere più pattini al fine di diminuirne la deflessione e quindi il rischio di contatti. Da notare come generalmente ad un numero maggiore di *pad* corrisponde una loro minore lunghezza che porta a minori rischi di incorrere nel *pad flutter* [1].

La configurazione LBP è generalmente preferita per i seguenti motivi: il carico statico è distribuito su più pattini, di conseguenza la pressione risultante sul *pad* sarà inferiore; tuttavia la configurazione LOP può essere vantaggiosa nel caso di coefficienti misti importanti.

3.2 Statica del TPJB

Prima di procedere a qualsiasi analisi dinamica o inerente al controllo bisogna trovare il punto di equilibrio statico del sistema perno più cuscinetto.

La posizione di equilibrio statico di un TPJB viene trovata risolvendo le equazioni di equilibrio alle traslazioni verticali e orizzontali dell'albero aggiungendo le condizioni di momento nullo su tutti i pattini.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{oil,,x} = R_x \\ F_{oil,,y} = R_y \\ \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ patt}} M_{pad,i} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Dove $F_{oil,,x}$ e $F_{oil,,y}$ rappresentano le risultanti del campo di pressione del film d'olio, mentre R_x e R_y indicano il carico statico agente sull'albero (in molti casi pratici esiste solo la componente verticale).

Tale sistema di equazioni è di difficile risoluzione, infatti le grandezze di interesse (forze e momenti rispettivamente sull'albero e sul pattino), dipendono dal campo di pressione formatosi grazie all'effetto di lubrificazione idrodinamica che a sua volta dipende in maniera non lineare tramite l'equazione di Reynolds dalla posizione del centro del perno e dalla rotazione dei pattini.

$$\begin{aligned} F_{oil,x} &= \iint_A P(x, y, \alpha) \sin(\vartheta) d\theta dz \\ F_{oil,y} &= -\iint_A P(x, y, \alpha) \cos(\vartheta) d\theta dz \\ M &= -\iint_A P(x, y, \alpha) \cdot r \sin(\vartheta_{pivot} - \vartheta) d\theta dz \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dove ϑ rappresenta l'angolo tra il punto considerato e il sistema di riferimento. Inoltre non esistono metodi per la risoluzione in forma chiusa dell'equazione di Reynolds adatti a modellare un TPJB, l'unica strada percorribile è ricavare il campo di pressione per via numerica, ad esempio tramite il metodo delle differenze finite, la cui implementazione completa è trattata nell' Allegato A.

Per la ricerca della posizione di equilibrio sono state fatte le seguenti ipotesi:

- La temperatura all'interno del film d'olio è costante², stessa cosa per la viscosità quindi $\mu(T) = \text{cost}$;
- Si sono considerati responsabili della generazione di pressione gli effetti *wedge* e di *squeeze* trascurando lo *stretch* (ipotesi valida in caso di superfici in materiale non elastico).

La maggiore difficoltà nella risoluzione del sistema di equazioni di equilibrio risiede nella forte dipendenza dalle condizioni iniziali del metodo di soluzione. Per ovviare al problema è stato utilizzato un approccio di risoluzione a griglia variabile: si è partiti considerando un numero molto basso di nodi, si è trovato il punto di equilibrio e in seguito si è infittita la *mesh* e si è posta come condizione iniziale la posizione calcolata in precedenza. Si è quindi proceduto in maniera iterativa fino ad ottenere la dimensione della griglia desiderata.

La posizione di equilibrio si trova quindi sulla verticale rispetto al centro del cuscinetto come ci si potrebbe aspettare per un TPJB con un precarico puramente verticale ([1],[33]).

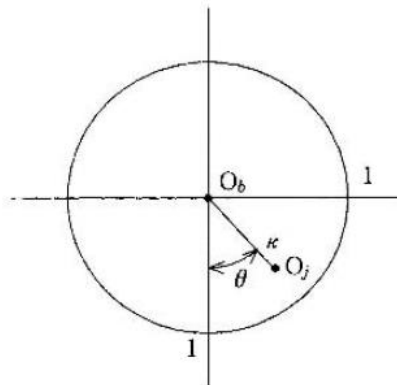


Figura 3-10: rappresentazione dell'*attitude angle* θ e dell'eccentricità

Di norma come è mostrato in Figura 3-10 la posizione di equilibrio statico viene identificata tramite la posizione del centro del perno espressa in coordinate polari, dove l'anomalia viene detta angolo di attitudine e il modulo eccentricità, quest'ultimo valore viene spesso espresso adimensionalizzato rispetto alla *clearance* del cuscinetto.

² Per considerare l'effetto della variazione di temperatura che è in grado di influenzare il valore della viscosità, bisogna risolvere affianco all'equazione di Reynolds un'equazione di energia. Per una trattazione si rimanda a [28].

In seguito sono riportati i risultati della statica per il cuscinetto le cui grandezze sono mostrate in Tabella 2

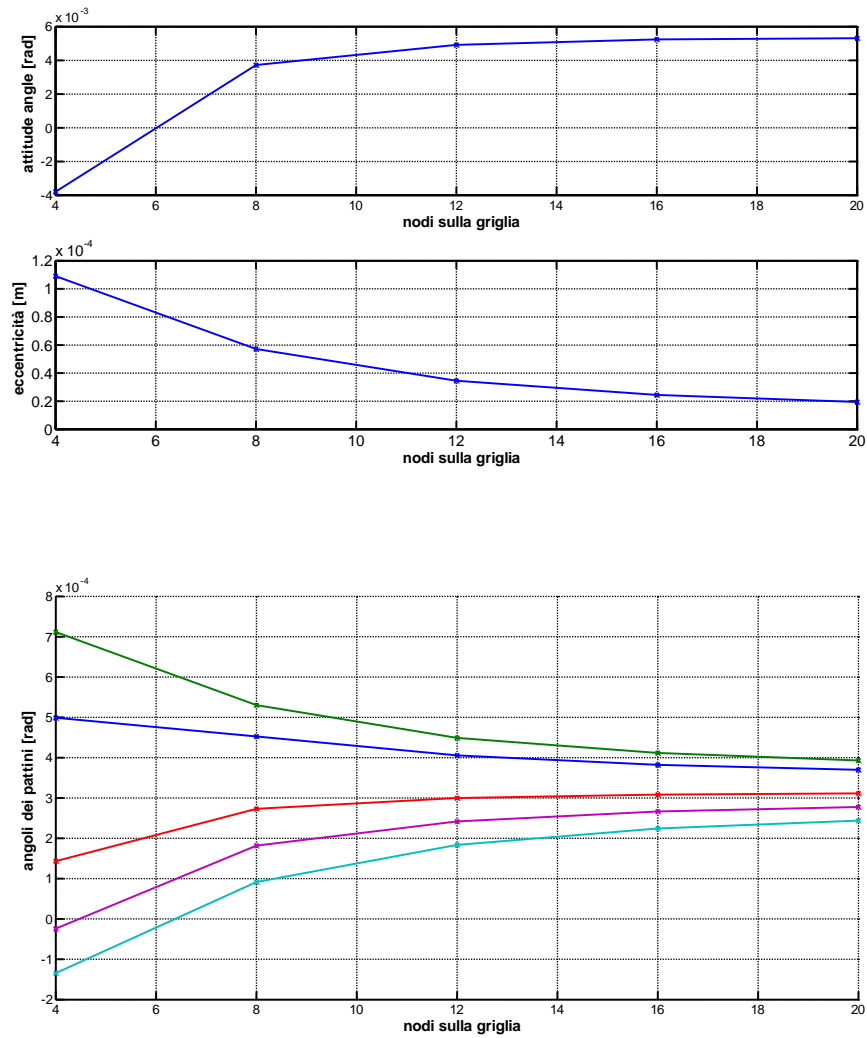


Figura 3-11: a) andamento della posizione dell'albero, b) andamento degli angoli di rotazione dei pattini all'infittimento della *mesh*.

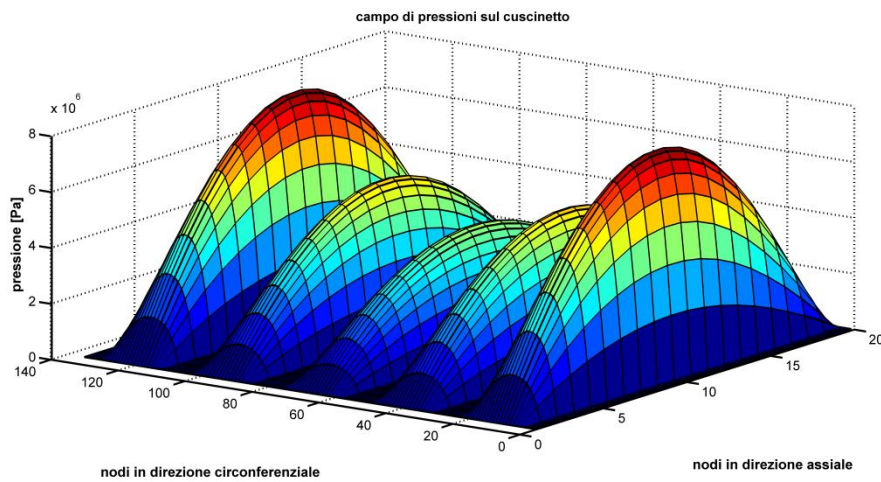


Figura 3-12: andamento delle pressioni sul cuscinetto

Un effetto interessante da osservare è la simmetria del campo di pressioni sul singolo pattino rispetto al *pivot* (in caso di *offset* pari a 0.5), infatti l'unica possibilità per avere un momento pari a zero è quella di avere una distribuzione simmetrica rispetto al *pivot*, in maniera tale che le risultanti dei momenti si annullino tra loro.

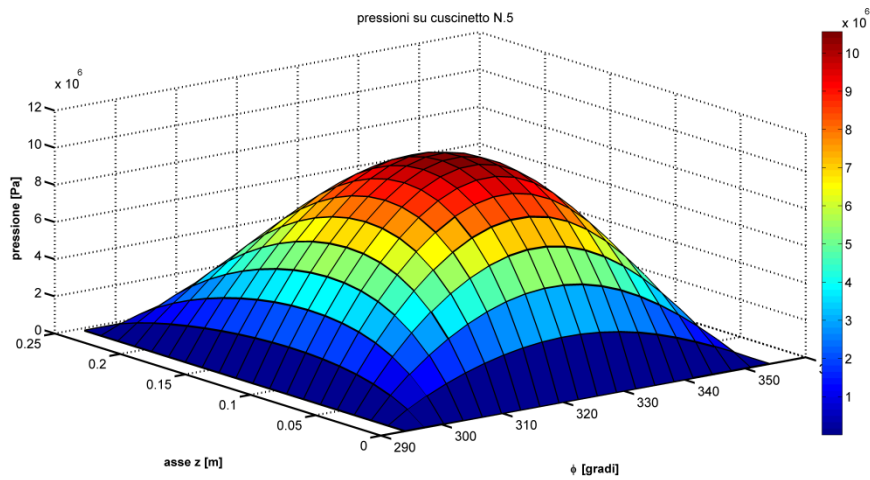


Figura 3-13: campo di pressioni su un *pad*

In Figura 3-12 è riportato l'andamento della pressione nell'intero cuscinetto, come si può osservare i cuscinetti più carichi sono quelli posti in basso, dato che assorbono la maggior parte del carico statico, mentre come ci si potrebbe aspettare il cuscinetto posto in alto risulta essere il più scarico (sarebbe scarico se il precarico del cuscinetto fosse nullo), inoltre si nota una simmetria nei campi di pressione per i cuscinetti posti in maniera simmetrica rispetto alla direzione del precarico.

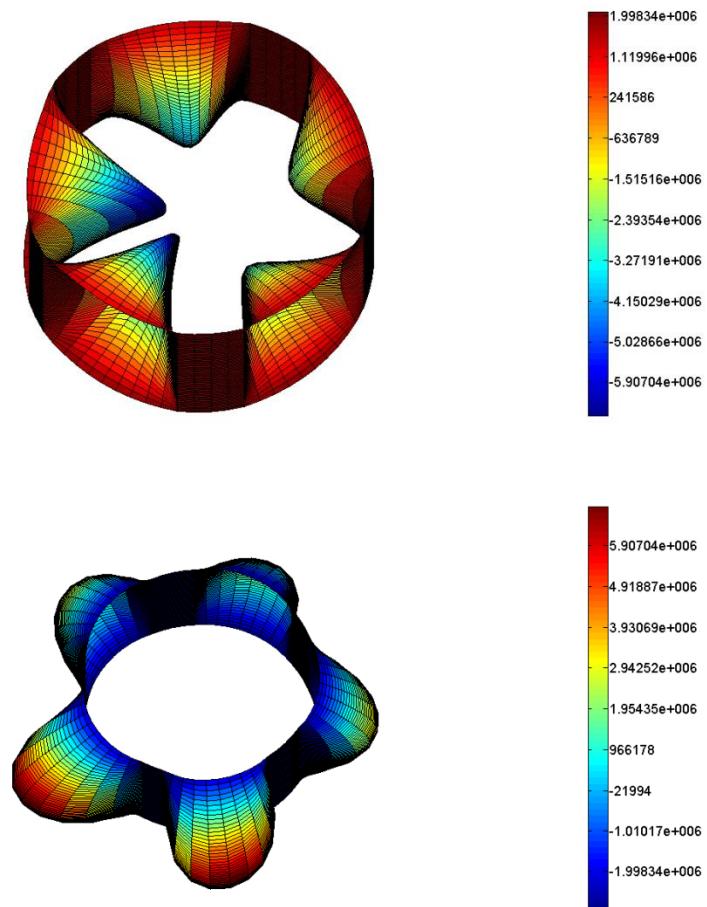


Figura 3-14: pressioni sul cuscinetto (in basso) e sul pattino(in alto)

3.3 Modello dinamico

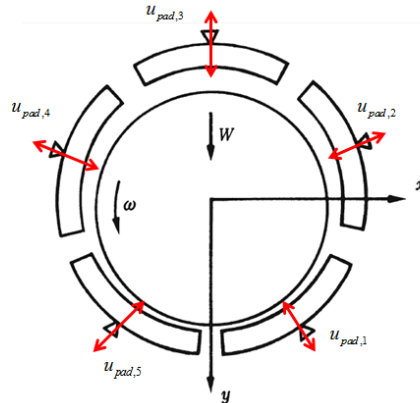


Figura 3-15: cuscinetto a 5 pattini LBP controllato tramite la traslazione dei pattini

Di seguito verrà studiato il modello dinamico linearizzato dell'accoppiamento tra albero e cuscinetto.

Il cuscinetto scelto è raffigurato in Figura 3-15 e le sue grandezze caratteristiche sono riportate in Tabella 2. La scelta di un cuscinetto a 5 pattini LBP permette di studiare un caso generico in cui la traslazione di un pattino abbia effetti su entrambe le dinamiche (orizzontale e verticale) accoppiandole, oltre a rappresentare una delle configurazioni più diffuse in abito industriale.

Grandezze cuscinetto	Simbolo	Valore
Raggio albero	$r [m]$	0.241
Raggio cuscinetto	$R [m]$	0.24125
Precarico	m_p	0.5
Viscosità dinamica	$\mu [kg / (m \cdot s)]$	0.02593
Velocità di rotazione	$\Omega [Hz]$	50
Offset	$offset$	0.5
Lunghezza cuscinetto	$L_z [m]$	0.246
Tipologia		LBP
Posizione angolare <i>pivot</i>	φ_{pad}	60°
Carico statico	$W_0 [N]$	190000
Numero di pattini	N_{pad}	5

Tabella 2: grandezze caratteristiche del cuscinetto in esame

La dinamica di un TPJB formalmente è governata dal seguente set di $N_{pad} + 2$ equazioni differenziali del secondo ordine implicite:

$$\begin{cases} M_{albero} \ddot{x} = -F_{oil,x}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \alpha, \dot{\alpha}, \mu, \Omega, t) + R_x(t) \\ M_{albero} \ddot{y} = -F_{oil,y}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \alpha, \dot{\alpha}, \mu, \Omega, t) + R_y(t) \\ J_{pad,1} \ddot{\alpha}_1 = M_{pad,1}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \alpha_1, \dot{\alpha}_1, \mu, \Omega, t) \\ \vdots \\ J_{pad,N_{pad}} \ddot{\alpha}_{N_{pad}} = M_{N_{pad}}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \alpha_{N_{pad}}, \dot{\alpha}_{N_{pad}}, \mu, \Omega, t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Dove le prime due equazioni rappresentano l'equilibrio dinamico lungo le direzioni orizzontali e verticali, mentre le rimanenti mostrano l'equilibrio sulla rotazione per ogni singolo pattino. I coefficienti di tali equazioni sono poi funzione non lineare tramite l'equazione di Reynolds delle incognite del problema, risulta evidente come l'integrazione nel tempo del modello completo sia un processo estremamente oneroso dal punto di vista computazionale e di complessa implementazione.

Per questo motivo si preferisce linearizzare il sistema attorno alla sua posizione di equilibrio statico, trovando i coefficienti di rigidezza e smorzamento del campo di forze linearizzato.

3.3.1 Linearizzazione del campo di forze del film d'olio

Una valutazione completa del legame tra le forze del film d'olio e gli spostamenti per il modello linearizzato, deve tener conto di :

$$\begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta M_i \\ \Delta F_{P,i} \\ \Delta F_{R,i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\alpha} & K_{xP} & K_{xR} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\alpha} & K_{yP} & K_{yR} \\ K_{\alpha x} & K_{\alpha y} & K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha P} & K_{\alpha R} \\ K_{Px} & K_{Py} & K_{P\alpha} & K_{PP} & K_{PR} \\ K_{Rx} & K_{Ry} & K_{R\alpha} & K_{RP} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \alpha_i \\ \Delta P_i \\ \Delta R_i \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Quindi si considerano al fine del calcolo delle forze del film d'olio gli spostamenti dell'albero, gli spostamenti angolari dei pattini, la deformazione del *pivot* ΔP_i e la variazione del raggio del *pad* ΔR_i .

Come si può notare una formulazione così precisa porta ad alcune difficoltà nel calcolare tutti questi coefficienti (a cui andranno poi aggiunti in maniera simile i coefficienti di smorzamento).

Per questo motivo di solito si preferisce diminuire i gradi di libertà del sistema: ovvero trascurando le inerzie dei pattini e le deformabilità dei *pivot* è possibile passare da $2+3 \cdot N_{pad}$ gradi di libertà a solo 2 (gli spostamenti dell'albero lungo le due direzioni del piano).

Il primo contributo di una certa rilevanza allo stato dell'arte riguardante la ricerca di tali coefficienti fu dato nel 1964 da Lund ([30],[31]), che propose il cosiddetto "metodo di assemblaggio di Lund": esso si basa sul considerare ogni *pad* come un arco di un cuscinetto a lobi fissi e tramite la somma degli effetti del singolo pattino (calcolati tramite metodi numerici) in un differente sistema di riferimento, si perviene alla rigidezza e allo smorzamento del film d'olio.

Questo metodo è concettualmente interessante, tuttavia pone alcune grosse limitazioni:

- il carico deve essere verticale e il cuscinetto simmetrico rispetto ad esso;
- la forzante deve essere sincrona con la velocità di rotazione dell'albero (anche se si può approssimare con forzanti sub-sincrone);
- l'inerzia del *pad* deve essere trascurabile: questo permette di poter trascurare gli effetti della rotazione del *pad* attorno alla posizione di equilibrio;
- in uscita si hanno solo i coefficienti globali del film d'olio quindi non si vede il contributo del singolo pattino, inoltre i coefficienti misti $K_{xy}, K_{yx}, R_{xy}, R_{yx}$ sono posti uguali a zero, ipotesi non valida in caso di carichi non simmetrici.

Successivi progressi vennero fatti verso la fine degli anni '70 da Nicholas, Gunther ed Allaire [32], che tramite il metodo di assemblaggio svilupparono alcune tabelle in funzione di tipologia di cuscinetto (LOP, LBP), rapporto caratteristico (il rapporto tra lunghezza e diametro del cuscinetto) e carico statico dove si mostrava la dipendenza dei coefficienti adimensionalizzati in funzione del numero di Sommerfeld. In seguito Someya [33], fece diverse prove numeriche per varie tipologie di cuscinetti utilizzando un modello a viscosità costante e comparando i dati con delle prove sperimentali.

Nel corso degli anni grazie alla maggior potenza di calcolo disponibile fu possibile includere gli effetti della rigidezza del *pivot* e gli effetti termici e di turbolenza ([34],[35]), tuttavia queste analisi sono estremamente complesse da implementare.

In questa sede si è scelto di linearizzare il campo di forze del film d'olio tramite lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine:

$$\begin{aligned}
 F_{olio,x} &\approx F_{olio,x,0} + \left. \frac{\partial F_{olio,x}}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial F_{olio,x}}{\partial y} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} (y-y_0) + \dots \\
 F_{olio,y} &\approx F_{olio,y,0} + \left. \frac{\partial F_{olio,y}}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial F_{olio,y}}{\partial y} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} (y-y_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove i coefficienti del sistema linearizzato sono:

$$\begin{cases}
 K_{xx} = \left. \frac{\partial F_{olio,x}}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \\
 K_{xy} = \left. \frac{\partial F_{olio,x}}{\partial y} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \\
 K_{yx} = \left. \frac{\partial F_{olio,y}}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \\
 K_{yy} = \left. \frac{\partial F_{olio,y}}{\partial y} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0}
 \end{cases} \tag{3.6}$$

Siccome la forza del film d'olio non è esplicitabile in una forma chiusa analitica, per calcolare i coefficienti con la (3.6) bisogna approssimare la derivata con le differenze finite dove i termini Δx Δy sono le piccole perturbazioni attorno alla posizione di equilibrio statico:

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= \frac{F_{olio,x}(x_0 + \Delta x, y_0) - F_{olio,x}(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
 K_{xy} &= \frac{F_{olio,x}(x_0, y_0 + \Delta y) - F_{olio,x}(x_0, y_0)}{\Delta y}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Una cosa fondamentale da considerare è che le equazioni (3.6) e (3.7) sono valide per un cuscinetto a pattini fissi; in un TPJB bisogna considerare pure il contributo della rotazione del pattino, bisogna quindi ogni volta che si perturba l'equilibrio statico trovare le inclinazioni dei *pad* che garantiscono che il sistema di forze sull'albero e i momenti sui pattini siano equilibrati, e in seguito calcolare la forza del film d'olio con la nuova posizione dell'albero e la posizione dei *pad* in grado di equilibrarla.

Quindi la (3.7), diventa:

$$K_{xx} = \frac{F_{olio,x}(x_0 + \Delta x, y_0, \alpha_{new}) - F_{olio,x}(x_0, y_0, \alpha_0)}{\Delta x}$$

$$K_{xy} = \frac{F_{olio,x}(x_0, y_0 + \Delta y, \alpha_{new}) - F_{olio,x}(x_0, y_0, \alpha_0)}{\Delta y}$$
(3.8)

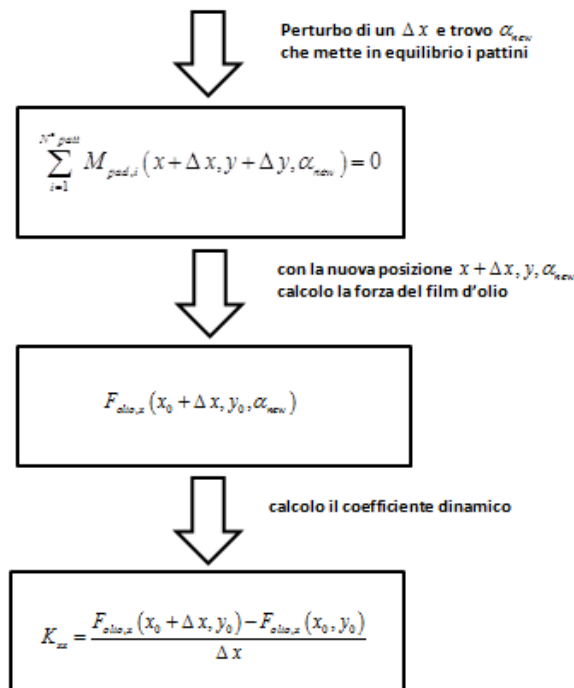


Figura 3-16: schema per il calcolo dei coefficienti di rigidezza

Il vantaggio di questo metodo è che permette di tener conto dei termini misti e dei coefficienti agenti sul singolo pattino. Teoricamente i coefficienti sono dipendenti dalla direzione della perturbazione (ovvero il meato non è rigido in maniera isotropa), perciò si potrebbero imporre delle perturbazioni in varie direzioni e applicare il metodo visto sopra trovando i coefficienti tramite una minimizzazione ai minimi quadrati, ovvero trovare un coefficiente medio che approssima il diverso comportamento del meato in funzione della direzione, tuttavia la differenza con l'utilizzare una singola perturbazione per asse sono molto basse (inferiori al punto percentuale) a fronte di un notevole incremento dei tempi di calcolo. In tabella sono riportati i coefficienti per un cuscinetto LBP a 5 pattini con carico puramente verticale.

Coefficienti di rigidezza $[10^9 N/m]$				
	K_{xx}	K_{xy}	K_{yx}	K_{yy}
pad_1	2.4465	-3.3313	-3.3674	4.5851
pad_2	3.9344	1.3020	1.2784	0.4230
pad_3	0	0	-0.0188	3.3345
pad_4	3.9464	-1.259	-1.282	0.4090
pad_5	2.4112	3.3548	3.3187	4.6174
<i>Globali</i>	12.739	0.00067	-0.00007	13.369

Tabella 3: coefficienti di rigidezza per un numero di Sommerfeld di 0.7542

Come si può vedere in Tabella 3, i coefficienti misti globali non sono effettivamente nulli, ma sono molto più piccoli di quelli diretti, a dimostrazione che gli spostamenti dell'albero lungo una direzione sono poco accoppiati con l'altra, tale caratteristica garantisce una grande stabilità al sistema poiché sono i termini misti che possono causare alcune instabilità del film d'olio come *l'oil whip*.

Tuttavia come si vede dalla tabella è la somma globale dei termini misti che è trascurabile, ma il contributo dei termini misti può non essere trascurabile localmente sul pattino, fatto che avrà grossa importanza nella scrittura della matrice degli ingressi $[B]$. Questo sta a significare che i termini misti che accoppiano le due dinamiche non hanno influenza per la dinamica del sistema non controllato, ma possono averla per il sistema controllato.

I coefficienti misti locali sono nulli solo nel terzo pattino (la numerazione dei pattini è quella di Figura 3-15), che sarebbe quello in alto in posizione puramente verticale; infatti come è facilmente dimostrabile solo in caso di

perfetto orientamento lungo uno degli assi è possibile trascurare questi contributi che accoppiano i moti nelle varie direzioni.

Per il calcolo dei coefficienti di smorzamento dinamico si procede in modo analogo a quanto mostrato per il calcolo dei coefficienti di rigidità, soltanto che, poiché la forza generata da uno smorzatore è proporzionale alla velocità con la quale si muove il rotore occorre imporre delle perturbazioni sulle velocità e non sugli spostamenti.

Per determinare i valori dei coefficienti dinamici di smorzamento occorre quindi valutare un problema tempo dipendente e non più statico, poiché si deve valutare la risposta al variare della velocità con cui si sposta il centro del rotore che varia in funzione del tempo.

In maniera simile vengono calcolati i coefficienti di smorzamento, imponendo al posto di delle perturbazioni della posizione di equilibrio statico delle variazioni di velocità.

$$\begin{aligned} R_{xx} &= \frac{F_{olio,x}(x_0, y_0, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}) - F_{olio,x}(x_0, y_0, 0, 0)}{\Delta x} \\ R_{xy} &= \frac{F_{olio,x}(x_0, y_0, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}) - F_{olio,x}(x_0, y_0, 0, 0)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il sistema linearizzato a questo punto può essere quindi riscritto nel seguente modo, dove per comodità di scrittura con x e y si intendono gli spostamenti orizzontali e verticali a partire dalla posizione di equilibrio statico:

$$\begin{cases} M \ddot{x} + R_{xx} \dot{x} + R_{xy} \dot{y} + K_{xx} x + K_{xy} y = R_x(t) \\ M \ddot{y} + R_{yy} \dot{y} + R_{yx} \dot{x} + K_{yy} y + K_{yx} x = R_y(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Con $R_x(t), R_y(t)$ si intende la parte dinamica della forzante ovvero privata della parte statica la quale viene compensata dalla posizione di equilibrio.

In Figura 3-17 si è riportata l'orbita ottenuta forzando in sistema con una forzante rappresentante uno squilibrio rotante come può esserlo uno sbilanciamento. Come si può osservare dopo un breve transitorio il centro dell'albero compie un'orbita quasi circolare, grazie al fatto che il carico sia rotante e costante in modulo e i coefficienti dinamici della (3.10) siano costanti (quindi indipendenti dalla posizione) e simili in modulo.

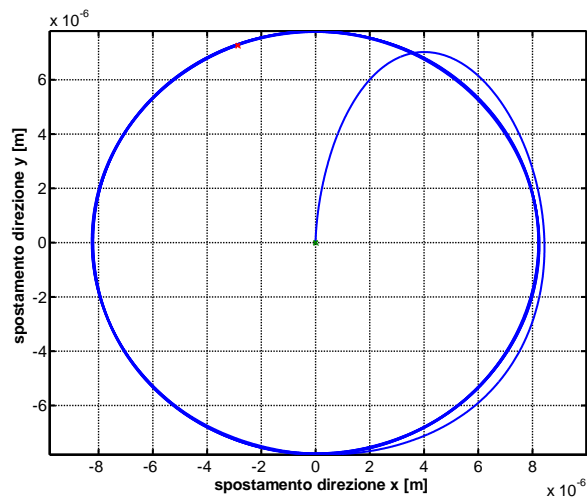


Figura 3-17: orbita del centro a partire dalla posizione di equilibrio statico

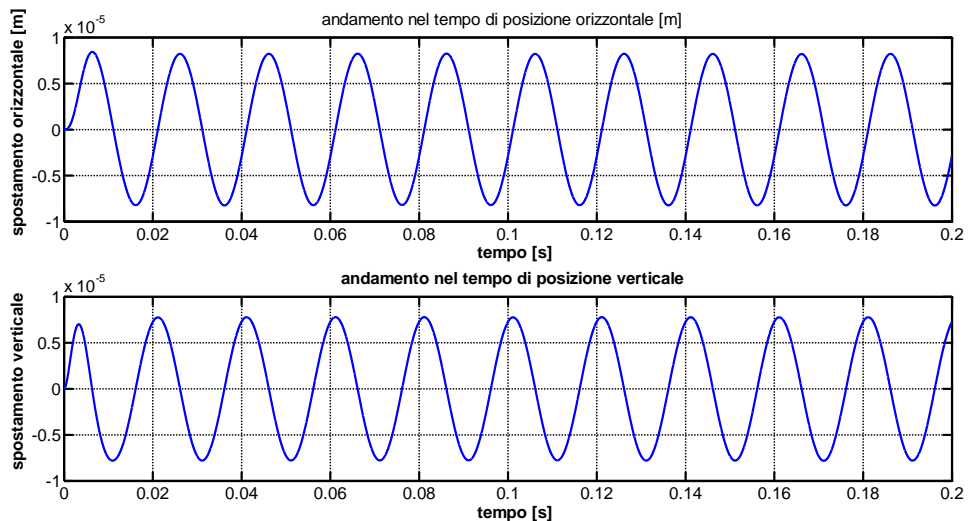


Figura 3-18: andamento nel tempo della posizione del centro

3.3.2 Dipendenza dei coefficienti da posizione e velocità

I coefficienti trovati con la (3.8) sono valide approssimazioni solo nella vicinanza della posizione di equilibrio statico, lontano da essa possono essere significativamente diversi; pertanto per effettuare un'analisi più raffinata si è

deciso di creare una mappa contenente i coefficienti in funzione della posizione del centro dell'albero.

Si è quindi creata una griglia centrata rispetto alla posizione di equilibrio e per ogni nodo si sono calcolati i nuovi coefficienti del sistema linearizzato attorno alla nuova posizione dell'albero.

A partire dalla posizione di un nodo della griglia si è perturbato tale valore e si è trovata la configurazione attorno al quale i pattini sono in equilibrio, successivamente si è calcolata la forza generata attorno a tale posizione e si sono calcolati i coefficienti.

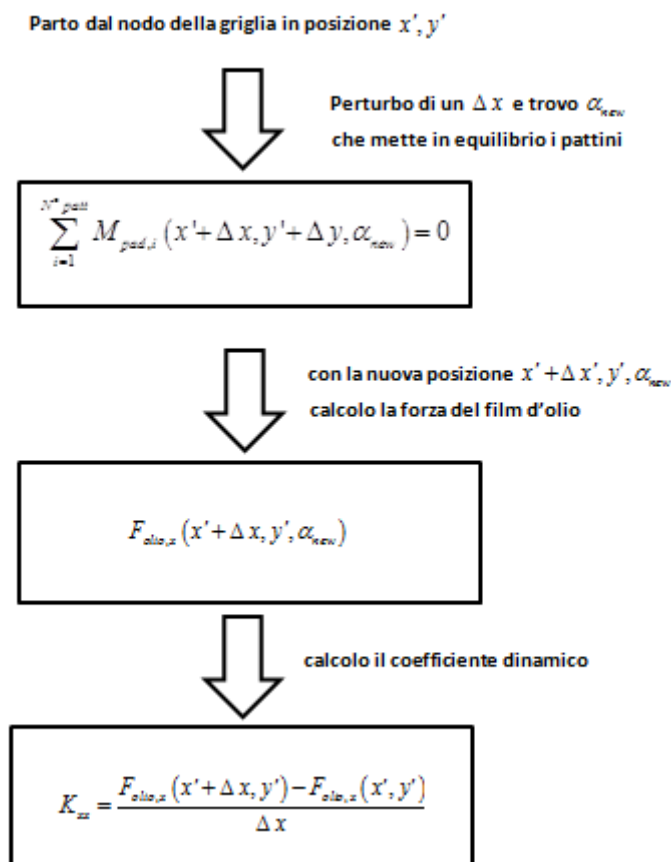


Figura 3-19: procedimento per trovare i coefficienti su un nodo della griglia

Il procedimento visto sopra è estremamente laborioso: per una semplice griglia di dimensioni 3×3 bisogna valutare i coefficienti in ben 9 nodi e di

conseguenza mettere in equilibrio i pattini (e quindi risolvere N_{pad} equazioni con i termini dipendenti da Reynolds) ben 18 volte in quanto ogni nodo va perturbato nelle due direzioni.

Per questo motivo al fine di semplificare i conti si è deciso di non ripetere lo stesso procedimento per gli smorzamenti dato che sono meno influenti rispetto ai termini di rigidità.

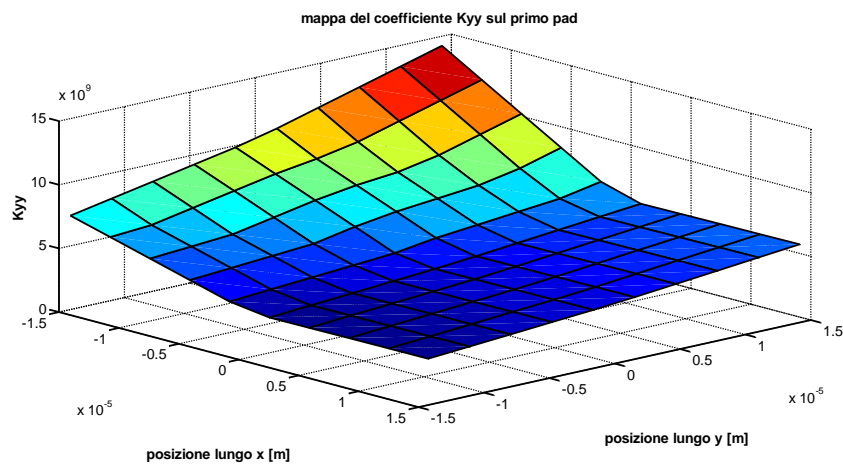


Figura 3-20: mappa del coefficiente K_{yy} sul primo *pad*

Come si può vedere dal grafico sopra, la differenza delle rigidità del film d'olio è diversa a seconda della posizione dell'albero all'interno del meato: il campo di pressioni è più rigido vicino al centro del cuscinetto e meno in lontananza da esso, questo andamento della rigidità del meato è concorde a quanto visto in Figura 2-10 nel capitolo precedente, ovvero la rigidità del film d'olio cresce al diminuire della distanza relativa tra pattino e perno.

Una volta ottenuti i coefficienti per tutti i nodi i termini di rigidità diventano portatori di non linearità e il sistema dinamico lineare (3.10) diviene:

$$\begin{cases} M \ddot{x} + R_{xx} \dot{x} + R_{xy} \dot{y} + K_{xx}(x, y)x + K_{xy}(x, y)y = R_x(t) \\ M \ddot{y} + R_{yy} \dot{y} + R_{yx} \dot{x} + K_{yy}(x, y)y + K_{yx}(x, y)x = R_y(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Data la posizione all'istante t i coefficienti vengono calcolati tramite interpolazione lineare rispetto al valore che hanno sui nodi adiacenti, tale operazione viene effettuata $N_{pad} \times 4$ volte per ogni istante durante l'integrazione, si capisce quindi come la scelta di considerare delle rigidezze variabili porti a maggiori tempi di calcolo.

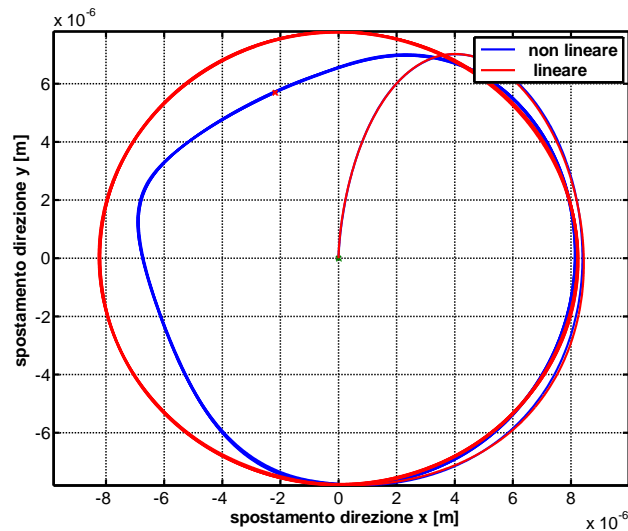


Figura 3-21: orbita con il sistema linearizzato e mappato

Dalla Figura 3-21 si vedono le differenze tra il considerare il sistema come lineare o no: l'effetto della non linearità è più marcato nella parte a sinistra, ovvero nelle vicinanze del centro, dove la rigidezza del campo di forze è maggiore, mentre sul lato destro dove non ci sono grosse differenze nella rigidezza del film d'olio le orbite sono molto vicine.

In realtà i coefficienti dipendono pure dalla velocità di rotazione dell'albero, perciò in maniera simile è possibile mappare i coefficienti pure per diverse velocità di rotazione. Il valore del coefficiente alla singola velocità viene trovato interpolando le velocità intermedie. Tale procedimento è utile soprattutto per le analisi nei transitori, come ad esempio gli avviamenti della macchina, oppure per valutare il comportamento della macchina in condizioni diverse da quelle di regime come ad esempio durante le velocità critiche.

La relazione tra i coefficienti di rigidezza e la velocità angolare dell'albero per il caso considerato è di tipo lineare come si può vedere dalla Figura 3-22. Tale relazione tuttavia non è di carattere generale ma valida per questo caso solo poiché variando la velocità nel *range* considerato, ci si trova nella zona lineare della dipendenza tra coefficienti e numero di Sommerfeld.

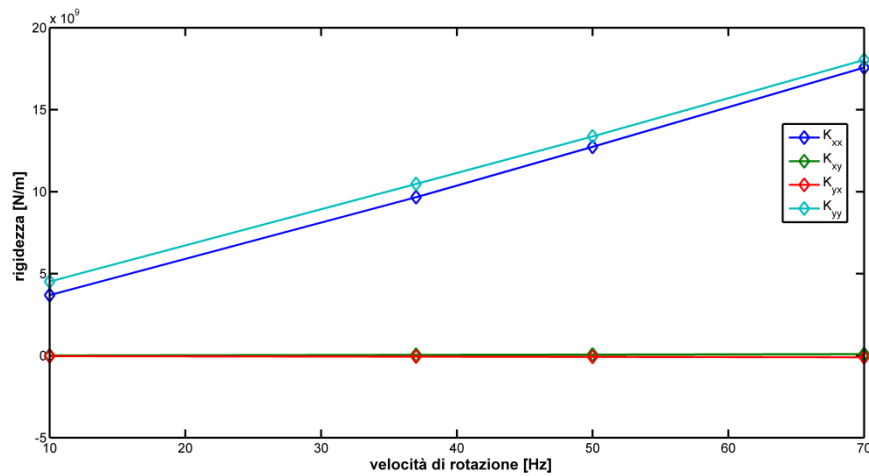


Figura 3-22: legame tra rigidezza e velocità

3.4 Sintesi del controllore

Come si è visto in questo capitolo e dall'analisi semplificata in 2.2, un TPJB è un sistema non lineare e molto complesso, pertanto alcuni effetti sono stati trascurati. Infatti per la scrittura del sistema sono state fatte le seguenti ipotesi semplificative:

- temperatura e viscosità dell'olio costanti (modello isoviscoso);
- soluzione numerica approssimata dell'equazione di Reynolds;
- assenza di turbolenze nel meato;
- linearizzazione del sistema attorno alla sua posizione di equilibrio;
- aver trascurato l'inerzia del *pad*;
- non considerata la dinamica del rotore (ingobbamenti, squilibri, cricche, risonanze ecc.);
- aver trascurato la deformabilità del *pivot*;
- non considerata la dipendenza dei coefficienti del film d'olio dalla posizione dell'albero e dalla velocità del rotore, effetto che può essere modellato tramite la mappatura dei coefficienti;
- incertezza sui valori dei coefficienti della (3.10).

Il sistema nominale che si ha a disposizione, quindi può essere molto lontano dalla realtà, perciò un controllore basato sul modello, come ad esempio un controllo ottimo, potrebbe portare a risultati non accettabili in un caso reale, pertanto come visto nel capitolo precedente si è valutato un controllo robusto come lo *sliding mode*.

La rappresentazione del sistema in forma di stato è la seguente:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x} + [\mathbf{B}]\mathbf{u}_{\text{pad}}$$

Con $[\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice di stato e $[\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times N_{\text{pad}}}$ matrice degli ingressi del sistema e $\mathbf{x}(t)$ vettore di stato:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -R_{yy,tot}/M & -K_{yy,tot}/M & -R_{yx,tot}/M & -K_{yx,tot}/M \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{xy,tot}/M & -K_{xy,tot}/M & -R_{xx,tot}/M & -K_{xx,tot}/M \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N_{\text{pad}}} \begin{bmatrix} -K_{yy,i} \cos(\varphi_{\text{pivot},i}) - K_{yx,i} \sin(\varphi_{\text{pivot},i}), \dots, -K_{yy,N_{\text{pad}}} \cos(\varphi_{\text{pivot},N_{\text{pad}}}) - K_{yx,i} \sin(\varphi_{\text{pivot},N_{\text{pad}}}) \\ 0, \dots, 0 \\ -K_{xy,i} \cos(\varphi_{\text{pivot},i}) - K_{xx,i} \sin(\varphi_{\text{pivot},i}), \dots, -K_{xy,N_{\text{pad}}} \cos(\varphi_{\text{pivot},N_{\text{pad}}}) - K_{xx,i} \sin(\varphi_{\text{pivot},N_{\text{pad}}}) \\ 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Come si può vedere i coefficienti misti locali entrano in gioco in maniera non trascurabile per mezzo della matrice degli ingressi $[\mathbf{B}]$, i cui termini dipendono dal loro posizionamento lungo la direzione circonferenziale del pattino tramite l'angolo φ_{pivot} , l'unico caso in cui il loro contributo è trascurabile è il TPJB a 4 pattini LOP.

Come è mostrato Allegato C, per applicare lo *sliding mode* tramite l'approccio con diagonalizzazione in maniera da ottenere un unico controllo equivalente, occorre che il risultato del prodotto $[\mathbf{S}][\mathbf{B}] = [\mathbf{\Lambda}]$ sia una matrice diagonale a rango pieno. Purtroppo per il sistema in questione non è stato possibile scegliere una matrice $[\mathbf{S}]$ che rispetti tale condizione, a causa della ridondanza degli attuatori e del loro mutuo accoppiamento causato dai termini misti presenti nella matrice $[\mathbf{B}]$.

Si è quindi scelto di considerare N_{pad} sottosistemi a singolo ingresso, dove gli effetti degli altri attuatori sul sistema sono visti come disturbi agenti su quel sottosistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i u_i(t) + \text{disturbi}(\mathbf{u}) \quad (3.14)$$

Dove con \mathbf{b}_i si è indicata la colonna i -esima della matrice $[\mathbf{B}]$, rappresentante l'ingresso del singolo attuatore.

Ai fini del controllo si sono separate la dinamica verticale e orizzontale del sistema (come è stato fatto negli studi mostrati in bibliografia), imponendo che un singolo pattino sia dedicato al controllo di una sola dinamica. Ad esempio per un cuscinetto a 5 pattini LBP, 3 *pad* (i due in basso e quello in alto) controllano il movimento verticale del sistema mentre i due ai lati sono deputati a quello orizzontale. Tale scelta è presa in base all'inclinazione del pattino: infatti i pattini avente l'asse diretto prevalentemente lungo la direzione y ovviamente avranno maggiore influenza nel controllare questa dinamica.

La superficie di *sliding* è stata presa lineare ed in maniera tale da disaccoppiare i moti nelle due direzioni, i coefficienti sono stati decisi dopo varie prove sperimentali, inoltre per i sottosistemi destinati a controllare la stessa dinamica per comodità si è scelta la stessa superficie di scivolamento:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{x,vel} & s_{x,pos} \\ s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{x,vel} & s_{x,pos} \\ s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{s} = [\mathbf{S}]\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{x,vel} & s_{x,pos} \\ s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{x,vel} & s_{x,pos} \\ s_{y,vel} & s_{y,pos} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \\ \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$$

Al fine di ridurre il problema del *chattering* si è sostituita la funzione segno con una tangente iperbolica.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{pad} &= \left(u_{pad,1}, \dots, u_{pad,i}, \dots, u_{pad,N_{pad}} \right)^T \\ \mathbf{u}_{pad,i} &= -(\mathbf{S}_i \mathbf{b}_i)^{-1} \mathbf{S}_i [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) - K_i \cdot \tanh(s_i) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Con $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_{pad} \times 1}$

3.4.1 Attuatori

Il sistema è attuato tramite degli attuatori piezoelettrici lineari posti dietro il *pivot*, in modo da poterne pilotare la traslazione lungo il suo asse, variando così il gioco radiale nel cuscinetto.

La scelta di questo tipo di attuatori è stata presa per i seguenti motivi:

- gli spostamenti richiesti al pattino sono nell'ordine di grandezza di quelli di un attuatore piezoelettrico, il campo di funzionamento di questi posizionatori varia da grandezze inferiori al nanometro a qualche decimo di millimetro;
- elevata risoluzione;
- elevata dinamica (molto superiore a quella richiesta per questa applicazione ovvero forzanti intorno ai 50 o 100 Hz), è quindi lecito trascurare la dinamica dell'attuatore³;
- il costo relativamente alto dei piezoelettrici e del loro sistema di controllo è giustificato vista l'importanza e la criticità dell'applicazione.
- basso ingombro rispetto alla forza erogata.
- Possibilità di compensare isteresi e non linearità dell'attuatore montandoli controllati come è possibile vedere in Figura 3-24;

³ Quando il valore di tensione in ingresso al piezoelettrico sale esso raggiunge la posizione nominale desiderata in approssimativamente un terzo della sua frequenza propria:

$$T_{\min} \approx \frac{1}{3f_0}$$

Quindi per gli attuatori considerati il tempo di risposta è circa dell'ordine dei microsecondi.

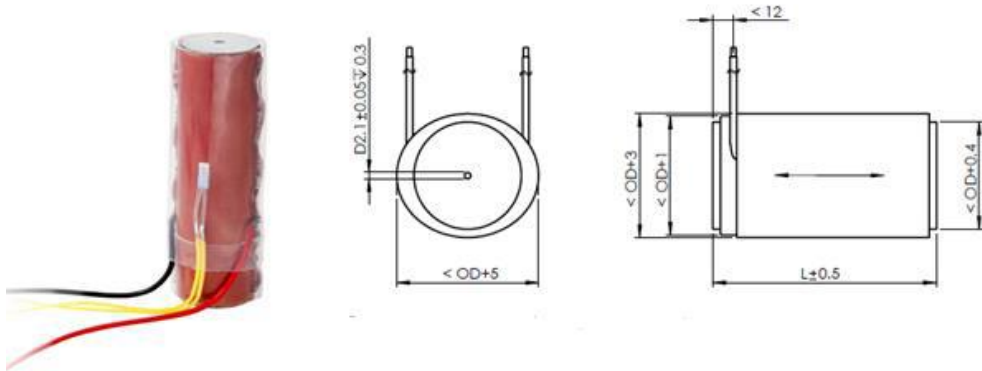


Figura 3-23: immagine e ingombro di un attuatore *stack*

Altre tecnologie come gli attuatori idraulici e quelli elettrici non hanno una dinamica sufficientemente veloce, oppure non sono in grado di posizionare il pattino con la precisione richiesta dal controllore.

Il numero di attuatori varia da due (uno per la dinamica verticale e uno per quella orizzontale) ad uno per pattino; un maggior numero di attuatori sarà causa di minore spostamento dei pattini a parità di condizione di funzionamento e conseguentemente minori forze erogate dagli attuatori.

Lo stato del sistema è stato ipotizzato completamente accessibile, mentre nella realtà le misure vengono effettuate tramite captatori di prossimità alla fine del cuscinetto per misurare la posizione del centro del disco.

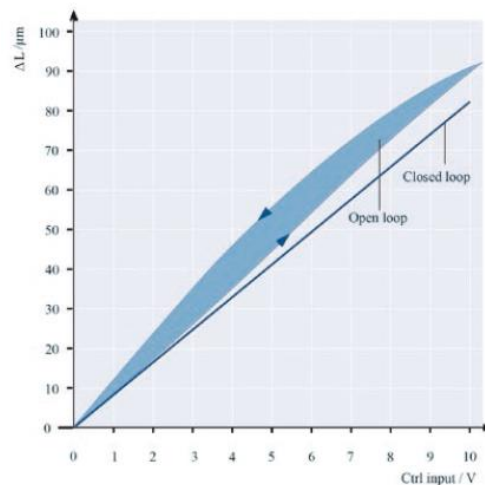


Figura 3-24: legame tra tensione di alimentazione e spostamento per l'attuatore controllato e non

Per comodità le grandezze retroazionate sono direttamente gli spostamenti dei pattini al posto della tensione di alimentazione del piezoelettrico, inoltre si è ipotizzato che l'attuatore passi istantaneamente da un valore di spostamento all'altro. In definitiva si è scelto di controllare in retroazione gli spostamenti dei pattini, lasciando al controllore dell'attuatore la regolazione per erogare lo spostamento richiesto, scelta ammissibile se si verifica che l'attuatore sia in grado di fornire una forza sufficiente nella condizione in cui si ha il massimo di spostamento dell'attuatore.

Gli effetti della dinamica sul film d'olio del pattino che trasla, entrano attraverso i termini di smorzamento locali del pattino e per semplicità sono stati trascurati e compensati dalla robustezza del controllore; un approccio più rigoroso sarebbe stato aggiungere un grado di libertà per pattino per studiarne la sua dinamica.

Un attuatore piezoelettrico è in grado di dare la massima forza quando il suo spostamento è bloccato, ovvero è accoppiato con un sistema dotato di rigidità infinita.

$$F_{\max} \approx k_a \cdot \Delta L \quad (3.17)$$

In una situazione reale tuttavia il piezoelettrico riuscirà ad erogare una forza che dipende dalla rigidità dell'attuatore e del sistema:

$$F_{\max,eff} \approx k_a \cdot \Delta L \left(\frac{k_s}{k_s + k_a} \right) \quad (3.18)$$

Fortunatamente la rigidità del film d'olio è molto maggiore di quella del piezoelettrico permettendo di erogare forze non troppo distanti dalla condizione di attuatore bloccato.

3.5 Risultati numerici

In questa sezione verranno effettuate alcune analisi al fine di verificare la capacità del sistema di riferimento di abbattere le vibrazioni.

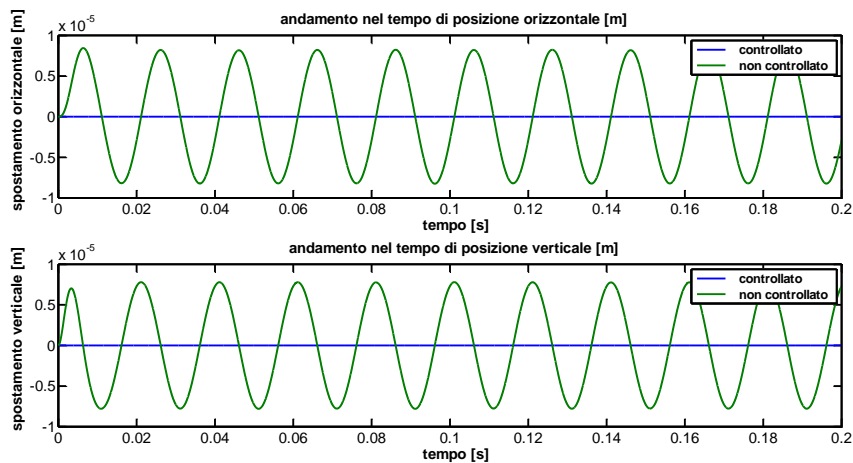
Inizialmente l'accoppiamento verrà sottoposto, ad una forzante rotante della macchina che simula una forzante dinamica di squilibrio.

In seguito si effettuerà una prova per valutare la capacità del sistema di controllo di essere attivato in maniera improvvisa a piacimento o in particolari condizioni critiche per il sistema.

Infine si è valutato l'effetto del numero dei pattini attuati.

3.5.1 Analisi dello sbilanciamento

Come prima analisi si è verificata la capacità del sistema sotto controllo di rimanere fermo presso il suo punto di equilibrio in presenza di una forzante rotante sincrona con la velocità del pattino che simula uno sbilanciamento sul rotore. La forza sbilanciante è stata presa in maniera tale da creare delle vibrazioni sul centro del supporto di circa una decina di micrometri, valore tipico raggiunto nelle condizioni più critiche.



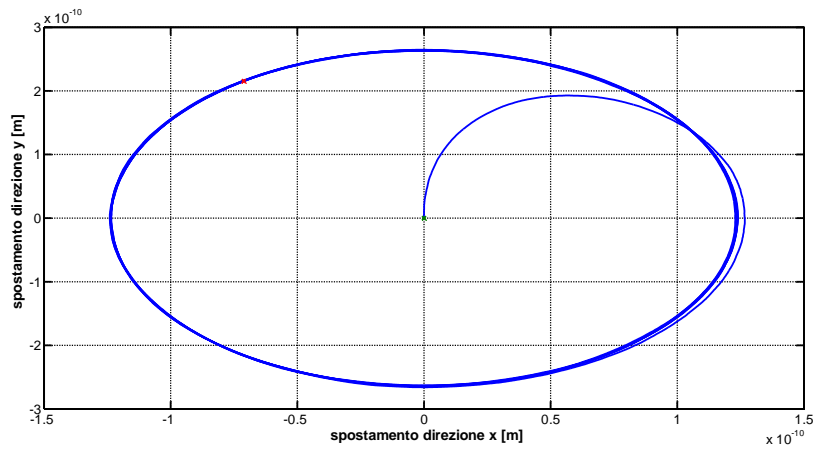


Figura 3-25: orbita del sistema sotto controllo

Come si può osservare il controllore riesce a ridurre le vibrazioni in maniera efficace, mantenendo l'albero fermo presso il centro del cuscinetto, nonostante la presenza dello squilibrio.

In Figura 3-26 sono riportate le azioni di controllo per i vari *pad*: è interessante notare come i pattini posti in direzioni opposte rispetto agli assi *x, y* del cuscinetto (come il primo e il terzo oppure quelli che controllano la dinamica orizzontale), hanno segno opposto: questo vuol dire che per controllare le vibrazioni sull'albero se un pattino deve "spingere" il film d'olio, il suo opposto dovrà "tirare".

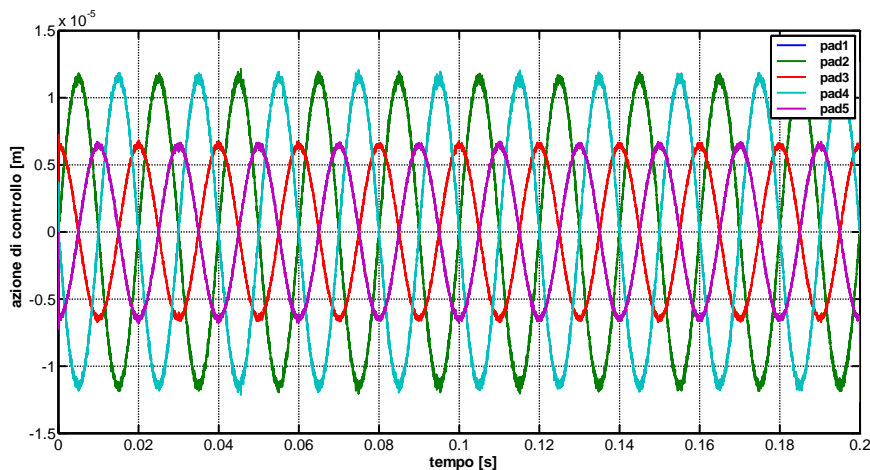


Figura 3-26: azione di controllo complessiva

Per erogare tali spostamenti l'attuatore (o gli attuatori montati in parallelo) dovrà erogare delle forze in grado di contrastare il carico rotante:

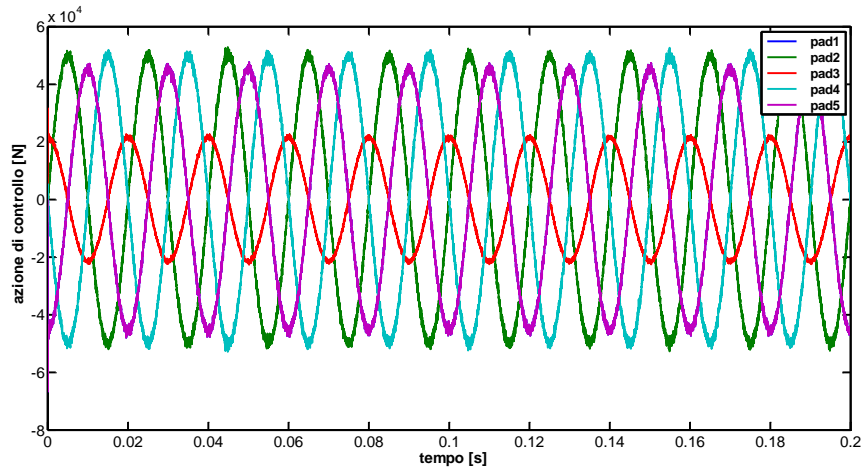


Figura 3-27: forze richieste dagli attuatori

Vista la presenza di azioni di trazione gli attuatori andranno necessariamente precaricati.

Per il sistema la componente di raggiungibilità del controllore è più piccola di quella di *chattering*, questo avviene poiché il sistema di controllo viene attivato quando il sistema si trova sulla superficie di *sliding*, pertanto non serve una grossa componente basata sul modello che lo porti sopra di esso.

Inoltre come si è visto a causa della ridondanza e del mutuo accoppiamento delle dinamiche orizzontali e verticali la sola presenza della componente di raggiungibilità non è sufficiente ad annullare la dinamica del sistema, in Figura 3-28 è mostrata la risposta del sistema controllato con solo la componente *model based*: come si può osservare, per le ragioni sopra esposte le vibrazioni dell'albero vengono ridotte notevolmente, ma non annullate.

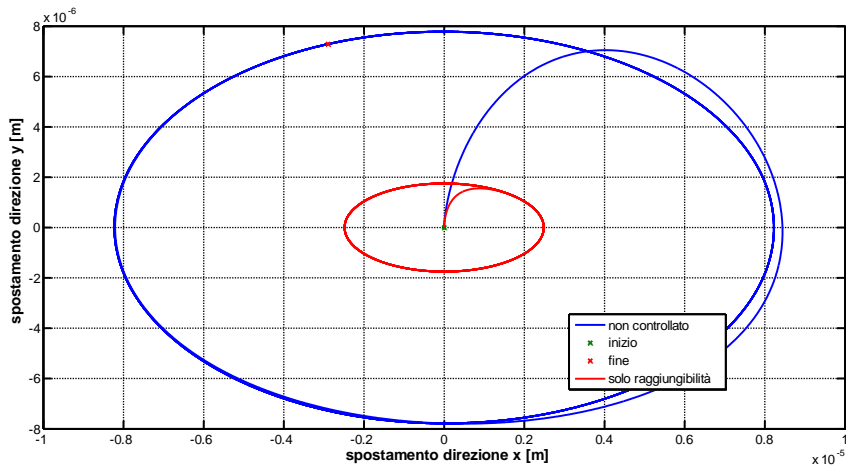


Figura 3-28: orbita del sistema non controllato e controllato con la sola componente di raggiungibilità

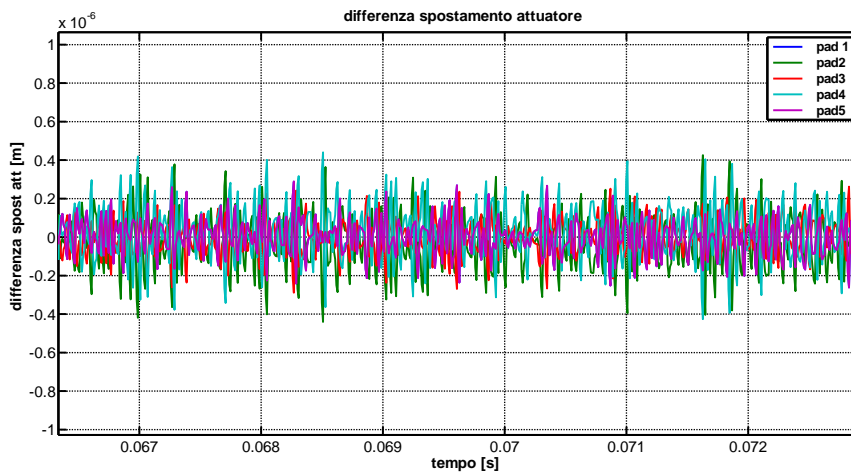


Figura 3-29: differenza istantanea Δu dello spostamento dell'attuatore per un intervallo di tempo

In Figura 3-29 è riportata la differenza istantanea delle variazioni di spostamento richieste dal controllore, tale valore istante per istante è superiore al minimo spostamento erogabile dall'attuatore ovvero la sua risoluzione che per i nanoposizionatori piezoelettrici può scendere sotto il nanometro.

3.5.2 Inserimento improvviso del controllore

Un TPJB attivo può essere controllato in ogni istante, oppure grazie alle intrinseche proprietà di stabilità di questa tipologia di cuscinetto, solo in alcune particolari situazioni critiche per la salute della macchina come ad esempio il passaggio di risonanze, oppure nel caso in cui per qualche motivo il centro del rotore si venga a trovare molto lontano dalla posizione di equilibrio.

Si è quindi valutata la capacità del controllore di inserirsi e staccarsi in ogni momento al fine di poter azionare il controllo nelle situazioni più critiche.

Per la simulazione è stato considerato il sistema non lineare (3.11), dove istante per istante vengono valutati i coefficienti del film d'olio in funzione della posizione del centro dell'albero, questo poiché il controllo viene inserito quando il sistema può venirsi a trovare lontano dalla posizione di equilibrio statico attorno alla quale sono stati calcolati tali coefficienti.

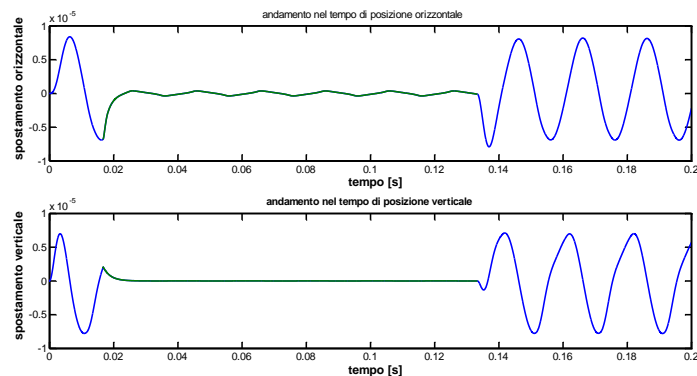


Figura 3-30:andamento del tempo: in verde il sistema sotto controllo, in blu il sistema non controllato

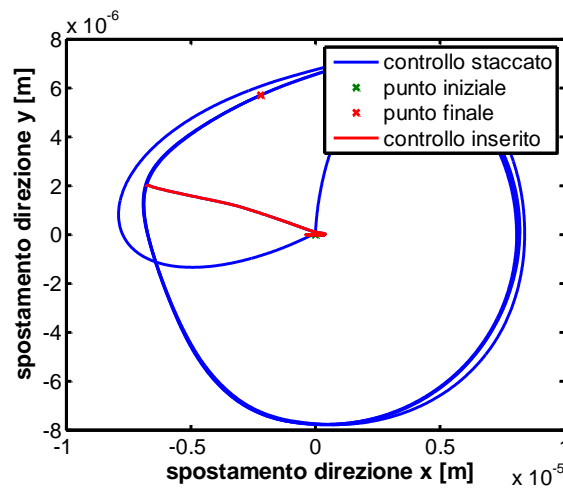


Figura 3-31: orbite attorno alla posizione di equilibrio per la simulazione

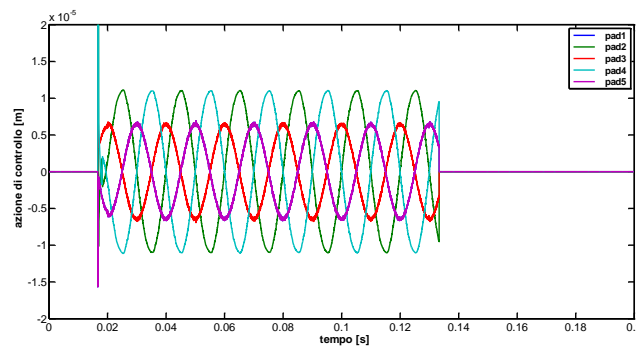


Figura 3-32: azione di controllo per l'inserimento brusco

Come si vede in Figura 3-32, l'azione di controllo è alta nei primi istanti a causa della componente di raggiungimento del controllo che forza il sistema sulla superficie di *sliding* e al fatto che in quell'istante il sistema si trova molto lontano dalla superficie e perciò la parte discontinua reagirà in maniera appropriata per cercare di riportare il sistema nella zona di scivolamento. Passato questo transitorio iniziale, come si può osservare dal diagramma di fase, il sistema si trova nell'intorno di tale superficie e perciò la parte di *chattering* consente al sistema di rimanere su di essa nonostante i disturbi (effetti degli altri attuatori e lo squilibrio sul rotore) e gli errori di modellazione (non linearità dei coefficienti). È interessante notare come per l'impossibilità di creare un unico controllo equivalente l'effetto dell'attuatore di un sottosistema SISO è visto come disturbo dagli altri sottosistemi.

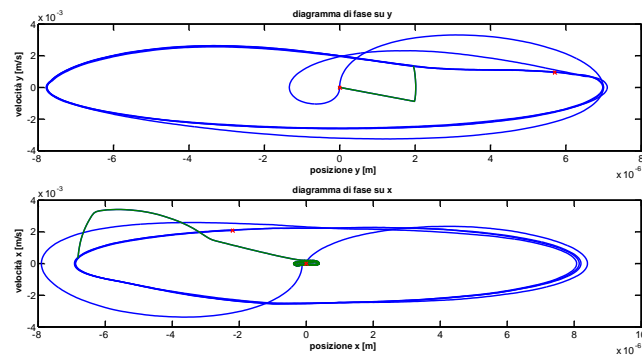


Figura 3-33: diagramma di fase

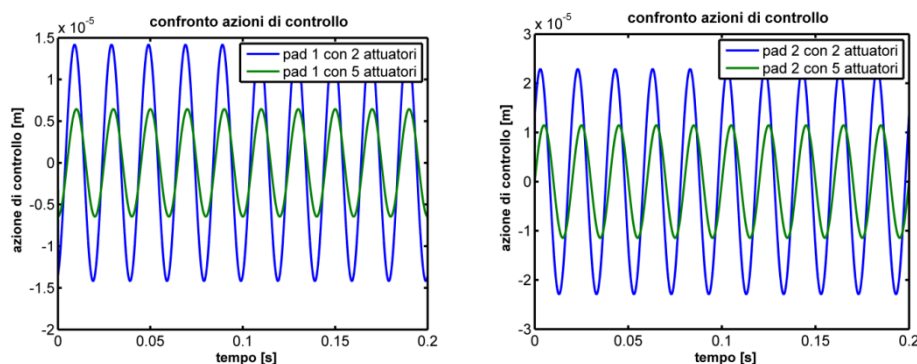
3.5.3 Effetti del numero di pattini attuati

Una delle scelte più importanti che deve essere presa per la progettazione del pattino attivo è la scelta del numero di pattini attuati: tale scelta può ricadere da un minimo di un attuatore per dinamica fino ad uno per pattino.

Ovviamente al crescere del numero di pattini attuati salirà il costo del cuscinetto e scenderanno gli spostamenti e le forze richieste dagli attuatori.

In Figura 3-34 è riportata l'azione di controllo per un controllo in vibrazione del centro dell'albero nel caso di due e cinque attuatori: come si può vedere a parità di parametri del controllore, una ridondanza di attuatori permette di poter ridurre notevolmente gli spostamenti dei pattini necessari per il controllo, con il grande vantaggio di poter controllare il sistema anche in situazioni particolarmente critiche dove sono richieste maggiori azioni di controllo, oppure nel controllo di macchine di grossa taglia dove le forze in gioco sono elevate, senza correre il rischio di mandare in saturazione l'attuatore.

Inoltre bassi spostamenti dei pattini permettono di mantenere alta la distanza relativa tra albero e cuscinetto limitando ulteriormente il rischio di contatti.

Figura 3-34: confronto tra le azioni di controllo per il primo *pad* (a destra) e il secondo se si attivano due o tutti i pattini

Capitolo 4

Dinamica del rotore con cuscinetti attivi

L'accoppiamento tra cuscinetto e albero visto nei capitoli precedenti era basato solo sullo studio degli effetti fluidodinamici del film d'olio, senza considerare gli effetti della flessibilità dell'albero. Tale sistema era in grado di modellare solo il comportamento del film d'olio e di una massa concentrata rappresentante l'albero a 2 gradi di libertà, non il sistema completo composto da cuscinetto e rotore dotato di una propria dinamica.

Nella realtà si tende a costruire rotor flessibili con grandi lunghezze e piccole sezioni al fine di ridurre i costi e gli ingombri, oltre a progettarli in maniera da avere una velocità di funzionamento elevata e sopra la prima velocità critica (macchine super-critiche) in maniera da avere un punto di lavoro a regime in zona sismografica oltre ad una minore trasmissibilità delle forze sui supporti.

Gli effetti della flessibilità del rotore portano alla presenza di velocità critiche flessionali⁴ che rappresentano quelle velocità dove si ha un'amplificazione delle vibrazioni, pertanto per lo studio completo del TPJB attivo occorre studiare gli effetti di queste velocità e quelli dei vari modi di vibrare sull'intera linea d'assi. Esistono vari approcci per modellare il rotore:

- Tramite un modello analitico semplificato a parametri concentrati (rotore di Jeffcott), tale formulazione è concettualmente semplice ma non è in grado ad esempio di mostrare gli effetti dei vari modi di vibrare;
- Scrittura analitica delle equazioni di moto tramite la teoria dei continui: il metodo è preciso ma di difficile implementazione, inoltre l'equazione di moto è valida solo per quella particolare configurazione del sistema e dei carichi ad esso applicati;
- Modellizzando il sistema continuo tramite elementi finiti di tipo trave: in questo modo si avrà una soluzione approssimata;

⁴ Nonostante sembrino sinonimi i concetti di velocità critica flessionale e di risonanza sono leggermente diversi: per l'API una risonanza è la risposta del sistema a una velocità che coincide con una frequenza propria del sistema (non smorzato), invece una velocità critica corrisponde alla frequenza del picco della risposta in frequenza del sistema. Quindi per bassi valori di smorzamento la differenza tra le due è bassa, per rotor molto smorzati ad una risonanza può non corrispondere una velocità critica.

Si è scelto di modellare il rotore tramite il FEM grazie alla relativa semplicità del metodo e alla buona approssimazione della soluzione trovata.

4.1 Modello FEM

Il metodo degli elementi finiti è uno dei metodi numerici più diffusi nel campo dell'analisi numerica applicata, il suo utilizzo spazia dal calcolo strutturale statico e dinamico a problemi di fluidodinamica e di trasmissione del calore. Esso si basa sul discretizzare il dominio continuo di un sistema fisico (nel caso in questione il rotore) avente infiniti gradi di libertà tramite l'assemblaggio di un numero finito di elementi.

L'approccio agli elementi finiti è di tipo lagrangiano: si scelgono come coordinate lagrangiane gli spostamenti dei nodi (ovvero i punti di estremità di un elemento finito) e in funzione di tali spostamenti è possibile tramite le funzioni di forma conoscere per interpolazione il valore dello spostamento all'interno dell'elemento.

Per la determinazione delle equazioni di moto del sistema è possibile usare l'equazione di Lagrange espressa in funzione delle coordinate indipendenti ai nodi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\delta^* W}{\delta^* x_k} \quad (4.1)$$

Che porta alla scrittura dell'equazione di moto del sistema nella forma canonica:

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{x}} + ([\mathbf{R}] + \Omega \cdot [\mathbf{G}]) \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}] \mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (4.2)$$

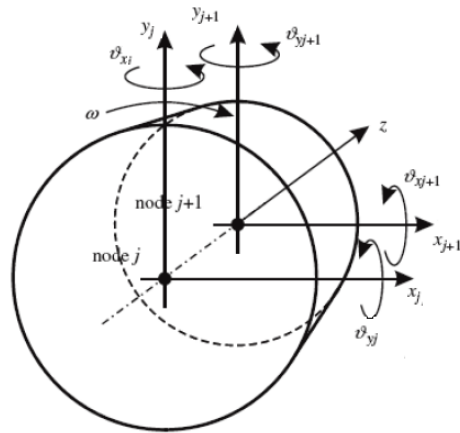


Figura 4-1: elemento finito di tipo *beam* e gradi di libertà

Formalmente un elemento finito di tipo *beam* avrà 6 gradi di libertà per nodo, tuttavia nella trattazione non verranno considerati gli spostamenti assiali e torsionali, in quanto queste vibrazioni sono in genere disaccoppiate da quelle flessionali e di scarso interesse per lo studio del cuscinetto portante in questione [40].

Di conseguenza per ogni nodo si avranno 4 gradi di libertà mentre il generico elemento finito avrà così 8 gradi di libertà, rappresentati gli spostamenti e le rotazioni alle due estremità dei nodi.

$$\underline{\mathbf{X}}_k = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{X}}_{k,sx} \\ \underline{\mathbf{X}}_{k,dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{sx} \\ \theta_{y,sx} \\ x_{sx} \\ \theta_{x,sx} \\ y_{dx} \\ \theta_{y,dx} \\ x_{dx} \\ \theta_{x,dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{y}_{sx} \\ \underline{x}_{sx} \\ \underline{y}_{dx} \\ \underline{x}_{dx} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

La matrice di massa del singolo elemento è composta da due contributi: la matrice di massa classica ottenuta dal generico elemento trave senza considerare i contributi assiali e torsionali più il contributo dato dagli effetti secondari dati dall'inerzia.

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_{trave}] + [\mathbf{M}_s] \quad (4.4)$$

$$[\mathbf{M}_{trave}] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L^2 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[\mathbf{M}_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La matrice di rigidezza generica è invece [42]:

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 4(1+a)L & 0 & 0 & 3L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4(1+a)L & -3L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -3L & 4(1+a)L & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & 4(1+a)L \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Dove il termine $a = \frac{12EJ}{GSL^2}$ che rappresenta il coefficiente di taglio: per travi sufficientemente lunghe tale termine può essere trascurato e quindi il termine può essere posto pari a zero.

Infine si riporta la matrice giroscopica che rappresenta l'effetto dell'inflessione dell'albero attorno al proprio asse di rotazione, questa matrice accoppia i moti nelle due direzioni per i modi conici ma non per quelli cilindrici⁵ [45] e come verrà mostrato in seguito modifica le frequenze proprie del sistema in funzione della velocità.

$$[\mathbf{G}] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La matrice di smorzamento strutturale invece viene calcolata tramite il metodo di Rayleigh, ovvero come combinazione lineare delle matrici globali di massa e rigidità strutturale (non avendo ancora considerato i contributi dati dal film d'olio).

$$[\mathbf{R}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \quad (4.9)$$

Le matrici del singolo elemento finito vengono ora assemblate nelle matrici globali di dimensione $4N_{el} \times 4N_{el}$.

⁵ Le vibrazioni sui rotori sono classificabili in due categorie: i moti cilindrici e moti conici: per una trave appoggio-appoggio nei moti cilindrici i punti che hanno ampiezza di vibrazione nulla sono posti sui supporti o all'esterno di esso, mentre nei moti conici sono all'interno di essi [46].

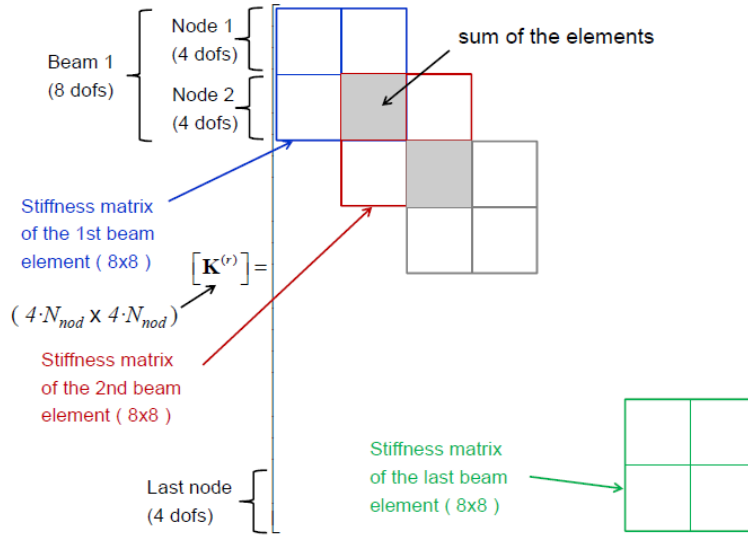


Figura 4-2: assemblaggio della matrice di rigidezza

Il sistema globale sarà quindi espresso dalla seguente equazione di moto:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{x}} + ([\mathbf{R}] + \Omega \cdot [\mathbf{G}])\dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}]\mathbf{x} = \mathbf{F}_{umb}(t) + \mathbf{W} \quad (4.10)$$

Con \mathbf{W} il carico statico e \mathbf{F}_{umb} lo sbilanciamento sull'albero.

Tuttavia il rotore è supportato dai due cuscinetti che realizzano l'accoppiamento tra la fondazione (qui supposta rigida) e l'albero. La forza prodotta dal film d'olio formatosi come visto in precedenza è modellizzata come visto in 3.3, linearizzando il campo di forze non conservativo del meato e ricavando i coefficienti di rigidezza e smorzamento attorno alla posizione di equilibrio statico.

$$[\mathbf{F}_{film,olio}(\Omega)] = - \begin{bmatrix} k_{yy}(\Omega) & k_{yx}(\Omega) & 0 & 0 \\ k_{xy}(\Omega) & k_{xx}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ \theta_y \\ \theta_x \end{pmatrix}_{el} - \begin{bmatrix} r_{yy}(\Omega) & r_{yx}(\Omega) & 0 & 0 \\ r_{xy}(\Omega) & r_{xx}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_x \end{pmatrix}_{el}$$

$$[\mathbf{F}_{film,olio}(\Omega)] = -[\mathbf{K}_{brg}(\Omega)]\mathbf{x}_{el} - [\mathbf{R}_{brg}(\Omega)]\dot{\mathbf{x}}_{el}$$

$$(4.11)$$

Quindi le matrici di rigidità e smorzamento complessive vengono modificate dal contributo del film d'olio e sono formalmente dipendenti dalla velocità della macchina.

Sotto a titolo di esempio è rappresentato l'assemblaggio della matrice di rigidità.

$$[\mathbf{K}(\Omega)] = [\mathbf{K}_{rot}] + [\mathbf{K}_{brg}(\Omega)] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} k_{yy}(\Omega) & k_{yx}(\Omega) & 0 & 0 \\ k_{xy}(\Omega) & k_{xx}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{brg,1} \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} k_{yy}(\Omega) & k_{yx}(\Omega) & 0 & 0 \\ k_{xy}(\Omega) & k_{xx}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{brg,2} \end{array} \right]$$

(4.12)

4.1.1 Modellizzazione della forzante

Nei rotori esistono due tipi principali di vibrazioni: sincrone e sub-sincrone (o di *whirling*): le prime hanno una componente armonica dominante pari o multipla della velocità di rotazione dell'albero e sono causate dalle forzanti esterne agenti sul sistema, le seconde hanno una componente dominante inferiore alla velocità dell'albero e sono causate principalmente dai termini misti del film d'olio [45]. Quindi poiché in un TPJB l'effetto globale di tali coefficienti è trascurabile ne consegue che le vibrazioni di interesse saranno sincrone.

Sul sistema agiscono due tipi di forzanti: la forza peso W (che può essere levata se si considera il sistema attorno alla sua condizione di equilibrio) e la forza variabile nel tempo la quale può essere dovuta a varie cause quali:

- sbilanciamenti;
- ingobbamenti dell'albero;
- disallineamenti del giunto;
- asimmetria assiale;
- ovalizzazione del perno nel cuscinetto;

- presenza di una cricca trasversale.

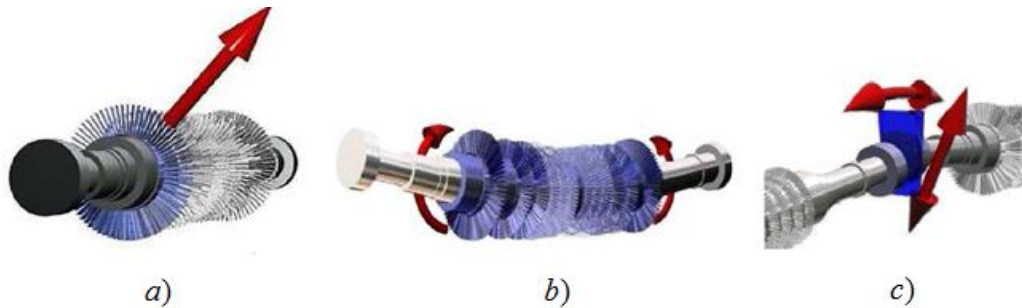


Figura 4-3: alcune forzanti agenti: a) squilibrio, b) ingobbamento, c) disallineamento angolare e radiale

Tutti questi difetti possono essere modellati con un sistema di forzanti equivalenti, periodiche e sincrone con la velocità di rotazione o con i suoi multipli (componenti 1X, 2X, 3X giro).

Tra queste cause la più comune e rilevante è rappresentata dallo squilibrio rotante dovuto allo sbilanciamento del rotore: esso può essere modellato come una forzante sincrona rispetto alla velocità di rotazione, quindi per la sua identificazione sarà sufficiente considerare la componente di vibrazione 1X [43].

$$\mathbf{F}_{umb}(t) = \left\{ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{md\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_{umb}) \quad md\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_{umb})}_{\text{nodo a cui è applicata la forzante}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T$$

(4.13)

4.2 Analisi del sistema non controllato

A questo punto è possibile creare il modello dinamico di un rotore e con l'aggiunta della matrice degli ingressi è possibile studiare il comportamento del sistema composto dall'accoppiamento tra il rotore flessibile e il cuscinetto attivo.

In tutte le analisi in questo capitolo verrà utilizzato il rotore simmetrico raffigurato in Figura 4-4, schematizzato con il FEM i cui dati sono riportati in Tabella 4. I due cuscinetti montati hanno per semplicità i coefficienti dinamici di quelli in esame in 3.3 e sono posti presso il secondo ed il dodicesimo nodo.

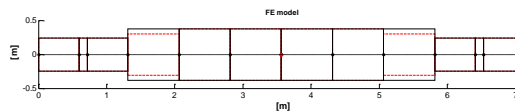


Figura 4-4: modello FEM utilizzato

grandezze del sistema			
K_{xx} [N/m]	$1.2739 \cdot 10^{10}$	r_{xx} [$N/(m \cdot s)$]	$2.4192 \cdot 10^6$
K_{xy} [N/m]	$0.0067 \cdot 10^{10}$	r_{xy} [$N/(m \cdot s)$]	≈ 0
K_{yx} [N/m]	$-0.0071 \cdot 10^{10}$	r_{yx} [$N/(m \cdot s)$]	≈ 0
K_{yy} [N/m]	$1.3369 \cdot 10^{10}$	r_{yy} [$N/(m \cdot s)$]	$2.8431 \cdot 10^6$
peso [kg]	0.75	Ω [Hz]	50
Tipologia	LBP	numero di <i>pad</i>	5

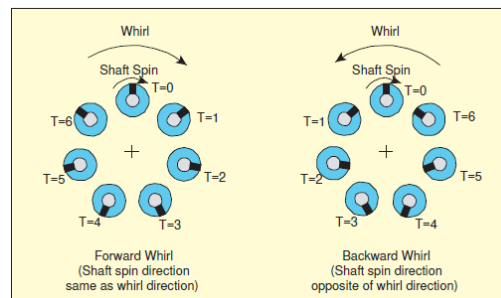
Tabella 4: dati della macchina

4.2.1 Analisi frequenze proprie

Per un rotore formalmente le matrici di rigidità e smorzamento, sono dipendenti dalla velocità di rotazione del rotore a causa dei cuscinetti e dell'effetto giroscopico; per analizzare la risposta del sistema per le varie velocità di funzionamento si può utilizzare il diagramma di Campbell riportato in Figura 4-5: tale grafico ha la funzione di confrontare le frequenze proprie del sistema con le pulsazioni delle armoniche della forzante, le linee rappresentano le forzanti 1X, 2X e 3X giro. Le risonanze del sistema possono avvenire quando la retta rappresentata dalla forzante interseca gli autovalori del sistema.

Risulta interessante notare come per alcuni modi le frequenze naturali non siano più coincidenti ma si biforchino (i due rami sono detti di *forward* e *backward whirling*⁶) a causa dell'effetto giroscopico [42]: infatti esso varia la matrice di smorzamento del sistema in funzione della velocità e quindi anche le frequenze proprie. In alternativa si può osservare il diagramma *waterfall* in Figura 4-6, il quale rappresenta la risposta in frequenza del sistema in funzione della velocità di rotazione dell'albero.

⁶ In un rotore flessibile esistono due moti di rotazione: uno è la rotazione del rotore attorno a se stesso di velocità pari a quella di rotazione, l'altro (il *whirling*) è causato dalla flessibilità del rotore e ruota attorno al centro dei supporti. Se i due moti sono concordi si dice che si ha un *forward whirling (FW)*, in caso contrario si ha un *backward whirling (BW)*.



I due moti tendono a biforcarsi a causa dell'effetto giroscopico: per il FW quando la velocità angolare dell'albero aumenta tale effetto agisce come una molla che diventa più rigida all'aumentare della rotazione, se tale valore aumenta saliranno di conseguenza le frequenze proprie, al contrario per il BW al crescere della velocità angolare del rotore la rigidità tende a diminuire abbassando le frequenze proprie.

Inoltre il *forward whirling* è più prono a causare velocità critiche flessionali rispetto al *backward*, (per uno studio dettagliato del fenomeno si rimanda a [47]).

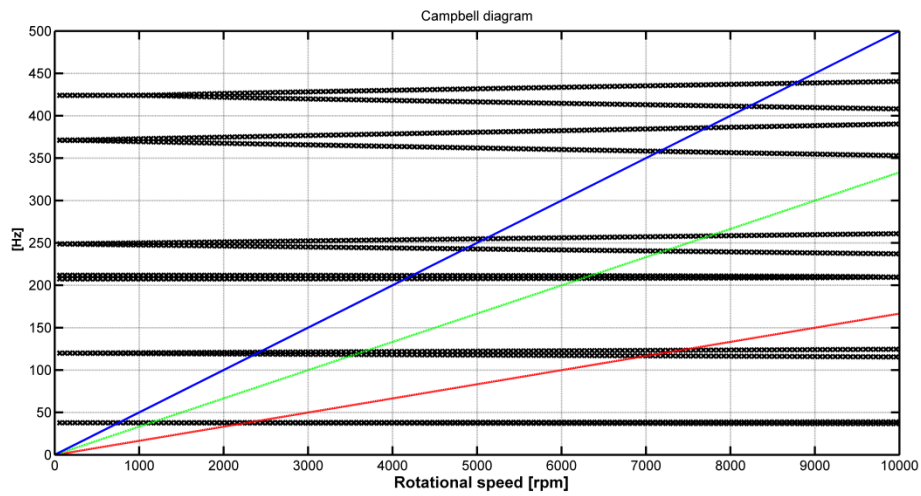


Figura 4-5: diagramma di Campbell per il sistema in rosso la forzante 1x, in verde la 2x ed in blu la 3x

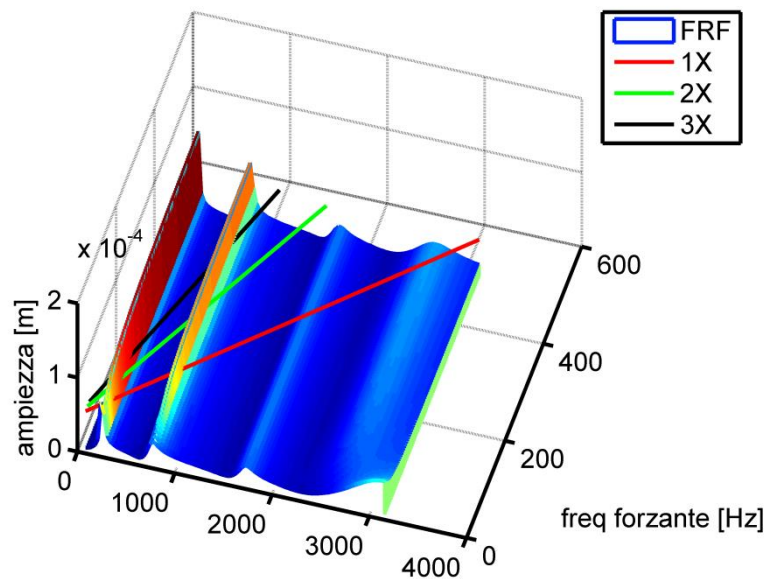


Figura 4-6: diagramma *waterfall* del sistema

L'analisi delle frequenze proprie del sistema e dei relativi autovalori riportati in Figura 4-7 permette interessanti considerazioni: come ci si dovrebbe aspettare i modi di vibrare sono quelli di una trave a doppio appoggio. Le prime due frequenze proprie si trovano sotto la condizione di funzionamento della

macchina a circa 35 Hz (rotore super-critico detto anche flessibile), inoltre queste sono leggermente diverse a causa della diversità della rigidità del meato nelle due direzioni principali. Questo vuol dire che nelle fasi di avviamento o spegnimento della macchina vengono attraversate delle risonanze, il che può provocare seri problemi in caso di presenza di squilibri o ingobbamenti presenti sul rotore che agiscono come forzanti sul sistema.

4.2.2 Dinamica del sistema non controllato

Come detto in precedenza il modello visto nel Capitolo 2 non era in grado di tener conto della dinamica della macchina. Modellando il semplice accoppiamento tra perno e cuscinetto la rigidità del sistema era data dal solo film d'olio, che portava a frequenze proprie del sistema elevate, di conseguenza tutte le analisi svolte in precedenza erano in zona quasi statica non permettendo di studiare l'effetto del controllo nelle situazioni più critiche ovvero nei pressi delle velocità critiche flessionali.

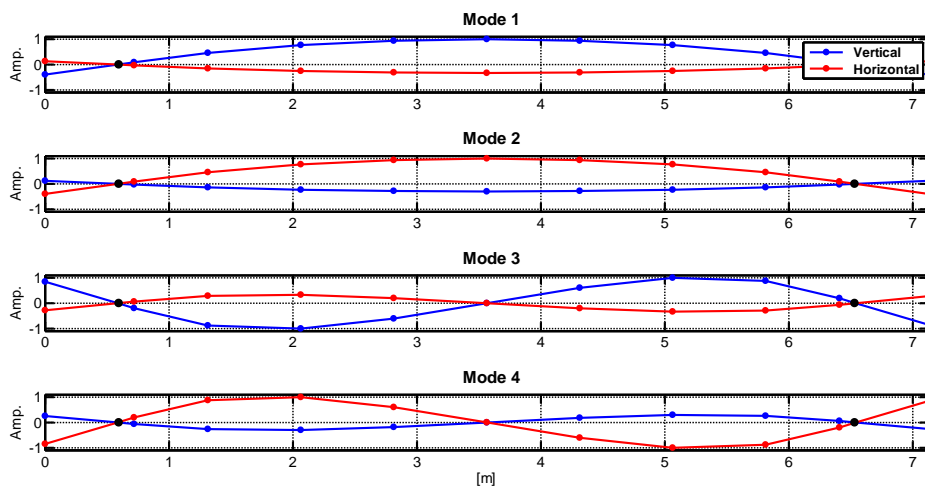


Figura 4-7: frequenze naturali e modi di vibrare

La forzante è stata posta al centro in maniera da attivare efficacemente il primo modo di vibrare, che di norma è quello che contribuisce in maniera maggiore alle vibrazioni, soprattutto al centro, dove esse sono più ampie. È quindi possibile valutare la differenza di spostamento dovuta alla presenza di supporti controllati e non, non solo sul cuscinetto ma anche lontano da esso.

In Figura 4-8 sono riportate nodo per nodo le orbite a regime del sistema forzato attorno alla deformata statica dell'albero, si può notare come esse siano la combinazione del primo modo verticale e orizzontale.

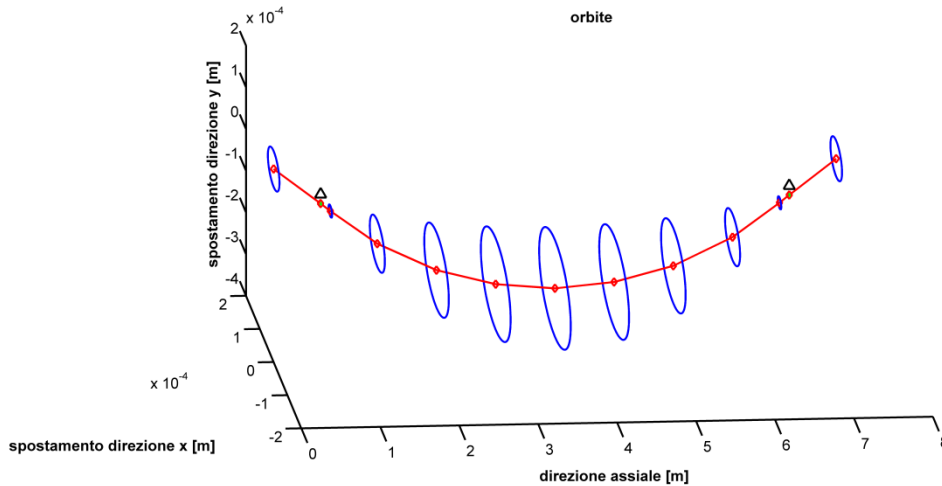


Figura 4-8: orbite a regime attorno alla deformata dell'albero

Tuttavia lo sbilanciamento o le altre forzanti equivalenti possono essere presenti in altri punti del rotore, attivando i modi di ordine superiore: sotto è riportata la risposta in frequenza sui due supporti e sul centro dell'albero per una forzante posta sul quinto nodo, quindi in grado di attivare il secondo modo di vibrare della dinamica verticale e orizzontale (rispettivamente il terzo e quarto modo visti in Figura 4-7).

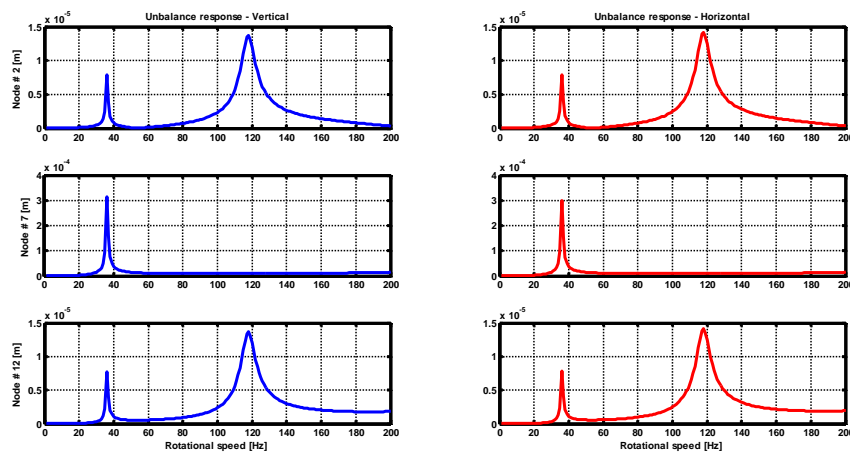


Figura 4-9: risposta in frequenza sui supporti

Come si può osservare il secondo modo ha un'influenza maggiore sulle vibrazioni presso il cuscinetto. Tale modo posto a circa 125 Hz , pur essendo a frequenze più elevate di quelle di funzionamento, può essere attivato attraverso le forzanti a $2x$ o $3x$ giro durante il transitorio di avviamento oppure durante il funzionamento a regime della macchina.

Fortunatamente il secondo modo è di difficile attivazione nel range di funzionamento della macchina, inoltre il modulo di tali forzanti equivalenti è di norma molto minore rispetto allo sbilanciamento.

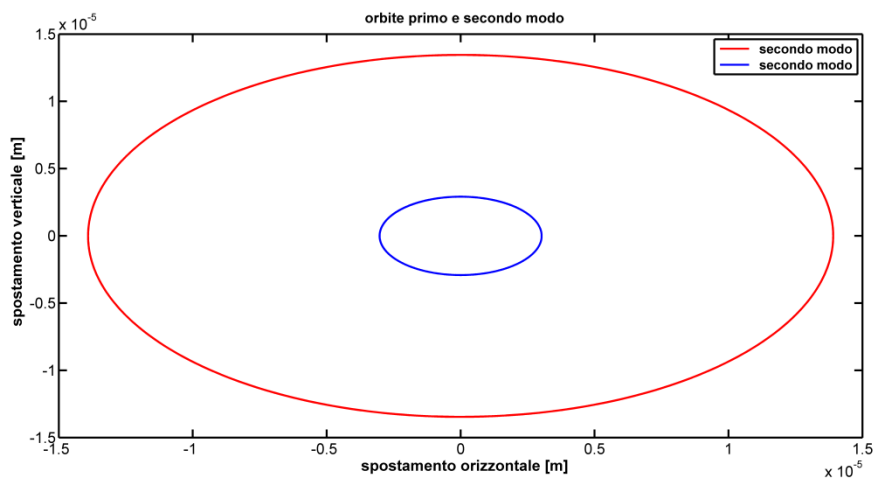


Figura 4-10: confronto tra le orbite eccitate dal primo e dal secondo modo

In Figura 4-11 sono mostrate le orbite a regime per il rotore eccitato sul primo e sul secondo modo di vibrare a parità del modulo della forzante applicata: come detto sopra le orbite del secondo modo sono maggiori nei pressi dei cuscinetti ma minori presso il centro (non sono nulle poiché è ovviamente presente un piccolo contributo del primo modo).

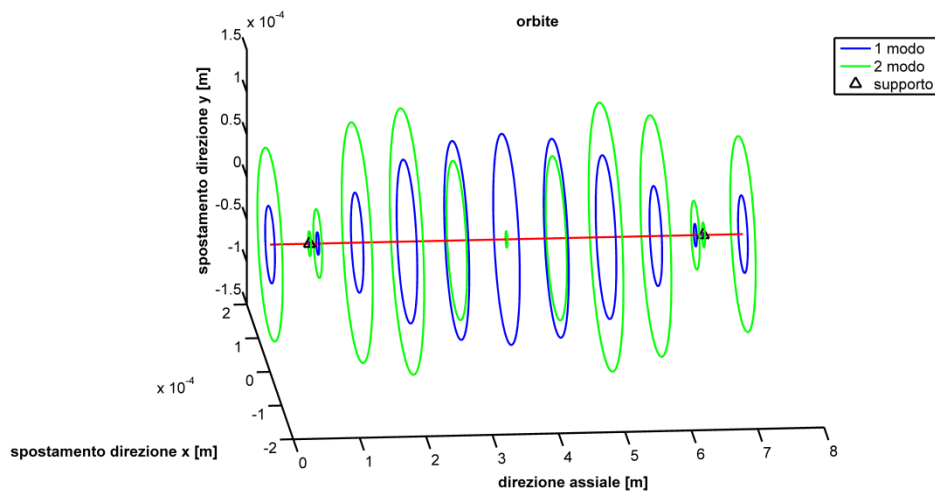


Figura 4-11: orbite per il primo ed il secondo modo

4.3 Analisi del sistema controllato

Il sistema in forma di stato si può scrivere in forma di stato nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{R}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{I}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{B}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{pad} \quad (4.14)$$

Dove la matrice degli ingressi è la stessa di quella del paragrafo 3.4 opportunamente assemblata.

4.3.1 Collocazione dei sensori

Vista la presenza di un modello complesso della macchina si pone il problema di dove collocare i captatori di posizione che misurano la posizione del centro dell'albero nel cuscinetto, sono possibili diverse soluzioni:

- collocare i sensori alla fine del cuscinetto: questa è la soluzione più diffusa, tuttavia in questo maniera si avrebbe la misura della posizione dell'albero non al centro del cuscinetto ma alla fine di esso. In Figura 4-12 è riportata la differenza tra le vibrazioni al centro e all'estremità del

cuscinetto . Per conoscere la posizione del centro dell'albero in mezzo al supporto bisognerebbe ricorrere ad un osservatore dello stato, tuttavia data la complessità del problema, l'implementazione *real time* è di difficile realizzazione. In alternativa si può scegliere di controllare al posto del centro del cuscinetto l'estremità dotata di sensori, verosimilmente peggiorando le prestazioni al centro e soprattutto all'altra estremità;

- Collocare una coppia di sensori alle due estremità del cuscinetto e ricavare il valore della grandezza da misurare per interpolazione, l'errore introdotto sarebbe piccolo ma bisognerebbe raddoppiare il numero dei trasduttori, tuttavia dato il costo globale della macchina può essere una soluzione percorribile in ambito industriale;
- Inserire il sensore al centro del cuscinetto in modo che le misure coincidano con le grandezze da conoscere ai fini del controllo. Tale soluzione richiede un sensore più robusto a causa delle maggiori temperature presenti nel centro del cuscinetto e alla minore accessibilità del sensore.

In questa sede si è scelto di utilizzare l'ultima opzione in maniera da avere accessibili le grandezze di stato di interesse.

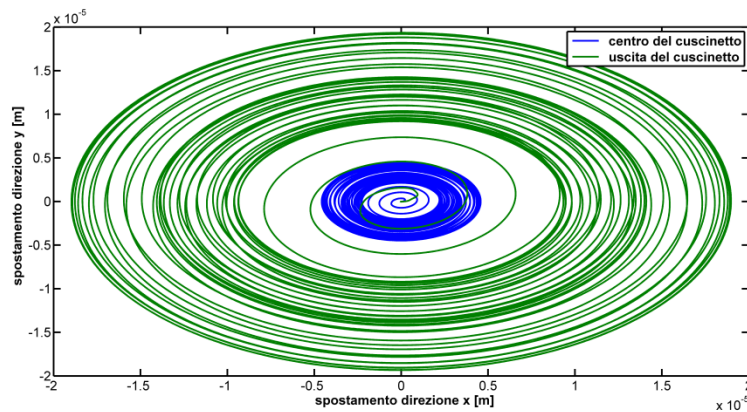


Figura 4-12: confronto tra le orbite al centro e all'uscita del cuscinetto

4.4 Risultati numerici

In maniera simile a quanto visto in 3.5, in questo paragrafo verranno effettuate delle simulazioni per verificare le prestazioni del cuscinetto attivo supportante un albero flessibile.

La maggior parte delle analisi verificano la capacità del sistema controllato di abbattere le vibrazioni presso la prima velocità critica flessionale, studiando gli effetti del primo e del secondo modo di vibrare.

Infine si è simulato l'avvio del rotore nel minuto di passaggio la prima frequenza propria.

4.4.1 Soppressione delle vibrazioni presso la prima velocità critica

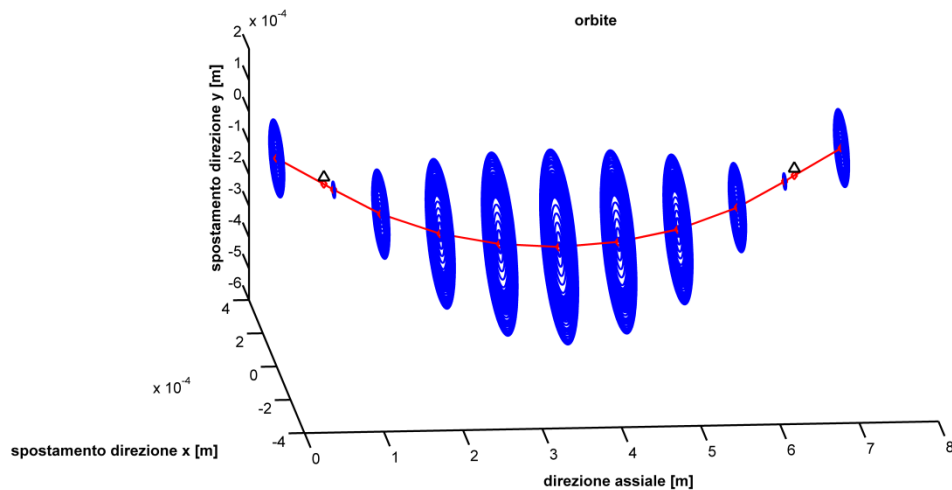


Figura 4-13: orbite attorno alla deformata statica per il sistema controllato

La condizione più critica per il sistema rimane il passaggio della prima frequenza propria che avviene durante il transitorio di avvio o spegnimento della macchina, risulta quindi di fondamentale importanza verificare il corretto funzionamento del sistema sotto controllo in tale situazione.

Si è prima verificata la capacità del sistema di rimanere sotto l'azione di controllo per periodi di tempo relativamente lunghi al fine di osservare il sistema nella peggiore condizione di funzionamento possibile.

In Figura 4-14 sono mostrate le vibrazioni sull'albero tenendo la macchina per 30 secondi nell'intorno del picco di risonanza (nella realtà il tempo di attraversamento è molto inferiore).

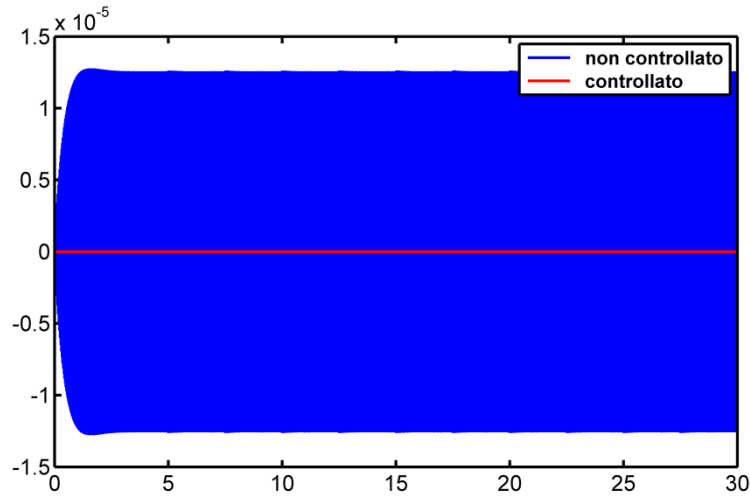


Figura 4-14: andamento nel tempo dello spostamento verticale del primo supporto

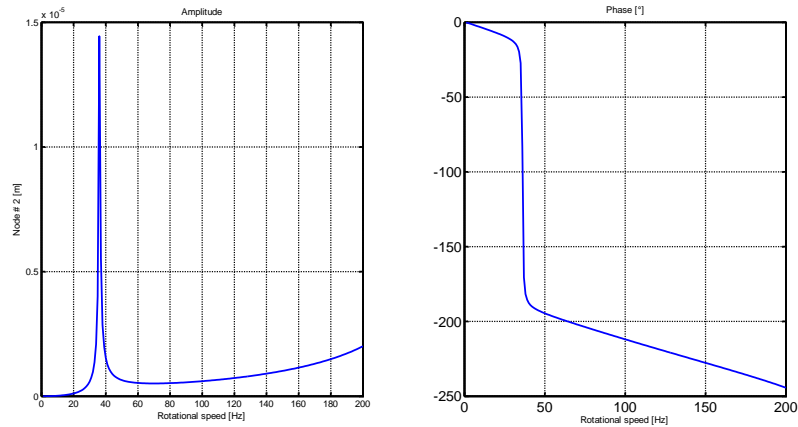


Figura 4-15:risposta in frequenza del primo supporto

Sotto sono riportati in dettaglio i primi secondi della simulazione: si può facilmente osservare il transitorio iniziale dovuto alle condizioni iniziali non

congruenti con la forzante, dopo di che la soluzione dell'equazione differenziale raggiunge il valore di regime mostrato nella FRF di Figura 4-15.

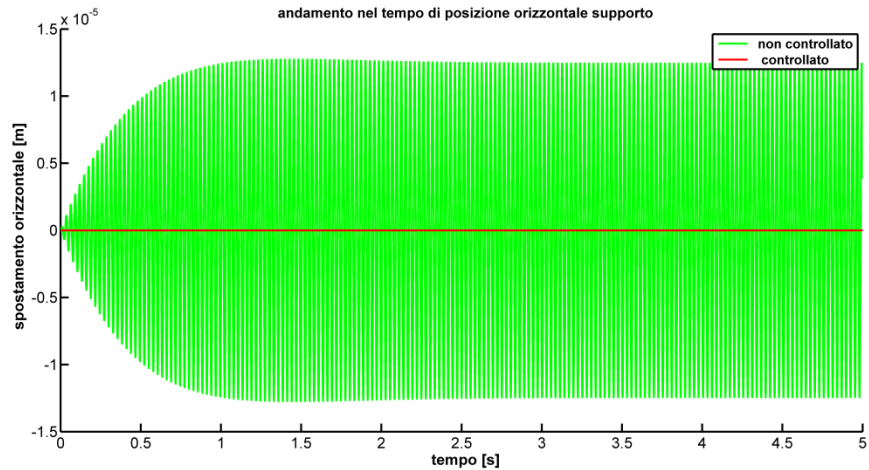


Figura 4-16:andamento nel tempo del sistema controllato (in verde) e non (in rosso)

In Figura 4-17 si può osservare l'andamento dello spostamento del pattino fino al regime: le azioni di controllo maggiori sono quelle dovute alla dinamica orizzontale che ha un attuatore in meno rispetto a quella verticale.

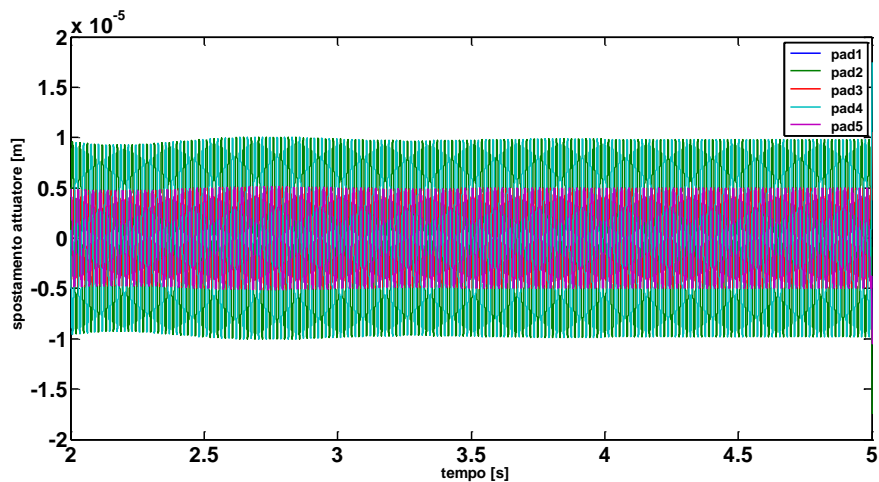


Figura 4-17: spostamenti del pattino

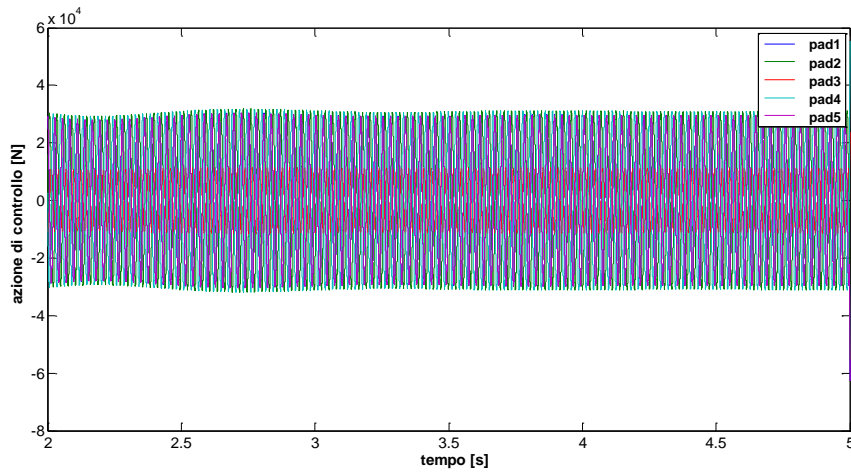


Figura 4-18: forza richiesta dagli attuatori

In Figura 4-18 sono riportate le forze richieste dagli attuatori per limitare le vibrazioni nei pressi della risonanza.

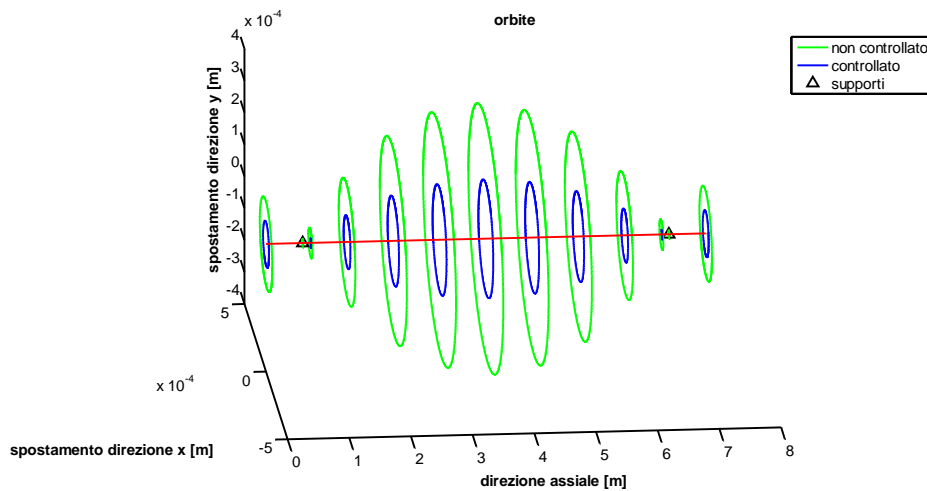


Figura 4-19: differenza tra orbite del sistema controllato e non per il sistema nella configurazione indeformata

Come si vede dalla Figura 4-19, il controllo non si limita alla semplice soppressione delle vibrazioni sui supporti, come è ovvio le vibrazioni vengono ridotte pure al centro, grazie ad esso il sistema che in realtà ha supporti deformabili (che amplificano le vibrazioni al centro), viene a trovarsi con dei

supporti ideali grazie all'azione di controllo che annulla gli spostamenti presso il cuscinetto. Questa condizione permette alcuni importanti vantaggi: un minor rischio di contatto al centro dove gli spostamenti sono massimi, permettendo di limitare il rischio di uno strisciamento sulle tenute della macchina e garantendo indirettamente una maggiore efficienza del sistema.

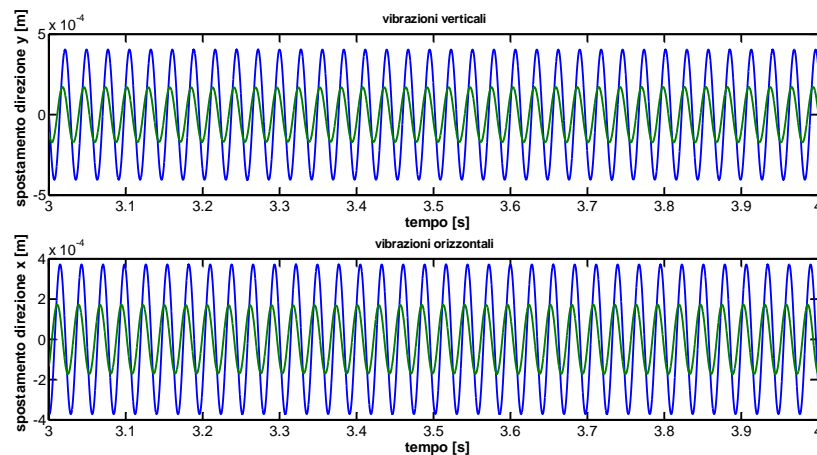


Figura 4-20: confronto delle vibrazioni al centro

In Figura 4-20 sono riportati gli andamenti del centro dell'albero in condizioni di risonanza per il sistema controllato e non, come si vede l'introduzione di un controllore che blocca le vibrazioni sui supporti riduce di oltre la metà il valore di ampiezza delle vibrazioni.

Tuttavia questa riduzione delle vibrazioni è mitigata lontano dalla velocità critica flessionale. Nella condizione di funzionamento a regime, che si trova in zona sismografica, il fenomeno è praticamente trascurabile in quanto non viene sentito l'effetto dell'amplificazione dinamica della risonanza dovuto alla flessibilità dei supporti.

Di norma in condizioni normali di funzionamento le vibrazioni sui supporti sono basse, pertanto gli spostamenti e le forze richieste dagli attuatori saranno molto inferiori rispetto a quelli in risonanza come si può osservare in Figura 4-21 e in Figura 4-22. In tali condizioni il sistema di controllo può essere disinserito.

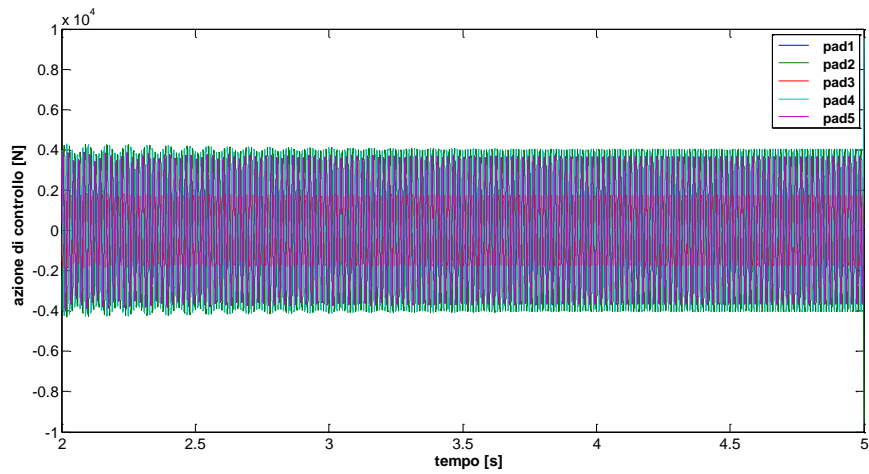


Figura 4-21: forze richieste dagli attuatori a regime

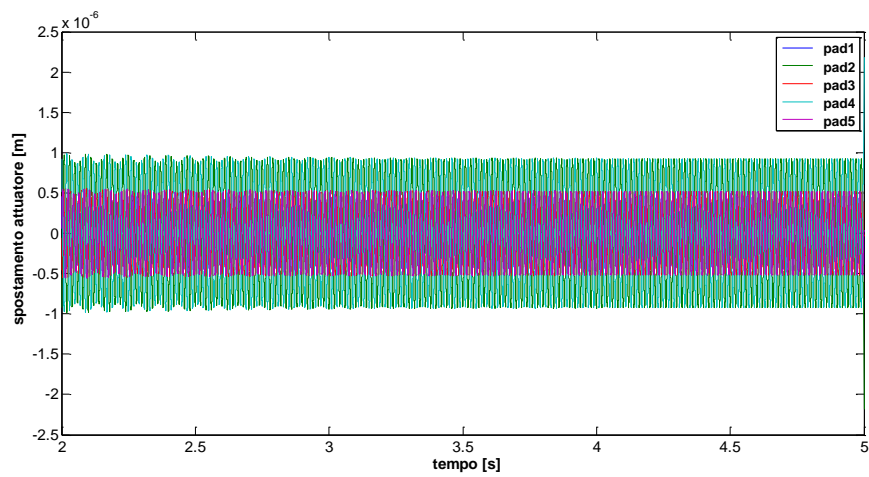


Figura 4-22: spostamenti dei pattini

4.4.2 Effetti del secondo modo di vibrare

È stata verificata pure la capacità del sistema di controllo di attutire le vibrazioni eccitate dal secondo modo di vibrare: in Figura 4-23 si può osservare come il controllore sia in grado di ridurre le vibrazioni.

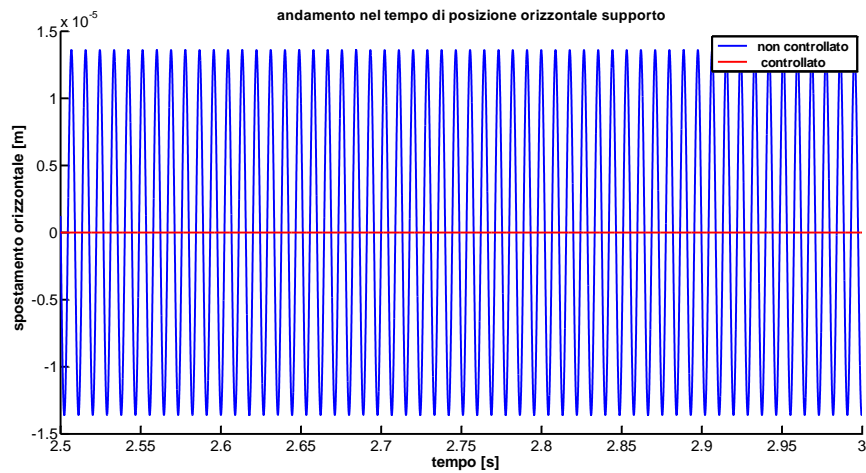


Figura 4-23: confronto delle vibrazioni tra il sistema controllato e non per un intervallo di tempo con il secondo modo attivo

Tuttavia a differenza di quanto visto per il primo modo, la presenza di un controllore che rende i supporti ideali non è in grado di smorzare le vibrazioni lontano da essi con la stessa efficienza del primo modo, questo poiché il secondo modo è meno sensibile alle vibrazioni dei supporti rispetto al primo. Nell'analisi del secondo modo si è utilizzata una forzante 3X di modulo pari a allo squilibrio (situazione in realtà irrealistica in quanto tali effetti sono molto inferiori), al fine di dimostrare che le vibrazioni causate dal secondo modo di vibrare sul supporto siano completamente abbattute dal sistema di controllo.

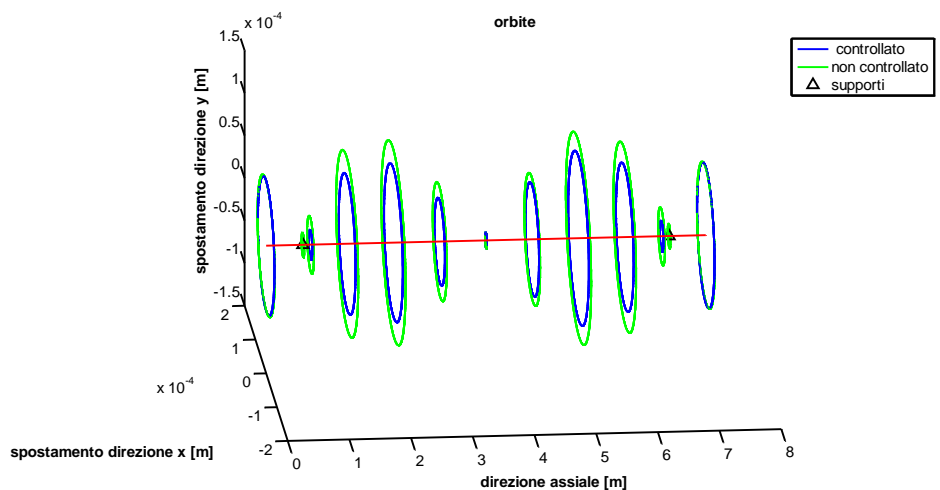


Figura 4-24: orbite eccitate dal secondo modo di vibrare nel caso di sistema di controllo inserito e non

4.4.3 Soppressione delle vibrazioni nel transitorio di avvio

Infine si è simulata la parte critica di un avviamento del rotore: ovvero il passaggio della prima velocità critica. La simulazione considera il minuto durante il quale il rotore viene accelerato di 400 *rpm* al minuto (circa 6.5 *Hz*, valore realistico per l'avvio di un grosso rotore), passando da circa 31.8 *Hz* a 38.5 *Hz*, attraversando quindi la prima velocità critica.

Per una corretta simulazione dell'avviamento istante per istante le matrici del sistema (4.15) devono essere riaggiornate in tempo reale, per tener conto della variazione di velocità che cambia le matrici di rigidezza dei cuscinetti e la matrice giroscopica.

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{x}} + ([\mathbf{R}(\Omega)] + \Omega \cdot [\mathbf{G}])\dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}(\Omega)]\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{umb}}(\Omega, t) + \mathbf{W} \quad (4.15)$$

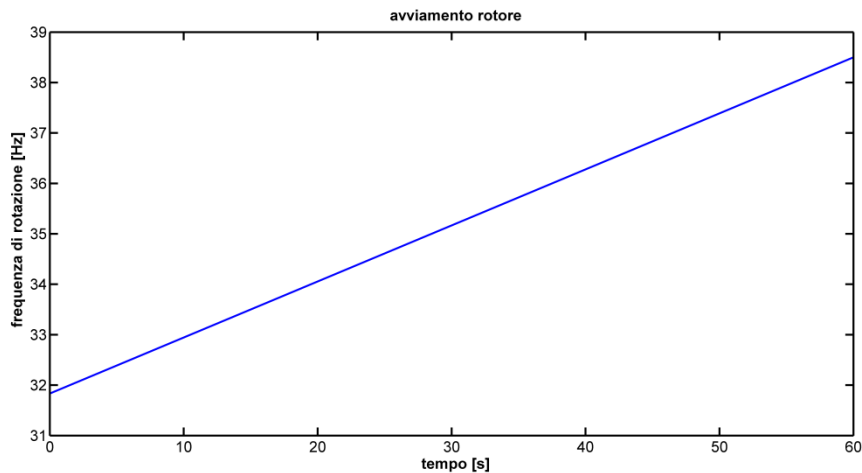


Figura 4-25: intervallo di frequenze considerato

Come si vede da Figura 4-26 e da Figura 4-27 è presente un picco negli spostamenti e nell'azione di controllo nel punto dove si trova la velocità critica flessionale, ma il sistema di controllo riesce a ridurre efficacemente le vibrazioni sull'albero, dimostrando così la capacità del sistema di controllo di abbattere le vibrazioni nella situazione più critica per una macchina rotante flessibile.

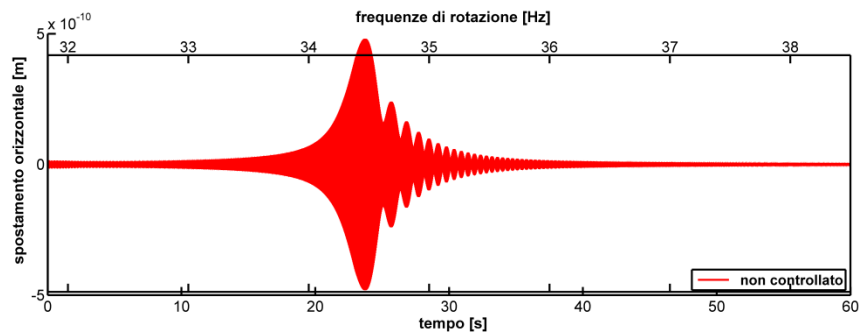


Figura 4-26: vibrazioni nella direzione verticale sul primo supporto durante l'avvio

Tale velocità critica si trova leggermente anticipata rispetto al valore preventivato, questo può essere dovuto a varie cause come la variazione istantanea dei coefficienti e delle matrici (mentre nel calcolo della FRF erano costanti) e alla variazione della velocità che impedisce agli spostamenti di andare a regime, oltre all'effetto dello smorzamento che riduce le frequenze di risonanza rispetto a quelle naturali calcolate senza i termini di smorzamento.

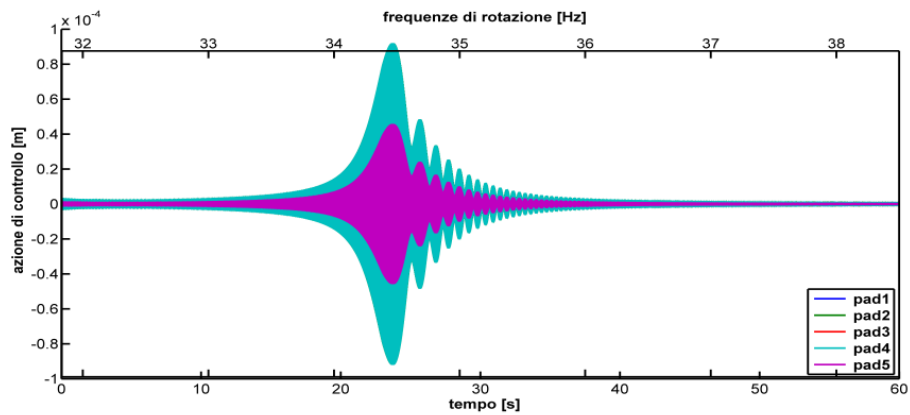


Figura 4-27: azioni di controllo durante l'avviamento

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

L'obiettivo di questa tesi era lo studio di un cuscinetto a pattini oscillanti attivo, studiandone le problematiche sia dal punto di vista fluidodinamico sia dal punto di vista della dinamica del rotore.

Con il modello analitico semplificato visto nel Capitolo 2 si sono osservate le principali problematiche riguardanti il problema del controllo delle vibrazioni sull'albero tramite un pattino oscillante. Con tale modello si è osservato come il metodo di attuazione più semplice sia la traslazione del pattino lungo la direzione radiale, che rispetto al controllo tramite la rotazione del *pad* garantisce una distanza relativa tra perno e cuscinetto maggiore (abbassando il rischio di contatti tra i due).

In seguito si è studiato il comportamento di un vero accoppiamento tra un rotore e un TPJB a 5 pattini: allo scopo di poter scrivere l'equazione di moto del sistema, il campo di pressione è stato modellizzato numericamente tramite il metodo delle differenze finite e linearizzato attorno alla sua posizione di equilibrio statico. Si sono poi studiate alcune possibili non linearità dovute alla variazione della posizione del perno rispetto al punto di equilibrio statico e alla variazione di velocità dell'albero.

La tipologia di cuscinetto scelta ovvero la 5 *pad* LBP, grazie alla generica inclinazione dei pattini ha permesso di mostrare l'influenza locale dei coefficienti misti sul pattino che accoppiano le due dinamiche verticale e orizzontale, mentre nelle analisi dinamiche dei TPJB tali termini sono di norma trascurati.

Per tale modello si è sviluppato un controllore robusto di tipo *sliding mode*, grazie al quale è stato possibile ridurre significativamente le vibrazioni per alcune situazioni di interesse come ad esempio l'inserimento improvviso del controllore. È da sottolineare come il controllore a moto scivolato in una situazione reale sia di utilità ancora maggiore: questo poiché nel modello numerico sviluppato è stato possibile inserire solo una piccola parte dei disturbi e delle non linearità presenti nel sistema (non linearità che possono provenire oltre che dal film d'olio anche dalla dinamica del rotore).

Nell'ultimo capitolo della tesi si è simulato il comportamento di un grosso rotore con i due supporti attivi. Il sistema rotore e cuscinetto è stato simulato con il FEM e ha mostrato come l'azione di controllo oltre a ridurre direttamente le vibrazioni sui cuscinetti, è in grado di ridurre in condizioni di risonanza le vibrazioni sull'intera linea d'assi, soprattutto al centro dell'albero dove esse sono maggiori, soprattutto per il primo modo di vibrare. Tale riduzione è

possibile poiché il sistema che in realtà ha dei supporti cedevoli, grazie alla azione di controllo si ritrova ad avere degli appoggi ideali indeformabili. L'attenuazione delle vibrazioni al centro è massima presso le velocità critiche, che nelle macchine moderne sono attraversate solitamente durante l'avvio e lo spegnimento della macchina, quindi l'utilizzo di un TPJB attivo può essere un valido sistema per attraversare tali velocità.

I possibili sviluppi possibili di questo lavoro sono raggruppabili in tre differenti aree:

- una sperimentazione e validazione dei risultati numerici;
- studiando differenti logiche di controllo e attuando la rotazione del pattino;
- continuando a studiare il rotore tramite simulazioni più raffinate.

Riguardo alle logiche di controllo, sarebbe interessante studiare l'efficacia di altre tipologie di controllo robusto, inoltre sarebbe importante che il controllore sia in grado di valutare la distanza relativa tra albero e pattini al fine di evitare contatti e quindi agire di conseguenza. Inoltre nonostante la maggiore complessità, il controllo della rotazione del pattino sforza in maniera minore gli attuatori, pertanto può essere utile nel controllo di grossi rotori per la produzione di energia.

Nell'analisi fatta in questa tesi è stata trascurata la deformabilità del *pivot* e l'inerzia del *pad*; sarebbe quindi interessante lo studio sul modello completo attraverso l'integrazione delle equazioni di Reynolds nel tempo, oppure più semplicemente linearizzando il sistema tramite la (3.4) in maniera tale da poter studiare gli effetti dell'inerzia del *pad* e quelli della variazione della rigidità del meato in funzione della traslazione del pattino.

Allegato A

Metodo delle differenze finite

Nella fisica un processo viene schematizzato in un modello che spesso viene rappresentato tramite equazioni differenziali, la risoluzione di queste consente di trovare le grandezze desiderate, tuttavia spesso queste equazioni sono troppo complesse per essere risolte in forma analitica, ad esempio le equazioni non lineari alle differenze parziali, come le equazioni di Navier-Stokes (di cui l'equazione di Reynolds è un caso particolare).

Per risolverle si adottano particolari metodi che danno una soluzione approssimata, i metodi principali sono:

- Metodo alle differenze finite (FDM)
- Metodo degli elementi finiti (FEM)
- Metodo dei volumi finiti (FVM)

Questi metodi si basano sulla suddivisione del dominio continuo in un'insieme finito di sottodomini (*meshatura*) e in seguito trovare soluzioni approssimate del problema (continuo) di partenza portandosi a risolvere sistemi lineari. In seguito le soluzioni in un generico punto dello spazio sono ottenute per interpolazione tra i punti (nodi) dove è stata calcolata la soluzione.

Per calcolare la pressione idrodinamica nel cuscinetto è stato utilizzato un approccio alle differenze finite. Questo metodo approssima le derivate tramite il quoziente di differenze finite.

I maggiori vantaggi del metodo alle differenze finite sono:

- è concettualmente semplice e facile da implementare al computer;
- in teoria è adatto a risolvere qualsiasi tipologia di equazione (lineare e non, alle differenze parziali e ordinarie);
- permette di trasformare il problema della ricerca di una soluzione in un sistema lineare di ordine elevato per cui esistono efficienti algoritmi iterativi.

Tuttavia tale metodo non è esente da svantaggi:

- è difficile da implementare per geometrie complesse ed irregolari;
- la scelta del numero di nodi è critica, per griglie rade si hanno grossi errori mentre per griglie troppo fitte si hanno tempi di calcolo eccessivi a cui non corrispondono miglioramenti nell'accuratezza del risultato apprezzabili (tuttavia questa problematica è comune a tutti i metodi di risoluzione numerica).

Sotto le seguenti ipotesi viste in 2.1.1, a cui viene aggiunta la costanza del valore di viscosità, è possibile scrivere l'equazione di Reynolds, dove l'effetto *wedge* è l'unico a generare pressione.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

Sostituendo all'equazione le seguenti grandezze adimensionalizzate:

$$\bar{x} = \frac{x}{d} \quad \bar{z} = \frac{z}{d} \quad \bar{h} = \frac{h}{2C_m} \quad \bar{p} = \frac{p}{\mu\omega} \left(\frac{C_m}{r} \right)^2$$

Si ricava l'equazione di Reynolds in forma adimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \left(\frac{d}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 3 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A.2})$$

Per risolverla si sono create due griglie sul pattino, una su cui verranno calcolati i valori della pressione l'altra nel quale verranno inseriti i valori del meato adimensionalizzato, questa scelta è molto comune nella fluidodinamica computazionale in quanto l'utilizzo di una sola griglia può creare problemi.

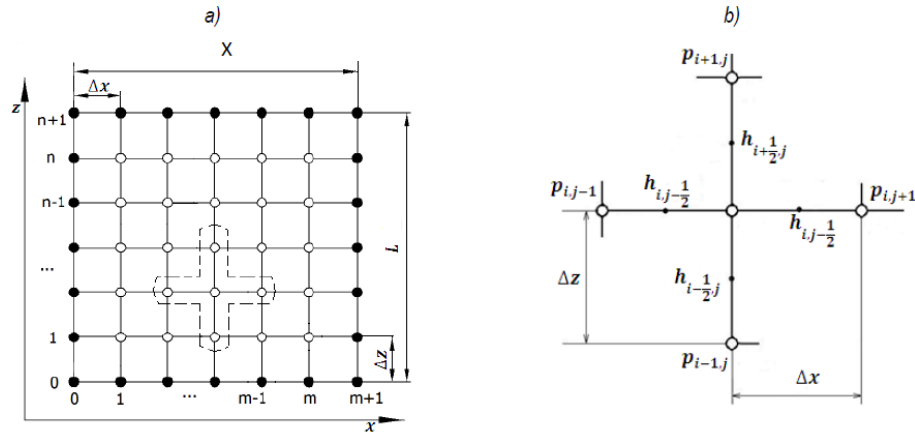


Figura A-1: griglie per il metodo delle differenze finite

Si sono quindi sostituite le derivate con i quozienti delle differenze finite [36]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) &= \frac{\bar{h}_{i,j+1/2}^3 \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta \bar{x}} \right) - \bar{h}_{i,j-1/2}^3 \left(\frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta \bar{x}} \right)}{\Delta \bar{x}} \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{\bar{h}_{i,j+1/2}^3 \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta \bar{z}} \right) - \bar{h}_{i,j-1/2}^3 \left(\frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta \bar{z}} \right)}{\Delta \bar{z}} \\
 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\bar{h}_{i,j+1/2} - \bar{h}_{i,j-1/2}}{\Delta \bar{x}}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Sostituendo le differenze finite con le derivate continue nell'equazione ed esprimendo la pressione al nodo i, j in funzione dei noti confinanti è possibile scrivere $\bar{p}_{i,j}$ come una funzione lineare di questi ultimi:

$$\bar{p}_{i,j} = a_0 + a_1 \bar{p}_{i+1,j} + a_2 \bar{p}_{i-1,j} + a_3 \bar{p}_{i,j+1} + a_4 \bar{p}_{i,j-1} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{3 \left(\frac{\bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}} - \bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \bar{x}} \right)}{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + \bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{\Delta \bar{x}^2} + \left(\frac{d}{L} \right)^2 + \frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}^3 + \bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\Delta \bar{z}^2} \right)} & a_1 &= \frac{\left(\frac{d}{L} \right)^2 \left(\frac{\bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \bar{z}^2} \right)}{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + \bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{\Delta \bar{x}^2} + \left(\frac{d}{L} \right)^2 + \frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}^3 + \bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\Delta \bar{z}^2} \right)} \\
 a_2 &= \frac{\left(\frac{d}{L} \right)^2 \left(\frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta \bar{z}^2} \right)}{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + \bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{\Delta \bar{x}^2} + \left(\frac{d}{L} \right)^2 + \frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}^3 + \bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\Delta \bar{z}^2} \right)} & a_3 &= \frac{\left(\frac{\bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \bar{x}^2} \right)}{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + \bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{\Delta \bar{x}^2} + \left(\frac{d}{L} \right)^2 + \frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}^3 + \bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\Delta \bar{z}^2} \right)} \\
 a_4 &= \frac{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \bar{x}^2} \right)}{\left(\frac{\bar{h}_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + \bar{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^3}{\Delta \bar{x}^2} + \left(\frac{d}{L} \right)^2 + \frac{\bar{h}_{i+\frac{1}{2},j}^3 + \bar{h}_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\Delta \bar{z}^2} \right)}
 \end{aligned}$$

I coefficienti della combinazione lineare sono funzione della dimensione della griglia e dello spessore del meato nei nodi adiacenti, quindi la pressione ad un dato nodo può essere scritta come combinazione lineare delle pressioni ai nodi adiacenti, dove le costanti dipendono dal nodo considerato.

Il campo di pressioni può essere quindi risolto grazie alle $n \times m$ equazioni dipendenti dai $n \times m$ nodi risolvendo il sistema lineare $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$. Tuttavia tale metodo può dare come risultati pressioni negative, le quali non possono esistere a causa della rottura del film d'olio che si verifica in tali condizioni ([37],[28]); per tenere conto di questo indesiderabile fenomeno esistono due approcci:

- dove la pressione è minima imposta uguale a zero è ricalcolare in maniera analoga il sistema con la nuova condizione al contorno, l'operazione va iterata fino a che tutte le pressioni trovate siano nulle o positive ([37],[28]).

- imporre la pressione uguale a zero dove essa è negativa, così facendo si commette un errore di approssimazione in quanto non viene posta la nuova condizione al contorno e non si ricalcolano le nuove pressioni.

La prima soluzione è più precisa ma richiede molte iterazioni, mentre la seconda di norma introduce un errore che è piccolo dato che gli errori sono circoscritti alle regioni di transizione tra pressioni negative e positive, dove essa è molto piccola e quindi trascurabile rispetto alle altre regioni lontane da essa, le quali danno il contributo maggiore al campo di pressione.

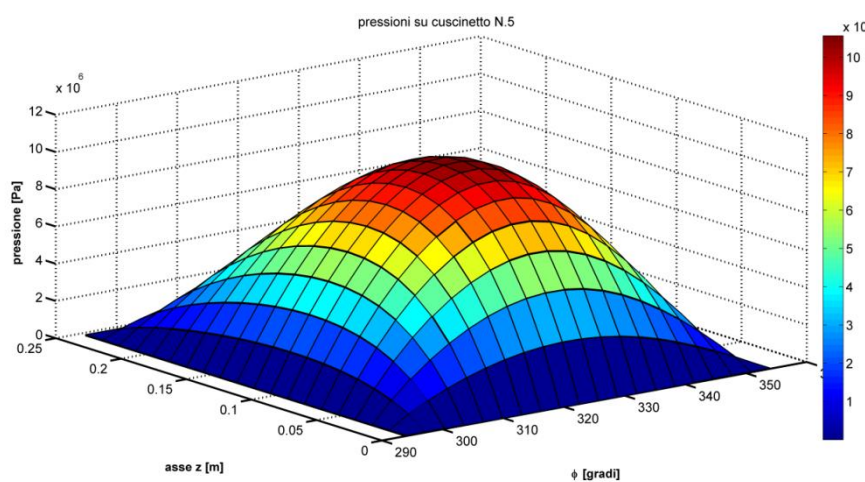


Figura A-2: campo di pressioni su un cuscinetto

In alternativa si può utilizzare un metodo iterativo dove nodo per nodo vengono calcolate le pressioni, se viene trovata una pressione negativa essa viene posta uguale a zero nelle iterazioni successive [28].

Al fine di semplificare la trattazione è possibile ipotizzare che la pressione vari lungo la direzione z con una legge parabolica:

$$P(\theta, z) = \left(1 - \frac{4z^2}{L_z^2}\right) P(\theta)$$

In maniera analoga è possibile ripetere lo stesso procedimento per trovare i coefficienti dell'equazione di Reynolds completa del termine di *squeeze*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2V_2 \right] \quad (\text{A.5})$$

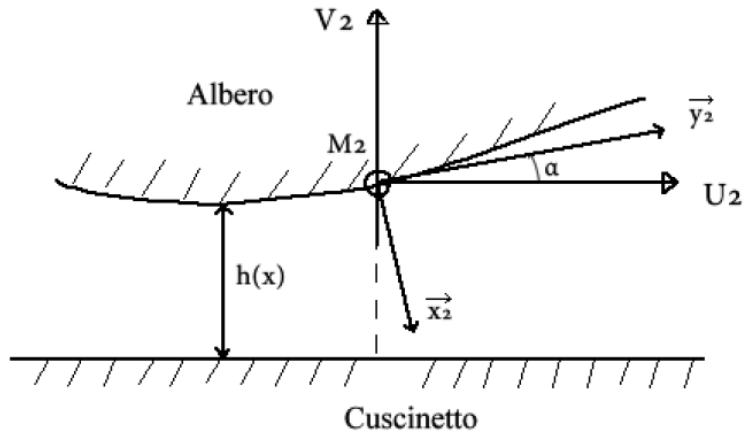


Figura A-3:sviluppo piano del cuscinetto

Per calcolare correttamente il termine di *squeeze* occorre scomporre la velocità all'estremità dell'albero nelle due componenti U_2, V_2 rappresentati rispettivamente le velocità nella direzione circonferenziale e radiale del meato, inoltre tali velocità sono dipendenti dalla posizione angolare del nodo, occorre quindi proiettarle nodo per nodo per ogni pattino.

Allegato B

Calcolo dello spessore del meato

Come si è visto, una grandezza fondamentale nel calcolo del campo di pressioni è lo spessore del meato, che per ipotesi verrà considerato costante lungo la direzione z , ovvero presso l'asse del pattino. Per un cuscinetto a geometria fissa si dimostra facilmente che per il sistema di riferimento considerato (dove l'angolo θ parte dalla direzione del precarico posto verso il basso), esso è pari a:

$$h(\theta) = C_m + e_x \cos(\theta + 270^\circ) + e_y \sin(\theta + 270^\circ) \quad (\text{B.1})$$

$$h(\theta) = C_m + e \sin(\alpha) \cos(\theta + 270^\circ) + e \cos(\alpha) \sin(\theta + 270^\circ) \quad (\text{B.2})$$

Con α angolo di attitudine del centro dell'albero, ovvero la misura angolare tra la linea dei centri (ovvero la congiungente tra il centro del cuscinetto e dell'albero) e la direzione del carico.

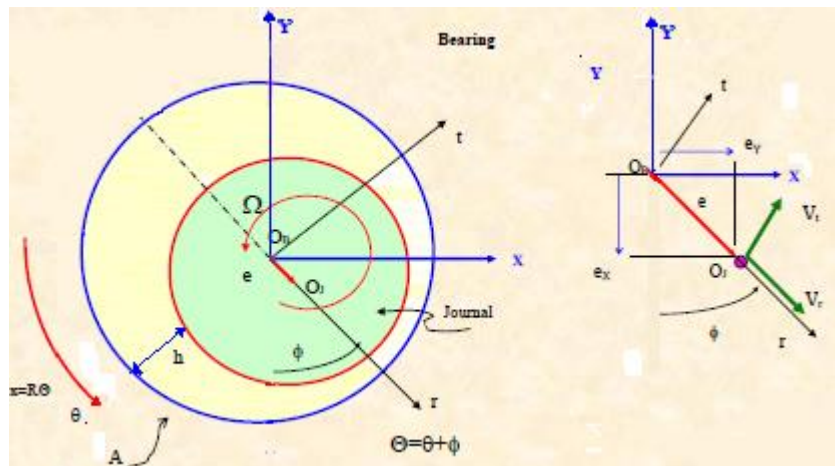


Figura B-1: schema per il calcolo dello spessore del meato

Tuttavia in un TPJB bisogna considerare almeno altri due effetti: il precarico del cuscinetto e la rotazione del pattino.

L'effetto del precarico è causato dal discostamento tra il centro del pattino e il centro del cuscinetto e di conseguenza lo spessore del meato varierà con la seguente legge:

$$h_{precarico} = -r_p \cos(\theta_{pivot} - \theta) \quad (B.3)$$

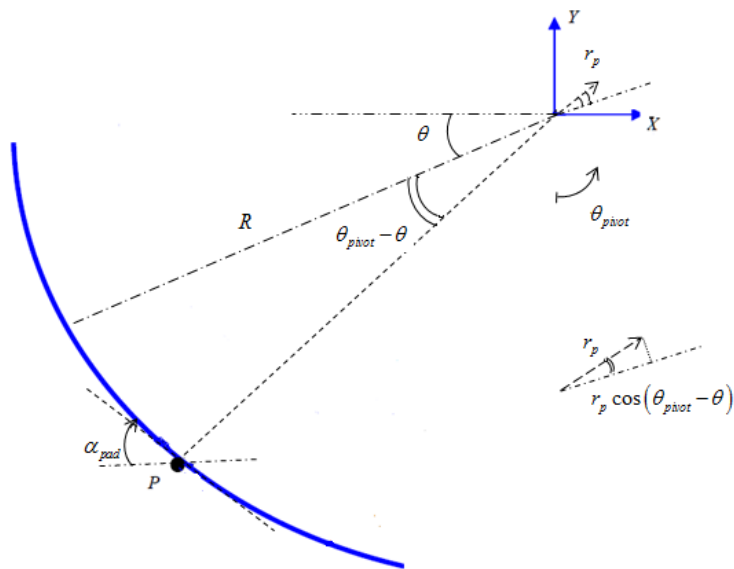


Figura B-2: effetto del precarico

Mentre l'effetto della rotazione del pattino sotto l'ipotesi di piccole rotazioni, porta ad un contributo pari a:

$$h_\alpha = \sqrt{l^2 + l^2 - 2l^2 \cos(\alpha)}$$

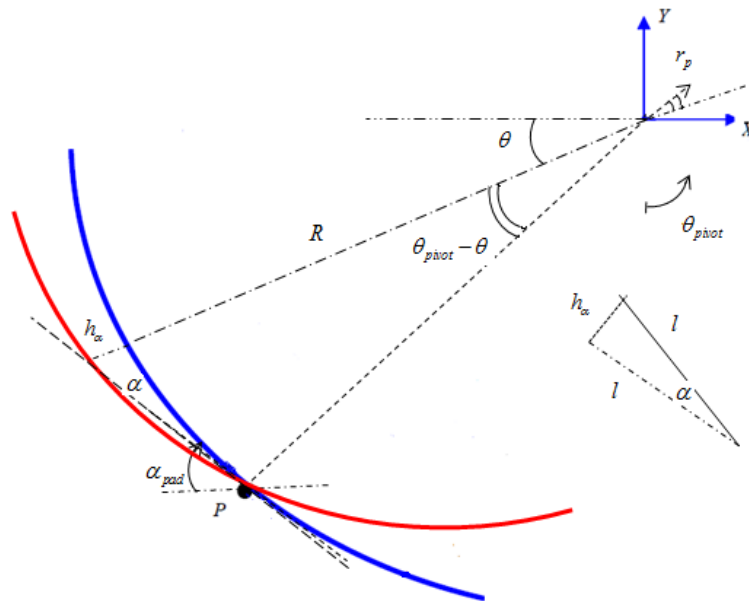


Figura B-3: effetto della rotazione del pad

Con:

$$l = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\theta_{pivot} - \theta)} \quad (B.4)$$

Quindi la misura dello spessore del meato sarà in definitiva:

$$h(\theta) = C_m + e \sin(\alpha) \cos(\theta + 270^\circ) + e \cos(\alpha) \sin(\theta + 270^\circ) - r_p \cos(\theta_{pivot} - \theta) + h_\alpha$$

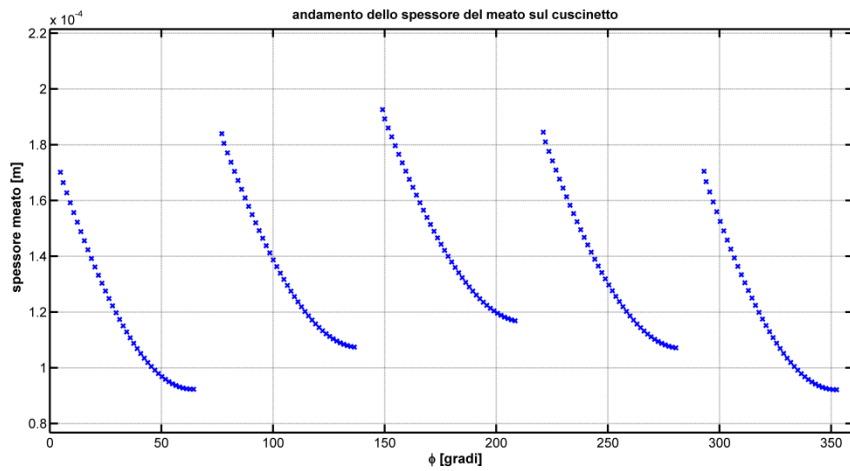


Figura B-4: andamento degli spessori del meato lungo l'intero pattino

Sopra sono riportati gli spessori del meato per i vari cuscinetti del pattino studiato nel capitolo 3, come si può vedere il minimo spessore del meato si ha presso i pattini posti in basso che sono quelli responsabili della maggiore generazione di pressione, mentre il pattino posto in alto risulta essere quello con uno spessore del meato maggiore a causa dell'effetto del precarico.

Allegato C

Controllo sliding mode

Spesso nella formulazione di un problema di controllo si verifica una certa differenza tra il processo reale e il modello matematico ad esso associato. Le differenze tra sistema fisico e modello possono essere dovute a differenti fattori come per esempio, dinamiche non modellate e variazioni o incertezze dei parametri in gioco. A prescindere da queste, è necessario garantire che il sistema di controllo sia in grado di produrre nella pratica le prestazioni richieste.

Un particolare approccio è la metodologia relativa al controllo *sliding mode* facente parte della famiglia dei controlli adattivi a struttura variabile.

Mentre alcune formulazioni di controllo robusto quali le norme H_∞ e H_2 sono a struttura fissa, ovvero si basano su processi che sintetizzano un unico controllore robusto indipendente dallo stato del sistema, il controllo *sliding mode* è un particolare tipo di *variable structure control system* (VSCS); tali controllori sono caratterizzati da una serie di leggi di controllo a retroazione e da una regola di decisione. Quest'ultima, chiamata *switching function*, si basa sul prendere come ingresso lo stato del sistema (non necessariamente lo stato completo, la scelta dipende dalle grandezze che si vogliono controllare) e fornisce in uscita, per l'istante specifico, il particolare controllore a retroazione che il sistema deve adottare per garantire le prestazioni richieste. Si è quindi in presenza di un sistema di controllo a struttura variabile, il quale assume un valore diverso deciso in base al comportamento del sistema.

I primi sistemi di controllo a struttura variabile, comprendenti fasi in modo scivolato, vennero efficacemente proposti e sviluppati, all'inizio degli anni '50 nell'allora URSS, da S. V. Emelianov (che coniò l'espressione controllo a struttura variabile) e dai suoi collaboratori; in occidente, il principale promotore degli studi intesi ad applicare, estendere e a rendere sistematica questa interessante tecnica di controllo, fu Vadim J. Utkin [27].

Lo scopo principale di tale logica di controllo è quello di condurre e poi mantenere lo stato del sistema nelle vicinanze della regione (detta anche regione di *sliding*) dove interviene la *switching function*, presso tale regione si troverà il punto di lavoro desiderato per del sistema. Qui il sistema sotto controllo gode di alcune importanti proprietà: il comportamento dinamico del sistema può essere caratterizzato da una specifica scelta della funzione di *sliding* e la risposta del sistema in anello chiuso risulta essere totalmente insensibile ad alcune classi di

disturbi (incertezze), inoltre una volta che lo stato si trova su questa superficie la sua dinamica segue quella di un sistema di ordine ridotto rispetto all'originale. Il progetto di questo tipo di sistemi di controllo consiste quindi nella scelta di due componenti: la prima è la *switching function*, che permette al sistema di rimanere sulla superficie di *sliding*, mentre l'altra è la legge di controllo che deve garantire che il sistema riesca a raggiungere la superficie di *sliding*. Consideriamo il sistema lineare tempo invariante (LTI)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}]\mathbf{u}(t) \quad (\text{C.1})$$

Dove la matrice di stato abbia dimensioni $[\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mentre la matrice degli ingressi sia tale che $[\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con m il numero degli ingressi nel sistema.

Si voglia ora determinare una legge di controllo per stabilizzare l'uscita del sistema a zero (controllo in vibrazione), ossia imporre che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sia un punto di equilibrio globalmente e asintoticamente stabile per il sistema.

Si scelga ora un vettore reale, di dimensione $n \times m$ (per un sistema a singolo ingresso $n \times 1$), del tipo:

$$[\mathbf{S}] = [s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n] \quad (\text{C.2})$$

Sia $\mathbf{s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la funzione lineare $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [\mathbf{S}] \cdot \mathbf{x}$ in cui $[\mathbf{S}]$ è a rango pieno.

Tale funzione viene detta superficie di *sliding* (detta anche superficie di scivolamento o di commutazione).

La scelta dei coefficienti della matrice $[\mathbf{S}]$ può essere fatta tramite simulazioni o prove, oppure utilizzando metodologie basate sulla minimizzazione di un funzionale di costo [21].

Due sono le proprietà richieste per avere uno *sliding mode*:

- 1) stabilità del sistema sulla superficie di *sliding*;
- 2) raggiungibilità di questa in un tempo finito;

Data la superficie di scivolamento:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_{n-1} x_{n-1} + s_n x_n = 0 \quad (\text{C.3})$$

Nel caso particolare in cui le relazioni tra le variabili di stato sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{x}_2 \\ x_2 &= \dot{x}_3 \Rightarrow x_1 = \ddot{x}_3 \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} \Rightarrow x_1 = \frac{d^{n-1} x_n}{dx^{n-1}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Sostituendo la (C.4) in (C.3) si ottiene:

$$s_1 \frac{d^{n-1} x_n(t)}{dt^{n-1}} + s_2 \frac{d^{n-2} x_n(t)}{dt^{n-2}} + \dots + s_{n-1} \frac{d x_n(t)}{dt} + s_n x_n = 0 \quad (\text{C.5})$$

Quindi la variabile $x_n(t)$ è la soluzione di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti alla quale è associata la seguente equazione caratteristica, ottenuta trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali nulle:

$$s_n p^{n-1} + s_{n-1} p^{n-2} + \dots + s_2 p + s_1 = 0 \quad (\text{C.6})$$

Con p variabile nel dominio di Laplace.

È noto che le $n-1$ soluzioni della (C.5) definiscono univocamente gli $n-1$ modi che compongono la soluzione $x_1(t)$ dell'equazione differenziale omogenea (C.5). Pertanto, se si sceglie il vettore $[\mathbf{S}]$ in modo che il polinomio ad esso associato, individuato dai coefficienti di $[\mathbf{S}]$, abbia le sue $n-1$ radici tutte disposte nel semipiano sinistro, la soluzione della (C.5), ovvero la variabile di stato $x_1(t)$, è la combinazione di modi convergenti a zero. Poiché inoltre le rimanenti variabili di stato $x_2(t), \dots, x_n(t)$ per la (C.4), rappresentano le derivate

sino a quella di ordine $n-1$ di tale variabile $x_1(t)$, esse contengono le derivate di tali modi convergenti e dunque anch'esse convergono a zero, si è quindi spiegata la prima condizione per avere uno scivolamento.

Ne consegue che se ad un qualsiasi istante di tempo la traiettoria del sistema si posiziona sulla superficie di *sliding*, allora l'equilibrio $x=0$ viene successivamente raggiunto.

Di fondamentale importanza risulta essere il fatto che la dinamica del sistema sulla superficie è stata ridotta come si può facilmente vedere dalla (C.6), inoltre essa dipende solo dalla scelta della superficie e non dai parametri del sistema, quindi lo *sliding mode* è insensibile a variazioni della forma di stato e quindi da alcuni parametri del sistema effetti da incertezza, in quanto la superficie di scivolamento (C.6), che definisce il modo con cui la traiettoria tende al punto nominale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, non dipende dal sistema.

Variando $[\mathbf{S}]$ possono essere fissati a piacimento i poli del polinomio ad esso associato e dunque i modi delle variabili di stato e la velocità di convergenza al punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ una volta che la traiettoria si sia posizionata sulla superficie di scivolamento: in altre parole, ad ogni superficie di *sliding* corrisponde un determinato modo dominante nella risposta del sistema e dunque una prefissata velocità di stabilizzazione al punto obiettivo a partire da un punto su tale superficie.

La seconda condizione richiede che la superficie di commutazione debba essere raggiunta in un tempo finito, pertanto, sotto l'ipotesi che sia stata definita una superficie di scivolamento opportuna (ovvero per quanto visto sopra con poli del polinomio associato a $[\mathbf{S}]$ disposti nel semipiano sinistro), è sufficiente progettare una legge di controllo che porti la traiettoria del sistema sulla superficie di *sliding* perché il problema di stabilizzazione sia risolto. Dunque il problema diventa quello di rendere la superficie di scivolamento un attrattore (alla Lyapunov) della generica traiettoria del sistema.

Si consideri quindi la seguente funzione di Lyapunov avente come significato la distanza del punto di lavoro all'istante t rispetto alla superficie di *sliding*

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.7})$$

Pertanto una condizione sufficiente perché tale funzione sia di Lyapunov e quindi la superficie di *sliding* $\mathbf{s}(\mathbf{x})=0$ sia attrattiva per il sistema ed in definitiva il punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sia globalmente asintoticamente stabile, è che la derivata di tale funzione sia definita negativa.

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{s}^T \cdot \dot{\mathbf{s}} < 0 \quad (\text{C.8})$$

detta condizione di raggiungibilità, esprime il fatto che la superficie di *sliding* sia un attrattore almeno locale delle traiettorie di $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))$.

La seconda condizione richiede che la superficie di commutazione debba essere raggiunta in un tempo finito. Per essere sicuri che lo *sliding mode* parta in un certo istante $t > 0$, in maniera indipendente dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$, bisogna essere sicuri che la traiettoria dello stato è sempre rivolta verso $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, questo è matematicamente formulato tramite l'equazione (C.8).

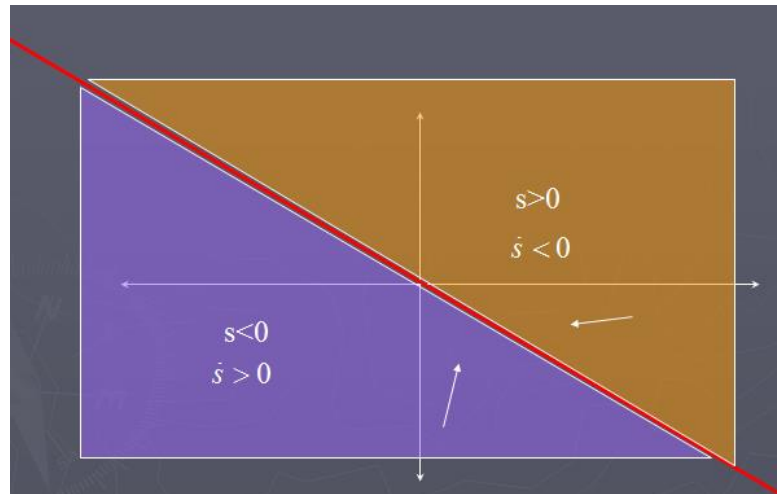


Figura C-1: significato geometrico della condizione di raggiungibilità

Tuttavia la (C.8) è condizione necessaria ma non sufficiente affinché si abbia uno *sliding mode* in un tempo finito, ad esempio si consideri la seguente superficie:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -s \\ s\dot{s} &= -s^2 < 0 \quad \forall s \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$s(t) = e^{-t}s(0)$$

In questo caso la superficie non viene raggiunta in un tempo finito.

$$s(t) = 0 \text{ se } t \rightarrow \infty$$

Applicando la sola condizione di raggiungibilità lo *sliding mode* viene raggiunto in un tempo infinito quindi serve una condizione più forte per garantire la convergenza in un tempo finito.

Viene così definita la condizione di η -raggiungibilità:

$$s\dot{s} < -\eta|s| \text{ con } \eta > 0 \quad (\text{C.10})$$

Considerato il sistema SISO (C.1), la superficie di *sliding* (C.2) e la funzione di Lyapunov (C.7), la derivata della superficie di commutazione è:

$$\dot{s} = [\mathbf{S}]\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{S}][\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{S}][\mathbf{B}]\mathbf{u}(t) \quad (\text{C.11})$$

Eguagliando a zero il secondo membro dell'equazione per rispettare la condizione di raggiungibilità, si introduce il controllo equivalente che rappresenta l'azione di controllo necessaria per mantenere il sistema sulla superficie di commutazione dove valgono le importanti proprietà viste prima.

$$\mathbf{u}_{\text{eq}}(t) = -([\mathbf{S}][\mathbf{B}])^{-1} [\mathbf{S}][\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) \quad (\text{C.12})$$

Ora consideriamo il seguente sistema generico:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}]\mathbf{u}(t) + \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{C.13})$$

Dove $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ è una funzione tipicamente non lineare che racchiude i disturbi, le non linearità, le dinamiche non modellate e le incertezze del sistema, procedendo in maniera analoga a prima il controllo equivalente del sistema sarà:

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = -([\mathbf{S}][\mathbf{B}])^{-1}([\mathbf{S}][\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{S}]\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \quad (\text{C.14})$$

L'azione di controllo può essere quindi scomposta in due componenti:

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = \mathbf{u}_{ragg}(t) + \mathbf{u}_{chatt}(t) \quad (\text{C.15})$$

Dove il primo termine \mathbf{u}_{ragg} rappresenta la componente di raggiungibilità, ovvero la componente che mi permette di raggiungere la superficie di *sliding*: concettualmente esso rappresenta la parte *model based* del controllo e può essere pensato come un generico controllo in retroazione dello stato.

Invece \mathbf{u}_{chatt} rappresenta la componente robusta in grado di tenere il sistema sul piano di scivolamento anche di fronte a disturbi e incertezze di modellizzazione, essa viene di norma scritta per un sistema SISO nel seguente modo:

$$u_{chatt}(t) = -k(s)\text{sign}(s) \quad (\text{C.16})$$

Grazie alla funzione segno la (C.15) gode della seguente importante proprietà:

$$u_{chatt} = \begin{cases} -k & \text{se } s < 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \\ +k & \text{se } s > 0 \end{cases}$$

In pratica a fronte di disturbi che tenderebbero ad allontanare il sistema dalla superficie di *sliding* l'azione di *chattering* risponde con un'azione di controllo discontinua in grado di tenersi su di essa.

Si dimostra che un controllore di questo tipo rispetta le condizioni viste in precedenza, perciò è in grado di generare uno *sliding motion*.

$$\begin{aligned}
 s\dot{s} &< S(Ax(t) + Bu(t)) \\
 s\dot{s} &< SAx(t) - SB(SB)^{-1}SAx(t) - SK \operatorname{sign}(s) \\
 s\dot{s} &< -SK \operatorname{sign}(s) \\
 s\dot{s} &< -\sum_{i=1}^m k_i |s_i| = -\eta |s|
 \end{aligned}
 \tag{C.17}$$

Il procedimento visto sopra può essere facilmente ripetuto in maniera analoga per generici sistemi non lineari in forma compagna:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(t)
 \tag{C.18}$$

Riassumendo quindi un controllo *sliding mode* è composto da due parti come si può vedere in Figura C-2: una parte *model based* detta componente di raggiungibilità (o *reaching mode*) che permette al sistema di portarsi presso la superficie di scivolamento, ovviamente questa componente è affetta da disturbi e incertezze essendo basata sul modello. Una volta raggiunta la superficie di scivolamento la componente robusta permette al sistema di rimanerci sopra nonostante disturbi e incertezze.

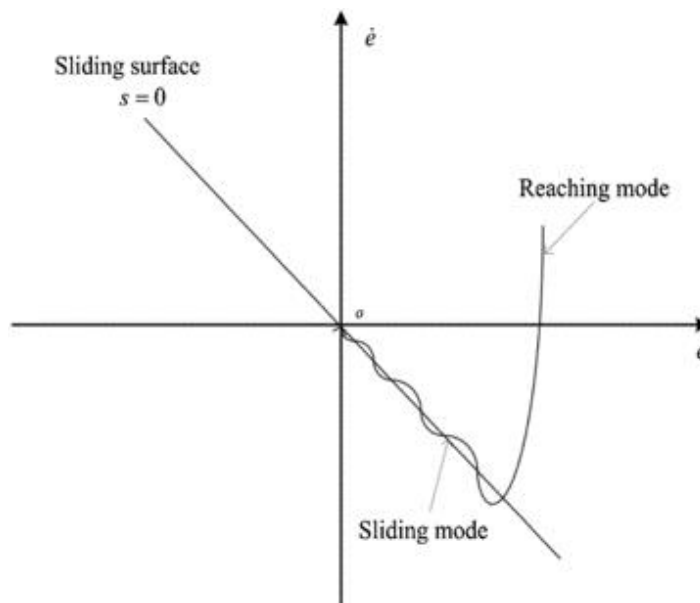


Figura C-2: diagramma di fase di uno *sliding mode*

È interessante notare come la componente di raggiungibilità in realtà non sia strettamente necessaria. Infatti se all'istante iniziale il sistema non è troppo lontano dalla superficie di *sliding*, la sola componente discontinua è in grado di portare e mantenere la soluzione sopra la superficie. In questo caso il controllo diviene un puro *black-box*: ovvero ai fini della sintesi del controllore non è richiesta alcuna informazione sul modello, è necessario solo avere le uscite del sistema. Questo approccio permette il controllo di sistemi che presentano grandi incertezze ed errori di modellazione al prezzo di una componente discontinua molto accentuata, fatto che come si vedrà è il principale problema pratico del controllo *sliding mode*.

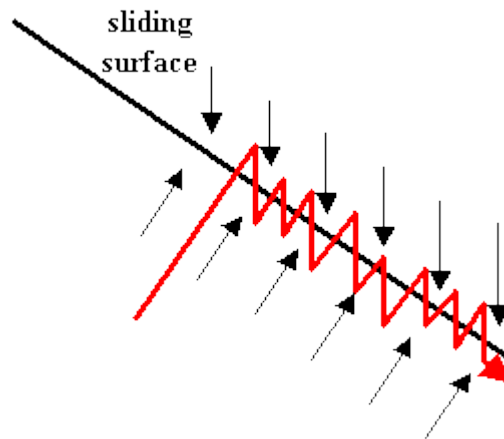


Figura C-3: rappresentazione del *chattering*

La parte discontinua dell'azione di controllo porta al problema del *chattering*, ovvero alla presenza di oscillazioni spurie in alta frequenza: questo effetto è causato dal fatto che vicino alla superficie di commutazione il controllo cambia segno in continuazione, questo potrebbe eccitare eventuali dinamiche di ordine superiore trascurate nel modello, oltre ad usurare fortemente gli attuatori. È comunque possibile modificare la legge di controllo sostituendo alla funzione segno un saturatore od una tangente iperbolica in modo da avere una regolazione più morbida [24].

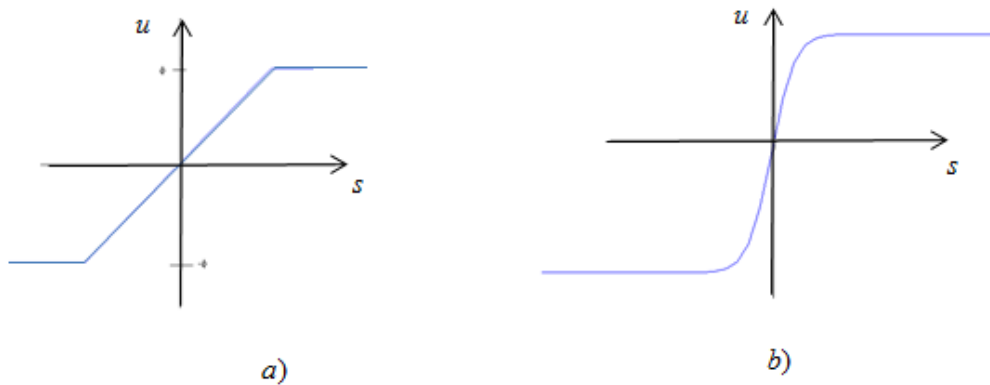


Figura C-4: forma della legge con a) saturatore b) tangente iperbolica

Dove la funzione saturazione è definita nel seguente modo:

$$u_{chatt} = \text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sign}(s) & \text{se } |s| > \phi \\ \frac{s}{\phi} & \text{se } |s| < \phi \end{cases}$$

Con ϕ detto *Boundary Layer*, rappresentante la regione attorno al quale avviene la regolazione morbida.

Quindi per le funzioni saturatore e tangente iperbolica scegliendo in maniera opportuna i parametri della funzione di *sliding* è possibile fare in modo che il controllo reagisca in maniera proporzionale alla lontananza del sistema rispetto alla condizione di $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

Il problema di questa formulazione della componente di *chattering* è che la funzione così definita nell'intorno di $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ non è discontinua quindi formalmente non è garantita la (C.9), per questo in letteratura queste metodologie vengono definite come pseudo *sliding mode*.

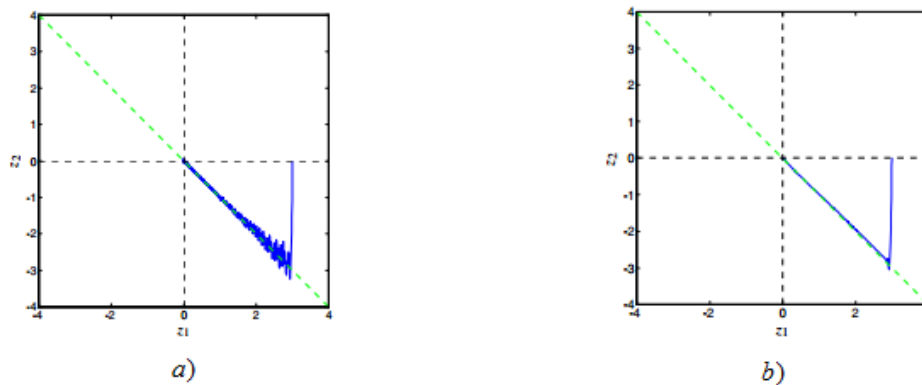


Figura C-5: diagramma di fase con: a) *sliding mode* con funzione segno, b) *pseudo sliding mode*

Altre tecniche per limitare questo indesiderabile fenomeno sono ad esempio gli algoritmi di *twisting* e *super twisting* che si basano sull'introdurre la funzione segno (con le sue discontinuità) nelle derivate dell'azione di controllo ([22],[23]).

Per un generico sistema MIMO (*multi input, multi output*) la matrice dei coefficienti di *sliding* ha dimensione $[S] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ovvero ogni riga rappresenta la superficie di *sliding* su cui agirà la corrispondente azione di controllo.

In letteratura esistono due principali approcci: il metodo del controllo gerarchico oppure l'approccio con diagonalizzazione [21].

Il primo detto anche *fixed order approach*, cerca di usare la i -esima componente dell'azione di controllo per indurre uno *sliding motion* sulla superficie s_1 , sotto l'ipotesi che le componenti di controllo u_1, u_2, \dots, u_{i-1} abbiano già indotto degli scivolamenti su s_1, s_2, \dots, s_{i-1} . La prima componente del controllo è quindi scelta per indurre, uno *sliding motion* su s_1 , qualsiasi siano i valori delle altre componenti del segnale di controllo, considerando il sistema ad ingresso singolo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) + [b_2, \dots, b_m] \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + b_1 u_1(t) \quad (C.19)$$

Una volta che su s_1 si sia stabilito uno scivolamento ideale, la dinamica di ordine ridotto è data da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_{eq}] \mathbf{x}(t) + [b_3, \dots, b_m] \begin{bmatrix} u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + b_2 u_2(t) \quad (C.20)$$

Dove A_{eq} rappresenta la dinamica equivalente ottenuta assumendo che abbia luogo lo scivolamento su s_1 . La seconda componente dell'ingresso del controllo è quindi progettata per indurre uno scivolamento su s_2 considerando l'equazione (C.18). Come l'equazione di un sistema ad ingresso singolo in u_2 . Avendo assunto che su s_1 avviene uno *sliding motion* a prescindere dagli altri segnali di controllo, segue che lo *sliding motion* ha luogo anche in $s_1 \cap s_2$. Usando un metodo induttivo, si può affermare che lo scivolamento del sistema globale avviene definitivamente su $s = \bigcap_{i=1}^m s_i$.

Tuttavia questo approccio soffre di alcune difficoltà pratiche: come si intuisce facilmente, il problema principale è la dipendenza dall'ordine in cui gli scivolamenti vengono indotti sulle superfici di scivolamento, in generale non ci sono garanzie che inizialmente lo scivolamento avvenga proprio sulla superficie s_1 .

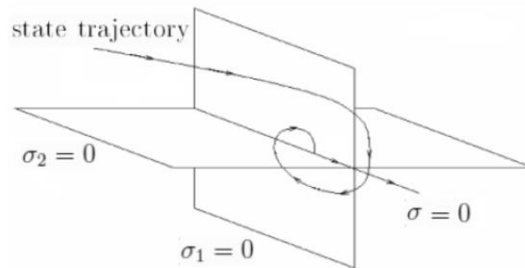


Figura C-6:traiettoria dello stato per un sistema MIMO

L'altro approccio detto con diagonalizzazione, consiste nel cercare di disaccoppiare i vari sistemi: facendo in modo di portare il problema di controllo multi-variabile in uno composto da m sistemi più semplici. Come si è visto l'unica azione di controllo equivalente è:

$$\mathbf{u}_{\text{eq}}(t) = -([\mathbf{S}][\mathbf{B}])^{-1}[\mathbf{S}][\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}_{\text{chatt}}(t) \quad (\text{C.21})$$

Dove:

$$\mathbf{u}_{\text{chatt}}(t) = \begin{bmatrix} k_1(s_1)\text{sign}(s_1) \\ \vdots \\ k_m(s_m)\text{sign}(s_m) \end{bmatrix}$$

è un vettore di dimensioni $m \times 1$ contenente quindi le azioni di *chattering* di ogni sottosistema SISO.

Ovviamente perché la relazione (C.19) sia valida la matrice deve essere invertibile, quindi si deve avere che $\det([\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{B}]) \neq 0$, inoltre per avere dei sottosistemi disaccoppiati deve essere rispettata la condizione $[\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{B}] = [\mathbf{\Lambda}]$, con $[\mathbf{\Lambda}]$ matrice diagonale. Questa condizione risulta essere molto forte in quanto per essere rispettata richiede un numero di attuatori pari al numero di gradi di libertà da controllare, non sono quindi ammessi eventuali ridondanze che accoppiano i vari sottosistemi oppure sistemi sotto-attuati.

Una terza strada consiste nel disaccoppiare i vari sottosistemi vedendo come rumore o disturbi gli effetti del controllo degli altri sottosistemi il cui effetto sarà compensato dalla componente discontinua del controllore a scapito della parte basata sul modello.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + b_i u_i(t) + \text{disturbi}(\mathbf{u})$$

Bibliografia

- [1] Vance, John M. *Rotordynamics of turbomachinery*. John Wiley & Sons, 1988.
- [2] Allaire, P. E., and R. D. Flack. "Design of journal bearings for rotating machinery." *Tenth Turbomachinery Symposium, College Station, TX, Dec.* 1981.
- [3] Chasalevris, Athanasios, and Fadi Dohnal. "Construction and Experimental Application of a Variable Geometry Journal Bearing (VGJB) for the Vibration Suppression of Rotors."
- [4] Chasalevris, Athanasios, and Fadi Dohnal. "A Journal Bearing With Variable Geometry for the Reduction of the Maximum Amplitude During Passage Through Resonance." *Journal of Vibration and Acoustics* 134.6 (2012): 061005.
- [5] Ertas, Bugra, et al. "Stabilizing a 46 MW Multistage Utility Steam Turbine Using Integral Squeeze Film Bearing Support Dampers." *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 137.5 (2015): 052506.
- [6] El-Shafei, A., and J. P. Hathout. "Modeling and control of HSFDs for active control of rotor-bearing systems." *Journal of engineering for gas turbines and power* 117.4 (1995): 757-766.
- [7] Kim, Keun-Joo, Chong-Won Lee, and Jeong-Hoi Koo. "Design and modeling of semi-active squeeze film dampers using magneto-rheological fluids." *Smart Materials and Structures* 17.3 (2008): 035006.
- [8] Cole, Matthew OT, Chakkapong Chamroon, and Prinya Ngamprapasom. "Force feedback control for active stabilization of synchronous whirl orbits in rotor systems with nonlinear stiffness elements." *Journal of Vibration and Acoustics* 134.2 (2012): 021018.
- [9] Cheung, L. Y., et al. "Active vibration control of rotor systems." *Control, 1994. Control'94. International Conference on*. Vol. 2. IET, 1994.
- [10] Santos, I. F. "Design and evaluation of two types of active tilting pad journal bearings." *IUTAM Symposium on Active Control of Vibration*. Vol. 55. 1994.
- [11] Santos, Ilmar Ferreira. "On the adjusting of the dynamic coefficients of tilting-pad journal bearings." *Tribology transactions* 38.3 (1995): 700-706.
- [12] Santos, Ilmar Ferreira. "On the future of controllable fluid film bearings." *Mécanique & Industries* 12.04 (2011): 275-281.
- [13] Varela, Alejandro Cerda, and Ilmar Ferreira Santos. "Tilting-Pad Journal Bearings With Active Lubrication Applied as Calibrated

- Shakers: Theory and Experiment." *Journal of Vibration and Acoustics* 136.6 (2014): 061010.
- [14] Messmer, George A., and Lyle A. Branagan. "Hydrostatically supported tilting pad journal bearing improvements." U.S. Patent No. 6,050,727. 18 Apr. 2000.
- [15] Deckler, D. C., et al. "Modeling of a controllable tilting pad bearing." *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997.* Vol. 5. IEEE, 1997.
- [16] Deckler, D. C., et al. "Simulation and control of an active tilting-pad journal bearing." *Tribology transactions* 47.3 (2004): 440-458.
- [17] Deckler, D. C., et al. "Modeling and control design for a controllable bearing system." *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on.* Vol. 4. IEEE, 2000.
- [18] Cai, Z., M. S. De Queiroz, and M. M. Khonsari. "Adaptive control of active tilting-pad bearings." *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003.* Vol. 4. IEEE, 2003.
- [19] Cai, Zhijun. *Nonlinear Control and Its Application to Active Tilting-Pad Bearings*. Diss. Faculty of the Louisiana State University and Agriculture and Mechanical College in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in The Department of Mechanical Engineering by Zhijun Cai BS, Shanghai JiaoTong University, 2005.
- [20] Wu, An. *Model-Based Nonlinear Control of Active Tilting-Pad Bearings*. Diss. Huazhong University of Science and Technology, China, 2006, 2010.
- [21] Edwards, Christopher, and Sarah Spurgeon. *Sliding mode control: theory and applications*. CRC Press, 1998.
- [22] Bartolini, G., A. Ferrara, and E. Usani. "Chattering avoidance by second-order sliding mode control." *Automatic control, IEEE Transactions on* 43.2 (1998): 241-246.
- [23] Bartolini, Giorgio, et al. "On multi-input chattering-free second-order sliding mode control." *Automatic control, IEEE Transactions on* 45.9 (2000): 1711-1717.
- [24] Kachroo, Pushkin, and Masayoshi Tomizuka. "Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems." *Automatic Control, IEEE Transactions on* 41.7 (1996): 1063-1068.
- [25] Wasserman, Philip D. *Advanced methods in neural computing*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [26] Laghrouche, S., F. Plestan, and A. Glumineau. "Multivariable practical higher order sliding mode control." *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*. Vol. 44. No. 2. IEEE; 1998, 2005.

- [27] Utkin, Vadim Ivanovich. *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Mir Publishers, 1978.
- [28] Hori, Yukio. *Hydrodynamic lubrication*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [29] Saruhan, Hamit, Keith E. Rouch, and Carlo A. Roso. "Design optimization of tilting-pad journal bearing using a genetic algorithm." *International Journal of Rotating Machinery* 10.4 (2004): 301-307.
- [30] Lund, J. W. "Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing." *ASLE transactions* 7.4 (1964): 342-352.
- [31] Nicholas, John C. "Lund's tilting pad journal bearing pad assembly method." *Journal of vibration and acoustics* 125.4 (2003): 448-454.
- [32] Nicholas, J. C., Edgar J. Gunter, and Paul E. Allaire. "Stiffness and damping coefficients for the five-pad tilting-pad bearing." *ASLE TRANSACTIONS* 22.2 (1979): 113-124.
- [33] Someya, Tsuneo, et al. *Journal-bearing databook*. Ed. Tsuneo Someya. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] Knight, J. D., and L. E. Barrett. "Analysis of tilting pad journal bearings with heat transfer effects." *Journal of tribology* 110.1 (1988): 128-133.
- [35] BRANAGAN, LYLEARTHUR. "Thermal analysis of fixed and tilting pad journal bearings including cross-film viscosity variations and deformations(Ph. D. Thesis)." (1988).
- [36] Graboń, Wiesław, and Jan Smykla. "COMPUTER PROGRAM FOR SYMULATION OF PRESSURE DISTRIBUTION IN THE HYDRODYNAMIC RADIAL BEARING." *Artificial Intelligence Driven Solutions to Business and Engineering Problems* (2012): 176.
- [37] Federico Cheli, Alessandra Manenti. *Appunti di lubrificazione idrodinamica*. Spiegel, 1997.
- [38] San Andrés, L. "Static and Dynamic Forced Performance of Tilting Pad Bearings: Analysis Including Pivot Stiffness." *Modern Lubrication Theory, Texas A&M University Digital Libraries, College Station, TX*, <https://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93197> (2010).
- [39] Preumont, André. *Vibration control of active structures: an introduction*. Vol. 179. Springer Science & Business Media, 2011.
- [40] Diana, Giorgio, and Federico Cheli. *Dinamica dei sistemi meccanici*. Polipress, 2010.
- [41] Ferraris, G., V. Maisonnette, and M. Lalanne. "Prediction of the Dynamic Behavior of Non-Symmetrical Coaxial Co-Or Counter-Rotating Rotors." *Journal of Sound and Vibration* 195.4 (1996): 649-666.
- [42] Lalanne, Michel, and Guy Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*. Wiley, 1998.

- [43] Bachschmid, N., P. Pennacchi, and A. Vania. "Identification of multiple faults in rotor systems." *Journal of Sound and Vibration* 254.2 (2002): 327-366.
- [44] Swanson, Erik, Chris D. Powell, and Sorin Weissman. "A practical review of rotating machinery critical speeds and modes." *Sound and vibration* 39.5 (2005): 16-17.
- [45] Yoon, Se Young, Zongli Lin, and Paul E. Allaire. *Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings: Theory and Implementation*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [46] Muszynska, Agnieszka. *Rotordynamics*. CRC press, 2005.
- [47] Lee, Sun U., Chris Leontopoulos, and Colin Besant. "Backward whirl investigations in isotropic and anisotropic systems with gyroscopic effects." *SPIE proceedings series*. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1999.