

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Biomedica



**SVILUPPO DI UN MODELLO COSTITUTIVO
PER DISPOSITIVI BIOMEDICALI SOGGETTI A
FATICA E PLASTICIZZAZIONE**

Relatore: Prof. Francesco MIGLIAVACCA
Correlatore: Prof. Lorenza PETRINI

Tesi di laurea magistrale di:
Alessandro BERTINI Matr. 816903

Anno Accademico 2014–2015

Ringraziamenti

Giunti alla fine di questo impegnativo percorso è giusto ringraziare le persone che lo hanno reso possibile.

Innanzitutto vorrei ringraziare la Prof. Petrini, che con la sua competenza, professionalità ed estrema disponibilità mi ha spronato per dare il meglio, riuscendo sempre durante questo anno di lavoro a chiarirmi i dubbi che nascevano mentre mi addentravo in quello che per me era un nuovo mondo, permettendo quindi la riuscita di questa tesi, che altrimenti non sarebbe davvero stata possibile. Ringrazio anche il Prof. Migliavacca, per avermi indirizzato verso questa avventura, e il Prof. Biscari, i cui chiarimenti sul suo modello e i consigli su alcuni aspetti matematici di questo lavoro sono stati importanti per la riuscita della tesi. Grazie ai ragazzi del Labs ed in particolare a Dario, che mi ha aiutato quando alcuni problemi si sono presentati e grazie alle Dott.sse Villa e Nespoli del CNR di Lecco, per avere svolto le prove sperimentali sui campioni di NiTi. Ringrazio anche l'Ing. Stefano Morlacchi, per avere risolto molti problemi legati alle simulazioni numeriche condotte.

Alessandro

Indice

Sommario	1
Summary	17
1 Leghe a memoria di forma: proprietà e applicazioni tecnologiche	31
1.1 Presentazione delle leghe a memoria di forma	31
1.2 Le leghe Ni-Ti	33
1.2.1 Struttura cristallina	33
1.2.2 Pseudoelasticità e memoria di forma	36
1.3 Analisi delle proprietà meccaniche delle leghe Ni-Ti	40
1.3.1 Curva sforzo-deformazione	40
1.3.2 Moduli elastici dall'austenite e della martensite	41
1.3.3 Asimmetria tra tensione e compressione	45
1.3.4 Comportamento triassiale	45
1.3.5 Plasticità	47
1.3.6 Fatica	48
1.3.7 Fatica strutturale	49
1.3.8 Fatica funzionale	54
1.4 Ulteriori proprietà delle leghe Ni-Ti	55
1.5 Possibili applicazioni tecnologiche in ambito biomedicale	59
2 Modellizzazione teorica del comportamento delle SMA	61
2.1 Basi di meccanica dei continui	61
2.2 Modelli micromeccanici e modelli fenomenologici	62
2.3 Formulazione teorica di un modello fenomenologico	63
2.3.1 Principi termodinamici	63
2.3.2 Metodo degli stati locali	64
2.4 Rassegna di alcuni modelli costitutivi fenomenologici presenti in letteratura	66
2.4.1 Modello Souza-Auricchio-Petrini	66
2.4.2 Miglioramenti del modello di Souza-Auricchio-Petrini	73
2.4.3 Altri modelli costitutivi presenti in letteratura	78

2.4.3.1	Modello di Arghavani et al. (2010)	79
2.4.3.2	Modello di Paiva et al. (2005)	81
2.4.3.3	Modello di Yan et al. (2003)	82
2.4.3.4	Modello di Hartl e Lagoudas (2009)	84
2.5	Obiettivo del lavoro di tesi	87
2.6	Schema di lavoro	88
3	Test sperimentali	89
3.1	Campagna di test sperimentali eseguita presso il CNR di Lecco . . .	90
3.1.1	Analisi termica	90
3.1.2	Descrizione set-up sperimentale per le prove meccaniche . . .	91
3.1.3	Ottenimento del parametro β	92
3.1.4	Test ciclici in trazione	92
3.1.5	Test in trazione fino a plasticizzazione	96
3.2	Campagna di test sperimentali eseguita al Labs	98
3.2.1	Descrizione set-up sperimentale per le prove meccaniche . . .	99
3.2.2	Test effettuati	101
3.3	Considerazioni sulle prove eseguite	105
4	Implementazione e confronto di due modelli costitutivi per le SMA	107
4.1	Sviluppo di un'interfaccia in ambiente MATLAB per lo studio di modelli costitutivi per le SMA	107
4.2	Implementazione del modello di Auricchio et al. (2007)	111
4.2.1	Formulazione teorica	111
4.2.2	Formulazione discreta	116
4.2.3	Test effettuati	123
4.2.4	Discussione risultati ottenuti	126
4.3	Implementazione del modello di Biscari	128
4.3.1	Formulazione teorica	128
4.3.2	Formulazione discreta	132
4.3.3	Test	144
4.3.4	Discussione risultati ottenuti	156
5	Proposta di un nuovo modello costitutivo e confronto con i dati sperimentali	159
5.1	Considerazioni iniziali	159
5.2	Inserimento dei diversi moduli elastici di austenite e martensite nel modello di Souza-Auricchio-Petrini	164
5.2.1	Utilizzo del modello di Urbano et al. (2015)	164
5.2.2	Utilizzo di uno schema di Reuss	169
5.3	Formulazione continua del modello con effetti plastici	177

5.4	Formulazione discreta	183
5.5	Calibrazione dei parametri del modello costitutivo	193
5.6	Test numerici	199
5.6.1	Primi test	200
5.6.2	Analisi sensitività dei parametri del modello	204
5.6.3	Confronto con prove sperimentali di letteratura	207
5.6.4	Confronto con le prove sperimentali descritte nel Cap. 3	210
5.7	Discussione risultati	216
6	Simulazioni numeriche	219
6.1	Presentazione dei dispositivi	219
6.1.1	Distretto femoropopliteo: aterosclerosi e stenting	219
6.1.2	Stenosi della valvola aortica: sostituzione tramite catetere (Trans-catheter aortic valve intervention, TAVI)	223
6.2	Impostazione delle simulazioni numeriche	225
6.3	Analisi numerica di stent	227
6.3.1	Scelta della mesh	229
6.3.2	Simulazione di crimpaggio	235
6.3.3	Simulazione di crimpaggio e rilascio in tubo di silicone, seguita da ciclaggio meccanico	249
6.4	Analisi numerica del dispositivo per TAVI	256
6.4.1	Formatura e crimpaggio	257
6.4.2	Crimpaggio con rilascio nel comparto di silicone	264
6.5	Considerazioni finali sulle simulazioni numeriche condotte	268
7	Conclusioni e sviluppi futuri	271
	Bibliografia	284
	Appendice	285

Elenco delle figure

1	Rappresentazione del dispositivo per il posizionamento della valvola aortica e del suo rilascio all'interno del comparto di silicone	8
2	Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di fatica	9
3	Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di plasticità	10
4	Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ di letteratura e quelle ottenute dal modello proposto.	11
5	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 4% di deformazione eseguiti al CNR	12
6	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 7% e 8% di deformazione eseguiti al CNR	12
7	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs.	13
8	Risultati delle simulazioni di interazione tra il dispositivo per TAVI ed il comparto di silicone, in termini di curve-sforzo deformazione del punto più sollecitato	14
9	TAVI device and its expansion inside the silicone compartment	23
10	$\sigma - \varepsilon$ curves obtained from the proposed model, with fatigue	24
11	$\sigma - \varepsilon$ curves obtained from the model with plasticity activated	24
12	Comparison between $\sigma - \varepsilon$ curves found in literature and obtained from the proposed model	26
13	Comparison between model prediction and experimental data from a maximum 4% strain cyclic test performed at CNR	27
14	Comparison between model predictions and experimental data from maximum 7% and 8% strain cyclic tests performed at CNR	27
15	Comparison between model predictions and experimental data from maximum 10% and 12% strain cyclic tests performed at Labs.	28
16	$\sigma - \varepsilon$ curves of the most stressed point in the TAVI device during expansion inside the compartment, both neglecting or considering yielding effects.	29
1.1	Le ere della scienza dei materiali	32
1.2	Struttura cristallina di austenite e martensite	33

1.3	Trasformazione tra austenite e martensite twinned	34
1.4	Fenomeno di detwinning	35
1.5	Temperature caratteristiche ottenute per ciclaggio termico	36
1.6	Pseudoelasticità	37
1.7	Effetto a memoria di forma	39
1.8	Tipica curva sforzo deformazione di una SMA, in campo pseudoelastico	40
1.9	Effetto della temperatura di esercizio	42
1.10	Influenza della temperatura sullo sforzo critico [1]	43
1.11	Modulo elastico variabile della martensite	44
1.12	Asimmetria tra una prova di trazione e di compressione [2]	46
1.13	Confronto test biassiali	47
1.14	Curva sforzo-deformazione con plasticità [3]	48
1.15	Relazione tra deformazione applicata e deformazione recuperata [3] .	49
1.16	Rappresentazione schematica della flessione rotante	50
1.17	Risultati Rebelo et al. sulla fatica funzionale	51
1.18	Test di Eggeler	52
1.19	Test di Wang et. al sulla fatica funzionale	53
1.20	Curve sforzo-deformazione per prova di trazione ciclica in controllo di sforzo [4]	54
1.21	Illustrazione del sistema di attuazione delle molle	55
1.22	Effetti della fatica funzionale su un filo sottoposto a ciclaggi termici .	56
1.23	Curve sforzo-deformazione dei tessuti biologici e di una lega Ni-Ti a confronto [5]	59
1.24	Esempio di stent autoespandibile in Nitinol	60
2.1	Identificazione dei parametri dai diagrammi sforzo-deformazione . . .	70
2.2	Curve deformazione-temperatura a due carichi differenti	71
2.3	Dipendenza dalla temperatura del raggio del dominio elastico	73
2.4	Curva sforzo-deformazione in campo pseudoelastico con modifiche di Auricchio et al. (2009)	74
2.5	Confronto tra modello di Urbano e modello Auricchio-Petrini origina- le. (Urbano et al., 2015) [6]	75
2.6	Risultati modello Auricchio et al. (2007)	76
2.7	Prova di trazione monoassiale con plasticità nel modello di Paiva . .	81
2.8	Risultati ottenuti con il modello di Yan	83
3.1	Curve flusso termico-temperatura tipiche di una lega a memoria di forma	90
3.2	Curva ottenuta con tecnica DSC per il materiale utilizzato nelle prove sperimentali eseguite presso il CNR di Lecco.	91
3.3	Macchina di prova utilizzata per i test meccanici presso il CNR . . .	91

3.4	Ottenimento del parametro β	92
3.5	Curve $\sigma - \varepsilon$ di prove di trazione al 4%, 7% e 8% di deformazione massima a T=23 °C e di una prova al 4% con T=50°C	93
3.6	Curve $\sigma - \varepsilon$ sovrapposte relative alle prove con 4,7,8 % di deformazione massima	94
3.7	Curve $\sigma - \varepsilon$ di una prova di trazione di carico e scarico fino al 10% di deformazione, seguita da 5 cicli al 5%	95
3.8	Confronto tra la deformazione letta dall'estensimetro e quella ottenuta dal movimento della traversa in una prova ciclica di trazione.	95
3.9	Confronto sforzo critico di snervamento su test di trazione condotti a temperatura diverse.	96
3.10	Curve $\sigma - \varepsilon$ relative a prove di trazione in cui si porta il materiale in plasticità, fino a differenti deformazioni massime	97
3.11	Curve $\sigma - \varepsilon$ relative a delle prove di trazione fino a completa plasticizzazione della SMA	98
3.12	Macchina MTS utilizzata per le prove presso il LABS del Politecnico di Milano	99
3.13	Pannello di comando della macchina di prova MTS	100
3.14	Estensometro a disposizione per i test effettuati presso il Labs	100
3.15	Provini utilizzati nelle prove di trazione, costituiti da tubi irrigiditi alle estremità da chiodi, e apparato di prova completamente montato	101
3.16	Curva $\sigma - \varepsilon$ di una prova di trazione fino all'8% di deformazione, seguita da trazione fino alla rottura	102
3.17	Curve $\sigma - \varepsilon$ relative a 15 cicli di trazione a diverse deformazioni massime, 5%, 8%, 10% e 12%	102
3.18	Confronto tra il comportamento del materiale testato rispetto a test del lavoro di Wang et al. (2008), nel caso di elevata plasticizzazione	103
3.19	Confronto tra la posizione del plateau sottostante a diversi livelli di deformazione massima imposta	104
4.1	Interfaccia grafica	109
4.2	File .txt di input	110
4.3	Interfaccia grafica per gestire la creazione di grafici	110
4.4	Relazione $s = s(e^{tr})$ nel modello di Souza	113
4.5	Relazione $s = s(e^{tr})$ nel modello di Auricchio	114
4.6	Test monoassiali sul modello di Auricchio senza degradazione e saturazione della fatica	124
4.7	Test monoassiali sul modello di Auricchio con saturazione	125
4.8	Test monoassiali sul modello di Auricchio con degradazione e saturazione attivate	126

4.9	Test monoassiali sul modello di Auricchio a basse temperature	127
4.10	Rappresentazione dell'evoluzione del dominio di trasformazione di fase [7]	129
4.11	Rappresentazione di come le diverse definizioni del dominio elastico inducano superfici limite diversamente orientate [7]	131
4.12	Test modello Biscari 1, effetto parametri k_1 e k_2 , $a = 0$	145
4.13	Test modello Biscari 1, effetto parametri k_1 e k_2 , $a = 1$	146
4.14	Test monoassiale sul modello Biscari 1, $a = 0$	148
4.15	Test monoassiale sul modello Biscari 1, $a = 1$	149
4.16	Test monoassiale sul modello Biscari 1, $a = 0.2$	150
4.17	Curva sforzo-deformazione, confronto con il modello di Auricchio . .	150
4.18	Prova di trazione fino a 1200 MPa, modello Biscari 1	151
4.19	Test monoassiale sul modello Biscari 2, $a = 0.2$	153
4.20	Prova di trazione fino a 1200 MPa con il modello Biscari 2	154
4.21	Prova di trazione fino a 1200 MPa con il modello Biscari 2, seguita da cicli minori di carico e scarico.	155
4.22	Modello Biscari, prova ciclica di trazione fino a 300 MPa	155
4.23	Modello Biscari ∞ , prova di trazione fino a 1200 MPa.	156
5.1	Confronto tra curve monoassiali sforzo-deformazione ottenute da dati sperimentali (blu) e da un modello numerico che non catturi la plasticità (rosso e grigio) [8]	160
5.2	Immagini delle zone critiche del dispositivo per la sostituzione della valvola aortica, prima (a) e dopo il crimpaggio (b) [8]	161
5.3	Curva sforzo-deformazioni ($\sigma - \varepsilon$) relativa ad una prova di trazione con carico e scarico a differenti deformazioni massime (2,3,4,5,6 %), effettuata con il modello di Urbano	170
5.4	Rappresentazione schematica di una cella elementare di SMA per l'applicazione dello schema di Reuss	171
5.5	Confronto di curve $\sigma - \varepsilon$ relative ad una prova di trazione con carico e scarico fino ad una deformazione del 2,3,4,5,6 % tra il modello presentato e quello di Urbano	176
5.6	Illustrazione del significato dei parametri A e ϕ	183
5.7	Curva sforzo-deformazione con evidenziati i parametri che possono essere ricavati	194
5.8	Rappresentazione del significato del parametro β	195
5.9	Illustrazione del significato dei parametri A e ϕ	196
5.10	Calibrazione dei parametri B e b da una curva $\sigma - \varepsilon$	199
5.11	Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di fatica .	201
5.12	Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di plasticità	202

5.13	Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, relativa ad una prova di trazione seguita da compressione	203
5.14	Verifica robustezza numerica del modello: confronto tra i test svolti con diversi incrementi di carico	203
5.15	Effetto del parametro k sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa	204
5.16	Effetto del parametro A sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa	205
5.17	Effetto del parametro ϕ sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa	205
5.18	Effetto del parametro h' sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa	205
5.19	Effetto del parametro b sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione fino a 600 MPa, seguita da un secondo ciclo a 900 MPa	206
5.20	Effetto del parametro B sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione fino a 600 MPa, seguita da un secondo ciclo a 900 MPa	207
5.21	Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Wang et al. (2008) [9] e quelle ottenute dal modello proposto	209
5.22	Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Kan et al. (2010) [4] e quelle ottenute dal modello proposto	210
5.23	Analisi delle curve sperimentali dei test sperimentali eseguiti al CNR di Lecco per l'ottenimento di alcuni parametri di interesse per la calibrazione del modello.	210
5.24	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 4% di deformazione eseguiti al CNR	212
5.25	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 7% e 8% di deformazione eseguiti al CNR	212
5.26	Curva $\sigma - \varepsilon$ di una prova di trazione a rottura utilizzata per ottenere i parametri del modello	213
5.27	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio all' 8% di deformazione eseguiti al Labs	214
5.28	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio all' 5% di deformazione eseguiti al Labs	215
5.29	Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs	215
5.30	Confronto tra i risultati dati dal modello ponendo $h' = 70000\text{MPa}$ e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs.	216
5.31	Confronto tra i risultati del modello nel test di ciclaggio all' 8% di deformazione eseguito al Labs con quelli ottenibili con il modello Souza-Auricchio-Petrini	217

6.1	Decorso delle arterie nel distretto femoropopliteo e rappresentazione della formazione di una placca	220
6.2	Rappresentazione della realizzazione di un bypass vascolare	221
6.3	Rappresentazione della metodologia PTA	221
6.4	Rappresentazione della metodologia di stenting associata a PTA	222
6.5	Stent autoespandibile in lega NiTi inserito in un catetere	222
6.6	Medtronic CoreValve	223
6.7	Immagini delle zone critiche di uno stent per valvola aortica, prima (a) e dopo il crimpaggio (b) [8]	224
6.8	Confronto tra curve monoassiali sforzo-deformazione ottenute da dati sperimentali (blu) e da un modello numerico che non catturi la plasticità (rosso e grigio) [8]	225
6.9	Stent commerciale Lifestent	227
6.10	Stent commerciale Maris Plus	227
6.11	Stent commerciale Absolute Pro	228
6.12	a) Rappresentazione della geometria usata per i test di sensitività, con i vincoli imposti b) Deformata ottenuta	229
6.13	Rappresentazione di un dettaglio delle mesh realizzate, con 2, 3, 4, 6 e 12 elementi lungo il piano di flessione della struttura	230
6.14	Test di sensitività della mesh. Risultati in termini di curve forza-spostamento, suddivisi per tipo di elementi finito.	231
6.15	Test di sensitività della mesh. Risultati in termini di curve forza-spostamento, suddivisi per numero di elementi utilizzati.	232
6.16	Rappresentazione della mesh scelta per le tre geometrie di stent. a) Lifestent b) Maris Plus c) Absolute Pro	234
6.17	Rappresentazione della superficie rigida utilizzata per il crimpaggio	235
6.18	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus, con la plasticità disattivata	238
6.19	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus, con soglia di plasticità posta a 700 MPa	239
6.20	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus, con soglia di plasticità posta a 600 MPa	240
6.21	Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro, con la plasticità disattivata	242
6.22	Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro, con soglia di plasticità posta a 600 MPa	243
6.23	Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro con soglia di plasticità posta a 500 MPa	244
6.24	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent, con plasticità disattivata	246

6.25	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent, con soglia di plasticità posta a 1000 MPa	247
6.26	Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent, con soglia di plasticità posta a 800 MPa	248
6.27	Raffigurazione della discretizzazione utilizzata per il tubo di silicone .	250
6.28	Rappresentazione del vincolo MPC applicato ad una estremità del tubo	251
6.29	Risultati delle simulazioni di interazione tra lo stent Maris Plus con il tubo di silicone, in termini di curve-sforzo deformazione del punto più sollecitato	254
6.30	Risultati delle simulazioni di interazione tra lo stent Absolute Pro con il tubo di silicone, in termini di curve-sforzo deformazione del punto più sollecitato	255
6.31	Modello geometrico del dispositivo per TAVI	257
6.32	Rappresentazione delle superfici cilindriche usate per il processo di formatura del dispositivo per TAVI	258
6.33	Rappresentazione della mesh utilizzata per le simulazioni sul dispositivo per TAVI	259
6.34	Mesh corrispondente al dispositivo al termine del processo produttivo	260
6.35	Rappresentazione del dispositivo per TAVI e della superficie rigida usata per il crimpaggio, prima e dopo la riduzione del diametro. . . .	261
6.36	Risultati della simulazione di crimpaggio sul dispositivo di impianto della valvola, con la plasticità disattivata	262
6.37	Risultati della simulazione di crimpaggio sul dispositivo di impianto della valvola, con soglia di plasticità posta a 1100 MPa	263
6.38	Comparto di silicone utilizzato per i test in vitro a fatica	265
6.39	Rappresentazione del dispositivo per TAVI espanso all'interno del comparto	265
6.40	Risultati delle simulazioni di interazione tra il dispositivo per TAVI ed il comparto di silicone, in termini di curve-sforzo deformazione del punto più sollecitato	267
7.1	Curva $\sigma - \varepsilon$ di una prova monoassiale in cui si porta il provino al 7% di deformazione in trazione, si scarica, si applica una deformazione in compressione del 5%, e infine si fa seguire un'ulteriore ciclo in trazione.	286
7.2	Test biassiali effettuati presso il Labs. A sinistra la storia di deformazione imposta, a destra gli sforzi corrispondenti ottenuti.	288
7.3	Risultati in termini di curve $\sigma - \tau$ ottenuti dal modello, simulando le storie di carico biassiali imposte sperimentalmente	289

Elenco delle tabelle

4.1	Parametri utilizzati per i test sul modello di Auricchio	123
4.2	Parametri utilizzati per i test sul modello di Biscari	144
5.1	Parametri utilizzati per i test sul modello di Souza-Auricchio-Petrini con le modifiche proposte da Urbano et al. (2015)	169
5.2	Parametri utilizzati per i test sul modello con diverse proprietà elastiche	176
5.3	Parametri utilizzati per i test sul modello formulato	200
5.4	Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali di Wang et al. (2008)	207
5.5	Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali di Kan et al. (2010)	208
5.6	Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali ottenuti al CNR	211
5.7	Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali ottenuti al LABS	213
6.1	Caratteristiche geometriche dei modelli di stent disponibili	228
6.2	Sforzi e deformazioni plastiche utilizzate per calibrare il materiale elastoplastico usato per il test di sensitività della mesh	229
6.3	Valori di sforzo di von Mises massimi raggiunti in un elemento finito della zona più sollecitata della struttura a V, al variare del numero di elementi e del loro tipo.	233
6.4	Caratteristiche geometriche dei modelli di stent studiati	235
6.5	Parametri utilizzati per le simulazioni sul Lifestent	236
6.6	Parametri utilizzati per le simulazioni sul Maris Plus	237
6.7	Parametri utilizzati per le simulazioni sull’Absolute Pro	237
6.8	Tempi di calcolo necessari al completamento delle analisi numeriche di crimpaggio degli stent.	249
6.9	Dimensioni dei tubi di silicone utilizzati per i diversi stent, nel caso di alto (1) e minore (2) oversizing. Lo spessore è sempre pari a 1 mm .	250
6.10	Valori di forza assiale necessaria per ottenere un allungamento del 10% dei tubi	251

6.11	Schema riassuntivo degli step dell'analisi di rilascio degli stent all'interno del tubo di silicone	252
6.12	Valori di sforzo e deformazione massimi e minimi durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato lo stent Maris Plus	253
6.13	Valori di sforzo e deformazione massimi e minimi durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato lo stent Absolute Pro	256
6.14	Parametri utilizzati per le simulazioni per la valvola aortica	259
6.15	Schema riassuntivo degli step dell'analisi di rilascio della valvola aortica all'interno del comparto di silicone	266
6.16	Valori di sforzo e deformazione durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato il dispositivo per TAVI	267

Elenco degli algoritmi

4.1	Funzione chiamante il modello costitutivo [10]	108
4.2	Modello Auricchio	119
4.3	Modello Biscari 1	135
4.4	Modello Biscari 2	138
4.5	Modello Biscari ∞	141
5.1	Algoritmo discreto per modello di Souza-Auricchio-Petrini con le modifiche introdotte da Urbano et al. (2015)	166
5.2	Algoritmo discreto per modello di Souza modificato	173
5.3	Modello proposto	187

Sommario

Introduzione

Le leghe a memoria di forma (SMA) hanno delle peculiari proprietà, quali la pseudoelasticità e l'effetto a memoria di forma, che le rendono attraenti per uno svariato spettro di applicazioni. Riferendoci al campo biomedicale, alcune possibili applicazioni possono essere il campo ortodontico, per la realizzazione di fili ortodontici in grado di esibire forze moderate e costanti per diverse condizioni di deformazione imposta, o il campo ortopedico, dove si sfrutta il fatto che le proprietà meccaniche esibite dalle leghe NiTi sono simili a quelle dell'osso naturale. L'applicazione senz'altro più diffusa è però quella degli stent vascolari, ovvero dispositivi metallici che vengono inseriti in corrispondenza di tratti di arterie stenotiche per ripristinarne le dimensioni originarie del lume.

A causa del complesso comportamento termo-meccanico non lineare delle leghe NiTi, lo sviluppo di strumenti computazionali che possano modellarle correttamente in modo da poter effettuare simulazioni numeriche predittive diventa estremamente utile. Negli ultimi anni si è assistito alla formulazione di un numero davvero notevole di modelli costitutivi in grado di cogliere gli aspetti fondamentali del comportamento delle SMA. L'obiettivo di questo sforzo dipende dal fatto che non si è interessati solamente alla modellizzazione degli aspetti primari delle SMA, come pseudoelasticità o memoria di forma, ma che si vuole cercare di introdurre nella descrizione teorica data dal modello anche aspetti minori, anche se non di più piccola importanza, quali l'asimmetria tra trazione e compressione, le differenti proprietà meccaniche di austenite e martensite, l'accumulo progressivo di deformazione al ciclaggio ripetuto, la possibilità di cogliere lo snervamento, la plasticità e gli effetti di quest'ultima sulla trasformazione di fase. Non da meno sarebbe molto utile riuscire a formulare un modello in grado di funzionare in un range di temperature molto diverse, in modo che con un solo modello si possa descrivere il fenomeno di pseudoelasticità piuttosto che la memoria di forma.

Un modello costitutivo interessante, in quanto caratterizzato da semplicità e robustezza numerica ed allo stesso tempo da una buona capacità di descrivere sia la pseudoelasticità che l'effetto a memoria di forma, è il modello di Souza-Auricchio-

Petrini [11–13].

Questo modello, tuttavia, non è in grado di considerare le diverse proprietà meccaniche di austenite e martensite, inoltre trascura i fenomeni di fatica e plasticizzazione. Sarebbe quindi auspicabile migliorarlo in modo da inserirvi tali aspetti; tra i lavori pubblicati negli ultimi anni che si pongono tale obiettivo, si citano il lavoro di Auricchio et al.(2007) [14], nel quale il modello originale viene riformulato per renderlo in grado di cogliere la fatica, e quello di Barrera et al. (2014) [7], in cui si cerca di modificare in modo adeguato il modello sopra citato per introdurre anche la plasticizzazione. Entrambi i lavori tuttavia non si configurano come soluzioni definitive, in quanto presentano ancora alcune problematiche, come verrà chiarito nel seguito. Si rende quindi necessario procedere alla formulazione di un nuovo modello costitutivo che ne possa superare le limitazioni.

Obiettivi

L’obiettivo del lavoro è la formulazione di un modello costitutivo per le SMA in grado di cogliere sia il fenomeno di fatica che quello di plasticizzazione. Piuttosto che formulare un modello totalmente nuovo, si è deciso di utilizzare come base di partenza il modello di Souza-Auricchio-Petrini, già utilizzato in altri lavori ed anche implementato in software commerciali, aggiungendovi gli aspetti mancanti. In particolare sono state studiate in modo accurato le proposte di modifica del modello di Souza-Auricchio-Petrini presenti nei lavori di Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014), in modo da evidenziarne eventuali limitazioni rispetto a quello che è il reale comportamento sperimentale delle SMA. Partendo da esse, è stato formulato un nuovo modello costitutivo, che ha il vantaggio di cogliere entrambi i fenomeni sopra citati, ma superando le problematiche ancora presenti.

Per avere a disposizione dei dati che descrivano effettivamente come i fenomeni di fatica e plasticizzazione influiscano sul comportamento sperimentale del materiale è stata condotta una campagna di test sperimentali. I risultati ottenuti, unitamente ai dati reperiti in letteratura, hanno rappresentato la base di partenza per lo sviluppo del modello e hanno permesso di verificarne l’efficacia.

Infine si sono svolte delle simulazioni numeriche su dispositivi biomedicali, quali stent e valvole cardiache, in modo da mostrare quale sia l’utilità, in ambito ingegneristico biomedico, nell’aver a disposizione un modello costitutivo in grado di considerare l’evoluzione dei fenomeni plastici e di fatica. Le due categorie di dispositivi citati, infatti, durante il loro impianto subiscono notevoli deformazioni, tali da portare il materiale in plasticizzazione; inoltre durante il loro funzionamento subiscono sollecitazioni tali da poter indurre problemi di fatica. Fino ad ora non si avevano a disposizione strumenti computazionali in grado di considerare tali aspetti, quindi è interessante mostrare come i risultati delle simulazioni siano da essi influenzati.

Materiali e metodi

Test sperimentali su provini in lega NiTi

Sono state eseguite due serie di test sperimentali su provini in lega NiTi. La prima serie consiste in prove di trazione monoassiali su fili in lega di NiTi ed è stata eseguita presso il CNR IENI (Istituto per l'Energetica e le Interfasi), Unità di Lecco, sfruttando una collaborazione presente con il Politecnico di Milano. I test sono stati eseguiti con la macchina MTS 2/M su un filo di diametro 1.2 mm in lega di NiTi, e per semplicità a temperatura ambiente, pari a 23°C, temperatura a cui però il materiale non si trova in fase austenitica, ma in fase R. Il metodo utilizzato è stato di imporre una velocità di movimento della traversa di 0.25 mm/min, combinato con l'utilizzo di un estensometro su una porzione centrale di filo, in modo da ottenere un controllo della prova in deformazione. L'utilizzo di un estensometro posizionato nella parte centrale del filo permette di monitorare correttamente il comportamento del provino, escludendo eventuali effetti di bordo. Sono state effettuate delle prove cicliche (20 cicli) di carico e scarico in trazione, fino a diverse deformazioni massime, rispettivamente 4%, 7% e 8%. In seguito sono state eseguite prove in cui il materiale è stato portato in campo plastico. La prima indagine effettuata è consistita nel valutare se la soglia di snervamento del materiale variesse con la temperatura. Infatti si potrebbe pensare che la plasticizzazione di una lega a memoria di forma abbia caratteristiche differenti a seconda che si conduca il test ad una temperatura in cui sia stabile l'austenite, piuttosto che la martensite. Nelle prove successive il materiale è stato portato in plasticità, imponendo deformazioni massime via via crescenti (10%, 11%, 12%, 14%) per studiare l'effetto che le deformazioni plastiche hanno sulla capacità del materiale di esibire una trasformazione di fase.

La seconda campagna di test sperimentali è stata condotta presso il Laboratorio di Meccanica delle Strutture Biologiche (Labs) del Politecnico di Milano, utilizzando una macchina MTS, modello 632.11C-20, su provini cilindrici cavi ottenuti da un tubo di SMA di diametro esterno 2.16 mm e diametro interno 1.7 mm, fornito da Medtronic Endovascular Therapies. Il tubo, utilizzato da questa azienda per la produzione di stent vascolari, è costituito da lega di NiTi stabile in austenite a temperatura ambiente. Si è deciso, quindi, di ripetere i test eseguiti dal CNR per avere dei dati su un materiale che si trova pienamente in fase austenitica. I test effettuati sono dei ciclaggi di carico e scarico a diverse deformazioni massime, rispettivamente al 5, 8, 10 e 12 %, ripetuti 15 volte.

Implementazione dei modelli di Auricchio et al. e Barrera et al.

Il modello proposto da Auricchio et al. (2007) [14] si configura molto simile al modello Souza-Auricchio-Petrini, con l'obiettivo però di migliorarlo tenendo in

considerazione gli aspetti sperimentali dovuti alla fatica, ovvero l'accumulo di deformazione irreversibile in seguito all'applicazione di cicli di carico e scarico ripetuti, cui spesso si associa una degradazione del materiale, che si manifesta con un abbattimento progressivo degli sforzi critici necessari per causare la trasformazione fase (da austenite o martensite multivariante a martensite monovariante). Il modello di Souza-Auricchio-Petrini ha una sola variabile interna, il tensore \mathbf{e}^{tr} (tensore deviatorico del secondo ordine), che rappresenta la deformazione associata alla trasformazione di fase. Il modello di partenza è quindi modificato tramite l'introduzione di un'ulteriore variabile interna, il tensore di fatica \mathbf{q} (tensore deviatorico del secondo ordine), che rappresenta la deformazione inelastica irreversibile, o meglio, la parte di \mathbf{e}^{tr} che non può essere recuperata durante lo scarico.

Il modello di Barrera et al. (2014) [7] è un'evoluzione di quello di Auricchio, ponendosi sostanzialmente due obiettivi:

- aggiungere la capacità di cogliere gli effetti plastici per valori elevati di sforzo, mantenendo al contempo la possibilità di descrivere la fatica;
- considerare che con l'evoluzione di \mathbf{q} , all'interno del materiale si ha la formazione di domini microscopici in cui non possono avvenire eventuali future trasformazioni di fase; ciò implica che il tensore di fatica \mathbf{q} abbia anche un ruolo nello stabilire forma e dimensione del dominio in cui può evolvere il tensore \mathbf{e}^{tr} . La modellizzazione di questo fenomeno permette di risolvere alcuni aspetti critici evidenziati nel modello di Auricchio et al. al passaggio da un carico di trazione ad un carico di compressione.

Punto fondamentale del lavoro di Barrera et al. (2014) è la formulazione di una superficie limite del dominio elastico che permetta di cogliere sia il fenomeno di plasticità che quello di fatica; gli autori propongono tre diverse funzioni limite, basate sull'utilizzo di norme differenti, ovvero norma 1, norma 2 e norma del massimo. Utilizzando una definizione basata sulla norma 1 sostanzialmente la funzione limite coincide con quella del modello di Auricchio, che ha l'effetto per cui ogni variazione di \mathbf{e}^{tr} sia immediatamente seguita da una modifica di \mathbf{q} . Questo comportamento, tuttavia, non permette di cogliere in modo corretto la plasticità, che solitamente ha luogo in corrispondenza di valori di sforzo elevati, in cui ormai nel modello il valore di \mathbf{e}^{tr} è fisso. Utilizzando una definizione della superficie limite basata su una norma 2, la forma del dominio elastico diventa più complessa, ammettendo anche situazioni in cui si abbia solamente l'evoluzione di una delle due variabili interne e quindi permettendo il fenomeno di plasticità. La scelta della norma del massimo include gli stessi vantaggi della norma euclidea, aggiungendo tuttavia un ulteriore grado di libertà, visto che possono essere scelte due soglie indipendenti per i fenomeni di plasticità e trasformazione di fase, le cui evoluzioni diventano quindi indipendenti e separate.

Tutte le soluzioni proposte sono state analizzate in questo lavoro di tesi, in modo da verificare quali siano pregi e difetti di ciascuna formulazione del modello.

Formulazione di un nuovo modello

Partendo dallo studio accurato delle proposte di modifica del modello di Souza-Auricchio-Petrini presenti nei lavori di Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014) si è formulato un nuovo modello in grado di superare le limitazioni mostrate da quelli precedenti. La base di partenza è costituita dalle seguenti considerazioni:

- nel lavoro di Auricchio la particolare scelta del dominio elastico oltre che l'introduzione di una variabile tensoriale rappresentante la deformazione accumulata per fatica permette effettivamente di cogliere tale fenomeno, senza andare ad incidere su altri aspetti del modello originale di Souza-Auricchio-Petrini e soprattutto aggiungendo una complessità minima alle equazioni.
- tra tutte le formulazioni del modello di Barrera et al. (2014) si è deciso di optare per la scelta di una superficie limite del dominio elastico definita con la norma del massimo, che si traduce nella completa indipendenza dei fenomeni di trasformazione di fase e di snervamento, garantendo una libertà maggiore nella formulazione del modello.
- la scelta della norma del massimo, che si mostrerà essere in grado di catturare la plasticità macroscopica, tuttavia causa la perdita di capacità di modellizzare contemporaneamente la fatica. Per superare tale inconveniente la scelta è di continuare ad utilizzare una formulazione della funzione di dissipazione basata sul massimo di due quantità, la prima rappresentante la superficie limite usata per la plasticità classica, la seconda uguale alla superficie limite definita da Auricchio per la trasformazione di fase, che automaticamente permette di cogliere la fatica.
- in alcuni risultati sperimentali ottenuti e in accordo anche con alcuni lavori reperiti in letteratura [9], si vuole che il modello sia in grado di descrivere il comportamento di alcune SMA che esibiscono un progressivo aumento della pendenza del plateau di transizione di fase durante il ciclaggio meccanico.
- in letteratura [9] alcuni test meccanici rivelano che il plateau di trasformazione di fase inversa si abbassa notevolmente in presenza di plasticità. Questo aspetto è stato trovato anche nelle prove sperimentali effettuate, anche se si è notato che è già presente, seppur in maniera meno evidente, anche a livelli di deformazione che non provocano plasticizzazione. Alcuni test effettuati sembrano quindi fare intravedere una relazione tra la deformazione massima

applicata e l'abbassamento del plateau di scarico, piuttosto che con la deformazione plastica. Nel modello che verrà formulato si è comunque scelto, per semplicità, di introdurre un abbattimento dello sforzo del plateau inferiore in maniera proporzionale alla sola deformazione plastica accumulata.

- sarebbe opportuno introdurre una dipendenza dei parametri elastici del materiale dal tipo di fase presente, ovvero il fatto che austenite e martensite abbiano differenti moduli di Young. Questo permetterebbe, nel caso di una prova di trazione eseguita su un materiale che esibisce il comportamento pseudoelastico, di ottenere una pendenza del tratto successivo al plateau di trasformazione di fase (corrispondente alla risposta elastica della martensite monovariante) differente rispetto quella del tratto lineare elastico iniziale (corrispondente alla risposta elastica dell'austenite). In letteratura sono state proposte due soluzioni per aggiungere questo aspetto al modello di Souza-Auricchio-Petrini: la prima è quella di Auricchio et al. (2009) [15] che consiste nel considerare una dipendenza del modulo di Young del materiale dalla frazione di martensite, introducendo un modello di Reuss per considerare i contributi dati da martensite e austenite. La seconda è la soluzione proposta da Urbano et al. (2015) [6], che molto più semplicemente introduce nel potenziale termodinamico due differenti formulazioni del termine di hardening relativo alla trasformazione di fase, una valida prima del termine del plateau e una valida al completamento della trasformazione di fase. Sono state quindi implementate entrambe le soluzioni in un modello di Souza-Auricchio-Petrini modificato secondo quanto proposto in questi due lavori, in modo da confrontare quali delle due si possa considerare efficace. Il metodo proposto da Auricchio si è dimostrato efficace nel cogliere il cambiamento graduale delle proprietà elastiche, nel caso di pseudoelasticità, al procedere della trasformazione di fase, tuttavia si è visto essere afflitto da problemi di convergenza numerica delle equazioni. Per questo, nonostante le modifiche proposte da Urbano provochino una semplificazione del reale comportamento delle SMA, in quanto riescono a cogliere un cambiamento del modulo elastico solo al termine dell'attraversamento completo del plateau pseudoelastico, si è deciso di optare per questo tipo di implementazione. Inoltre tale formulazione permette di ottenere allo scarico, successivo all'imposizione di un carico tale da portare il materiale nel tratto lineare della martensite monovariante, una pendenza maggiore rispetto a quella del medesimo tratto durante il carico, caratteristica che è confermata dai dati sperimentali.
- il comportamento delle SMA è asimmetrico in trazione e compressione, tuttavia per semplicità si è deciso di formulare un modello che non tenga conto di questo aspetto. Si fa notare comunque che il modello di Souza-Auricchio-Petrini comprende un dominio elastico introdotto tramite una funzione limite

di tipo Prager-Lode, quindi tale aspetto potrebbe essere recuperato nel modello qui formulato seguendo lo stesso procedimento.

Per testarne in modo diretto il comportamento, il modello formulato, scritto in forma discretizzata, è stato implementato in una funzione MATLAB scritta *ad hoc* che prende come input le variabili di controllo necessarie e restituisce lo sforzo associato alla condizione deformativa imposta. Si sottolinea che a differenza di quanto fatto in altri lavori di letteratura, come quelli di Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014), per la soluzione del sistema discreto non si è utilizzata la funzione *fsolve()* presente nella libreria di MATLAB che permette di risolvere sistemi lineari di equazioni, ma si è implementato l'algoritmo iterativo di Newton-Raphson. Questa scelta, che potrebbe sembrare non efficiente in quanto non sfrutta le potenti capacità dei software a disposizione, è giustificata dal fatto che il fine ultimo di questo lavoro di tesi è l'implementazione numerica di un modello costitutivo nel codice ABAQUS (*Dassault Systemes Simulia Corp., RI, USA*), in modo da effettuare delle simulazioni numeriche su geometrie reali di dispositivi biomedicali.

Impostazione delle simulazioni numeriche

Per dimostrare l'utilità in campo ingegneristico del modello formulato, sono state condotte delle simulazioni numeriche utilizzando il software ABAQUS 6.13 Standard su alcuni dispositivi biomedicali, in particolare degli stent vascolari ed un dispositivo per il posizionamento della valvola aortica. Il modello è quindi stato tradotto in una subroutine UMAT programmata in linguaggio FORTRAN, che permette di definire il comportamento di un materiale definito dall'utente.

Tutte le simulazioni elencate nel seguito sono state condotte innanzitutto con il modello in cui era stata disattivata la plasticità, per poi essere ripetute ipotizzando diverse soglie di snervamento: in questo modo è stato possibile valutare come varino i risultati ottenuti considerando gli effetti legati alla plasticizzazione del materiale. I dati relativi al materiale con cui i dispositivi sono costruiti sono stati ricavati da lavori di tesi precedenti [8, 16–18].

Per quanto riguarda le simulazioni sugli stent, sono state condotte su tre diversi modelli di dispositivo: Maris Plus, Absolute Pro e Lifestent. Le prime analisi effettuate riguardano un crimpaggio ottenuto mediante la riduzione di diametro di una superficie cilindrica rigida, a cui segue un ritorno di quest'ultima alla sua configurazione iniziale. In questo modo si è potuto analizzare come cambia la risposta dei dispositivi quando si considerino i fenomeni legati alla plasticità, sia in termini di risposta globale del dispositivo, intesa come capacità di tornare durante il recupero al suo diametro espanso, sia in termini di curva sforzo-deformazione seguita dai punti maggiormente sollecitati. Una seconda fase computazionale prevede invece di simulare in modo più realistico la fase di impianto e la successiva sollecitazione

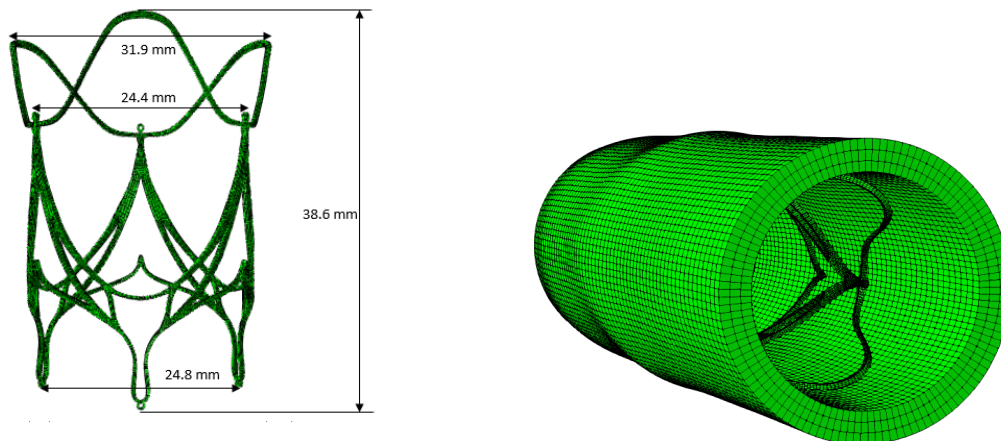


Figura 1: Rappresentazione del dispositivo per il posizionamento della valvola aortica (sinistra) e del suo rilascio all'interno del comparto di silicone (destra)

ciclica indotta dal movimento della gamba, conducendo il rilascio degli stent all'interno di un tubo di silicone, che vuole rappresentare in modo semplice il vaso, e quindi caricando questo ciclicamente. L'analisi condotta prevede le seguenti fasi: il tubo viene inizialmente pretensionato per rappresentare l'estensione dell'arto inferiore, successivamente lo stent viene crimpato fino ad un diametro di 2 mm ed in seguito rilasciato nel tubo. Infine viene effettuato sul tubo un ciclaggio meccanico di trazione, rilasciando lo stato di pretensionamento, ed in seguito riapplicandolo e rimuovendolo ancora. Tali simulazioni sono state condotte per ogni tipologia di stent utilizzando due diversi diametri di tubo, per simulare diverse condizioni di oversizing del dispositivo rispetto all'arteria in cui viene impiantato. Le simulazioni condotte sul dispositivo per il posizionamento della valvola aortica (Fig. 1, sinistra) sono simili: la prima tipologia riguarda sempre crimpaggio e rilascio libero mediante l'utilizzo di una superficie rigida. A questa segue una simulazione del rilascio del medesimo dispositivo all'interno di un comparto di silicone cilindrico che viene utilizzato tipicamente per effettuarne i test a fatica (Fig. 1, destra). Sulla superficie interna di tale comparto viene quindi applicata una pressione uniforme di 100 mmHg, che rappresenta la fase sistolica del ciclo cardiaco, a cui segue crimpaggio e rilascio del dispositivo, sempre mediante l'utilizzo della superficie rigida. Infine lo stato di pressione interna al compartimento viene rimosso, in modo da rappresentare la fase diastolica. Anche in questo caso sono state valutate le differenze di storia di carico subita dai punti più sollecitati in presenza o meno di deformazioni plastiche.

Risultati

I primi test effettuati sul modello proposto hanno avuto come obiettivo verificare che la formulazione data fosse in grado di cogliere tutti i comportamenti di interesse;

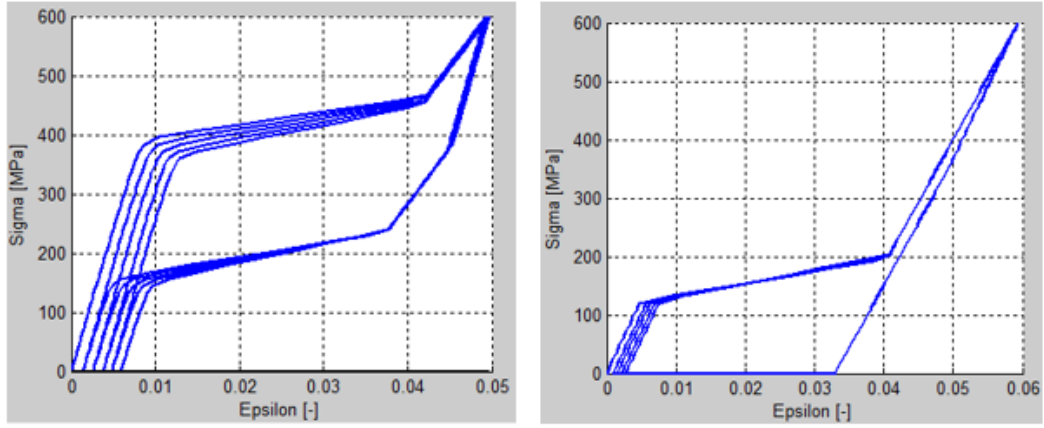


Figura 2: Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto imponendo 5 cicli di carico e scarico fino a 600 MPa, in presenza di fatica. A sinistra prova condotta con $T = 310$ K, a destra condotta con $T = 230\text{K} < M_f$ durante la fase di carico, scarico e recupero termico innalzando la temperatura fino a 280 K.

per questo il modello è stato testato su diverse storie di carico utilizzando parametri arbitrari. Effettuando un prova di carico e scarico ciclica (Fig. 2), sia a temperatura a cui è stabile l'austenite che a temperature più basse in cui invece è stabile la martensite multivariante, il modello è in grado di cogliere l'accumulo di deformazione legato alla fatica; a questo si aggiunge nel caso di materiale pseudoelastico la presenza del fenomeno di degrado, che porta ad una progressiva diminuzione dello sforzo critico a cui avviene la trasformazione di fase. Si nota anche come la pendenza del plateau aumenta man mano che la fatica procede.

Il test successivo, Fig. 3, consiste invece nel portare il materiale ad uno stato di sforzo tale da farlo plasticizzare. Il materiale in seguito al tratto elastico della martensite monovariante entra in plasticità, segnata nella curva-sforzo deformazione da un abbassamento della pendenza; allo scarico recupera con una transizione di fase inversa la forma iniziale, ma non completamente, segno che le deformazioni plastiche hanno impedito a parte della martensite presente di trasformarsi in austenite. Si nota anche il fatto che la plasticizzazione del materiale causa un abbassamento del plateau inferiore più pronunciato rispetto a quanto avveniva per fatica durante le prove precedenti di ciclaggio, determinando un ampiezza di isteresi meccanica maggiore. La medesima prova è stata condotta su un materiale inizialmente in fase martensitica a cui segue un riscaldamento di 50 K: anche in questa situazione la plasticizzazione diminuisce la capacità del materiale di tornare alla forma originaria.

In un secondo set di prove il modello è stato utilizzato per ripetere alcuni test monoassiali riportati in letteratura. In particolare, ci si è rifatti al lavoro svolto da Wang et al. (2008) [9], in cui è descritta una serie di test monoassiali in controllo di deformazione fino a diverse deformazioni massime a 37°C . Non avendo i dati relativi al materiale delle prove, i parametri del modello sono stati calibrati in modo ragionevole

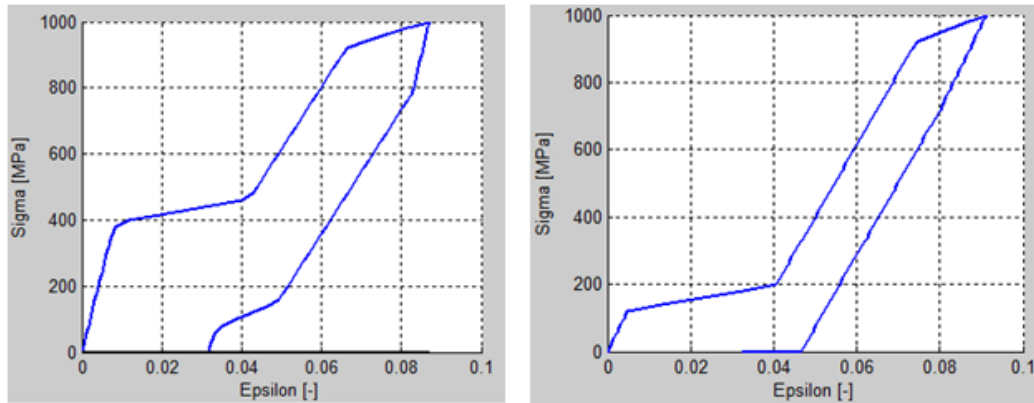


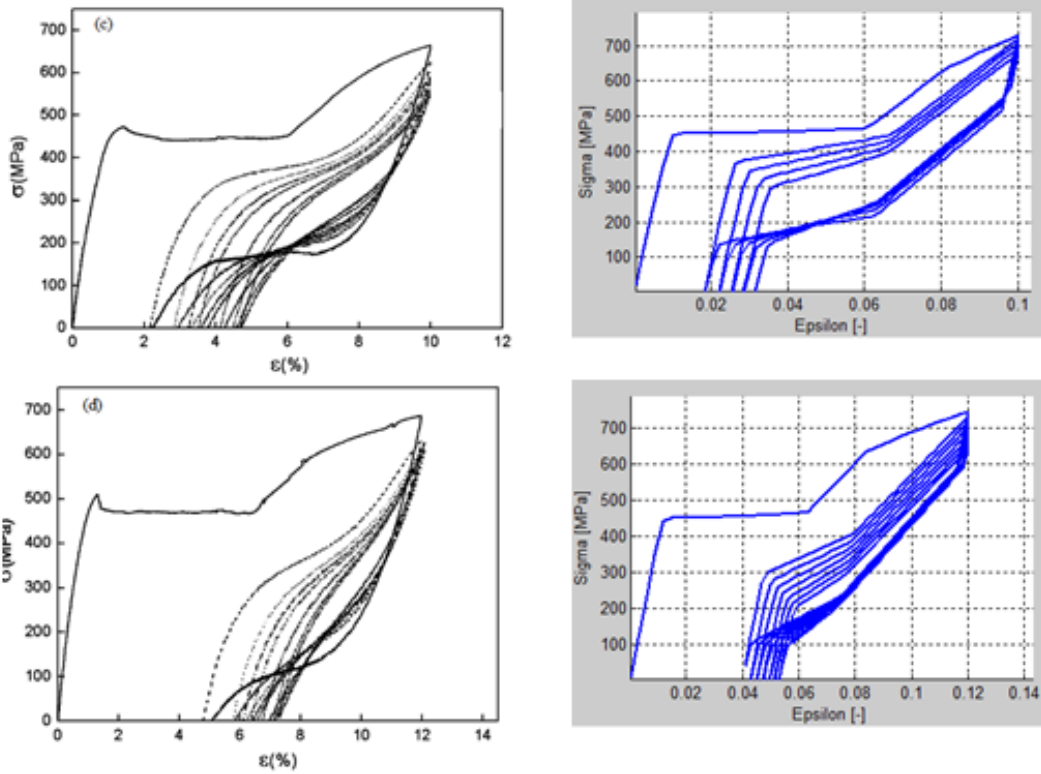
Figura 3: Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di plasticità, imponendo un ciclo di carico e scarico fino a 1000 MPa. A sinistra prova condotta con $T = 310$ K, a destra condotta con $T = 230$ K $< M_f$ durante la fase di carico, scarico e recupero termico innalzando la temperatura fino a $T = 280$ K

dall'osservazione di tali curve; il confronto tra i dati sperimentali e quelli ottenibili dal modello è presentato in Fig. 4a. E' interessante notare come dal punto di vista qualitativo il modello proposto sia in grado di descrivere i risultati sperimentali. Il secondo lavoro a cui si è fatto riferimento è quello di Kan et al. (2010) [4], in cui sono state condotte delle prove cicliche in controllo di sforzo a 37°C . Il confronto con tali prove è mostrato nella Fig. 4b. Anche in questo caso il modello presenta una buona somiglianza con i dati sperimentali, riuscendo a cogliere l'aspetto più significativo di tale prova, ovvero la traslazione progressiva verso deformazioni maggiori delle curve all'aumentare dei cicli, accompagnata da un innalzamento della pendenza del plateau di trasformazione.

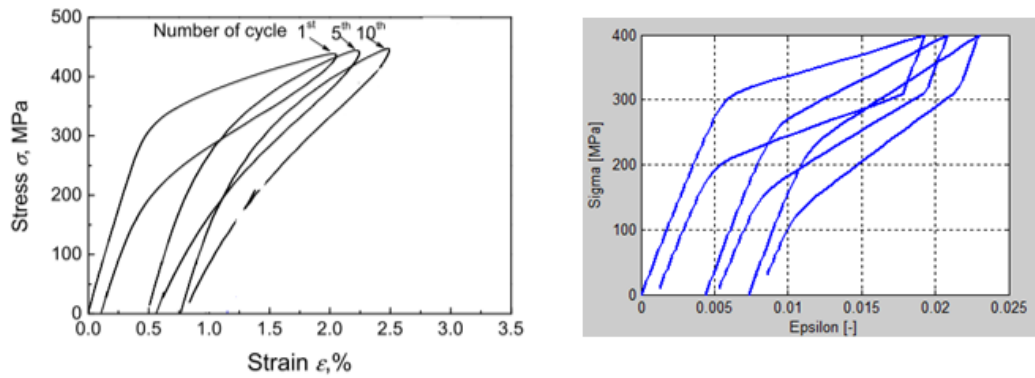
Confronto con i dati delle prove sperimentali condotte

Per effettuare il confronto con i risultati dei test condotti presso il CNR di Lecco, si sono ricavati i parametri del modello dai dati delle prove sperimentali eseguite con cicli al 4%.

In Fig. 5 (sinistra) appaiono sovrapposti i risultati in termini di curva sforzo-deformazione del test sperimentale di ciclaggio al 4% con quelli dati dal modello. Si vede che la sovrapposizione è molto buona: per quanto riguarda il primo ciclo di carico e scarico l'entità di deformazione residua e dell'abbassamento del plateau praticamente sono le stesse. L'unica differenza sta nella velocità di accumulo di deformazione per fatica, che nel modello appare più rapida, tanto che in soli 4 cicli si ha una deformazione residua pari a quella di 20 cicli sperimentali. Questa differenza è dovuta al fatto che l'accumulo di deformazione, sperimentalmente, è più significativo nei primi cicli, per poi diminuire vistosamente; il modello sviluppato, invece, coerentemente con l'approccio proposto nel modello di Auricchio, è caratte-



(a) Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Wang [9] (sinistra) e quelle ottenute dal modello proposto (destra). In ordine dall'alto verso il basso: prova fino al 10% e fino al 12% di deformazione massima.



(b) Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Kan et al. [4] (sinistra) e quelle ottenute dal modello proposto (destra).

Figura 4: Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ di letteratura e quelle ottenute dal modello proposto.

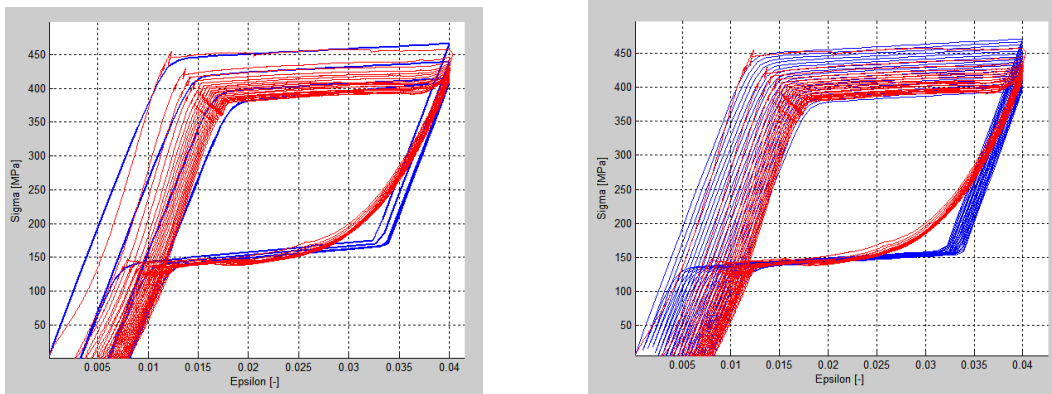


Figura 5: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 4% di deformazione eseguiti al CNR. A sinistra i parametri del modello sono calibrati sul primo ciclaggio della prova sperimentale, a destra su un comportamento medio dei primi 10 cicli. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

rizzato da un accumulo regolare nei vari cicli meccanici, che si riduce ad ogni ciclo in proporzione solo a quanto si è ridotto ogni volta il plateau di trasformazione di fase. Tuttavia se si fosse maggiormente interessati a cogliere la dinamica della fatica non nel primo ciclo, dove è molto vistosa, ma nei cicli successivi, si potrebbe tarare i parametri del modello che regolano la fatica basandosi sul comportamento medio dei primi 10 cicli: il comportamento del modello è mostrato in Fig. 5 (destra). In questa situazione si perde quindi la capacità di cogliere il corretto comportamento nei primi cicli, tuttavia la risposta data dal modello è più simile per quanto riguarda i cicli successivi. Una volta tarato, il modello è stato utilizzato per riprodurre i test di ciclaggio al 7% e 8% rappresentati in Fig. 6. La somiglianza dei risultati dati dal modello è sempre notevole; anche in queste curve si nota tuttavia la problematica della velocità di accumulo già presentata. Si segnala in questo confronto un altro

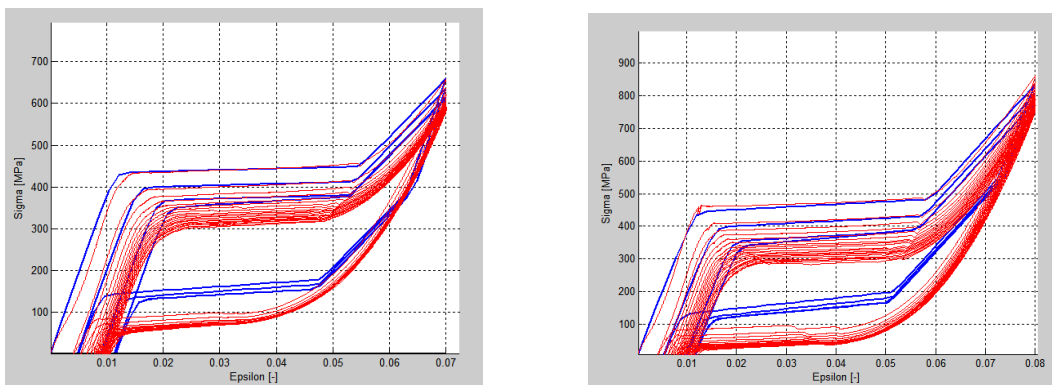


Figura 6: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 7% e 8% di deformazione eseguiti al CNR. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

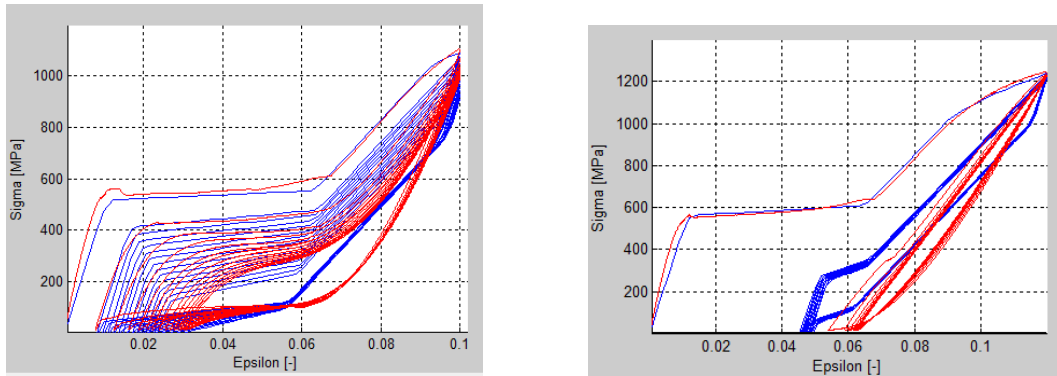


Figura 7: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

aspetto: le curve sperimentali mostrano come il plateau inferiore si abbassi all'aumentare della deformazione imposta. L'isteresi meccanica è quindi più ampia nella curva sforzo-deformazione relativa alla prova all'8% rispetto a quella al 7%, che a sua volta è maggiore rispetto a quella al 4%. Il modello sviluppato non è invece in grado di cogliere questo aspetto, in quanto è in grado di modellizzare un abbassamento del plateau inferiore solo a seguito della comparsa di deformazioni plastiche, che in queste prove non sono ancora presenti.

Passando ai test condotti presso il Labs, si sono ricavati i parametri del modello dai dati delle prove sperimentali eseguite con cicli all'10% e da una prova a rottura. Per verificare la capacità predittiva del modello si presentano in Fig. 7 i test ciclici di trazione al 10% e al 12% di deformazione, valore che porta il materiale a plasticizzare. L'avvento della plasticità riduce notevolmente la capacità del materiale di esibire successive transizioni di fase: questo viene correttamente colto dal modello, che si mostra capace di seguire il comportamento sperimentale anche nella prova al 12%, in cui al secondo ciclo il materiale esibisce una curva sforzo-deformazione quasi lineare.

Risultati delle simulazioni numeriche

Dai risultati delle simulazioni condotte sugli stent Absolute Pro e Maris Plus, si è notato che gli sforzi raggiunti anche nei punti più critici, con le proprietà del materiale utilizzate e nell'ipotesi di comportamento lineare della martensite, non sono tali da ritenere che si generino plasticizzazioni durante il funzionamento del dispositivo. In ogni caso, non avendo potuto misurare le proprietà del materiale in campo plastico ed essendo tali caratteristiche molto variabili in funzione dei trattamenti termo-meccanici subiti dallo stent durante la produzione, si è comunque deciso di considerare delle soglie di snervamento relativamente basse, per riuscire a portare il materiale a plasticizzare e quindi capire come possa eventualmente cambiare il suo comportamento. Per quanto riguarda lo stent Lifestent e il dispositivo per il posizio-

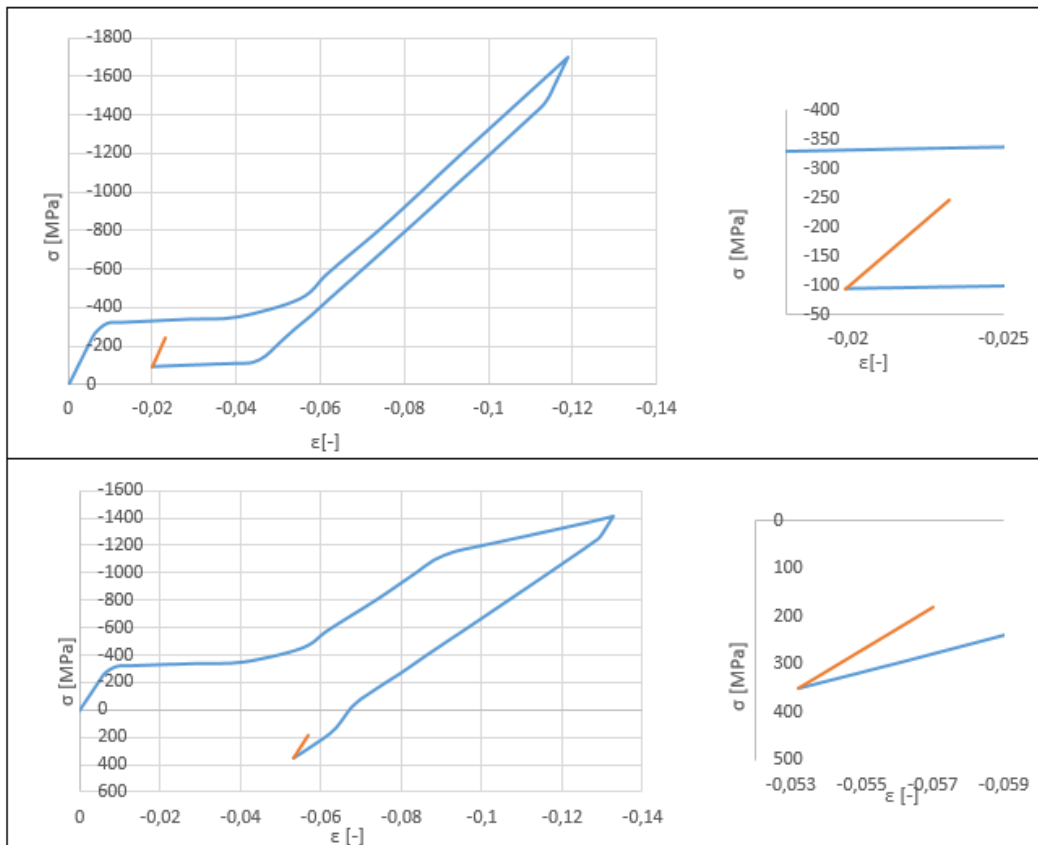


Figura 8: Risultati in termini di curve $\sigma - \epsilon$ del punto più sollecitato del dispositivo per TAVI durante il rilascio nel comparto, nel caso in cui si ignorino (alto) o si considerino (basso) gli effetti legati alla plasticizzazione

namento della valvola aortica, invece, durante il loro crimpaggio vengono raggiunti in alcune zone dei valori di sforzo che potrebbero fare entrare il materiale in plasticità, anche considerando valori standard del limite plastico.

In ogni caso tutte le simulazioni condotte hanno dimostrato come il comportamento globale dei dispositivi considerati, inteso come capacità di tornare durante il recupero libero al diametro espanso in seguito ad un crimpaggio, è risultato immutato dalla presenza di deformazioni plastiche, in quanto la riduzione di diametro rimane limitata al 3%. I cambiamenti maggiori riguardano invece le storie di carico che subiscono i punti maggiormente sollecitati di tali dispositivi, in cui si nota come il fenomeno della plasticizzazione produca la nascita di deformazioni maggiori, e corrispondenti valori di sforzo più piccoli. Questo è particolarmente importante nelle simulazioni in cui avviene il rilascio dei dispositivi all'interno di un tubo. Durante il ciclaggio meccanico, i valori di sforzo e deformazione tra i quali tale ciclaggio avviene risultano modificati. Infatti più le deformazioni plastiche sono state significative, più il plateau di scarico riduce la propria lunghezza, oltre al fatto che l'ampiezza dell'isteresi meccanica aumenta, a causa di un abbassamento del plateau di trasfor-

mazione di fase inversa relativo alla fase di scarico. In Fig. 8 sono mostrati questi effetti della plasticizzazione sulla curva sforzo-deformazione seguita da uno dei punti più sollecitati del dispositivo per la sostituzione della valvola aortica. In assenza di plasticità il ciclaggio avviene in condizioni di compressione, in prossimità del plateau inferiore di trasformazione di fase. Con gli effetti plastici attivati, invece, il materiale non può più esibire delle trasformazioni di fase, quindi il plateau allo scarico non è presente, mentre invece nasce una significativa deformazione residua che comporta un passaggio a condizioni di carico di trazione ed un ciclaggio che avviene tra valori praticamente raddoppiati di deformazione rispetto al caso precedente. Si vuole inoltre sottolineare che in tutte le analisi computazionali il modello è sempre giunto a convergenza, senza esibire un aumento significativo dei tempi di calcolo necessari per il loro completamento.

Conclusioni

Partendo dai risultati ottenuti nelle prove sperimentali e dall'implementazione dei due precedenti modelli costitutivi - Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014) - ne è stato formulato uno nuovo. Tale modello supera le problematiche di quelli precedenti, riuscendo a cogliere simultaneamente sia il fenomeno di accumulo di deformazione per fatica, sia la plasticizzazione del materiale. Seguendo quanto presentato all'interno del lavoro di Urbano et al. (2015) [6], si è riusciti ad inserire il fatto che, in una prova in pseudoelasticità, il tratto lineare della risposta elastica della martensite è di pendenza minore rispetto a quello iniziale relativo alla risposta elastica dell'austenite. E' stata introdotta anche con successo la capacità di modellizzazione del fenomeno degradativo, per cui i plateau di trasformazione si abbassano progressivamente, ed eventualmente aumentano lentamente di pendenza. Il modello è in grado inoltre di considerare gli effetti che la plasticità ha sulla capacità del materiale di esibire future trasformazioni di fase: più la deformazione plastica è stata elevata, più i plateau di trasformazione di fase riducono la propria ampiezza, segno che la plasticizzazione ha stabilizzato parte della martensite monovariante, dando quindi origine anche ad una deformazione residua non recuperabile. In presenza di deformazioni plastiche elevate tale stabilizzazione può arrivare ad eliminare completamente la presenza del meccanismo di trasformazione di fase, dando origine ad una risposta lineare, come se il materiale fosse elastoplastico. Infine è stato introdotto nel modello un termine che permette di ottenere allo scarico un abbassamento del plateau di trasformazione di fase inversa, più pronunciato all'aumentare della plasticizzazione subita. Ciò permette di ottenere nei cicli successivi al fenomeno di snervamento un'ampiezza dell'isteresi meccanica aumentata. Il confronto effettuato con alcune curve sforzo-deformazione reperite in letteratura e con quelle relative alla

prove sperimentali condotte è soddisfacente, in quanto mostra come il modello sia in grado di cogliere gli aspetti presenti sperimentalmente.

Il modello costitutivo formulato è stato implementato in una subroutine UMAT, in modo da poter essere utilizzato all'interno del software ABAQUS 6.13 Standard per effettuare delle simulazioni agli elementi finiti su dei modelli di stent vascolari e su un dispositivo per il posizionamento della valvola aortica, che riproducessero la procedura di impianto, quindi il crimpaggio all'interno di un catetere e il loro rilascio. Ciò ha permesso di indagare quali siano le differenze del comportamento di questi dispositivi biomedicali nel caso si consideri l'effetto della plasticizzazione subita dal materiale. Utilizzando il nuovo modello costitutivo si è in grado di modellizzare correttamente il fatto che in alcune zone si originano delle deformazioni irreversibili. I punti che in tali dispositivi sono sollecitati in modo sufficiente per giungere fino alla soglia di snervamento sono pochi rispetto alla dimensione della struttura, quindi la risposta globale, in termini di capacità di tornare al diametro originale espanso in seguito al crimpaggio, non è risultata cambiare in modo significativo, essendosi ridotta sotto al 3%. L'aspetto che appare maggiormente mutato, nel momento in cui si considerano o meno le deformazioni plastiche, è invece la storia di carico seguita dai punti maggiormente sollecitati in termini di deformazioni e sforzi raggiunti. In particolare sono state condotte delle analisi computazionali dove si fa avvenire il rilascio dei dispositivi all'interno di un tubo di silicone, a cui segue un ciclaggio meccanico che nel caso degli stent rappresenta la sollecitazione ciclica di trazione imposta all'arteria durante la deambulazione del paziente, e nel caso della valvola cardiaca alla sollecitazione dovuta alle pressioni del ciclo cardiaco. Considerando come caso esemplificativo il dispositivo per l'impianto della valvola aortica, si è visto che i valori di sforzo tra i quali avviene tale ciclaggio sono di compressione nel caso non si consideri la plasticizzazione, mentre di trazione nel caso contrario; le deformazioni anch'esse sono differenti, essendo praticamente raddoppiate nel caso di plasticità attivata. L'utilizzo nelle simulazioni numeriche di un modello costitutivo che introduca il fenomeno della plasticizzazione oltre che della fatica è quindi un aspetto importante e potrebbe essere determinante in futuri lavori che si rivolgono allo studio della vita a fatica dei dispositivi biomedicali, dove un cambiamento della previsione numerica dei valori di sollecitazione raggiunta porterebbe ad una differente stima della durata del loro funzionamento. Il modello formulato è quindi di grande utilità quando si ha la necessità di simulare in modo maggiormente realistico il funzionamento dei dispositivi biomedicali, permettendo di ottenere delle predizioni più accurate rispetto a quelle che è possibile ottenere con i modelli ad oggi implementati nei software commerciali.

Summary

Introduction

Shape memory alloys (SMA) exhibit peculiar properties, as pseudoelasticity and shape memory effect, which attractiveness motivates their usage in several fields of application. Referring to biomedical applications, some employments are orthodontic field, to realize orthodontic wires capable to exhibit constant and moderate forces in different deformation conditions, or orthopedic field, where the similarity between mechanical properties of NiTi alloys and bone is exploited. The most diffused biomedical application is vascular stents production, i.e metallic devices inserted inside stenotic arteries to restore their original lumen size.

Due to the NiTi alloys complex thermo-mechanical non-linear behavior, the development of computational tools able to model them correctly is extremely useful, in order to perform predictive numerical simulations. During last years, a lot of constitutive model able to catch fundamental aspects of SMA behavior have been formulated. The aim of this effort is not only the request of properly describe pseudoelasticity or shape memory effect, but also to consider minor aspects, but not less important, as asymmetry between tension and compression, different mechanical properties between austenite and martensite, progressive strain accumulation during repeated thermo-mechanical cycles, yielding threshold, plasticity and its effects on phase transformation. Not less important, a constitutive model working in a wide temperature range will be very useful, to catch both pseudoelasticity and shape memory effect.

A very promising constitutive model, whose features are simplicity, numerical stability and a good capability to describe both pseudoelasticity and shape memory effect, is Souza-Auricchio-Petrini's [11–13].

Nevertheless this model doesn't consider different mechanical properties for austenite and martensite, and neglects yielding and fatigue phenomena. An attractive research activity is to improve this model to in order to insert the previous two aspects. Between published works of the last years, we cite Auricchio et al. (2007) [14], in which the original model is modified to make it able to describe fatigue accumulation, and Barrera et al. (2014) [7], in which Auricchio et al. (2007) model is reformulated

to take in account also plasticity. Both works can't be considered as a definitive solution, due to some affecting problematics, so the formulation of a new constitutive model able to overcoming their limitations is necessary.

Aim

The aim of this thesis is the formulation of a new constitutive model for SMA, capable to catch both fatigue and plasticity. Rather than formulating a completely new model, it has been decided to start from Souza-Auricchio-Petrini model, which has been already used in other works and is also correctly implemented in some commercial software. Auricchio et al. (2007) and Barrera et al. (2014) proposed modifications was widely analyzed, to highlight possible limitations compared with experimental evidence. From them, a new constitutive model is formulated, able to consider both plasticity and fatigue, but overcoming their problematics.

A campaign of experimental tests was performed to have data effectively describing plasticity and fatigue influence on experimental SMA behavior. The obtained results, together with some literature data, represent the starting point for the development of the new model, and can also be used to test its efficacy.

Lastly, some numerical simulations on biomedical devices, as vascular stents and aortic valves, were performed to demonstrate the usefulness in biomedical engineering field of the availability of a model considering both plasticity and fatigue phenomena. During their implant, these devices undergo large deformations, which can be sufficient to reach the material yielding threshold, and during their life are subjected to a cyclic deformation, able to determine fatigue. So far, no computational tools able to describe these aspects are available, consequently showing how numerical simulations results can be affected is very attractive .

Materials and Methods

Experimental tests on NiTi alloy samples

Two experimental tests campaigns were performed on NiTi alloy samples. The first one consists in some tensile uniaxial tests performed on NiTi alloys wires by CNR IENI (Istituto per l'Energetica e le Interfasi), Lecco unit, taking advantage of a collaboration with Politecnico di Milano. These tests were executed on a wire of 1.2 mm of diameter with a MTS/2M machine, at environmental temperature, equals to 23°C. At this temperature the material is not in austenitic phase, but in phase R condition. A crossbar speed of 0.25 mm/min was imposed, combined with the extensometer usage on a central portion of the wire, in order to obtain a strain driven test. Extensometer was necessary to exclude eventual boundary effects and its positioning on the central wire portion allows to monitor sample behavior correctly.

Some cyclic loading-unloading tests (20 cycles) were performed, till different maximum deformations, 4%, 7% and 8%. Further tests studied material plastic behavior. The first test consisted in evaluating if yielding threshold changes with temperature. In fact, SMA yielding can be thought to exhibit different properties, according to the initial stable phase, which depend on the testing temperature. The following test consisted in reaching plasticity, to evaluate how plastic deformations affect the material capability to undergo phase transformation.

The second experimental tests campaign was carried out at the Laboratorio di Meccanica delle Strutture Biologiche (Labs) of Politecnico di Milano, using a MTS machine, 632.11C-20 model, on cylindrical hollow sample obtained from a SMA tube of 2.16 mm of external diameter and 1.7 mm of inner diameter, provided by Medtronic Endovascular Therapies. This tube, used by the company for vascular stent manufacturing, is made of NiTi alloy stable in austenite at environmental temperature. The tests performed by CNR were repeated in order to have data about a material in full austenite phase. Experimental testing consists in 15 uniaxial loading-unloading cycles, till different maximum strain, 5%, 8%, 10% and 12%.

Auricchio et al. and Barrera et al. models implementation

Auricchio et al. (2007) [14] model is very similar to Souza-Auricchio-Petrini one, with the goal of improving it considering also experimental aspects of fatigue, that is the irreversible strain accumulation due to repeated loading-unloading cycles, often followed by a progressive reduction of critical transformation stress (from austenite or twinned martensite to detwinned martensite). Souza-Auricchio-Petrini model has only a single internal variable, \mathbf{e}^{tr} tensor (deviatoric second order tensor), representing the strain associated with phase transformation. This model has been modified introducing a new internal variable, fatigue tensor \mathbf{q} (deviatoric second order tensor), which models the accumulated irreversible strain, i.e. \mathbf{e}^{tr} part that cannot be recovered during unloading.

Barrera et al. (2014) [7] model is an improvement of Auricchio's one, with two main aims:

- adding the capability to catch plastic effects at high levels of stress, preserving fatigue modeling.
- considering that with \mathbf{q} evolution, microscopic domains formation in which future phase transformation are prevented takes place inside the material. So \mathbf{q} must have a role to determine both shape and size of transformation domain in which \mathbf{e}^{tr} can evolve. Correctly modeling this aspect would allow to solve some critical problems in Auricchio et al. model during the passage from tensile to compressive conditions.

A fundamental point attacked in Barrera et al. (2014) work is the proper formulation of an elastic domain limit surface, able to catch both fatigue and yielding; the authors propose three different limit functions, based on the usage of different norms, norm 1, norm 2 and supremum norm. Exploiting a definition based on the norm 1, the limit surface is the same proposed by Auricchio et al., which produces that each \mathbf{e}^{tr} variation is followed by a \mathbf{q} evolution. This behavior doesn't allow to properly describe plasticity, which usually takes place at high stress values, where \mathbf{e}^{tr} has already reached a stable condition in the model. Passing to the norm 2 formulation, elastic domain shape becomes more complex, admitting situations where only one of the two internal variables can evolve, allowing in this way plasticity. Supremum norm choice provides the same benefits of norm 2, introducing an additional degree of freedom, because two independent thresholds for yielding and fatigue can be chosen, and they become completely independent phenomena.

All proposed formulations were studied in this work of thesis, in order to verify benefits and weak points of every solution.

A new model formulation

Starting from proposed modifications to Souza-Auricchio-Petrini model given by Auricchio et al. (2007) and Barrera et al. (2014), a new constitutive model able to overcome their limitations has been formulated. The starting considerations are the following:

- Auricchio's work proposes a peculiar choice for elastic domain formulation and the introduction of a new internal variable, representing accumulated fatigue strain. These modifications allow to catch fatigue phenomenon, without influencing other aspects of the original model or adding further complexity to its equations.
- it has been decided the usage of an elastic domain limit surface formulated using a supremum norm, having to choose among the three possible alternatives proposed by Barrera et al. Consequently yielding and phase transformation are completely independent phenomena, ensuring more freedom during model formulation.
- supremum norm choice allows to catch plasticity, but also causes the inability to properly model fatigue at the same time. To overcome this limit, the choice which has been made is to define a dissipation potential based on the maximum between two quantities, one of them representing the classical limit surface for yielding used in the theory of plasticity, the latter equals to the limit surface proposed by Auricchio for phase transformation, which automatically guarantees fatigue modeling.

-
- following experimental evidences and according to some works found in literature [9], the proposed model must be describe the progressive slope increase exhibited by phase transformation plateau during the application of mechanical cycles.
 - some experimental tests available in literature [9] reveal that lower phase transformation plateau drops to lower stress levels, after the development of plastic strain. The carried out experimental tests show the same aspect, but this is also present at strain levels at which yielding cannot occurs. Rather, some performed tests reveal a relationship between maximum strain applied and the phase transformation plateau lowering. Anyway, the model was formulated for simplicity taking in account only a proportionality between accumulated plastic strain and lower plateau drop.
 - the introduction of different elastic properties changing according to the actual phase present inside the material should be accounted, in order to catch differences in Young modulus between austenite and martensite. In an uniaxial tensile test on a pseudoelastic material this aspect would allow to obtain the part following phase transformation plateau (representing detwinned martensite response) with a different slope respect to the initial linear elastic part (representing austenite response). Two different solutions were proposed in literature to add this aspect to Souza-Auricchio-Petrini model: the first one was proposed in Auricchio et al. (2009) [15] and consists in creating a relationship between the material Young modulus and martensite fraction, introducing a Reuss model to consider both the contribution of austenite and martensite. The latter was proposed by Urbano et al. (2015) [6] and simply introduces two different phase transformation hardening formulations. Both proposals were implemented inside the Souza-Auricchio-Petrini model in order to understand which of them is more effective. Auricchio's method was effective in capturing the gradual change in elastic properties, in case of pseudoelasticity, as phase transformation proceed further, but was also afflicted by numerical convergence problems. Consequently it was decided to use Urbano's proposal, even if this formulation causes a simplification of real SMA behavior because it catches an elastic modulus variation only after phase transformation completion.
 - SMA behavior exhibits an asymmetry between tensile and compression conditions, nevertheless for simplicity this aspect was neglected inside the new model. However, Souza-Auricchio-Petrini model has an asymmetric elastic domain formulated with a Prager-Lode type limit surface, so the asymmetry could be recovered following the same procedure.

To directly test its behavior, the proposed model in discretized form has been implemented in a MATLAB function, which accepts as input the necessary control variables and produces as output the stress associated to the imposed strain condition. Differently with respect to Auricchio et al. (2007) and Barrera et al. (2014) works, the iterative Newton-Raphson algorithm was used to solve the system of equations, instead of using *fsolve()* function provided by MATLAB library. Even if this choice can appear to be not efficient taking not in advantage of the powerful capability of available software, it can be justified by this thesis final aim, consisting in implementing the formulated model inside ABAQUS code (*Dassault Systemes Simulia Corp., RI, USA*), to perform some computational analyses on real geometries of biomedical devices.

Numerical simulations settings

Some numerical simulations were performed using ABAQUS 6.13 Standard on biomedical devices, as vascular stents and a device for transcatheter aortic valve implant (TAVI), to prove the usefulness of the proposed model. The model was implemented in a UMAT subroutine, written using FORTRAN, to define a user-defined material behavior.

Every simulations listed in the following was performed deactivating plasticity at the beginning and later by considering different yielding thresholds: in this way, how the results change taking in account yielding effect can be evaluated. Data about the material of these devices are obtained from previous theses [8,16–18].

As regards stent simulations, they were conducted on three different models: Maris Plus, Absolute Pro and Lifestent. The first analyses consist in stent crimping using a cylindrical rigid surface reducing its diameter, followed by a free expansion of the device. In this way how the device response is affected by plasticity can be evaluated, in terms both of global response, meaning the capability to go back to its original shape during recovery, or local response as stress-strain relationship exhibited by the most stressed points. A second computational phase is expected to mimic devices implant and the following cyclic loading conditions due to leg motion in a more realistic way, by carrying out the devices expansion inside a silicone tube, representing an artery in a simple way, and loading it cyclically. The computational analysis is made of the following steps: the tube is firstly put in tension to represent leg extension, then there is the stent crimping and the expansion inside the tube. Finally, the tube is loaded cyclically in tension, removing the initial state of stress, applying again it and at the end removing it. These simulations were performed for each stent model using tubes with different inner diameter, to mimic different oversizing conditions between the device and the artery. Numerical simulations on the TAVI device (Fig. 9, left) are similar: the first type is a crimping-free expansion analysis using a rigid surface. The following one consists in carrying out the expan-

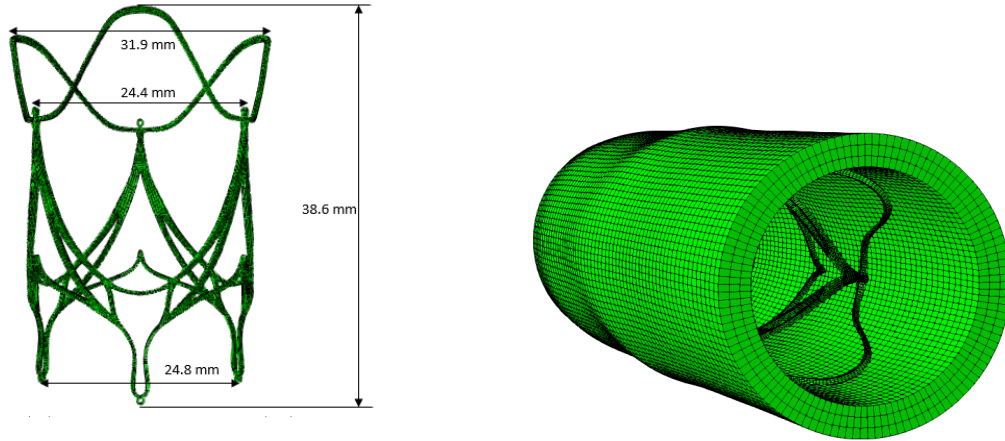


Figura 9: TAVI device (left) and its expansion inside the silicone compartment (right)

sion inside a silicone cylindrical compartment, usually employed for fatigue testing (Fig. 9, right). On its inner surface a 100 mmHg pressure was applied, representing systolic cardiac cycle phase, then the device is crimped and released. Finally the inner pressure is removed to mimic diastolic phase. Even in this case differences of stress-strain relationship exhibited by the most stressed points are evaluated.

Results

The first tests performed on the proposed model aimed to evaluate the capability of the chosen formulation to properly catch each aspect of interest; so the model was tested on different loading conditions using arbitrary parameters. Performing some tests of cyclic loading –unloading (Fig. 10), at two different temperature where austenite or twinned martensite are stable, the model is able to catch strain accumulation due to fatigue. This is also followed by a degradation effect, consisting in a progressive drop of the critical stress needed to start phase transformation. Also a gradual increase in phase transformation plateau slope is present.

Next test, Fig. 11, consists in reaching yielding condition after detwinned martensite response, corresponding to a decrease in stress-strain relationship slope. During unloading the material recovers its original shape not completely, because plastic strain has hindered martensite capability to turn into austenite. Plasticity causes the inferior plateau lowering, more evident respect to fatigue effects during cyclic loading, determining an increase in mechanical hysteresis height. The same test was performed also on a material at martensitic phase as initial condition, followed by a 50 K heating: even in this situation yielding produces the material inability to recover completely its shape.

A second set of tests was conducted to compare model predictions with some

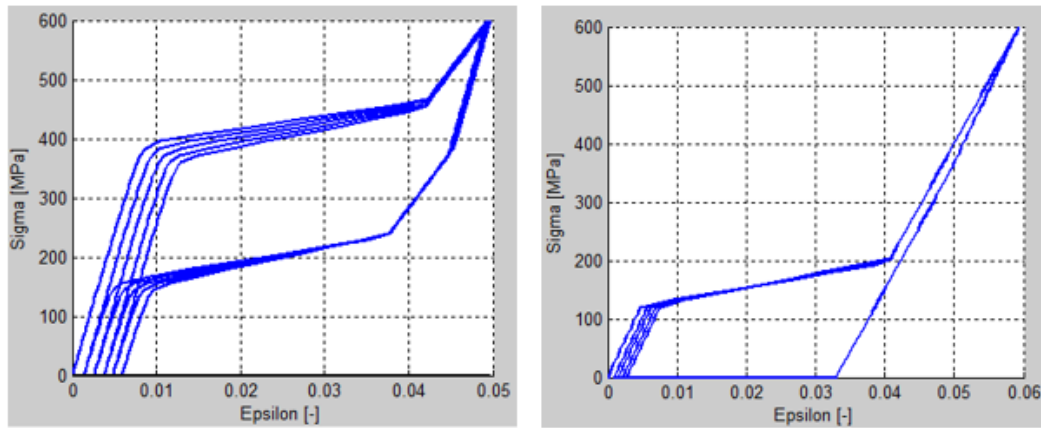


Figure 10: $\sigma - \varepsilon$ curves obtained from the model, imposing 5 loading-unloading cycles till 600 MPa, with fatigue. On the left the test was performed at $T = 310$ K, on the right at $T = 230K < M_f$. The latter represents loading-unloading phases and the thermal recovery obtained through a heating till 280 K.

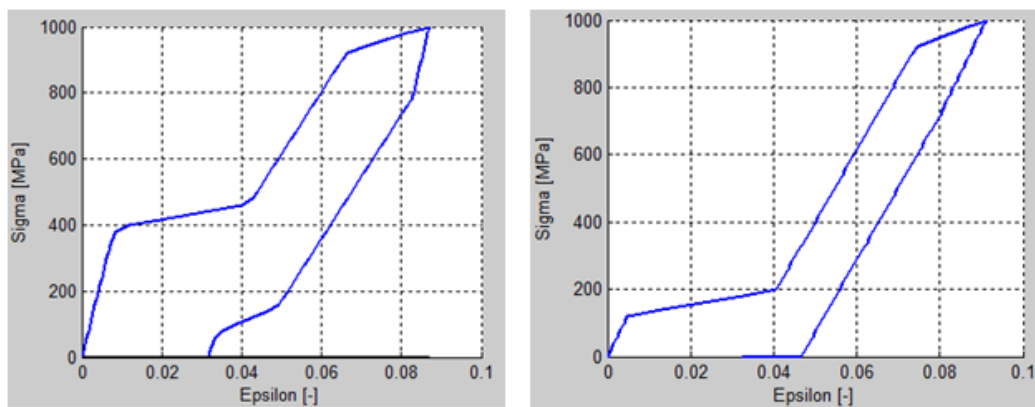


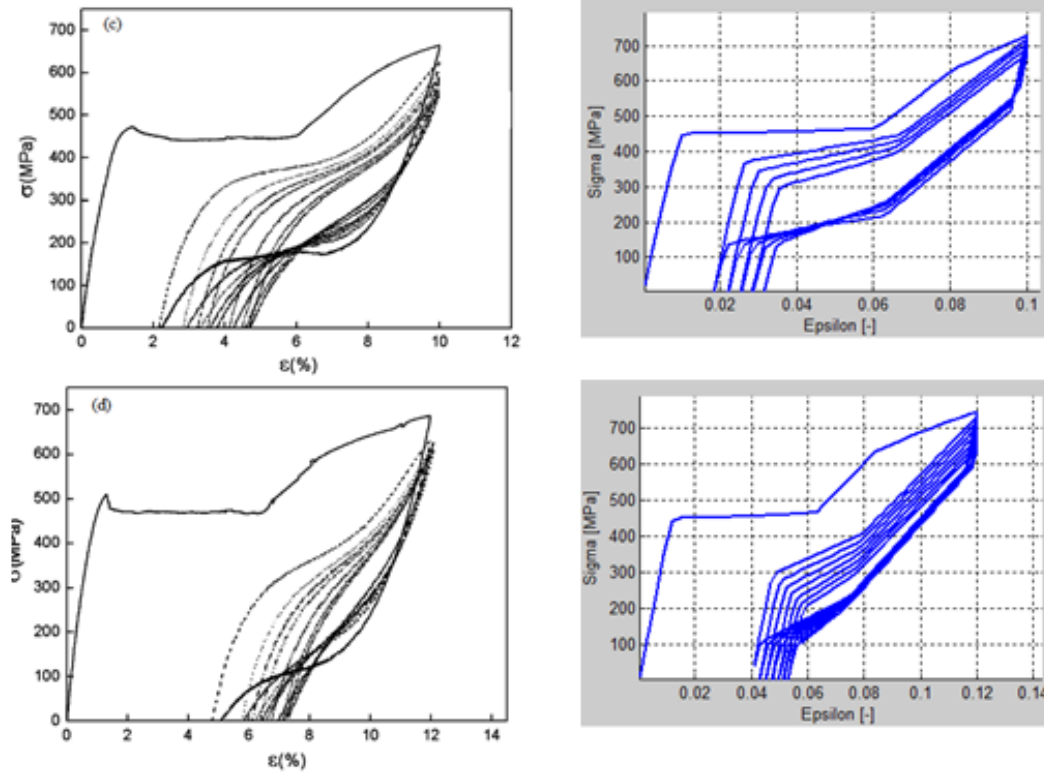
Figure 11: $\sigma - \varepsilon$ curves obtained from the model with plasticity activated imposing a loading-unloading cycle till 1000 MPa. On the left the test was performed at $T = 310$ K, on the right at $T = 230K < M_f$. The latter represents loading-unloading phases and the thermal recovery obtained through a heating till 280 K.

uniaxial tensile tests reported in literature. Wang et al. (2008) [9] describes a wide series of strain driven tests at 37°C till different maximum strain. Model parameters were obtained from $\sigma - \varepsilon$ curves observation and the comparison between experimental data and model predictions is shown in Fig. 12a. Qualitatively model predictions are capable to describe well experimental results. Kan et al. (2010) [4] performed instead some stress driven tests at 37°C. The comparison is shown in Fig. 12b. Even in this situation, model results are very similar to experimental data, catching the peculiar point of this test, i.e. the progressive curve motion towards greater strain values, followed by an increased slope of phase transformation plateau.

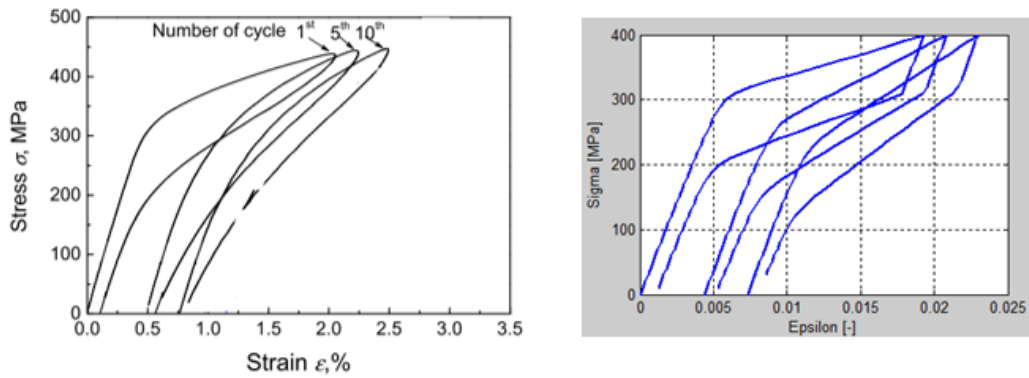
Comparison with experimental tests results

To perform a comparison with the results of the tests conducted by CNR in Lecco, model parameters are obtained from experimental cyclic tests with 4% of imposed strain.

In Fig. 13 (left) stress-strain relationship given by the model and by experimental data are superimposed. Overlapping is good: in the first loading-unloading cycle the amount of accumulated strain and the plateau lowering are almost the same. The only difference is the rate of this fatigue strain accumulation: in the model fatigue proceeds faster so in only 4 cycles, an accumulated strain equals to the amount experimentally found after 20 cycles, is obtained. This difference depends on the experimental evidence that strain accumulation is more significant during the first 4-5 cycles, then decrease evidently; the model instead is characterized by a uniform accumulation during mechanical loading-unloading, in accordance with Auricchio's formulation for fatigue, and it reduces only in a proportional way respect to plateau decrease in length. Nevertheless if someone is not concern to catch properly fatigue accumulation during the first cycles, when it is more evident, but during the following ones, model parameters can be obtained averaging the first 10 loading-unloading cycle behavior (Fig. 13, right). If this is the case, the model loses the ability to capture correctly fatigue accumulation at the beginning of the test, but the model response becomes more similar to experimental data in the following cycles. The calibrated model was used to repeat cyclic tests till 7% and 8% of maximum strain (Fig. 14). The similarity between the two sets of plots is good, notwithstanding the cited problem of excessive rate of fatigue accumulation. Another aspect is also present: experimental data show that the lower plateau drops to lower stress values as the maximum strain imposed increases. Mechanical hysteresis is wider in the stress-strain relationship of maximum 8% strain cyclic test than the 7% one, which is greater than the hysteresis shown during maximum 4% strain cyclic test. The proposed model is not able to capture this aspect, because it catches the inferior plateau lowering only after some plastic strain, that it is not present during these tests.



(a) Comparison between $\sigma - \varepsilon$ curves found in Wang et al. (2008) [9] (left) and obtained from the proposed model (right). On the top: 10% of maximum strain. On the bottom: 12% of maximum strain.



(b) Comparison between $\sigma - \varepsilon$ curves found in Kan et al. (2010) [4] (left) and obtained from the proposed model (right)

Figure 12: Comparison between $\sigma - \varepsilon$ curves found in literature and obtained from the proposed model

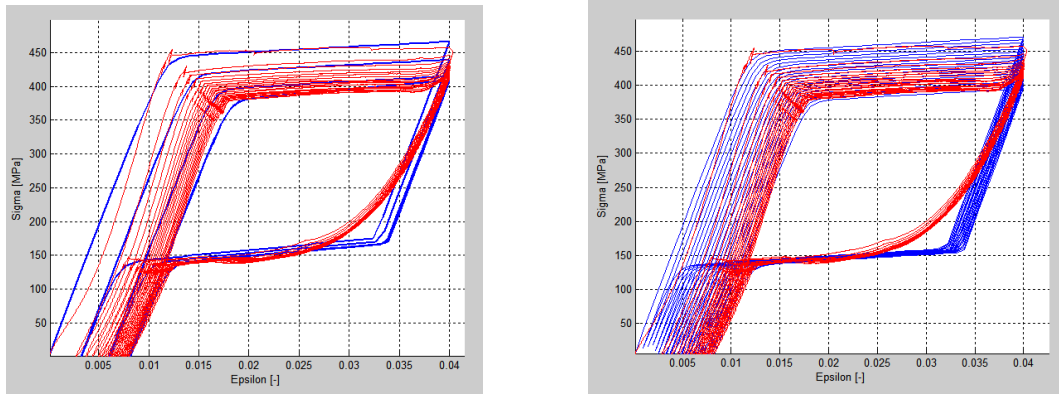


Figure 13: Comparison between model prediction (blue) and experimental data from a maximum 4% strain cyclic test performed at CNR (red). On the left model parameters were calibrated on the first loading-unloading cycle, on the right averaging the first 10 cycles behavior.

Referring to experimental tests conducted at Labs, model parameters are obtained from experimental data related to the tests at 10% of strain and to a breaking test. To compare model prediction with experimental evidence, uniaxial tensile tests till 10% and 12% of maximum strain are shown in Fig. 15. These values of strain determine the yielding of the material. The development of plastic strain decreases the material capability to undergo future phase transformations: this aspect is correctly captured by the model.

Numerical simulations results

The results of numerical simulations on Absolute Pro and Maris Plus stents considering literature value for plastic parameters do not show value of stresses reached by the most critical points so high to reach yielding conditions during device life. However, considering that material properties can be very different according to the

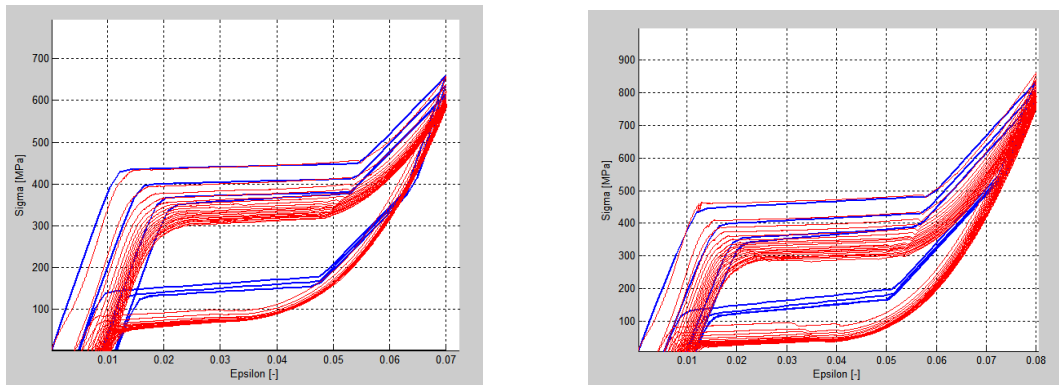


Figure 14: Comparison between model predictions (blue) and experimental data (red) from maximum 7% (left) and 8% (right) strain cyclic tests performed at CNR.

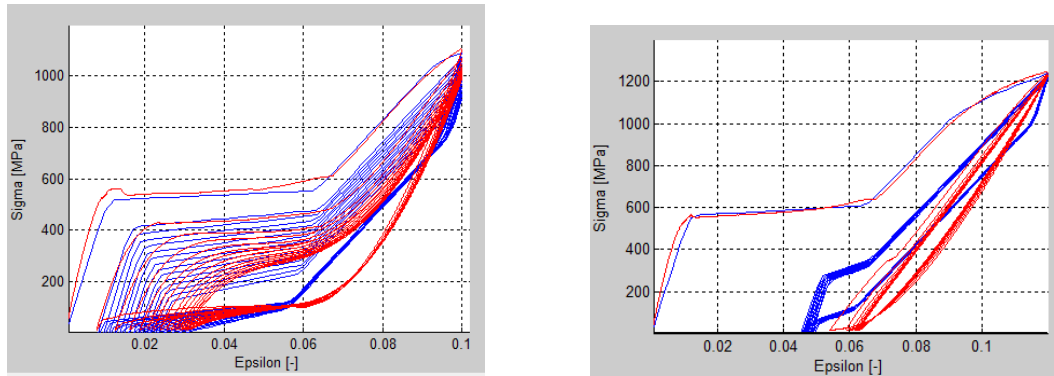


Figure 15: Comparison between model predictions (blue) and experimental data (red) from maximum 10% (left) and 12% (right) strain cyclic tests performed at Labs.

thermo-mechanical treatments the device is subjected during its manufacturing, it has been decided to consider also thresholds for yielding, implying material plasticization during simulations and to understand how device behavior can be affected. Instead, as regards Lifestent and the TAVI device, relatively high stress are reached during crimping, sufficient to reach yielding even considering a standard threshold for plasticity.

In every performed simulations, devices global behavior has not been affected by plastic strain, meant as capability to recover the initial diameter during free expansion following a crimping, because the diameter reduction is only limited around 3%. More important differences are present considering the stress-strain relationships of the most stressed point of the devices, where plasticization produces greater strain and lower values of stress. This aspect is very interesting during numerical simulations in which the devices are expanded inside a silicone tube, because during the following mechanical cycling maximum and minimum stresses and strains are modified. The more significant the plastic strain was, the more phase transformation plateau during unloading reduces its length and its value (lower stresses). Yielding effects on the stress-strain relationship of one of the most stressed points of the TAVI device are shown in Fig. 16. Deactivating plasticity, loading–unloading cycling takes place under compression, in proximity of lower phase transformation plateau. Activating them, the material can no more exhibit any phase transformations, so the plateau is absent during unloading. At the same time, an evident irreversible strain is present, causing a switch in loading condition, from compression to tension, and a loading-unloading cycling at strain values that are almost doubled. We must also mention that the model managed to reach convergence during every performed simulations, without causing an excessive increase of computational time to complete the analyses.

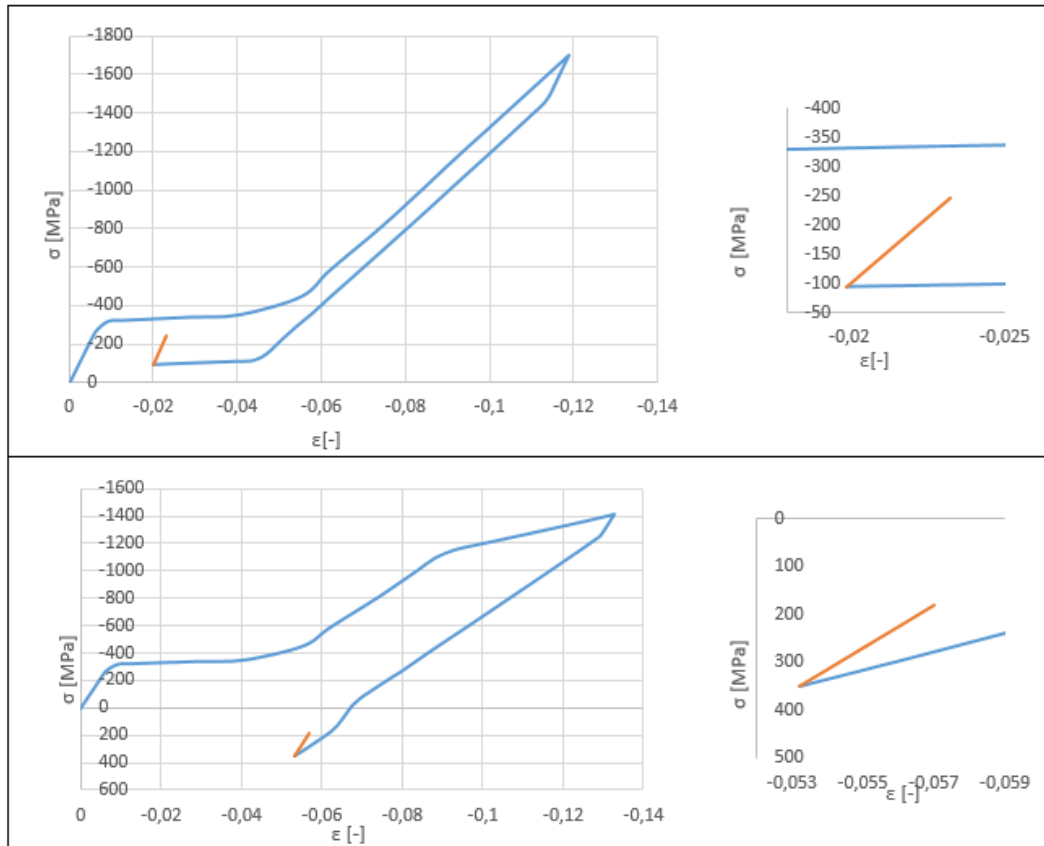


Figure 16: $\sigma - \epsilon$ curves of the most stressed point in the TAVI device during expansion inside the compartment, neglecting (top) or considering (bottom) yielding effects.

Conclusions

Starting from obtained experimental data and from the implementation of Auricchio et al. (2007) and Barrera et al. (2014) models, a new constitutive model has been formulated. This one overcomes the problems of the previous two models, properly catching yielding and strain accumulation due to fatigue. Following Urbano et al. (2015) [6] work, the proposed model describes correctly the reduction of Young's modulus from austenite to martensite during a test in pseudoelasticity. The model is also able to capture a degradation effect, so the material shows phase transformation plateaus at decreased values of stress during fatigue evolution, followed also by an increase of their slope. The model introduces also yielding effects on the material capability to undergo phase transformations: the higher the plastic strain was, the more phase transformation plateaus reduce their length, because plasticization has stabilized a portion of detwinned martensite, causing the presence of an irreversible strain. When plastic strains are present, this martensite stabilization can also produce the complete vanishing of phase transformation phenomenon, giv-

ing rise to a linear response, as the material was elastoplastic. The proposed model was also formulated taking in account that after yielding a drop to lower values of stress of the lower phase transformation plateau is present, the more evident the higher plastic strain was. This aspect traduces that during loading-unloading cycling following yielding the height of mechanical hysteresis has increased. The comparison with stress-strain relationships found in literature or obtained from performed experimental tests shows a good agreement.

The proposed constitutive model was implemented in a UMAT subroutine, to be used inside ABAQUS 6.13 Standard to perform some numerical finite element simulations on some vascular stents and a TAVI device model, aiming to reproduce the implant procedure, so crimping inside a catheter followed by their expansion. These analyses allowed to analyze differences in devices behavior considering or not plastic strains development. Using the new constitutive model it was possible to capture that in some points these devices show some irreversible strain. These points are few respect to the entire devices size, so devices global functionality is not altered significantly and the capability to recover initial expanded diameter lowers only around 3%. The most important differences considering or not yielding can be found in the stress-strain relationship of the most stressed points of the devices. Some computational analyses in which the expansion takes place inside a silicone tube were performed, followed by some loading-unloading cycles that represent cyclic loading conditions on the artery during patient deambulation in the case of stents, or the application and removal of blood pressure during cardiac cycle in the case of the aortic valve. Considering the results on the TAVI device, stress values at which the mechanical cycling takes place represent compression conditions if material yielding is neglected, but become tensile stresses if plasticity is considered; at the same time strains have changed, having almost doubled.

When performing computational analyses the availability of a constitutive model able to catch both fatigue and yielding is crucial. In future, the proposed model can be useful to study fatigue on biomedical devices, where a difference in the model prediction in terms of stress and strain reached by the material traduces in discrepancies during life estimation for the studied devices. Therefore, the model here presented can be very useful when we are concern to mimic biomedical devices life realistically, allowing to achieve more accurate predictions respect to those obtainable with the available constitutive models nowadays implemented inside common commercial finite elements software.

Capitolo 1

Leghe a memoria di forma: proprietà e applicazioni tecnologiche

1.1 Presentazione delle leghe a memoria di forma

Gli ultimi 40 anni hanno rappresentato un periodo di notevole salto tecnologico dal punto di vista dei materiali utilizzati per la progettazione ingegneristica: dopo l'esplosione dei polimeri è avvenuta una transizione verso la ricerca dei cosiddetti «materiali intelligenti» (Fig. 1.1), ovvero una classe di materiali in grado di rispondere a stimoli esterni. Questi materiali sono capaci di variare le proprietà fisiche e/o strutturali in seguito a cambiamenti di sollecitazione applicata, di temperatura, di umidità o di pH dell'ambiente circostante [19]. La loro applicazione spazia dal campo dell'ingegneria elettronica, a quello civile, da quello aeronautico, a quello medico. Le leghe a memoria di forma rientrano tra i materiali «smart» ora più diffusi in campo medico-chirurgico, in particolare per le applicazioni che richiedono interventi miniminvasivi.

La scoperta delle leghe a memoria di forma, o in inglese «shape memory alloys» (SMA), le prime a base di Oro-Cadmio o Rame-Zinco, in realtà avvenne in sordina, senza particolare interesse nel mercato industriale almeno fino al 1962, anno in cui venne creato da Buehler per la prima volta il NiTiNOL (lega di Nichel e Titanio, NOL fu inserito nel nome in onore del Naval Ordnance Laboratory, dove avvenne la scoperta) studiando possibili materiali per isolamenti termici [20]. In questa occasione si notò che le leghe di Nichel-Titanio (leghe Ni-Ti) possedevano buone proprietà meccaniche ed uniche capacità di recuperare notevoli deformazioni subite, caratteristiche che ne determinarono la rapida diffusione, dapprima più lentamente a causa dei costi produttivi elevati e della scarsa comprensione delle complesse proprietà meccaniche, poi sempre più massiccia grazie all'abbattimento dei prezzi

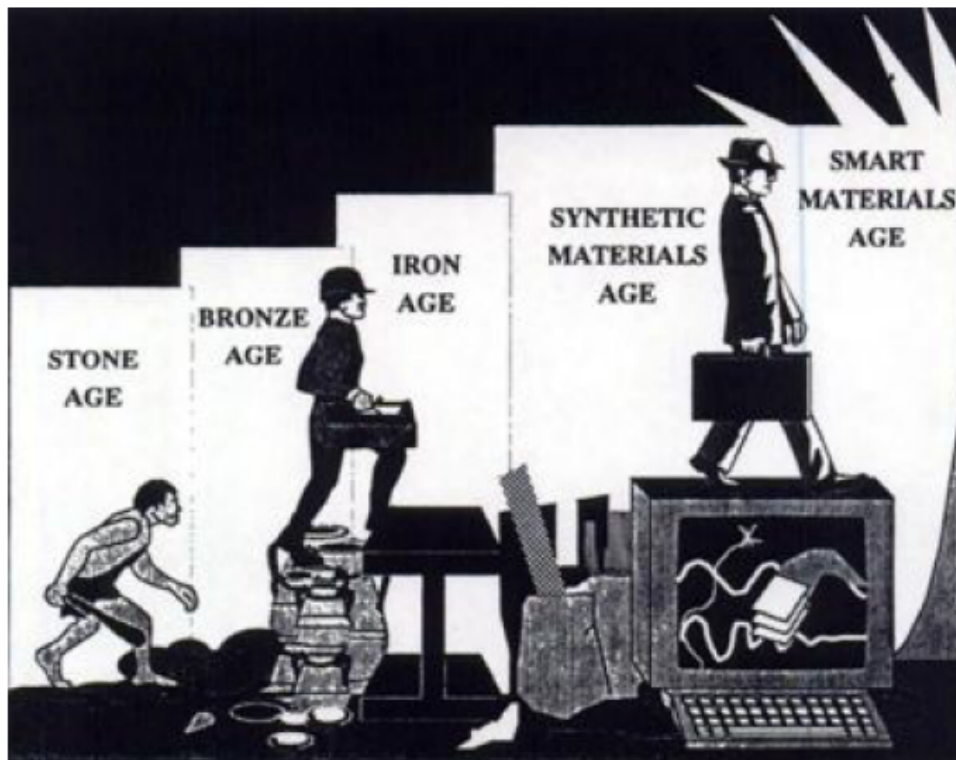


Figura 1.1: Le ere della scienza dei materiali

dovuto al progressivo aumento della domanda. Nei giorni nostri si può quindi pensare a numerose potenziali applicazioni, rimanendo all'interno di costi produttivi non elevati.

L'interesse suscitato dalle leghe a memoria di forma deriva sostanzialmente dall'abilità di ricordare una certa forma originaria, rimanendo in grado di recuperarla anche in seguito all'applicazione di elevate deformazioni. [21] Questa possibilità si spiega microstrutturalmente con una trasformazione di fase che avviene all'interno del materiale, causando un passaggio tra due fasi solide, una stabile ad alte temperature, *Austenite*, e l'altra stabile a temperature più basse, *Martensite*. L'effetto di tale trasformazione di fase può presentarsi con due fenomeni differenti:

- *Pseudoelasticità (PE)*, che consiste nella capacità del materiale, mantenuto a temperatura elevata e costante e quindi in fase austenitica, di esibire elevate deformazioni che possono essere quasi totalmente recuperate solo con la semplice cessazione della sollecitazione imposta;
- *Effetto a memoria di forma (SME)*, che avviene in un materiale quando viene deformato mantenendolo in fase martensitica. Alla cessazione del carico imposto, al contrario della situazione precedente, la deformazione non è automaticamente recuperata, ma tale ritorno alla configurazione iniziale può essere ottenuto mediante riscaldamento.

Queste peculiari proprietà sono inoltre accompagnate da altre importanti caratteristiche, che ne giustificano l'ampia diffusione avvenuta negli ultimi anni, e che consistono in:

- resistenza al fenomeno di kinking;
- buona resistenza meccanica;
- biocompatibilità e resistenza alla corrosione;
- isteresi termomeccanica;
- resistenza alla fatica.

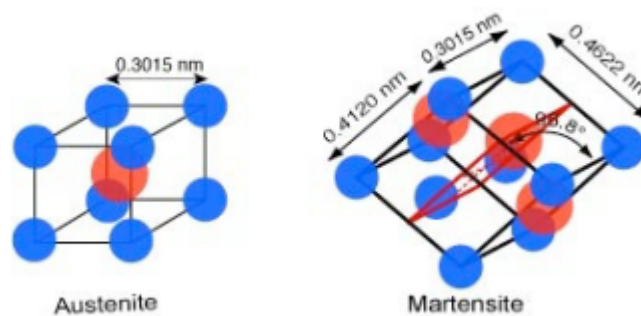


Figura 1.2: Struttura cristallina di austenite e martensite

1.2 Le leghe Ni-Ti

1.2.1 Struttura cristallina

Le leghe Ni-Ti sono leghe a memoria di forma composte da Nichel e Titanio in percentuale in peso presenti al 55% e al 45%, rispettivamente. Come già precedentemente accennato sono caratterizzate dall'esistenza di due fasi cristalline diverse, stabili a diverse condizioni di temperatura e sforzo applicato e con differenti proprietà meccaniche. [22]

A temperature più alte la fase naturalmente presente nel materiale è l'austenite, detta anche fase γ , che presenta un reticolo cristallino con una simmetria elevata e con una struttura reticolare cubica a corpo centrato. In tale fase il materiale presenta anche le più elevate proprietà meccaniche, e risulta quindi più rigido.

La martensite, invece, è stabile a temperature inferiori, inoltre è caratterizzata da un reticolo cristallino con struttura monoclinica ortorombica, che presenta una minore simmetria. In questa fase il materiale è meno rigido, quindi più facilmente deformabile e lavorabile (Fig. 1.2).

Proprio a causa di quest'ultima caratteristica, i cristalli di martensite possono assumere diverse orientazioni, dette *varianti*, che in una configurazione in assenza

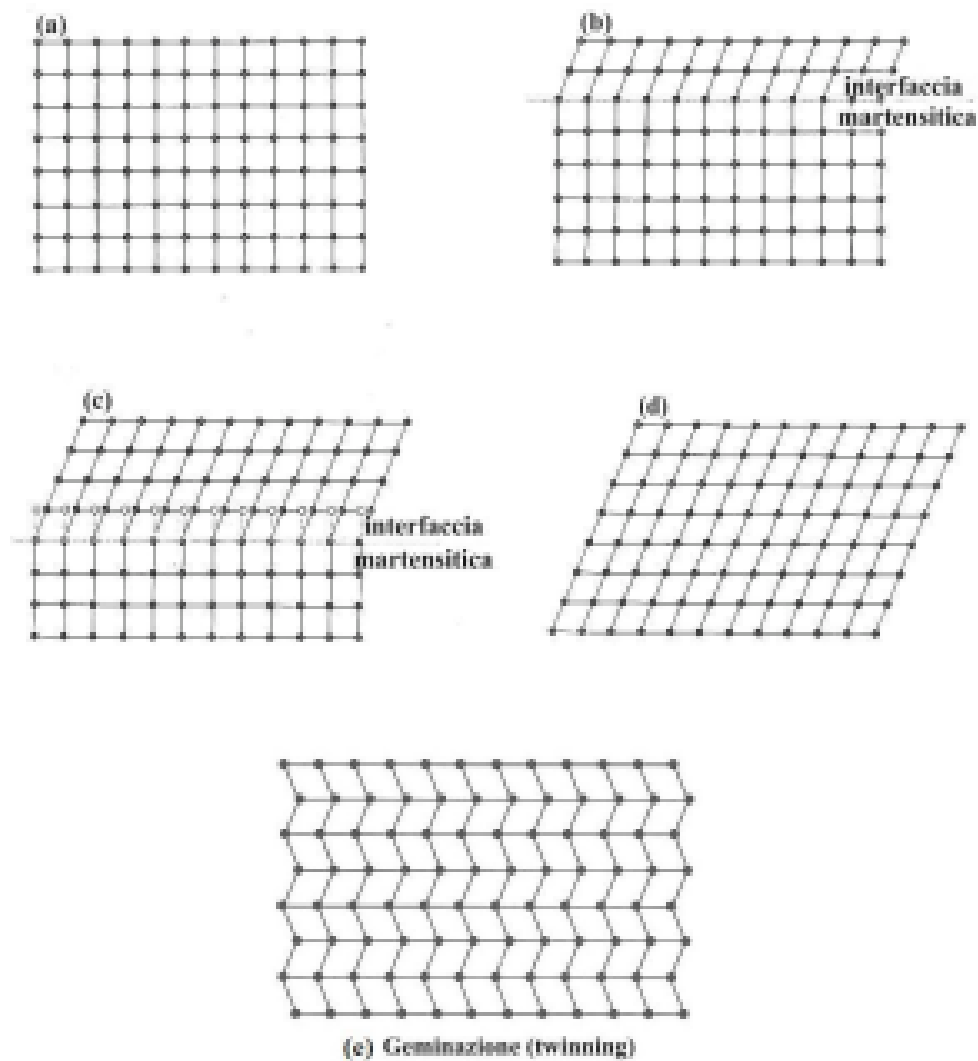


Figura 1.3: Trasformazione tra austenite e martensite twinned

di sforzi applicati coesistono, dando origine ad uno stato solido detto *martensite twinned* o *multivariante*, non collegata a nessuna variazione di forma macroscopica. Quando questa struttura viene sottoposta ad un carico lungo una certa direzione, a causa della bassa resistenza allo scorrimento reciproco tra i vari cristalli di diverse varianti, quest'ultime assumono una tipica configurazione *detwinned*, caratterizzata dalla presenza di una sola variante di martensite, ovvero quella più stabile nella situazione di carico imposto.

Esiste infine una terza fase, detta *fase R*, che può essere considerata come una fase intermedia tra austenite e martensite, con struttura cristallina romboedrica.

Il passaggio tra austenite e martensite avviene in maniera reversibile, attraverso una trasformazione detta *trasformazione martensitica termoelastica*. Questo mecca-

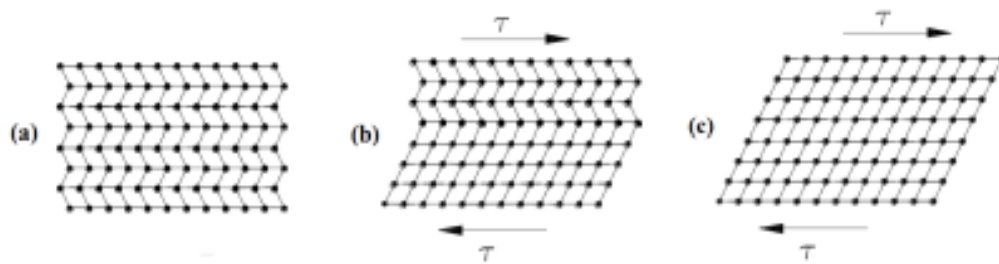


Figura 1.4: Fenomeno di detwinning

nismo è detto essere non diffusivo, ovvero non presenta rotture di legami del reticolo cristallino, ma avviene attraverso un meccanismo di scorrimento coordinato tra i vari atomi, che non implica diffusione. La reversibilità del fenomeno deriva proprio dalla mancanza di rotture di legami chimici, che spiega il motivo dell'attributo termoelastico.

Partendo dalla fase genitrice austenite, la trasformazione martensitica a livello microscopico consiste in un riarrangiamento coordinato dei cristalli di martensite che via via hanno origine, dovuto alla diversa forma del reticolo tra martensite ed austenite (Fig. 1.3). Infatti man mano che nuovi cristalli di martensite si formano, per minimizzare le incongruenze alle interfacce i nuovi cristalli si dispongono in diverse varianti, dando origine ad una martensite twinned, che rispetto all'austenite di partenza non presenta variazioni di forma. Dato che i piani di separazione tra le varianti di martensite hanno bassa resistenza allo scorrimento relativo, uno sforzo applicato al materiale si tradurrà in uno sforzo di taglio su alcuni di questi piani, che potranno scorrere facilmente in modo che all'interno del materiale le varianti con orientamento non favorevole si riarrangino, scorrendo tra loro (*detwinning*) nella direzione del carico imposto. Si origina in questo modo la martensite *singola variante*, ovvero quella termodinamicamente più favorevole al carico (Fig. 1.4) : il passaggio da martensite multivariante a quella singola variante determina una deformazione macroscopica del materiale, che per i meccanismi spiegati risulta isovolumetrica, in quanto dipende dagli sforzi di taglio imposti [22,23].

La transizione di fase tra austenite e martensite per avvenire in condizioni di materiale scarico necessita di un raffreddamento, o di un riscaldamento nel caso di quella inversa. Un classico metodo utilizzato per caratterizzare la particolare lega in esame è il ciclaggio termico a carico costante, che consiste nell'applicazione di un carico costante, seguito da un ripetuto raffreddamento e riscaldamento. Quello che si ottiene è un grafico tipico, Fig. 1.5, che presenta una chiara isteresi termica, ovvero una non congruenza tra le temperature di inizio e fine trasformazione martensitica, nel caso di trasformazione diretta ed inversa. In particolare le temperature sono M_s , che è la temperatura di inizio trasformazione in martensite, M_f la temperatura

alla quale la trasformazione in martensite è completata, e allo stesso modo, A_s è la temperatura di inizio trasformazione in austenite, A_f la temperatura alla quale la trasformazione in austenite si è completata. Si sottolinea che tali temperature sono strettamente dipendenti dalla composizione chimica del materiale, intese anche come piccole variazioni percentuali di ripartizione fra Nichel e Titanio, oltre che ai processi tecnologici a cui la lega è stata sottoposta durante la lavorazione meccanica. Questo aspetto causa una forte complessità che deve essere tenuta in conto durante la progettazione di una lega a memoria di forma, ma costituisce allo stesso tempo una grande libertà nel progettare il materiale nel modo più adatto possibile alla specifica applicazione.

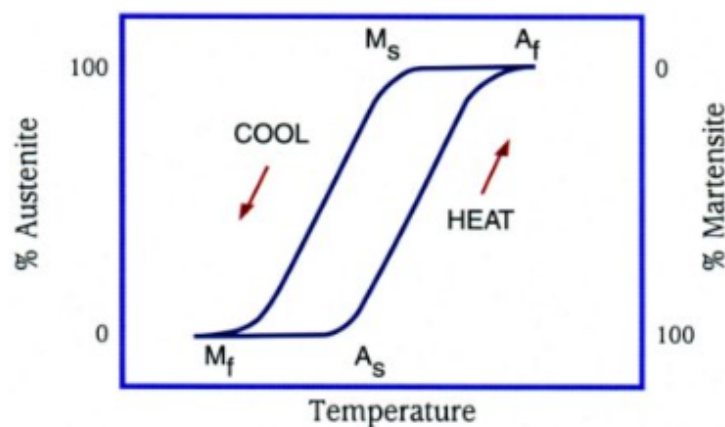


Figura 1.5: Temperature caratteristiche ottenute per ciclaggio termico

1.2.2 Pseudoelasticità e memoria di forma

Alla luce della conoscenza dei meccanismi di transizione di fase tra martensite ed austenite possono essere facilmente spiegati i due fenomeni tipici delle leghe a memoria di forma, ovvero pseudoelasticità ed effetto a memoria di forma.

La pseudoelasticità avviene in materiali che si trovano a temperatura maggiore di A_f e si presenta come la capacità del materiale di recuperare la lunghezza iniziale anche successivamente all'applicazione di deformazioni fino al 10%. Al di sopra di tale temperatura il materiale è completamente in fase austenitica e la trasformazione di fase può essere indotta dall'applicazione di uno sforzo. Nella Figura 1.6b è mostrata una tipica curva sforzo-deformazione per un materiale pseudoelastico. Il primo tratto dopo l'applicazione del carico è un tratto lineare elastico, in cui sforzo e deformazione sono direttamente proporzionali. Quando lo sforzo raggiunge un certo valore soglia, viene indotta la trasformazione di fase, che consiste in un passaggio diretto dalla fase austenite alla fase martensite detwinned, a causa della presenza di un carico applicato. Macroscopicamente la transizione di fase appare in figura

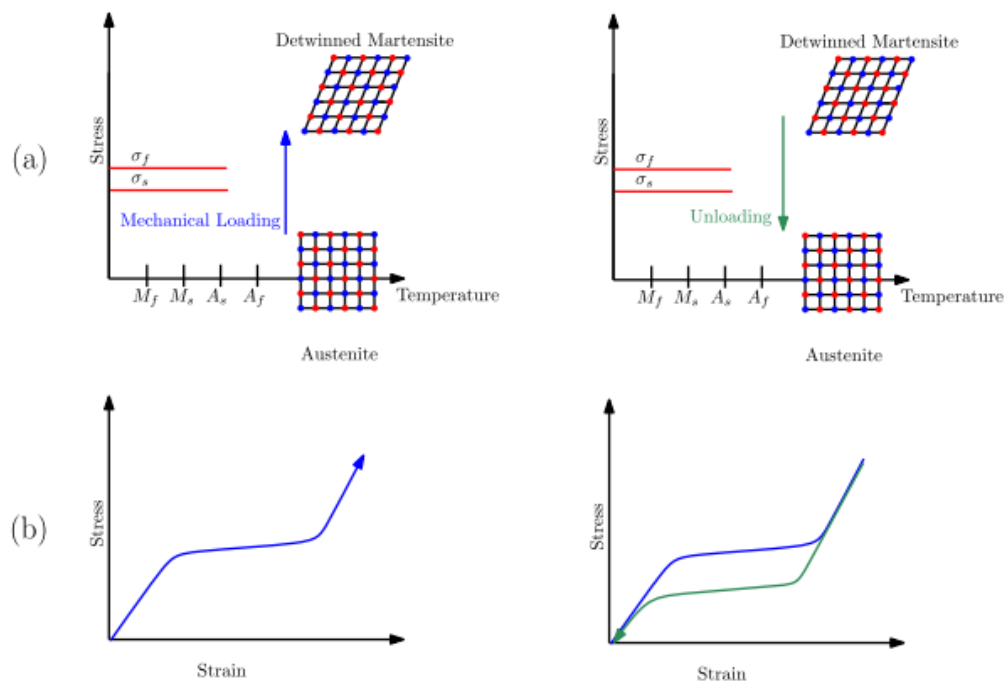


Figura 1.6: Pseudoelasticità: a) schema della transizione di fase; b) curva sforzo-deformazione (Lagoudas, 2008 [23])

come un plateau a sforzo praticamente costante, accompagnato quindi da elevate deformazioni. Quando lo sforzo applicato ha determinato la completa formazione di martensite, si assiste ad un nuovo tratto lineare, che corrisponde al tratto elastico della martensite singola variante. Nel momento in cui il carico viene rimosso, la martensite che si era formata non è più stabile, visto che il materiale si trova a temperature maggiori di A_f , alle quali dovrebbe esistere solo austenite. Ne consegue che proprio a causa di tale instabilità la struttura cristallina si vuole trasformare in quella austenitica, che corrisponde anche alla configurazione alla quale non è associata nessuna deformazione macroscopica. Quindi come la trasformazione inversa ha luogo, avviene anche il recupero totale della deformazione che era stata imposta; lo sforzo dapprima decresce seguendo il recupero elastico della martensite, subendo poi un plateau durante il quale la deformazione viene recuperata a sforzo quasi costante, ma inferiore rispetto al plateau di carico. Segue nell'ultima parte dello scarico il recupero elastico dell'austenite. Si evince quindi che il plateau che la curva sforzo deformazione tipicamente presenta non abbia lo stesso effetto del plateau tipico dei metalli elastoplastici, in quanto in realtà è un plateau elastico, che può essere recuperato allo scarico.

In realtà il comportamento qui enunciato è stato leggermente semplificato, in quanto non è sempre presente con le caratteristiche descritte, ma presenta invece alcune limitazioni:

- E' stato detto che la pseudoelasticità è presente per temperature maggiori di A_f , in realtà sarebbe più corretto parlare dell'esistenza di una *finestra pseudoelastica*, in quanto esiste una temperatura $M_d > A_f$ sopra la quale l'austenite non viene più indotta a trasformarsi in martensite detwinnata dallo sforzo applicato, ma invece energeticamente preferisce subire un fenomeno di accumulo di deformazione plastica dello stesso tipo di quello subito dai classici metalli elastoplastici. Ne consegue che a temperature maggiori di M_d la pseudoelasticità non è più presente, e le deformazioni accumulate dopo il tratto elastico lineare non possono essere più recuperate.
- In alcune leghe la trasformazione, che è stata descritta avvenire a sforzo praticamente costante, in realtà presenta anch'essa un aumento degli sforzi, o hardening, sebbene con pendenza della curva sforzo-deformazione molto ridotta. Questo comunque non cambia le considerazioni sul meccanismo della pseudoelasticità e quindi della possibilità di recupero delle deformazioni subire.
- Nel caso ad un materiale venga applicato uno sforzo davvero notevole, al termine della transizione di fase il tratto seguente della curva sforzo-deformazione, che rappresenta il tratto lineare elastico della martensite, potrebbe essere percorso nella sua interezza, fino al raggiungimento della soglia di snervamento della martensite. Al di sopra di tale soglia si noterebbe un ulteriore plateau, questa volta plastico. Le deformazioni accumulate in questo plateau non vorrebbero più recuperate, ma causerebbero la presenza di una deformazione residua allo scarico.
- Nel caso di sollecitazione di carico e scarico ciclica, ad ogni ciclo percorso il materiale perde leggermente la propria capacità di recuperare completamente la forma originaria, accumulando progressivamente una deformazione residua permanente.

Si sottolinea che gli ultimi due fenomeni, essendo molto interessanti, sono qui solo menzionati, e saranno trattati con maggiore profondità nel seguito, quando si darà spazio alle conseguenze della presenza di eventuali deformazioni plastiche sulle proprietà delle leghe a memoria di forma (sezioni (1.3.5) e (1.3.8)).

Per quanto riguarda il fenomeno della memoria di forma, questo è invece tipico quando si deforma meccanicamente la SMA a basse temperature, inferiori a M_f , alle quali la struttura cristallina stabile è quella martensitica multivariante. In Fig. 1.7 è rappresentato il fenomeno, in modo che se ne possa capire l'evoluzione. Partendo dalla martensite multivariante il campione di materiale viene sottoposto ad una sollecitazione, che produce innanzitutto una risposta elastica lineare, seguita da un tratto a pendenza quasi nulla che corrisponde al plateau di transizione in cui le varianti di martensite si riallineano per disporsi lungo la direzione del carico impo-

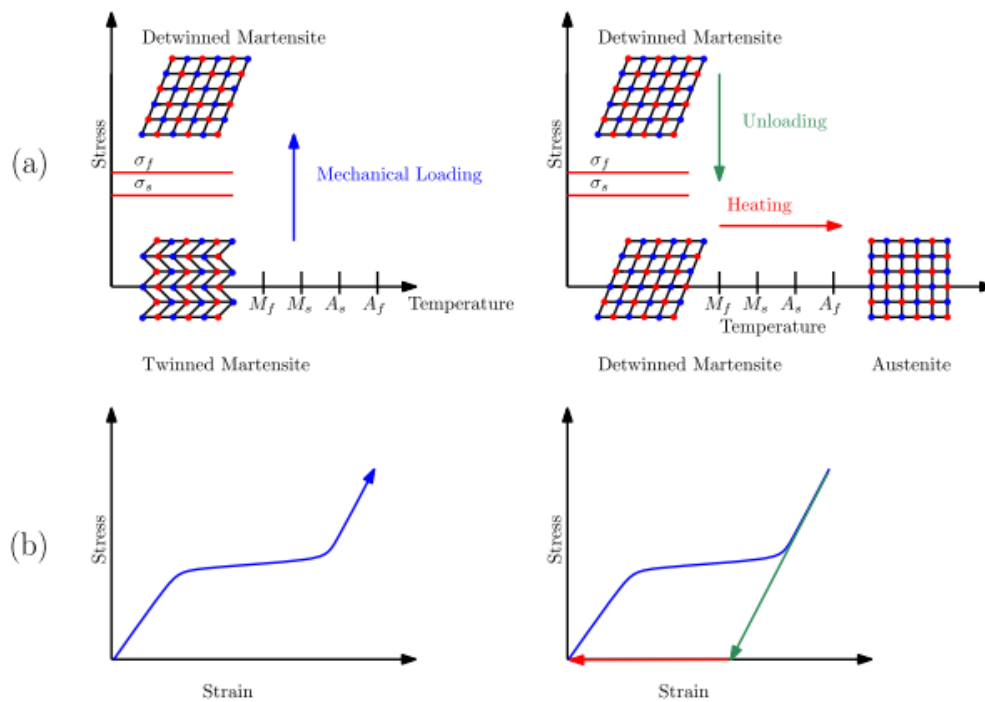


Figura 1.7: Effetto a memoria di forma: a) schema della transizione di fase; b) curva sforzo-deformazione (Lagoudas, 2008 [23])

sto, fino alla completa trasformazione in martensite singola variante. Allo scarico, il materiale è in grado di recuperare solo una modesta entità della deformazione imposta, presentando quindi una deformazione residua. Infatti allo scarico, al contrario di quanto avveniva in pseudoelasticità, il materiale si trova ancora a temperatura inferiore ad M_f , quindi in una situazione in cui è stabile la martensite, che a questo punto però dopo l'applicazione del carico si era trasformata completamente in singola variante, configurazione alla quale è associata una deformazione macroscopica notevole. L'unico modo per recuperare la deformazione residua è quindi fare avvenire una trasformazione di fase inversa, scaldando il materiale. In questo modo se si alza la temperatura fino all'incirca ad A_f , la configurazione cristallina stabile diventa l'austenite, la quale corrisponde però macroscopicamente alla situazione iniziale indeformata. Quindi con la trasformazione in austenite viene anche recuperata la deformazione residua, grazie al cambio di configurazione cristallina. Se a questo punto il materiale viene riportato a basse temperature, la forma indeformata viene mantenuta, perché durante la trasformazione di fase si origina, in assenza di sforzi applicati, la martensite multivariante, alla quale non è associata nessuna deformazione macroscopica. Si capisce come la memoria di forma consista nel memorizzare una forma ad alte temperature, e la possibilità di vedere nuovamente tale fenomeno sarebbe deformare nuovamente il materiale, facendo seguire un ulteriore ciclo di riscaldamento e raffreddamento.

1.3 Analisi delle proprietà meccaniche delle leghe Ni-Ti

1.3.1 Curva sforzo-deformazione

Quando si desidera caratterizzare un materiale dal punto di vista meccanico, si eseguono prove di trazione o compressione monoassiale, nelle quali lo sforzo imposto, o la deformazione, viene aumentato lentamente fino a giungere al punto di rottura. In questo modo si può ricostruire la curva sforzo-deformazione del materiale. Nel caso delle leghe a memoria di forma a causa del complesso comportamento meccanico le prove sono fortemente regolamentate: per esempio, la norma ASTM F 2516-07 descrive nel dettaglio il metodo da seguire per effettuare una prova monoassiale su un provino di lega di Ni-Ti pseudoelastica. La prova deve essere effettuata in

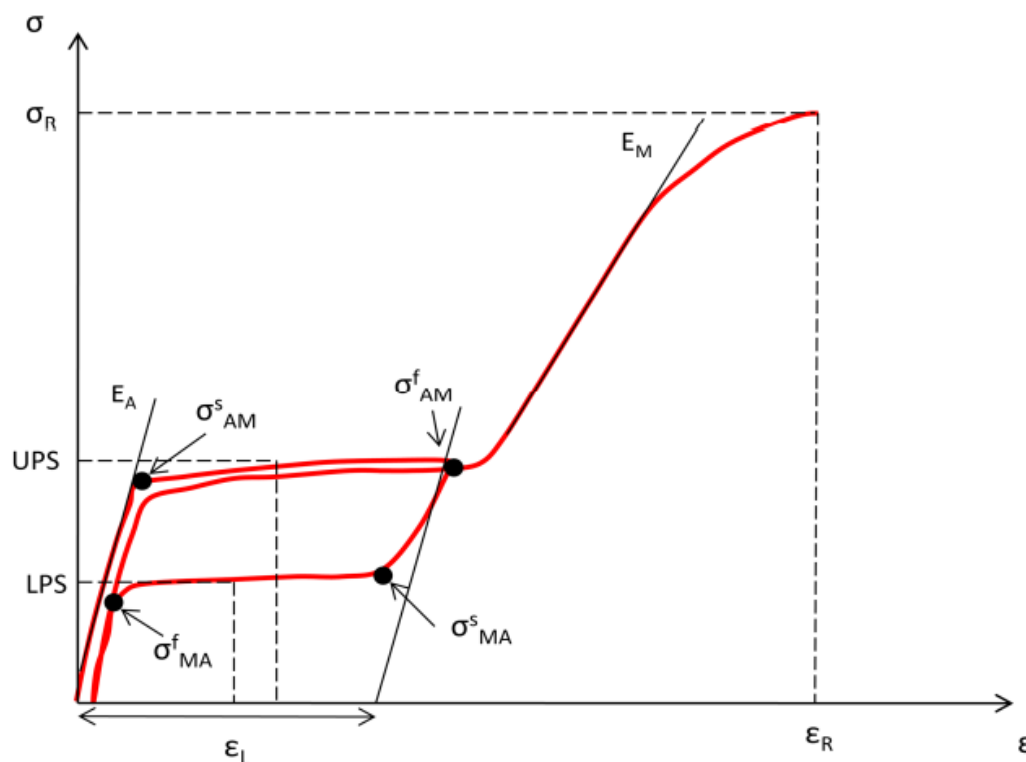


Figura 1.8: Tipica curva sforzo deformazione di una SMA, in campo pseudoelastico

controllo di deformazione e temperatura costante, imponendo un carico fino ad un 6% di deformazione, a cui segue uno scarico fino a valori di sforzo minori di 7 MPa. A questo punto il provino deve essere nuovamente caricato, fino a rottura. A seconda del diametro del campione la velocità con cui la deformazione viene imposta deve essere accuratamente scelta. Un grafico tipico che si ottiene da una prova di questo tipo è mostrata in Fig. 1.8.

Si notino i due tratti lineari, prima e dopo il plateau, che corrispondono alla risposta lineare elastica di austenite e martensite, caratterizzati da tangenti che rap-

presentano il modulo di Young di queste due fasi. E' presente inoltre il caratteristico plateau di trasformazione di fase, che esibisce anche un'evidente isteresi tra carico e scarico. Da tale curva si possono estrarre quindi i parametri:

- UPS: upper plateau stress, ovvero lo sforzo corrispondente al 3% di deformazione al primo carico;
- LPS: lower plateau stress, ovvero lo sforzo al 2.5% di deformazione allo scarico;
- σ_R , ovvero lo sforzo di rottura, e la corrispondente deformazione ε_R di rottura;
- E_A e E_M , modulo di Young di austenite e martensite; si noti che il secondo è minore del primo;
- ε_L , ovvero la deformazione massima dovuta alla trasformazione di fase;
- σ_{MA}^S e σ_{MA}^F , che sono gli sforzi di inizio e fine trasformazione inversa;
- si noti inoltre come il grafico sarebbe completamente caratterizzato anche dai valori di altre due tangenti, ovvero la pendenza durante il plateau di trasformazione di fase, e la pendenza del legame sforzo-deformazione poco prima della rottura, in campo plastico.

Si è già visto come le proprietà esibite dalle leghe Ni-Ti siano strettamente dipendenti dalla temperatura, causa di un diverso comportamento meccanico del materiale, in quanto a basse temperature può essere esibito il comportamento a memoria di forma, ad alte temperature, invece, può avvenire il fenomeno pseudoelastico. Se si eseguisse una classica prova di trazione su un provino, il comportamento del materiale varierebbe gradualmente, come mostrato in Fig. 1.9.

A basse temperature allo scarico la deformazione non è recuperata, in quanto servirebbe un ciclaggio termico per ottenere il recupero per memoria di forma. Man mano che la temperatura della prova si alza si nota che il tratto di plateau che corrisponde alla trasformazione di fase si alza verso valori di sforzo più elevati. A temperature molto elevate il plateau si innalza fino a raggiungere il valore della soglia di snervamento; a questo punto la pseudoelasticità non è più presente, ma il materiale si comporta come un classico metallo elasto-plastico. [24]

Sperimentalmente si nota una relazione quasi lineare tra l'aumento della soglia di inizio trasformazione di fase con la temperatura di esercizio [1], come mostrato in Fig.1.10 .

1.3.2 Moduli elastici dall'austenite e della martensite

Si è quindi capito dalla discussione fin qui fatta come il comportamento delle leghe a memoria di forma sia altamente complesso e variabile, a seconda della temperatura e delle condizioni di sforzo applicate. Si potrebbe anche affermare in realtà che

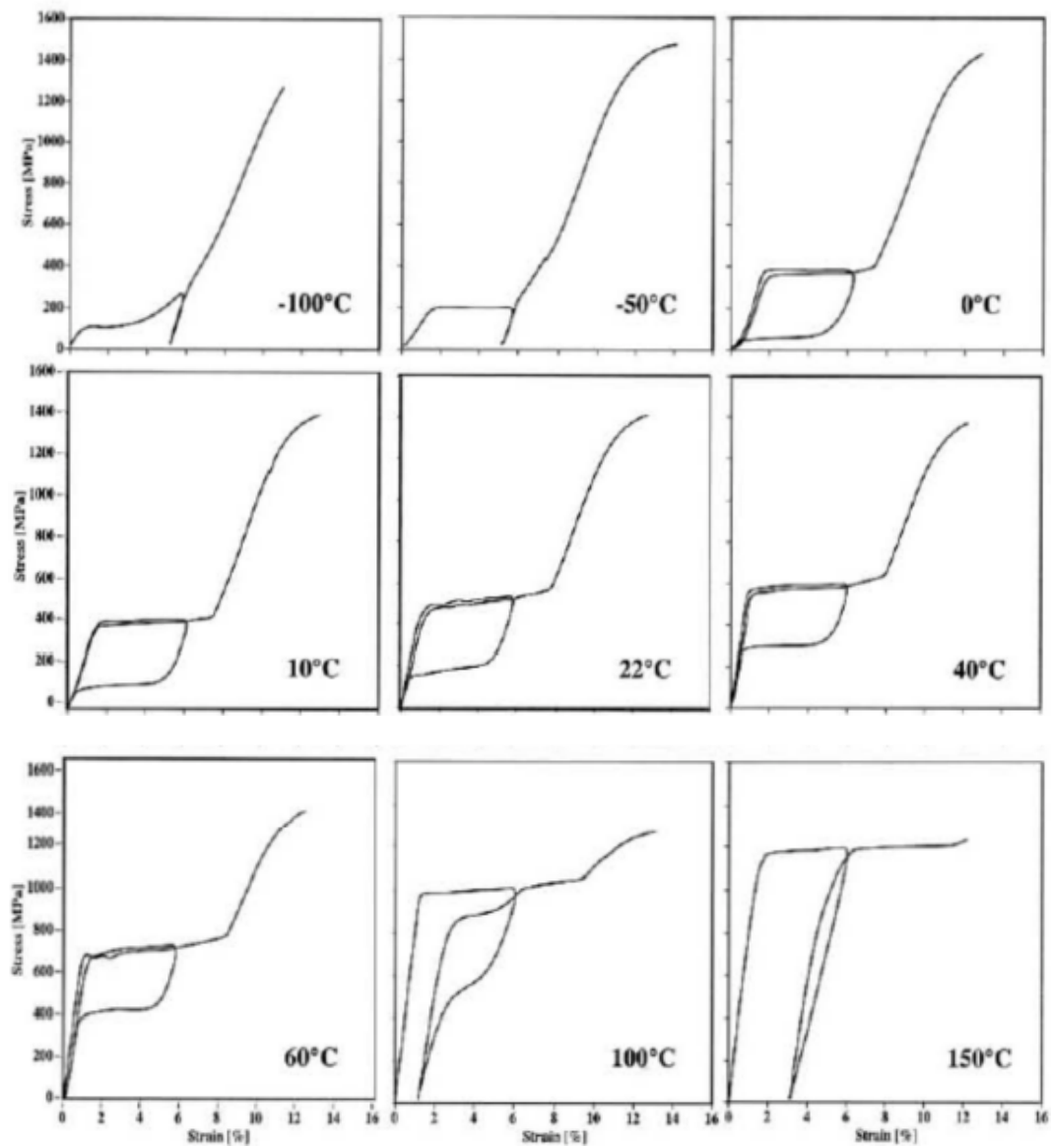


Figura 1.9: Effetto della temperatura di esercizio

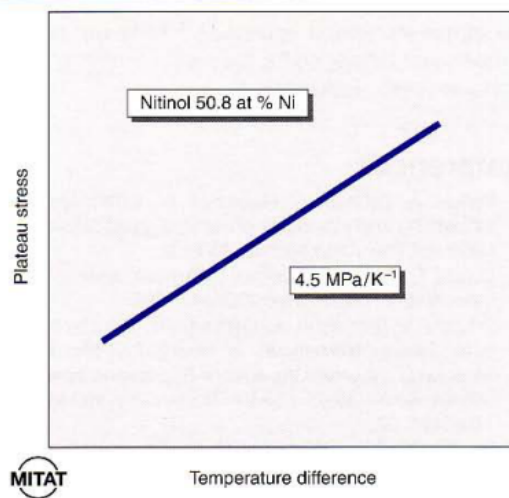


Figura 1.10: Influenza della temperatura sullo sforzo critico [1]

tutt'oggi i meccanismi sottostanti alla trasformazione di fase non siano stati ancora totalmente capiti; questa difficoltà prende origine sostanzialmente dalla transizione che subisce la martensite, trasformandosi da una configurazione multivariante ad una singola variante. Durante questo passaggio la struttura dei cristalli di martensite diventa più simile a quella di un singolo cristallo, quando invece all'inizio erano fortemente impacchettati, ma con la possibilità di scorrere reciprocamente senza la necessità di sforzi elevati. Ne consegue che durante questa trasformazione anche le proprietà elastiche siano fortemente mutabili, tanto che la martensite può aumentare fino a 3 volte il suo modulo elastico, superando quello dell'austenite. Questo evidentemente è contro la conoscenza comune che si ha sulle leghe Ni-Ti, per le quali si è sempre ritenuta la fase austenite più rigida di quella martensitica.

Tali considerazioni hanno recentemente aperto la questione di come calcolare in modo preciso il modulo della martensite [25], e di come correttamente dividere la deformazione del materiale in componente elastica e componente inelastica. Nel lavoro citato di Stebner e Brinson (2013) si pone l'attenzione su come sia sbagliato considerare il primo tratto lineare della curva macroscopica di sforzo-deformazione come un tratto elastico, in quanto a livello microscopico già in questa fase le deformazioni maggiori devono essere attribuite a meccanismi inelastici, come la trasformazione di fase. Quest'ultima non è limitata ad avvenire solo durante il plateau della curva, ma invece bisogna indagare come in realtà essa sia già attiva durante il primo tratto lineare, e continui anche dopo la fine del plateau, durante quello che solitamente viene indicato come tratto elastico della martensite.

La questione sulla difficoltà nell'attribuzione dei corretti moduli elastici alla martensite è stata ampiamente studiata da Wang et al. (2014) [26]; qui si spiega che le proprietà elastiche della martensite possono essere ottenute con due differenti prove. La prima consiste nel sottoporre a trazione un materiale al di sotto della tempera-

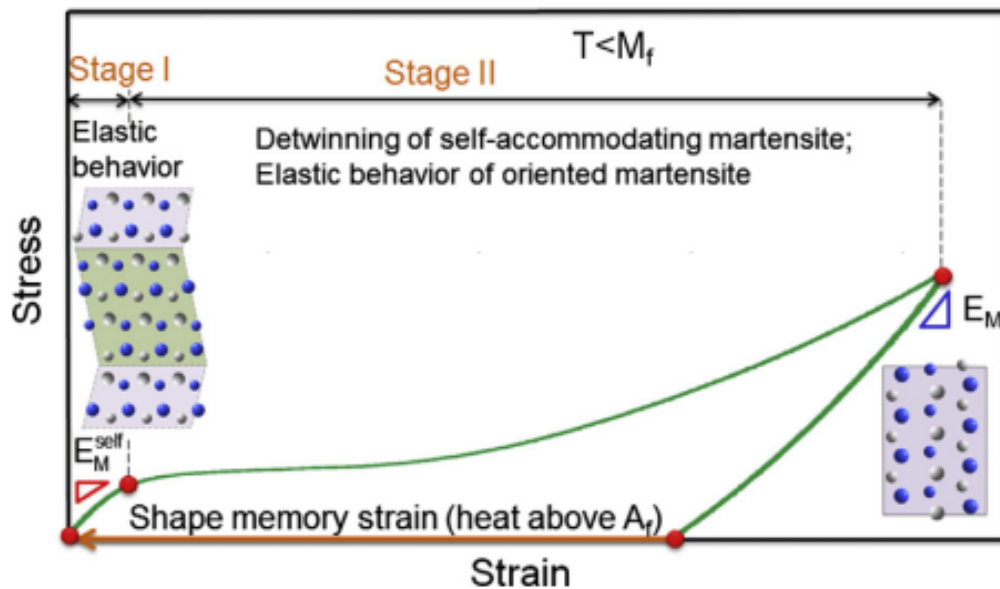


Figura 1.11: Rappresentazione grafica di come il modulo elastico della martensite varia durante il carico [26]

tura di fine trasformazione martensitica, andando a misurare la pendenza del tratto lineare precedente il plateau di trasformazione; la seconda metodologia consiste in una prova di trazione sull'austenite, prendendo la pendenza del tratto lineare dopo il plateau, ovvero quando l'austenite si è trasformata totalmente in martensite. I valori ottenibili con queste due metodologie sono tuttavia molto diversi, in un caso $E < 50$ MPa, nell'altro si potrebbe anche avere $E > 100$ GPa. Il motivo principale di tale differenza, che non dovrebbe esserci visto che si tratta sempre di una struttura martensitica, deriva sostanzialmente dal fatto che si sta misurando il modulo di Young di fasi differenti: a basse temperature il comportamento esibito nel primo tratto lineare è quella della martensite multivariante, che risponde inizialmente con un meccanismo di slittamento fra i vari piani; ad alte temperature invece si misura il modulo elastico della martensite singola variante. Le misurazioni della pendenza della curva nelle prove a basse temperature vanno in realtà a misurare non il vero modulo elastico della martensite, ma uno apparente, molto minore, dovuto più ad un effetto micromeccanico di slittamento. Infatti Wang dimostra tale affermazione con calcoli basati sulla struttura micromeccanica dei cristalli di martensite, calcolando i moduli elastici nel caso di un cristallo singolo, o di una struttura a più cristalli che imita quella twinnata della martensite. I risultati teorici ottenuti sono in accordo con i dati sperimentali: il modulo ottenuto per la macrocella di martensite twinnata è dello stesso ordine di grandezza di quello del primo tratto lineare di una prova di trazione della martensite (Fig. 1.11). Viceversa il modulo elastico ottenuto per il singolo cristallo è molto più simile a quello ottenuto quando la martensite è

stata indotta a trasformarsi in singola variante a causa dello sforzo applicato. La conseguenza di tali risultati è che è concettualmente sbagliato ragionare in termini di modulo di Young di austenite e martensite, dai quali mediante una media basata sulla frazione percentuale delle due fasi si potrebbe ottenere il modulo elastico del materiale. Bisogna invece considerare il modulo elastico del materiale come un parametro in continua evoluzione con le sollecitazioni imposte.

Si sottolinea che in entrambi i lavori qui citati, sia Wang che Brinson seppur senza darne una motivazione affermano che le proprietà elastiche della martensite, a qualunque temperatura si effettui la prova, andrebbero misurate riferendosi al primo tratto lineare dello scarico, come si mostra in Fig. 1.11. In tale curva, relativa ad una prova su un campione di lega di Ni-Ti mantenuta in martensite, si vede chiaramente come le pendenze cambino notevolmente al variare della deformazione imposta: il primo tratto lineare esibisce una pendenza minore del tratto lineare che segue il plateau, che è a sua volta minore di quello misurato allo scarico.

1.3.3 Asimmetria tra tensione e compressione

Le leghe di Ni-Ti presentano un comportamento asimmetrico tra trazione e compressione [2], che risulta evidente nella Fig. 1.12. Le curve presentano infatti alcune differenze, sia in termini di sforzo critico necessario per iniziare la trasformazione di fase, sia in termini di pendenze delle curve, minore nella trazione, sia in termini di lunghezza del plateau e di ampiezza dell'isteresi meccanica presente. Tale comportamento si ritiene in parte dovuto alla minore simmetria della struttura martensitica rispetto a quella austenitica ed in parte anche allo stesso meccanismo deformativo: in trazione avviene sostanzialmente uno scorrimento, non particolarmente impedito dalla struttura cristallina, tra piani di separazione tra i cristalli vicini, mentre in compressione la struttura è fortemente impacchettata e presenta quindi maggior resistenza. Questo aspetto complica lo studio del materiale, in quanto i dati estratti da prove di trazione difficilmente sono trasferibili per carichi di compressione; nonostante ciò spesso si ignora per semplicità questo aspetto, a causa della difficoltà sperimentale di effettuare prove di compressione. Infatti le dimensioni caratteristiche con cui sono realizzati i dispositivi a base di leghe di Ni-Ti sono molto ridotte, di conseguenza anche i campioni di materiale che si hanno in genere a disposizione sono molto piccoli e sottili: porre un campione di questo tipo in compressione pone molte problematiche, relative al facile raggiungimento di fenomeni di instabilità strutturale.

1.3.4 Comportamento triassiale

Nel momento in cui si vuole indagare il comportamento di un dispositivo che non lavora in condizioni di semplice trazione o compressione, ma di stato di sforzo mul-

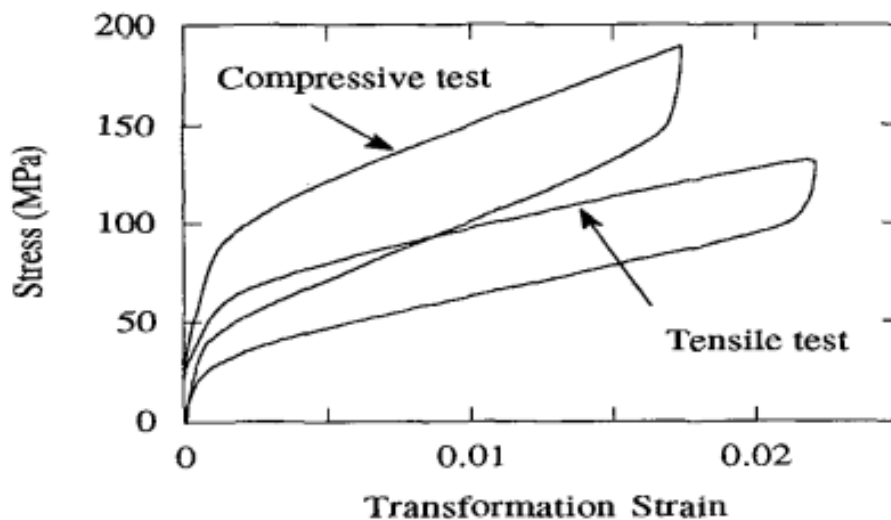


Figura 1.12: Asimmetria tra una prova di trazione e di compressione [2]

tiassiale, diventa necessario conoscere più approfonditamente il compartimento delle SMA, ed in particolare sarebbe utile la conoscenza della superficie limite, in termini di sforzo necessario per iniziare la trasformazione di fase tra austenite e martensite. A causa della difficoltà di rappresentazione di una superficie limite per un tensore del secondo ordine, quale quello degli sforzi di Cuchy, invece di dare un rappresentazione grafica si fa notare semplicemente come questa superficie dovrà essere formulata in genere solo in funzione delle quantità J_2 e J_3 del deviatore degli sforzi, quindi in modo indipendente dalla pressione idrostatica, visto che quest'ultima influisce solo marginalmente sulla trasformazione di fase [2, 27, 28].

Tale superficie limite dovrà essere inserita all'interno di modelli formulati per essere sfruttati in situazioni di carico complesse, che dovranno essere calibrati non solo su prove uniassiali o torsionali, ma possibilmente su dati di prove multiassiali, con cui verificare il comportamento corretto del modello in contesti di simulazione complessi. Un esempio di lavoro in cui sono stati effettuate numerose prove sperimentali multiassiali, anche a temperature differenti, è quello di Grabe e Bruhn (2009) [30], in cui tra l'altro si afferma come spesso la direzione della deformazione associata al progredire della trasformazione di fase non sia sempre allineata a quella dello sforzo applicato, rendendo quindi necessari modelli costitutivi in grado di descrivere correttamente il riorientamento dei cristalli di martensite al variare dello sforzo imposto. Nella Fig. 1.13 si nota la risposta di un materiale puramente elastico, elasto-plastico, e di una SMA, sottoposti ad una prova biassiale. Si evince come sia indispensabile per avere dei risultati numerici accurati, utilizzare per le simulazio-

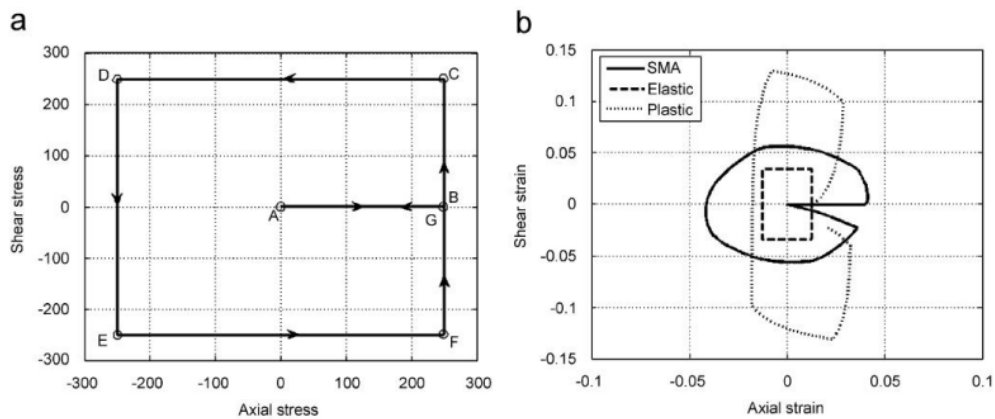


Figura 1.13: Test biassiale ad «orologio» . a) Storia di carico b) Deformazione ottenuta per diversi tipi di materiali [29]

ni numeriche modelli costitutivi adeguati, che presentino il corretto comportamento delle SMA [29].

1.3.5 Plasticità

Se una lega di Ni-Ti, a qualsiasi temperatura, viene sottoposta a notevoli carichi, il tratto lineare elastico della martensite singola variante termina, e ad esso segue un classico fenomeno di snervamento caratterizzato dalla comparsa di deformazioni plastiche non recuperabili. E' interessante studiare come queste deformazioni irreversibili influenzino il fenomeno pseudoelastico quando l'austenite è caricata fino quasi alla rottura, e viene poi scaricata. McKelvey e Ritchie (2001) [3] provarono ad effettuare questa prova sperimentale su provini di 6.4 mm di diametro, e lunghezza utile di 25.4 mm, con composizione 55Ni-45Ti, trattati ad aria calda per 35 min e in seguito raffreddati in acqua ghiacciata, in modo da indurre una temperatura A_f inferiore a 37°C. Effettuando il test a 37°C si è quindi sicuri che il materiale esibisca un comportamento austenitico, quindi pseudoelastico. I risultati del test sono mostrati in Fig. 1.14. Si nota che la trasformazione martensitica inizia per valori di sforzo intorno ai 400 MPa, per completarsi con circa un 5% di deformazione. Dopo il tratto elastico martensitico lo snervamento è raggiunto per uno sforzo di circa 1058 MPa; a questo punto il provino è tirato ancora fino a quasi il suo punto di rottura, ma prima che questo sia raggiunto il carico viene rimosso. Si noti come nessun recupero pseudoelastico risulti evidente, ma come anzi rimanga un 12% di deformazione plastica residua, senza che ci sia allo scarico alcun plateau. Anche caricando nuovamente il materiale lo sforzo aumenta linearmente, senza mostrare nessun comportamento tipico di una trasformazione di fase. Questo permette di affermare che eventuali deformazioni plastiche possono stabilizzare la martensite singola variante, in modo

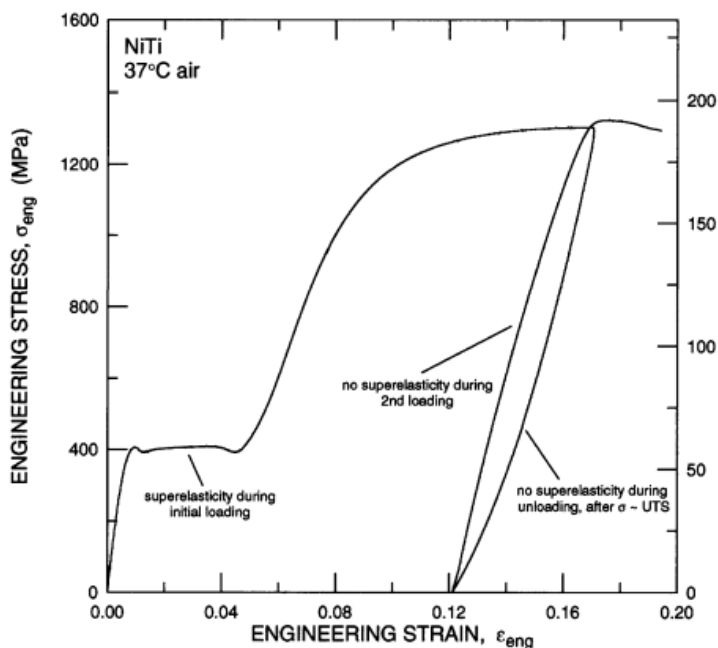


Figura 1.14: Curva sforzo-deformazione con plasticità [3]

che la trasformazione inversa sia impossibilitata ad avvenire. Questo è stato anche verificato nel lavoro citato con la tecnica di diffrazione a raggi X, studiando le sezioni del provino dopo lo scarico, che hanno mostrato come la fase predominante sia la struttura monoclinica martensitica, e non quella γ dell'austenite, che invece dovrebbe essere quella stabile alla temperatura del test. Una più chiara rappresentazione del fenomeno appare in Fig. 1.15, dove viene mostrata la relazione tra la deformazione recuperata con la deformazione applicata. Quando la deformazione applicata supera una certa soglia si ha una brusca diminuzione della capacità di recupero del materiale, che praticamente si annulla per valori ancora maggiori, dove il materiale esibisce semplicemente il recupero elastico dovuto alla martensite.

1.3.6 Fatica

Le proprietà funzionali peculiari delle leghe a memoria di forma sono uno dei motivi del loro successo, e si traducono le loro largo utilizzo in svariate applicazioni, come quella degli attuatori, dove per sfruttare l'effetto a memoria di forma sono sottoposte a continui ciclaggi termomeccanici. Diventa quindi importante capire il più possibile il comportamento a fatica del materiale. In particolare i meccanismi di fatica che la lega subisce possono essere suddivisi in due tipologie, come chiaramente esplicitato nel lavoro di Eggeler et al. (2004) [31], in cui è data la definizione del meccanismo di fatica strutturale e di quello della fatica funzionale. La fatica strutturale è lo stesso fenomeno a cui sono sottoposti tutti i materiali quando sono caricati ripetutamente: l'insorgenza di danni microstrutturali ed il loro continuo accumulo

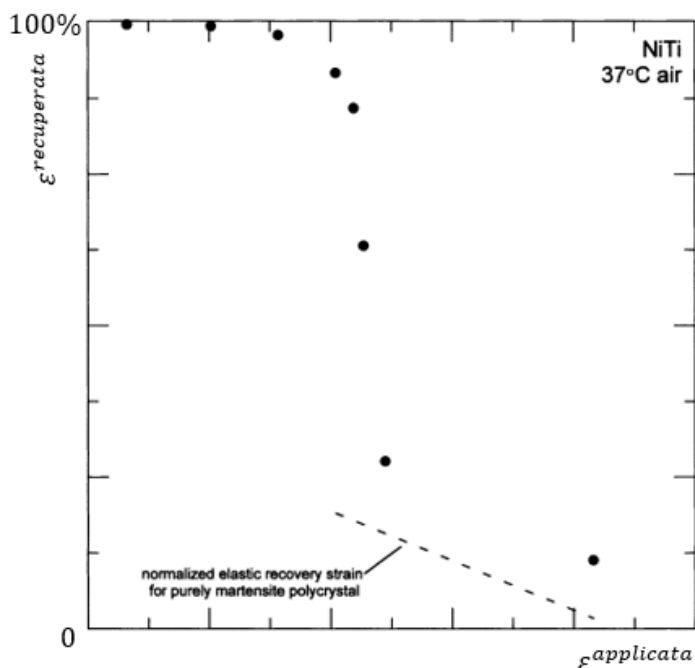


Figura 1.15: Relazione tra deformazione applicata e deformazione recuperata [3]

possono tradursi nella rottura del materiale, anche a valori di sforzo notevolmente più bassi di quello di rottura. La fatica funzionale è invece tipica delle leghe a memoria di forma e consiste in una progressiva diminuzione delle proprietà funzionali durante ripetuti ciclaggi termomeccanici, come l'energia dissipata da uno smorzatore pseudoelastico, o la corsa ottenibile da attuatore che sfrutti la memoria di forma. Tale effetto è noto da tempo [32], tuttavia in letteratura non è presente un'ampio numero di lavori che ne studi in profondità le caratteristiche, probabilmente a causa del fatto che ancora oggi le SMA sono prevalentemente utilizzate per sfruttare il fenomeno pseudoelastico.

1.3.7 Fatica strutturale

La fatica strutturale consiste in una fase iniziale di innesco di una microcricca, seguita in seguito da un accumulo durante cui il difetto si propaga riducendo progressivamente la sezione resistente del materiale, finché la sezione si è talmente ridotta da provocare una rottura improvvisa. Visto che le leghe Ni-Ti presentano zone che subiscono grandi variazioni di deformazione in corrispondenza di limitati cambiamenti dello sforzo applicato, il comportamento a fatica del materiale deve essere studiato sfruttando prove sperimentali condotte in controllo di deformazione, in modo da poter ottenere risultati più coerenti; è anche allo stesso tempo vero che per il comportamento a fatica di tali leghe non esiste ancora una metodologia standardizzata che definisca rigorosamente come procedere nella caratterizzazione. Si

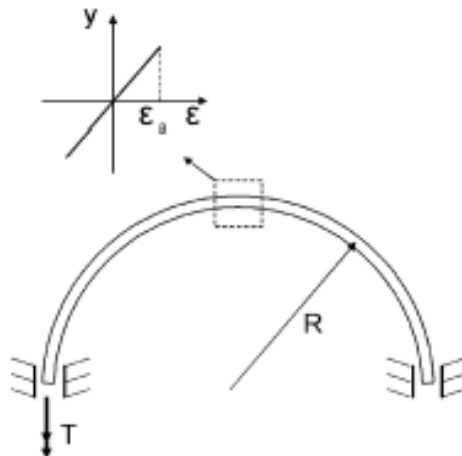


Figura 1.16: Rappresentazione schematica del test di flessione rotante. Il filo è flesso a semicerchio, e forzato a ruotare lungo il proprio asse. Nella sezione centrale la deformazione imposta risulta essere alternata, come schematizzato in figura. [31]

sottolinea come una procedura semplice ed efficace sia stata introdotta da Miyazaki et al. (1999) [33], basata sulla flessione rotante (Fig. 1.16), che consiste nel flettere a forma di semicerchio un filo di materiale, in modo che un'estremità sia vincolata in un manicotto e l'altra sia messa in rotazione lungo il proprio asse da un motore. In questo modo si ottiene uno sforzo lineare lungo la sezione del filo, che risulta essere alternato, passando da valori positivi a valori negativi man mano che il filo è mantenuto in rotazione. Si sottolinea come nonostante il metodo di prova sia molto semplice, i risultati ottenuti in termini di diagramma di Wohler sono validi anche per situazioni con sollecitazione molto più complessa, come nel caso di alcuni dispositivi ad uso biomedico, gli stent per applicazioni vascolari. [5]

Il fenomeno è molto complesso da valutare in quanto dipende essenzialmente dai difetti locali del materiale, quindi può essere studiato solamente in maniera statistica; inoltre dipende da numerosi fattori, quali ad esempio la tipologia di carico, la frequenza della sollecitazione imposta [31], l'ambiente di prova, che potrebbe innescare fenomeni corrosivi [34], eventuali lavorazioni meccaniche e trattamenti termici.

Durante il fenomeno della fatica avviene un accumulo progressivo di difetti all'interno del materiale, che stabilizzano una porzione sempre maggiore di martensite impedendone il ritorno in fase austenitica; a questa è quindi associata una crescente deformazione irreversibile che viene gradualmente accumulata, in quanto ad una frazione sempre maggiore di materiale viene impedito di percorrere la trasformazione di fase inversa, che permetterebbe il recupero della forma originaria. Studi che mostrano effetto di questo tipo sono per esempio quello di Rebelo et al. (2004) [35], in cui venivano analizzati tubi in lega di Ni-Ti di spessore 0.487 mm e lunghezza 130 mm,

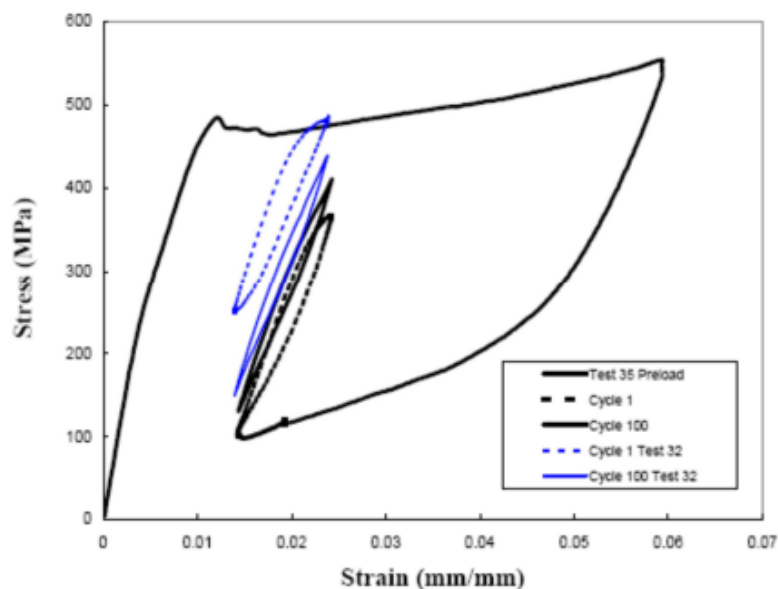


Figura 1.17: Risultati delle prove condotte da Rebelo et al. (2004) con deformazione media del 2% e alternata dello 0.5%

testati a diverse sollecitazioni medie e alternate. I risultati, presentati in Fig. 1.17, evidenziano come i cicli che partono dal plateau inferiore tendano progressivamente a salire, mentre quelli che partono dal plateau superiore a scendere, fino ad unirsi in corrispondenza circa di 100 cicli. Questo particolare comportamento di un materiale pseudoelastico è spesso anche chiamato *ratcheting* [36], in modo simile a quanto avviene per le classiche leghe metalliche sottoposte a sollecitazioni cicliche.

Anche altri gruppi di ricerca hanno evidenziato il fenomeno (Maletta, 2012 [37]), che è caratterizzato da un rapido accumulo di deformazione irreversibile durante i primi cicli meccanici, per poi rallentare fino a stabilizzarsi completamente dopo 100-150 cicli, numero che rimane indipendente dall'ampiezza della deformazione ciclica imposta.

Eggeler et al. [31] testarono invece dei fili con diametro di 1.4 mm, sia a 301 K che a 323 K, in controllo di deformazione: i risultati sono mostrati in Fig. 1.18. L'isteresi tra il plateau di carico e scarico diminuisce all'aumentare dei cicli eseguiti, a causa di un più pronunciato abbattimento del valore di sforzo necessario per iniziare la trasformazione di fase diretta, rispetto a quanto invece si abbassa il plateau sottostante; è chiaro inoltre che il fenomeno sia maggiormente pronunciato nei primi cicli, per poi rallentare. Il fenomeno per cui avviene un abbassamento progressivo del valore di sforzo critico viene generalmente indicato come *degradazione*.

Uno studio molto sistematico sull'effetto che le deformazioni plastiche hanno sulla pseudoelasticità è stato condotto da Wang et al. nel 2008 [9], con un limite però

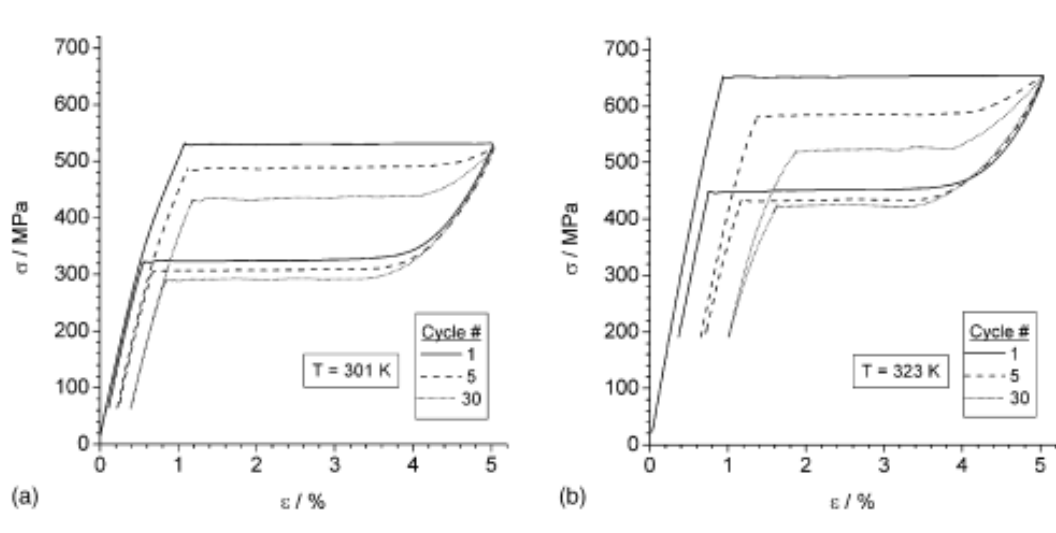


Figura 1.18: Curve sforzo-deformazione dei test effettuati da Eggeler et al. (2004) su fili di 1.4 mm di diametro, a 301 K(a) e 323 K(b) [31]

da evidenziare nella generalizzazione dei risultati ottenuti, visto che i test erano stati condotti su provini con forma di piastra. In ogni caso il lavoro mostra un'ampia selezione di test effettuati su campioni di lega di Ni-Ti pseudoelastica, che consistono in ciclaggi di carico-scarico in controllo di deformazione fino a differenti deformazioni massime, dal 5% al 12%. I test oltre a mostrare l'effetto della fatica funzionale vogliono indagare, per quanto riguarda quelli condotti a deformazioni $> 8\%$, anche come la fatica funzionale avviene in presenza di deformazioni plastiche ottenute avendo superato la soglia di snervamento del materiale (Fig. 1.19).

Da queste curve quello che può essere dedotto sono le seguenti considerazioni:

- all'aumentare della deformazione plastica ottenuta al primo ciclo le curve sforzo-deformazione raggiungono la saturazione del fenomeno in un minore numero di cicli.
- a parità di numero di cicli la deformazione irreversibile accumulata aumenta con la deformazione plastica imposta.
- le curve mostrano come la fatica causi un effetto per cui i plateau di transizione di fase perdano progressivamente la caratteristica di essere a sforzo quasi costante, mostrando invece un continuo aumento di pendenza.
- la deformazione plastica imposta non incide molto sullo sforzo di inizio trasformazione di fase, ma invece causa un abbattimento del plateau di trasformazione inversa. All'aumentare della deformazione plastica imposta nel primo ciclo la soglia di sforzo necessario per iniziare la transizione di fase inversa diminuisce velocemente, fenomeno che non è presente quando si ha puramente fatica senza deformazioni plastiche.

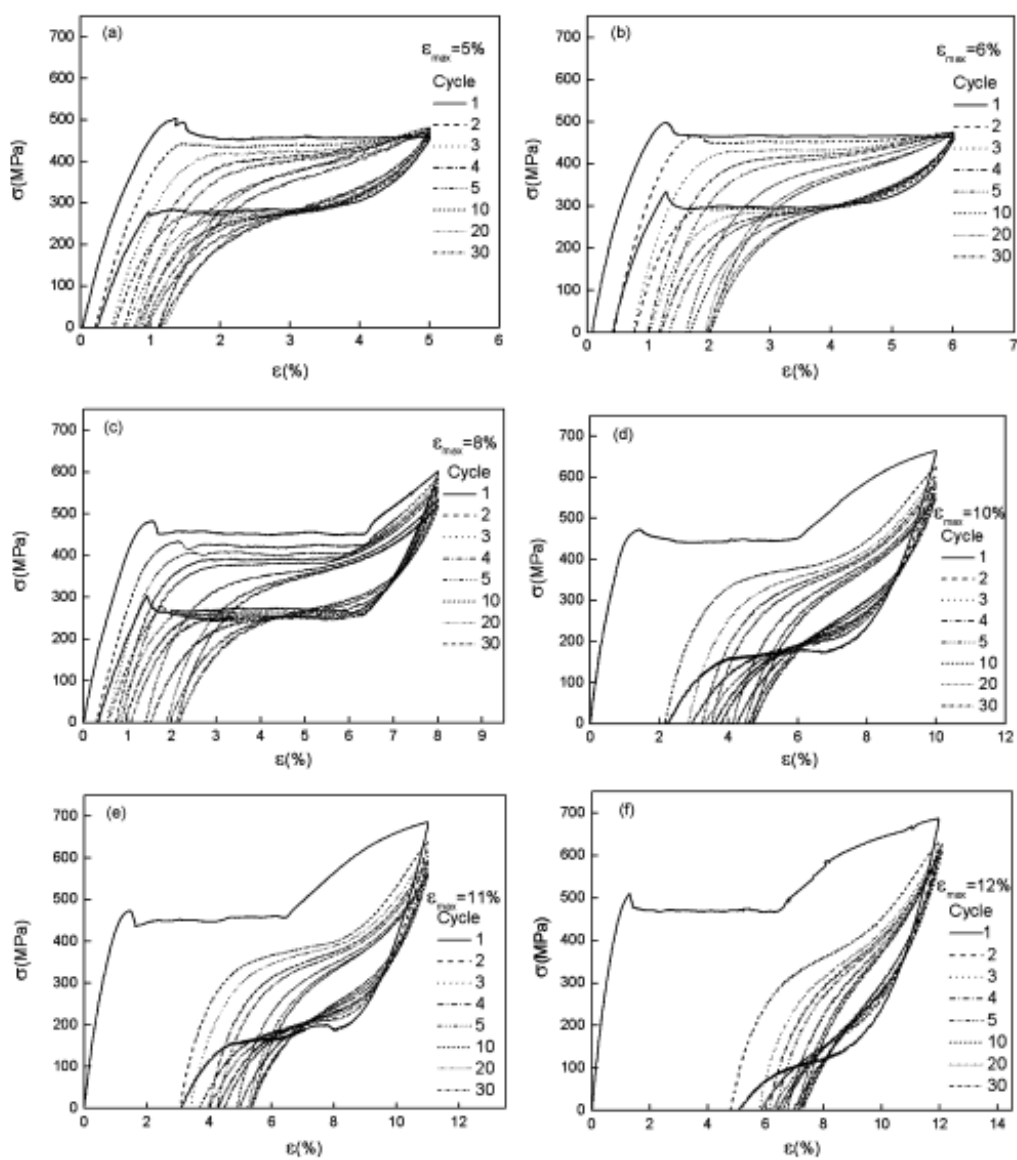


Figura 1.19: Evoluzione delle curve sforzo-deformazione durante test di carico e scarico a diverse deformazioni massime imposte: 5,6,8,10,11,12 % [9]

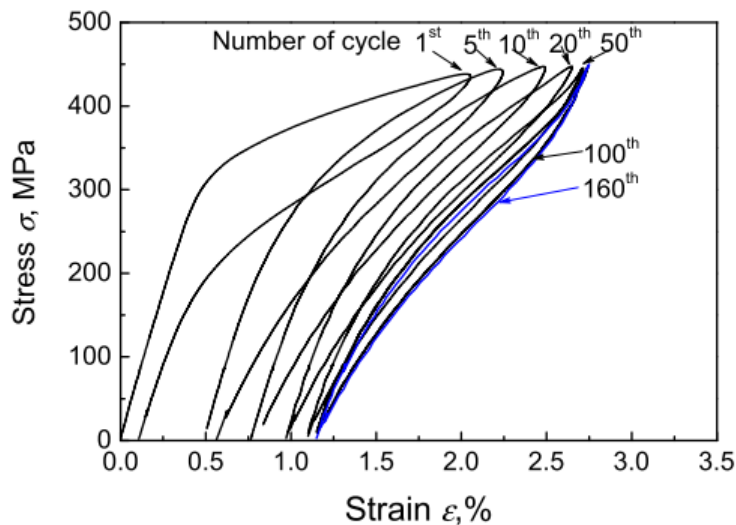


Figura 1.20: Curve sforzo-deformazione per prova di trazione ciclica in controllo di sforzo [4]

- le prove sono state tutte condotte in controllo di deformazione: si nota che all'aumentare del numero di cicli effettuati, lo sforzo finale raggiunto in corrispondenza della deformazione massima imposta decresce, super in modo minore rispetto a quanto succede per lo sforzo di inizio transizione di fase diretta. Questo è quindi collegato al fenomeno per cui il plateau aumenta progressivamente la propria pendenza.

Tutte le considerazioni appena effettuate sulla fatica sono state dedotte da prove monoassiali cicliche di trazione in cui si controllava il provino in termini di deformazione imposta. Come fatto notare da Kan et al. (2010) [4], se invece si provvedesse ad effettuare delle prove cicliche in controllo di sforzo si otterrebbero ovviamente delle curve con caratteristiche leggermente diverse (Fig. 1.20). In questo caso al procedere dell'accumulo di deformazione irreversibile, dato che lo sforzo massimo raggiunto viene mantenuto costante, si verifica un contemporaneo aumento della deformazione massima raggiunta, quindi una traslazione progressiva delle curve. Rimane comunque presente il fenomeno di degradazione del materiale, ovvero l'abbattimento degli sforzi critici necessari per iniziare la trasformazione di fase, oltre che il progressivo aumento di pendenza del plateau.

1.3.8 Fatica funzionale

La fatica funzionale è un fenomeno tipico delle leghe a memoria di forma e consiste in una progressiva diminuzione delle proprietà funzionali durante ripetuti ciclaggi termomeccanici. Un tipico set-up sperimentale per misurare il progredire di tale com-

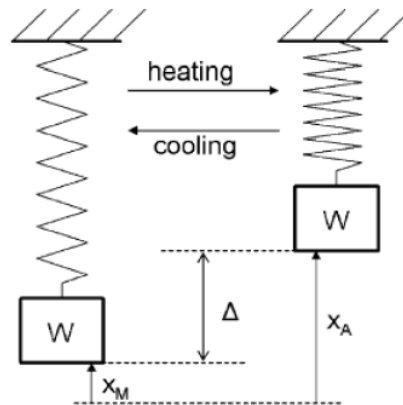


Figura 1.21: Illustrazione del sistema di attuazione delle molle. Quando la molla è scaldata a $T > A_f$ si contrae sollevando il carico, mentre a basse temperature diventa meno rigida e quindi si allunga per effetto del peso W [31]

portamento è il ciclaggio termico di un filo caricato con un peso costante (Fig.1.21), mediante una corrente di alimentazione che generi per effetto Joule il riscaldamento. Durante l'aumento di temperatura il filo recupera parte dell'allungamento subito, che viceversa torna ad aumentare durante il raffreddamento. I risultati del lavoro di Mertmann et al. (2008) [38] rappresentano l'andamento della posizione in fase di riscaldamento e raffreddamento del filo, oltre alla corsa totale percorsa: si noti in Fig. 1.22 una stabilizzazione dopo un migliaio di cicli percorsi, che conferma un più accentuato cambiamento delle proprietà del materiale durante la fase iniziale. Anche le temperature di trasformazione e l'ampiezza dell'isteresi sono in parte cambiate: le prime si sono avvicinate fra loro, mentre l'ampiezza si è conseguentemente ridotta.

1.4 Ulteriori proprietà delle leghe Ni-Ti

Negli ultimi anni l'impiego commerciale delle leghe di Ni-Ti si è sempre più diffuso, in particolare con una fortuna molto maggiore nel campo di applicazione biomedicale. Questa diffusione può essere spiegata tenendo conto della presenza di proprietà uniche, come la pseudoelasticità e la memoria di forma, oltre ad alcuni aspetti secondari che verranno qui presentati.

Biocompatibilità

Con questa proprietà si intende la capacità di un materiale impiantato di indurre nel sistema vivente ospitante una reazione favorevole alla sua presenza, o almeno di non indurre alterazioni tissutali dannose nei distretti in cui interagisce. Tale proprietà è strettamente legata alla tendenza della lega al rilascio di ioni tossici nell'ambiente circostante e alla resistenza alla corrosione superficiale del materiale. In letteratura

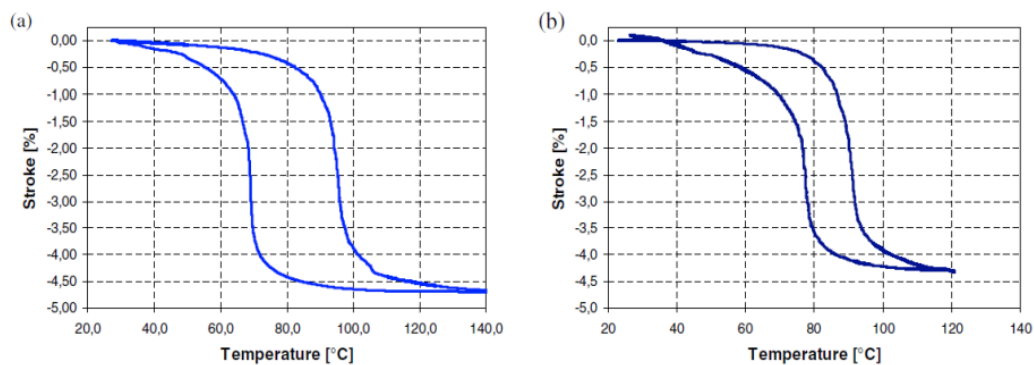
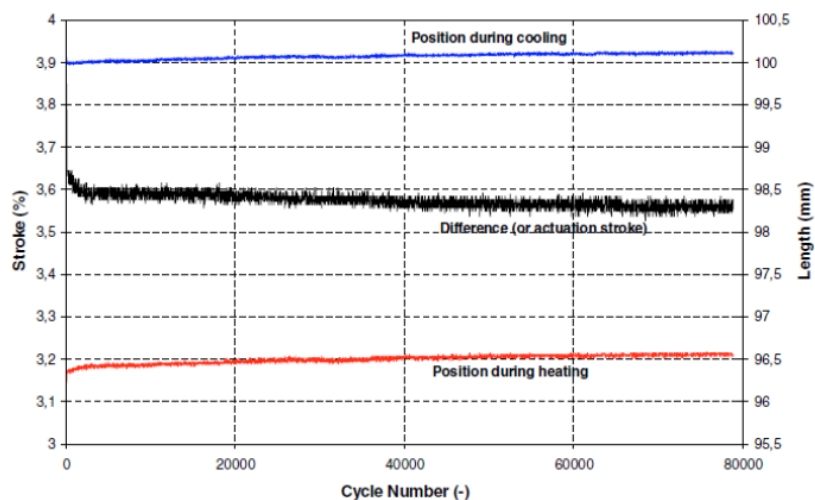


Figura 1.22: (a) andamento della posizione del filo e delle corsa durante il ciclaggio termico. (b) Curva corsa-temperatura su un filo sottoposto a ciclaggio termico: a sinistra al primo ciclo, a destra dopo 40000 cicli. [38]

le leghe Ni-Ti sono indicate come materiali con ottima biocompatibilità, grazie alla formazione di uno strato superficiale passivante di ossido di Titanio, simile quello che si forma sulla superficie delle leghe di Ti, dovuta al fatto che termodinamicamente la formazione di tale ossido è favorita rispetto alla creazione di altri ossidi, come quello di Nichel. Lo strato superficiale di ossido di Ti ha il duplice effetto positivo di aumentare la stabilità superficiale proteggendo il resto del materiale dal progredire della corrosione, e di creare fisicamente una barriera che previene l'ossidazione e il rilascio di Nichel nell'ambiente circostante. Nonostante l'alto tenore di Nichel contenuto, l'elevata biocompatibilità deriva anche dal potenziale superficiale $> 800\text{mV}$, ampiamente più alto della soglia stabilita dalla FDA con la norma F2129 (500mV) per valutare la resistenza alla corrosione dei dispositivi metallici impiantabili. Più alto è il potenziale superficiale del materiale, maggiore è la resistenza del materiale alla corrosione in fessura. Trepanier et al. (1998) [39] hanno infatti dimostrato che sebbene il rilascio iniziale di ioni Ni rispetto all'acciaio inossidabile 316L sia maggiore, dopo poco tempo il tasso di rilascio diventa simile, se non minore. I trattamenti superficiali sono fondamentali per la minimizzazione del rilascio di ioni Nichel: superfici lucidate meccanicamente hanno infatti un rilascio maggiore rispetto a quelle trattate con elettrolucidatura, in quanto questo trattamento rimuove gli eccessi di Nichel superficiale, formando contemporaneamente uno strato passivante di ossido di Titanio.

Compatibilità con dispositivi a risonanza magnetica

Le leghe Ni-Ti non sono ferromagnetiche, possedendo quindi una suscettibilità ai campi magnetici anche minore rispetto agli acciai inossidabili. Se un paziente con un dispositivo impiantabile di NiTi venisse sottoposto a risonanza magnetica, l'immagine ottenuta sarebbe estremamente chiara rispetto al caso di dispositivo in acciaio, per il quale inoltre esisterebbero notevoli problemi di sicurezza, tanto da impedire l'esecuzione del test diagnostico.

Radiopacità

Una fondamentale caratteristica del Nitinol è di essere radiopaco, ovvero visibile se impiantato nel corpo umano, durante un esame radiografico. Questa proprietà è fondamentale per alcuni dispositivi biomedicali in quanto permette di conoscerne la posizione durante l'impianto, in modo da ottenere un inserimento ottimale che favorisca l'efficacia del dispositivo. La radiopacità consiste nella capacità del materiale di impedire di essere attraversato dai raggi X, quindi è una proprietà strettamente legata al peso atomico, che spiega come teoricamente dovrebbe essere migliore del NiTi rispetto agli acciai inossidabili [5]. A causa della piccola dimensione dei dispositivi biomedicali (nel caso degli stent vascolari la dimensione della sezione degli *struts*

è dell'ordine delle centinaia di microm) la radiopacità può non essere sufficiente; in questo caso si ricorre a particolari marker costruiti in metalli pesanti, come oro, tantalio o platino e ad aumentare lo spessore di alcune parti del dispositivo [40]. Nel caso si ricorra all'oro o al platino, per evitare che si inneschino fenomeni di corrosione galvanica nasce la necessità di ricorrere a rivestimenti polimerici superficiali del dispositivo, in modo da evitare il contatto diretto tra i due metalli. Il tantalio invece non pone questo problema, anche se in questo caso bisogna fare attenzione alla fragile superficie di interfaccia tra i due elementi metallici.

Resistenza al kinking

Un metallo tradizionale quando subisce in alcune sue parti delle deformazioni plastiche diventa in tali aree più facilmente deformabile; una possibile conseguenza è che eventuali deformazioni successive si localizzano nelle stesse zone già maggiormente deformate. Tale situazione è in genere molto pericolosa, in quanto il rapido aumento della deformazione in alcune zone del dispositivo può causare facilmente la rottura. Le leghe Ni-Ti posseggono invece come visto una forma caratteristica della curva sforzo-deformazione, che esibisce un plateau a cui segue un tratto ripido in cui le deformazioni possono aumentare solo in seguito ad un elevato aumento dello sforzo applicato. La localizzazione delle deformazioni è in tal modo impedita, in quanto esse si ripartiscono nelle zone del dispositivo che avevano subito ancora basse deformazioni. Questa caratteristica rende le leghe Ni-Ti particolarmente adatte all'utilizzo in molti dispositivi medici, come gli stent carotidei, che trovandosi in vicinanza della superficie corporea possono subire elevate deformazioni a causa di pressioni esterne applicate ai vasi, o gli stent periferici, che subiscono continue deformazioni a causa del movimento degli arti inferiori. In entrambi i casi le deformazioni subite sono al di sopra della soglia di snervamento dell'acciaio (0.2%), mentre rimangono al di sotto della soglia di plasticità delle leghe Ni-Ti (8%), permettendo quindi agli stent costruiti con le SMA di recuperare completamente la forma al termine della sollecitazione, in modo che il vaso possa tornare al diametro originario e non rimanere occluso [40] [41].

Compatibilità biomeccanica

Le leghe a base di NiTi hanno anche la caratteristica di avere una rigidità compatibile con quella dei materiali biologici, oltre al fatto di presentare nella curva sforzo-deformazione un plateau di trasformazione di fase, che assicura la presenza di un'isteresi meccanica pronunciata, che è tipica di tutti i tessuti (Fig. 1.23), ma invece totalmente estranea al mondo dei metalli tradizionali [5]. Tale caratteristica apre la strada per l'utilizzo delle leghe Ni-Ti in campo ortopedico, dove per promuovere la crescita dell'osso è necessario scegliere materiali con rigidità la più simile

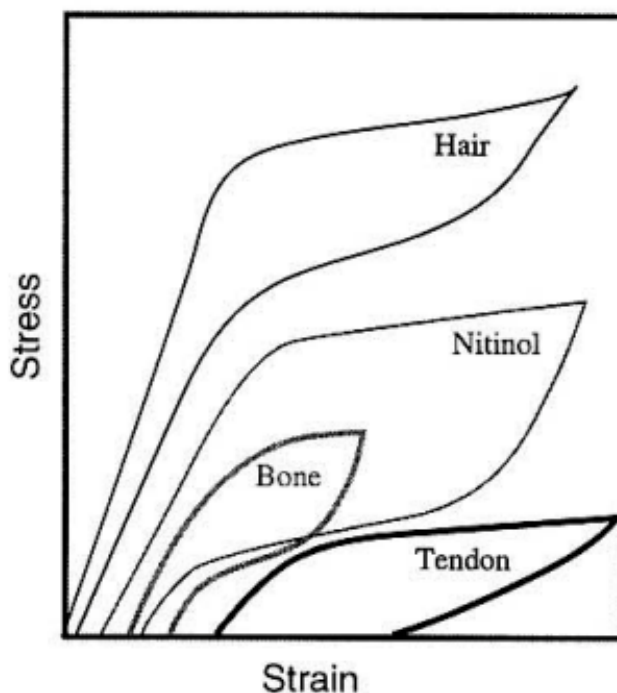


Figura 1.23: Curve sforzo-deformazione dei tessuti biologici e di una lega Ni-Ti a confronto [5]

possibile rispetto a quella dei tessuti circostanti, per evitare spiacevoli fenomeni di riassorbimento osseo e fallimento dell'impianto.

1.5 Possibili applicazioni tecnologiche in ambito biomedicale

Le leghe di Ni-Ti, una volta impiantate nel corpo umano, opereranno sostanzialmente in condizioni ambientali costanti, ed in particolare in campo pseudoelastico [42], con il quale, tra l'altro, si è in grado di ottenere grandi deformazioni elastiche durante le quali lo sforzo si mantiene pressoché costante. Questo è uno dei motivi che ne ha permesso la grande diffusione nel campo biomedicale, in cui alcune possibili applicazioni sono presentate nel seguito.

Applicazioni ortopediche

La possibilità di questa applicazione deriva sostanzialmente dal fatto che le proprietà meccaniche esibite dalle leghe Ni-Ti sono più simili a quelle dell'osso naturale rispetto ad altri materiali strutturali utilizzati tipicamente durante la progettazione ingegneristica, garantendo quindi una migliore compatibilità meccanica con i tessuti circostanti e evitando al contempo problemi di riassorbimento osseo.

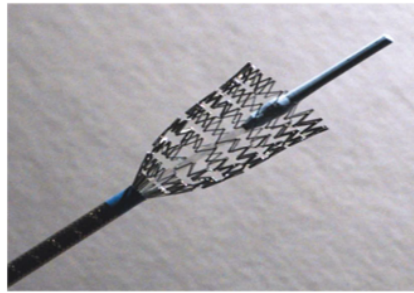


Figura 1.24: Esempio di stent autoespandibile in Nitinol

Applicazioni ortodontiche

In questa categoria ricade il primo utilizzo biomedicale delle leghe Ni-Ti, ovvero la realizzazione di fili ortodontici, che se costruiti in SMA hanno il vantaggio di esibire forze moderate e costanti per diverse condizioni di deformazione imposta, grazie al tipico plateau presente nella curva sforzo-deformazione del materiale pseudoelastico [23]. Altra applicazione è quella delle punte dei trapani, perché garantiscono la possibilità di subire alte deformazioni, e quindi di flettersi notevolmente durante la pulizia del canale, recuperando la forma originaria al termine del trattamento.

Applicazioni vascolari

L'applicazione senz'altro più diffusa è quella degli stent vascolari, ovvero dispositivi metallici che vengono inseriti in corrispondenza di tratti di arterie stenotiche per ripristinarne le dimensioni originarie del lume [40]. Gli stent costruiti con materiali classici come l'acciaio inossidabile vengono crimpati all'interno di un catetere guida, e raggiunto il sito di interesse, si provvede al gonfiaggio di un palloncino posto al loro interno, in modo da provocarne l'espansione fino ad una dimensione radiale leggermente maggiore di quella del vaso. A questo punto il palloncino viene sgonfiato e lo stent recupera elasticamente parte della sua deformazione, ma a causa della plasticizzazione subita rimane in grado di esercitare una forza radiale diretta esternamente, in modo da evitare il collasso delle pareti del vaso. L'eventuale scelta di realizzare tali dispositivi con le SMA garantisce numerosi vantaggi, legati al fatto che non diventa più necessario l'utilizzo di un palloncino: se, infatti, lo stent è realizzato in lega NiTi austenitica, alla temperatura del corpo umano basta crimparlo all'interno del catetere e, giunti al sito di interesse, la rimozione del catetere permette di ottenere per pseudoelasticità l'espansione fino al contatto con le pareti vascolari.

Il fatto di non utilizzare il posizionamento per mezzo di un palloncino permette di evitare la sua sovraespansione, limitando fortemente i danni allo strato interno di intima del vaso ed evitando problemi di ristenoosi ed eventuale fallimento dell'impianto.

Capitolo 2

Modellizzazione teorica del comportamento delle SMA

2.1 Basi di meccanica dei continui

Trattando la modellizzazione teorica di un materiale ci si deve ricordare che lo scenario in cui ci si sta muovendo è quello della meccanica del continuo, che presenta tre componenti fondamentali [43]:

- *la cinematica*, che riguarda lo studio di come la configurazione di un corpo cambia nel tempo considerando la geometria del moto e le deformazione del corpo, senza tener conto delle cause di questi movimenti. In un regime di piccole deformazioni la cinematica si riassume nelle equazioni di congruenza, dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il tensore di piccole deformazioni (del secondo ordine) e \mathbf{u} è il vettore spostamento, entrambi funzioni del tempo e della posizione all'interno del corpo. La seconda equazione rappresenta le condizioni al contorno date in termini di spostamenti su una porzione della superficie del dominio.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{in } V \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d \quad \text{in } \partial V_u \quad (2.2)$$

- *la statica*, che si occupa dello studio delle condizioni di equilibrio di un corpo e che si traduce in piccole deformazioni nella (2.3) e (2.4). $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore degli sforzi di Cauchy e \mathbf{b} rappresenta le forze di volume, entrambi dipendenti dal tempo e dalla posizione. La prima equazione è l'equazione indefinita di equilibrio, la seconda rappresenta le condizioni al contorno in termini di trazioni a cui una parte della superficie del dominio è sottoposto.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } V \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \mathbf{f} \quad \text{in } \partial V_f \quad (2.4)$$

- *il legame costitutivo*, che tiene conto del comportamento fenomenologico del materiale, legando fra loro le equazioni di statica e cinematica.

Si evince dalla classificazione sopra che lo sforzo notevole riguarda il terzo punto, ovvero la modellizzazione costitutiva, che partendo da una solida base di dati sperimentali deve riuscire a formulare un modello che rappresenti il legame tra sforzi e deformazioni nel modo più accurato possibile.

2.2 Modelli micromeccanici e modelli fenomenologici

Si è visto nel primo capitolo come le SMA abbiano delle caratteristiche davvero peculiari, che le rendono attraenti per uno svariato spettro di applicazioni: il loro complesso comportamento termo-meccanico non lineare rende però necessario sviluppare strumenti computazionali che possano modellarle correttamente in modo da poter effettuare simulazioni numeriche che siano predittive. Questo comporta la scelta di un corretto modello costitutivo in grado di cogliere il comportamento reale del materiale, come già mostrato nella sezione 1.3.4.

Negli ultimi anni si è assistito alla formulazione di un numero davvero notevole di modelli costitutivi in grado di cogliere gli aspetti fondamentali del comportamento delle SMA. L'obiettivo di questo sforzo dipende dal fatto che non si è interessati solamente alla modellizzazione degli aspetti primari delle SMA, come pseudoelasticità o memoria di forma, ma che si vuole cercare di introdurre nella descrizione teorica data dal modello anche aspetti minori, anche se non di più piccola importanza, quali l'asimmetria tra trazione e compressione, le differenti proprietà meccaniche di austenite e martensite, l'accumulo progressivo di deformazione al ciclaggio ripetuto, la possibilità di cogliere lo snervamento, la plasticità e gli effetti di quest'ultima sulla trasformazione di fase. Non da meno sarebbe molto utile riuscire a formulare un modello in grado di funzionare in un range di temperature molto diverse, in modo che con un solo modello si possa descrivere il fenomeno di pseudoelasticità piuttosto che la memoria di forma. Ovviamente a causa della sostanziale differenza dei due fenomeni e delle loro complessità spesso si assiste alla formulazione di modelli che si limitano a descrivere correttamente solo uno dei due peculiari aspetti delle SMA. Non bisogna inoltre dimenticare che qualsiasi modello costitutivo si decida di formulare, il fine ultimo di questo sforzo è giungere all'implementazione in un software di simulazione agli elementi finiti; ne consegue che il modello costitutivo si deve prestare facilmente ad essere discretizzato e deve mostrare forte stabilità ed efficienza di calcolo, in modo che sia realmente attraente dal punto di vista delle applicazioni ingegneristiche.

Seguendo una classificazione proposta da Arghavani [44] e riproposta in seguito da Ferraro [45], si possono dividere i modelli costitutivi in:

- *modelli macroscopici fenomenologici*: sono costruiti in genere partendo da leggi termodinamiche e cercano di fittare il più possibile i dati sperimentali, a volte partendo da diagrammi di stato nel piano sforzo-temperatura che individuano le regioni di transizione tra martensite ed austenite. I modelli di questa categoria sono in genere la scelta più adeguata per le applicazioni ingegneristiche, in quanto hanno come caratteristica la semplicità e i costi computazionali relativamente contenuti. Il principale svantaggio è che sono in grado di descrivere solamente il comportamento globale macroscopico del materiale, ignorando completamente i fenomeni a livello microscopico; questo deriva dal fatto che vengono costruiti non con il fine di rappresentare i comportamenti fisici del materiale, ma piuttosto di darne un'accurata descrizione in termini di comportamento sforzo-deformazione-temperatura.
- *modelli microscopici*: partono dalla descrizione del comportamento micromeccanico a livello del singolo grano, per poi mediane i risultati su di un volume rappresentativo di riferimento in modo da cogliere la risposta policristallina del materiale. In genere questi modelli richiedono un elevato numero di parametri e variabili interne, che rendono il costo computazionale notevole e quindi eccessivamente dispendioso per le applicazioni ingegneristiche; tuttavia proprio grazie alla loro maggiore complessità sono in grado di essere altamente predittivi del comportamento reale del materiale, descrivendone realisticamente le dinamiche alla microscala. Lo scopo di questi modelli è usare la termodinamica per stimare l'energia di interazione dovuta alla trasformazione di fase che avviene nei grani di materiale, riuscendo quindi a riprodurre fedelmente i meccanismi di riorientamento e detwinning. Un esempio di questo tipo è per esempio il lavoro di Patoor et al. (1996) [2], in cui dopo aver formulato il modello del singolo grano, attraverso una metodologia proposta, si effettua una media su più grani per ottenere la corretta interazione fra essi.

Partendo dalle considerazioni appena enunciate, il lavoro di tesi si concentrerà sui modelli fenomenologici, visto che quelli micromeccanici, seppur maggiormente predittivi, risultano computazionalmente poco efficienti.

2.3 Formulazione teorica di un modello fenomenologico

2.3.1 Principi termodinamici

Oltre alle relazioni di statica e cinematica già citate, un ruolo importante è giocato dal primo e secondo principio della termodinamica, che rappresentano rispettivamente la conservazione dell'energia ed il postulato secondo cui la crescita di entropia è maggiore del calore assorbito diviso la temperatura assoluta a cui lo scambio termico

avviene. Senza riportare tutti i passaggi matematici, tali principi si traducono nelle due relazioni seguenti:

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div} \vec{q} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\dot{\Psi} + \eta \dot{T} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.6)$$

Dove ρ è la densità del materiale, e l'energia interna specifica, η l'entropia specifica, r il tasso di calore generato per unità di volume, \vec{q} il flusso specifico di calore scambiato, T la temperatura, Ψ l'energia libera specifica, definita come: $\Psi = e - T\eta$.

2.3.2 Metodo degli stati locali

Il metodo usato generalmente per formulare un modello fenomenologico si basa sul metodo degli stati locali [46], secondo cui lo stato termodinamico di un punto materiale in un certo istante è completamente definito dalla conoscenza del valore che un certo numero di variabili di stato assumono nel medesimo istante, valore che dipende solamente dal punto che si è considerato. Dato che non si assume una dipendenza dalle derivate di tali variabili, l'ipotesi sottostante a tutto il metodo è che ogni evoluzione del materiale possa essere considerata come una successione di punti di equilibrio: questo esclude l'uso di tale metodologia ai problemi in cui i fenomeni sono estremamente rapidi, tali da avere una durata comparabile con i tempi di rilassamento per avere un completo raggiungimento del successivo stato di equilibrio. La debolezza sostanziale del metodo è la scelta soggettiva delle variabili di stato, che provoca per la descrizione del medesimo fenomeno la nascita di numerosi modelli differenti, a seconda delle scelte operate dai diversi autori; viceversa, la grande potenza della metodologia è che con una scelta oculata delle variabili di stato si riescono a descrivere diverse tipologie di fenomeni.

Le *variabili di stato*, o *indipendenti*, si possono suddividere in due categorie:

- *osservabili*: sono variabili facilmente accessibili alla misura e rappresentano l'input dato al modello. Nella maggior parte dei modelli si assumono solamente due variabili osservabili, ovvero la temperatura assoluta T , e la deformazione totale imposta $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- *interne*: nei modelli che includono processi dissipativi, quali ad esempio la plasticità, lo stato corrente dipende non solo dalle variabili osservabili date come input, ma dalla storia di carico passata, che viene memorizzata da un certo numero di variabili di stato interne. Tali variabili sono a tutti gli effetti variabili di stato, ovvero concorrono alla definizione dello stato corrente del punto considerato; possono quindi essere trattate allo stesso modo di quelle osservabili, tuttavia la distinzione vuole sottolineare che tali variabili non sono, in genere,

in alcun modo misurabili e non appaiono esplicitamente nei principi termodinamici sopra citati. Il fatto che spesso non possano essere misurate dipende sostanzialmente dall'arbitrarietà della scelta, che può essere eseguita in modo praticamente libero, magari secondo l'esperienza o il senso fisico. Pensando ai modelli di elastoplasticità, una scelta conveniente potrebbe essere la scelta delle deformazioni plastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, che rappresentano la deformazione permanente associata alla configurazione rilassata. Secondo la decomposizione additiva delle deformazioni, valida in regime di piccole deformazioni, si ha infatti:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.7)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ è invece la parte elastica della deformazione, che include volendo eventuali effetti di dilatazione termica.

Nel seguito le variabili interne, sia scalari che tensoriali, verranno generalmente indicate come V_1, V_2, \dots, V_k .

Avendo definito le variabili di stato si postula a questo punto l'esistenza di un potenziale termodinamico scalare dipendente da esse, che deve essere concavo rispetto a T , e convesso rispetto a tutte le altre variabili V_1, V_2, \dots, V_k , in modo che *a priori* venga soddisfatto il secondo principio della termodinamica. Tenendo conto che in genere le deformazioni entrano nel potenziale seguendo la decomposizione additiva, si può scrivere:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k) \quad (2.8)$$

Differenziando tale quantità si ottiene:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (2.9)$$

che inserita nella (2.6) permette di ottenere:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \bar{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.10)$$

Ora immaginando innanzitutto un processo completamente elastico, a temperatura costante e uniforme, che non implichi cambiamenti delle variabili interne, ne consegue che perché la disuguaglianza sia valida per ogni scelta di $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, deve essere:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Assumendo ora che valga la (2.11), immaginando una dilatazione termica in cui non variano le variabili interne, e che avviene a temperatura omogenea, ne consegue che:

$$\left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) = 0 \quad (2.12)$$

Quindi sforzo ed entropia possono essere considerate come variabili associate rispettivamente alla deformazione elastica e alla temperatura; allo stesso modo si possono introdurre le forze termodinamiche associate alle altre variabili interne, come:

$$A_k = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \quad (2.13)$$

η , σ , A_k costituiscono le cosiddette variabili associate; il vettore formato da esse costituisce il gradiente della funzione Ψ nello spazio T , $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, V_k , che è normale alla superficie $\Psi = \text{costante}$.

Resta a questo punto da capire come definire l'evoluzione delle variabili interne; per fare questo si introduce un potenziale di dissipazione φ espresso in funzione delle variabili associate, nullo all'origine, positivo e convesso. Le leggi evolutive si ottengono a questo punto con l'ipotesi di normalità, ovvero:

$$\dot{V}_k = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \quad (2.14)$$

Tale ipotesi permette automaticamente di soddisfare il secondo principio della termodinamica. Per generalità si può anche affermare che il potenziale di dissipazione sia funzione anche delle variabili interne stesse [47, 48].

Si evince quindi come un aspetto critico della modellizzazione fenomenologica sia la scelta appropriata dei due potenziali Ψ e φ , che è vero può essere effettuata in modo libero come la stessa scelta delle variabili interne, ma dovrebbe comunque essere guidata da scelte che riflettono il comportamento fisico del materiale.

2.4 Rassegna di alcuni modelli costitutivi fenomenologici presenti in letteratura

2.4.1 Modello Souza-Auricchio-Petrini

Il modello [11] è sviluppato all'interno della termodinamica fenomenologica già presentata, quindi assume che in ogni istante lo stato di un certo volumetto di materiale sia completamente descritto da un insieme di variabili, osservabili o interne. Inoltre si assume un regime di piccole deformazioni, e la scelta delle variabili di controllo ricade sulla temperatura T e sulla deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$, che costituiscono l'input dato al modello, in modo che insieme al valore delle variabili interne si possa ottenere l'output desiderato, ovvero il corrispondente valore di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$. Valgono le seguenti decomposizioni, tra parte volumetrica e deviatorica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e} + \frac{\theta}{3}\mathbf{1} \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{s} + p\mathbf{1} \quad (2.16)$$

Dove \boldsymbol{e} è la parte deviatorica della deformazione, $\mathbf{1}$ è il tensore identità del secondo ordine, $\theta = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1}$ la parte volumetrica della deformazione, \boldsymbol{s} sforzo deviatorico, $p = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1}$ la pressione idrostatica. La scelta delle variabili interne ricade su un'unica quantità tensoriale del secondo ordine, \boldsymbol{e}^{tr} , che rappresenta la parte di deformazione associata alla trasformazione di fase, assunta avere traccia nulla secondo le evidenze sperimentali. La norma della deformazione di transizione di fase può essere assunta come una misura del procedere della trasformazione tra austenite o martensite multivariante verso martensite singola variante [27], quindi è limitata tra:

$$0 \leq \|\boldsymbol{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (2.17)$$

ε_L è il massimo della deformazione dovuta alla transizione di fase, e può essere quindi misurata con un semplice test uniassiale di trazione come la deformazione associata al completamento del plateau di transizione. Per una SMA policristallina, si descrive il potenziale termodinamico del materiale con l'energia libera di Helmholtz, $\Psi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^{tr}, T)$, composto da più parti:

- l'energia elastica di deformazione:

$$\frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) \quad (2.18)$$

dove K è il modulo di comprimibilità volumetrica, G il modulo di taglio, T_0 una temperatura di riferimento, α il coefficiente che descrive gli effetti di dilatazione termica.

- energia chimica indotta termicamente dalla trasformazione martensitica, in cui β è il coefficiente che esprime la relazione lineare tra sforzo di inizio trasformazione e temperatura, e M_f è una temperatura sotto cui la martensite è stabile:

$$\beta \langle T - M_f \rangle \|\boldsymbol{e}^{tr}\| \quad (2.19)$$

- energia legata all'hardening durante la trasformazione di fase:

$$\frac{1}{2}h\|\boldsymbol{e}^{tr}\|^2 \quad (2.20)$$

- funzione indicatrice, introdotta per soddisfare il vincolo (2.17):

$$L(\mathbf{e}^{tr}) = \begin{cases} 0 & \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ +\infty & \|\mathbf{e}^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (2.21)$$

A questo punto mediante un'operazione di derivazione del potenziale, si possono ottenere le variabili associate:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\theta - 3\alpha K(T - T_0) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - [h\|\mathbf{e}^{tr}\| + \tau_M + \gamma] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \quad (2.24)$$

dove $\tau_M = \beta \langle T - M_f \rangle$, e γ è il subdifferenziale della funzione indicatrice $L(\mathbf{e}^{tr})$, definito come:

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (2.25)$$

\mathbf{X} rappresenta una sorta di sforzo relativo, e viene utilizzato per esprimere una superficie limite che delimita il dominio elastico; tenendo conto delle miglie apportate da Auricchio e Petrini [13], tale superficie vuole cogliere il comportamento asimmetrico tra tensione-compressione delle SMA utilizzando una funzione di tipo Prager-Lode, dipendente quindi dal secondo e terzo invariante di \mathbf{X} :

$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0 \quad (2.26)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{X}^2 : \mathbf{1}) \quad (2.27)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{X}^3 : \mathbf{1}) \quad (2.28)$$

dove R e m possono essere associati agli sforzi critici di trazione e compressione:

$$R = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_T \sigma_C}{\sigma_C - \sigma_T} \quad (2.29)$$

$$m = \sqrt{\frac{27}{2}} \frac{\sigma_C - \sigma_T}{\sigma_C + \sigma_T} \quad (2.30)$$

Inoltre seguendo un meccanismo simile a quello usato nella plasticità classica [49], si identifica la superficie limite del dominio elastico con il potenziale di dissipazione, in modo che attraverso l'ipotesi di normalità si possa ottenere l'evoluzione delle variabili interne, secondo quanto fatto per una plasticità associativa:

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.31)$$

Valgono inoltre le classiche condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\zeta} \geq 0 \quad F \leq 0 \quad F\dot{\zeta} = 0 \quad (2.32)$$

Queste relazioni esprimono il fatto che fintanto che la (2.26) è soddisfatta si è all'interno del dominio elastico, in cui le variabili interne non evolvono. \mathbf{X} tuttavia non può uscire dal dominio elastico, per cui quando $F = 0$, ovvero quando si è esattamente sul bordo del dominio, si attiva l'evoluzione delle variabili interne.

Parametri e calibrazione

Il modello appena presentato risulta facilmente implementabile anche grazie al limitato numero di parametri che richiede, facilmente estraibili da prove di trazione monoassiali (Fig. 2.1).

- E : modulo di Young, ipotizzando che non vari tra austenite e martensite;
- ν : coefficiente di Poisson;
- ε_L : massima deformazione raggiunta per la trasformazione di fase;
- h : pendenza durante la trasformazione di fase, infatti durante il plateau di una prova monoassiale: $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{Eh}{E+h} \approx h$ se $E \gg h$;
- β : parametro che esprime la dipendenza lineare tra sforzo critico e temperatura.
- M_f : temperatura di riferimento, al di sotto della quale la martensite è stabile.
- R : raggio del dominio elastico a basse temperature, ovvero è il livello di sforzo critico per indurre la trasformazione tra martensite multivariante a monovariante.
- eventuali parametri per modellizzare gli effetti di dilatazione termica, ovvero α e T_0 .

Una possibile procedura per effettuare la calibrazione dei parametri sopra citati, sostitutiva alle prove monoassiali di trazione, è quella di utilizzare il procedimento

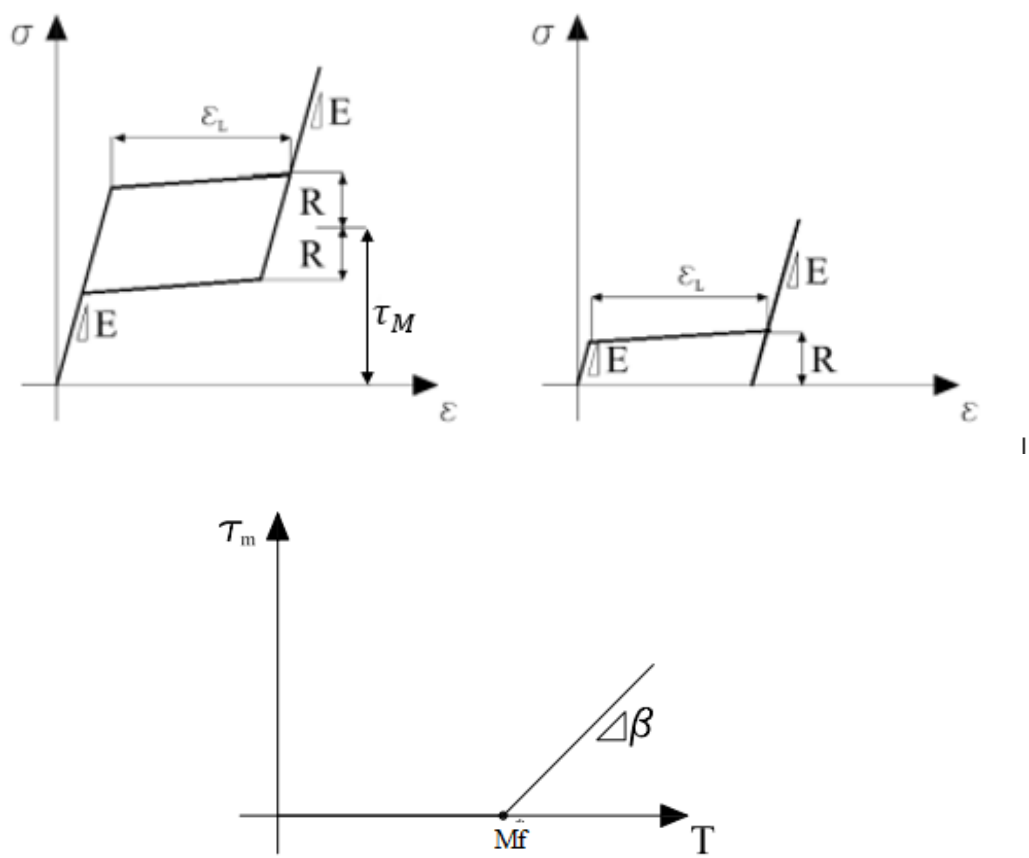


Figura 2.1: Identificazione dei parametri dai diagrammi sforzo-deformazione

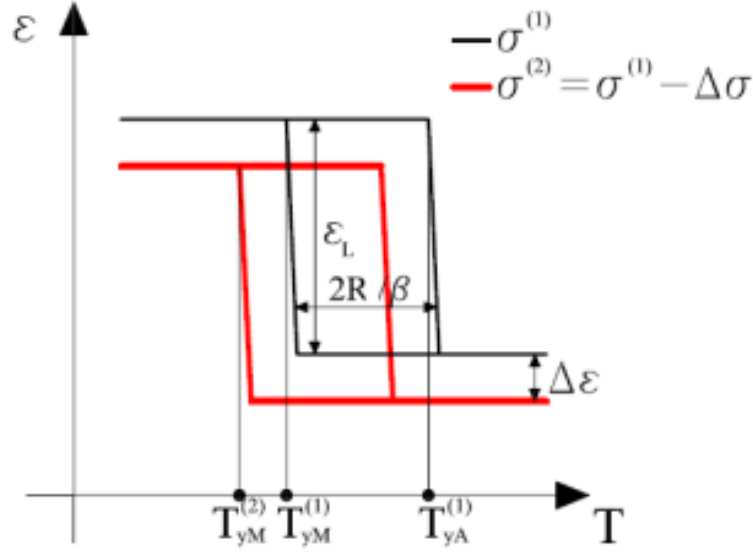


Figura 2.2: Curve deformazione-temperatura a due carichi differenti

proposto da Auricchio et al. (2009) [50], partendo da due cicli termici a carico costante, di intensità differente σ_1 e σ_2 , condotti su filo in SMA (Fig. 2.2).

Dalla Fig. 2.2 si può notare che ε_L è direttamente misurabile, mentre $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ e $\beta = \frac{\Delta\sigma}{\Delta T}$ sono facilmente ottenibili dalle loro rispettive definizioni. Dall'ampiezza dell'isteresi si può inoltre trovare R :

$$R = \frac{\beta\Delta T}{2} \quad (2.33)$$

Per quanto riguarda invece il parametro di hardening della trasformazione di fase, sapendo che $\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = \frac{Eh}{E+h} = \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial\varepsilon} = \beta \frac{\partial T}{\partial\varepsilon}$, si può ottenere:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{\beta} \frac{\partial\varepsilon}{\partial T} - \frac{1}{E}} \quad (2.34)$$

Infine per la temperatura M_f , sapendo che $\sigma_1 - \beta(T_{yM}^1 - M_f) = R$, si può scrivere:

$$M_f = T_{yM}^1 + \frac{R - \sigma_1}{\beta} \quad (2.35)$$

Vantaggi

- è in grado di cogliere sia il comportamento a memoria di forma sia la pseudoeasticità, semplicemente variando la temperatura data come input al modello.

- tiene conto della dipendenza lineare dello sforzo critico con la temperatura, grazie al parametro β .
- richiede un numero estremamente limitato di parametri.
- può essere facilmente discretizzato, inoltre è molto robusto e stabile, per cui si presta all'implementazione numerica in software per simulazioni agli elementi finiti. Per confermare tale robustezza si sottolinea come il modello sia stato implementato nella suite ANSYS [51].
- modella l'asimmetria tra trazione e compressione.
- anche se in modo approssimato, coglie il processo di riorientamento della martensite, permesso nel modello da un processo che ottenga $\|e^{tr}\| = costante$ e $\dot{e}^{tr} \neq 0$.

Svantaggi

- l'ampiezza dell'isteresi meccanica visibile in una prova di trazione monoassiale, che nel modello è rappresentata dal parametro R , ovvero l'ampiezza del dominio elastico, è fissa e non varia con la temperatura. In realtà tale ampiezza è legata al tipo di fase presente nel materiale, e quindi alla temperatura della prova.
- non tiene conto della dipendenza del modulo elastico del materiale dal tipo di fase presente, ovvero austenitica o martensitica.
- non si tiene conto del meccanismo di accumulo di deformazione per fatica, quando il materiale è sottoposto a ciclaggio meccanico.
- non coglie lo snervamento del materiale dovuto all'applicazione di elevate deformazioni.
- è sviluppato in piccole deformazioni.
- sfruttando solamente una variabile interna, può distinguere solamente il passaggio fra una fase genitrice e una generata, ovvero tra austenite/martensite multivariante e martensite singola variante. Non può in nessun modo cogliere la trasformazione tra austenite e martensite multivariante, in quanto a questa transizione non è associata alcuna variazione di deformazione.
- non descrive l'eventuale presenza della fase intermedia romboedrica.
- nonostante l'introduzione di una funzione limite di tipo Prager-Lode, dato che il parametro R più che rappresentare lo sforzo critico regola invece l'ampiezza dell'isteresi, l'asimmetria tra trazione-compressione non è pienamente descritta.

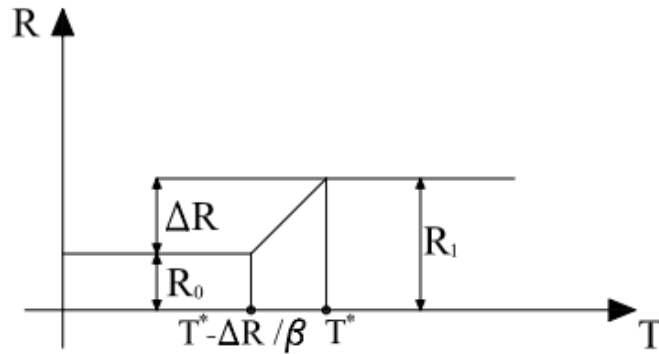


Figura 2.3: Dipendenza dalla temperatura del raggio del dominio elastico (per consistenza di notazione: $T^* = M_f$) [50]

Una più corretta modellizzazione dell'asimmetria vorrebbe anche una dipendenza dal tipo di carico non solo di R , ma anche di τ_M , visto che è la quantità $\tau_M + R$ che rappresenta la soglia di inizio trasformazione di fase [15].

2.4.2 Miglioramenti del modello di Souza-Auricchio-Petrini

Negli ultimi anni sono stati proposti diversi modelli costitutivi con la finalità di migliorare quello di Souza-Auricchio-Petrini, apportando delle modifiche nella descrizione della curva sforzo-deformazione a diverse temperature ed estendendo le equazioni presenti al fine di introdurre la possibilità di cogliere il comportamento a fatica e i fenomeni legati alla plasticità. Nel seguito si descriveranno quindi alcune di queste proposte, distinguendole in funzione del superamento dei limiti sopra elencati.

Modellizzazione dell'ampiezza variabile del dominio elastico

Un primo aspetto che si può sicuramente migliorare è la modellizzazione dell'ampiezza del dominio elastico, che nel modello originale si ipotizza costante al variare della temperatura, e quindi uguale nel caso di martensite ed austenite. Questo causa l'inabilità del modello a catturare il corretto comportamento delle SMA a bassi valori di sforzo, quando per ciclaggio termico si ottiene la transizione di fase [52]. Questo potrebbe accadere in simulazioni che sfruttano il modello per simulare il funzionamento di attuatori a molla soggetti ad un basso carico costante e ad un ciclaggio termico. Una possibile soluzione è proposta da Auricchio e coautori [50] (Fig. 2.3), e consiste nell'introdurre una dipendenza del raggio del dominio elastico dalla temperatura, in modo che sia minimo quando la fase martensitica è stabile e poi cresca linearmente con la temperatura fino ad un valore massimo, che poi viene mantenuto costante.

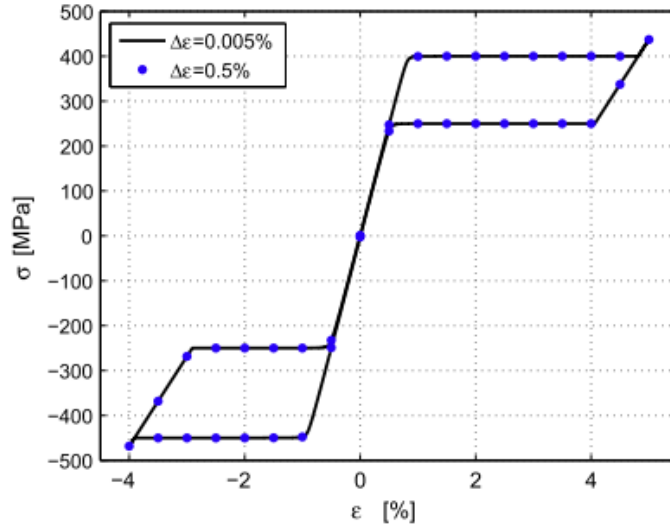


Figura 2.4: Curva sforzo-deformazione in campo pseudoelastico con le modifiche di Auricchio et al. (2009). Test effettuati con due diversi passi. [15]

Introduzione delle diverse proprietà elastiche di martensite ed austenite

Un secondo aspetto che sicuramente andrebbe risolto è l'introduzione delle diverse proprietà meccaniche elastiche di austenite e martensite. Questo obiettivo è stato affrontato da Auricchio e coautori nel 2009, provando a implementare una versione 1-D opportunamente modificata del modello originale [15]. L'idea originale alla base di questo lavoro è il fatto che $\|e^{tr}\|$ si muove all'interno di un range di valori limitato, potendo al massimo raggiungere il valore ϵ_L quando la trasformazione di fase è completata. Si può quindi assumere il rapporto $\chi = \frac{\|e^{tr}\|}{\epsilon_L}$ come rappresentativo della frazione volumetrica di martensite. Introducendo uno schema di Reuss, che permette di ottenere risultati accurati mantenendo una complessità ancora limitata [53], per ottenere il modulo elastico della SMA si può scrivere:

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \chi}{E_A} + \frac{\chi}{E_M} \quad (2.36)$$

, ovvero:

$$E = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right) \chi} \quad (2.37)$$

I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 2.4. Si noti come con le modifiche proposte il modello risulti senz'altro più accurato e completo; non bisogna dimenticare però che questo lavoro è stato svolto per il caso 1-D, e difficilmente si può estendere il procedimento al caso triassiale.

Più recentemente Urbano et al. (2015) [6] hanno inserito le diverse proprietà meccaniche di austenite e martensite all'interno del modello, seguendo una strada

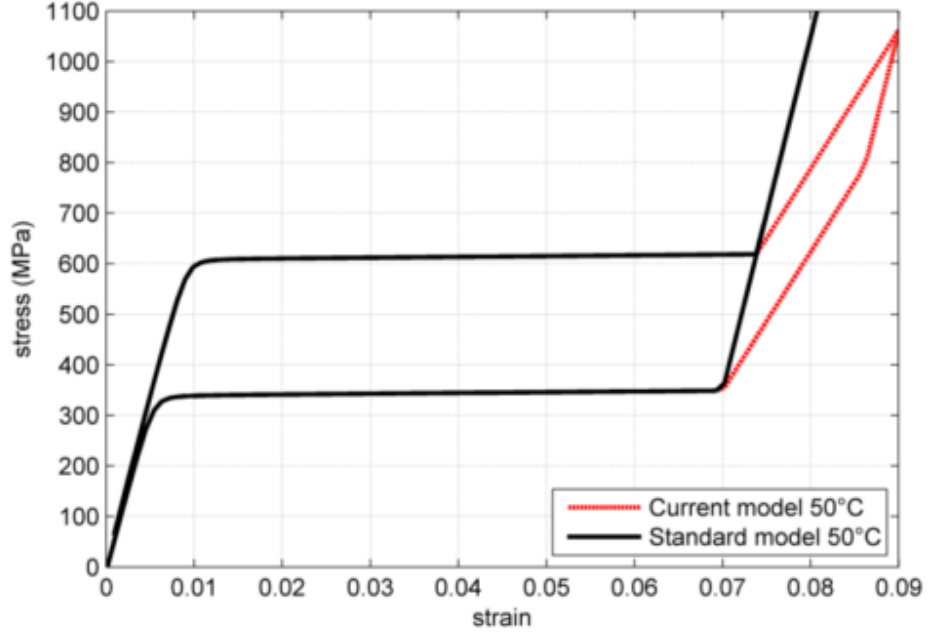


Figura 2.5: Confronto tra modello di Urbano e modello Auricchio-Petrini originale. (Urbano et al., 2015) [6]

differente. Gli autori partono dalle considerazioni di altri gruppi di ricerca [25, 26], secondo cui il ramo elastico lineare presente alla fine del plateau non rappresenta realmente le proprietà elastiche della martensite. Ne consegue che introdurre una dipendenza del modulo elastico della SMA utilizzando una media, pesata sulla frazione di martensite presente, tra le proprietà delle varie fasi non sia totalmente corretto. L'idea di Urbano e coautori è quindi di modificare il termine di hardening all'interno del potenziale termodinamico del modello, in modo che dipenda da due differenti parametri, che si attivano rispettivamente prima e dopo il completamento della trasformazione di fase. Sostanzialmente quindi si introduce nel potenziale:

$$\Psi^{tr} = \begin{cases} \frac{1}{2}h_1 \|e^{tr}\|^2 & se \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \frac{1}{2}h_1\varepsilon_L^2 + \frac{1}{2}h_2 (\|e^{tr}\| - \varepsilon_L)^2 & se \|e^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (2.38)$$

Tale modifica si riflette quindi nella definizione di \mathbf{X} , che diventa:

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial\Psi}{\partial e^{tr}} = \begin{cases} s - (\tau_M + h_1 \|e^{tr}\|) \frac{\partial\|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} & se \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ s - (\tau_M + h_2 (\|e^{tr}\| - \varepsilon_L) + h_1\varepsilon_L) \frac{\partial\|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} & se \|e^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (2.39)$$

Si evince come in tale modello non si considera nessun limite per la deformazione legata alla trasformazione di fase, rendendo quindi inutile la presenza della funzione indicatrice che era stata introdotta proprio come vincolo; ne consegue una maggior

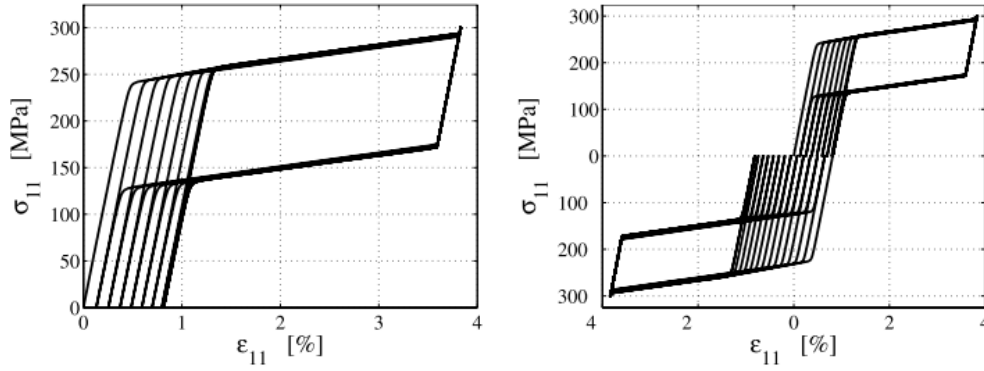


Figura 2.6: A sinistra 10 cicli di trazione, a destra 10 cicli di trazione seguiti da 15 in compressione, effettuati con il modello di Auricchio et al. (2007) [14]

semplicità e probabilmente robustezza del modello. I risultati ottenuti con tale modifica sono in Fig. 2.5, e mostrano un miglioramento rispetto al modello originario. Un limite del procedimento proposto riguarda invece la definizione di h_2 , in quanto la pendenza attribuibile al tratto lineare della martensite risulta pari a $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{Eh_2}{E+h_2}$, quindi può spaziare solamente nel range:

$$0 \leq \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \leq E \quad (2.40)$$

Ciò si traduce nel fatto che non si può ottenere in questo modo una pendenza nel ramo elastico successivo al plateau maggiore della pendenza del primo tratto elastico. Questo non è sicuramente un problema nel caso di un comportamento pseudoelastico, in cui chiaramente la pendenza dopo il plateau è minore di quella del tratto elastico dell'austenite. Tuttavia il problema sorge nel caso si desideri simulare l'effetto a memoria di forma: in questo caso, infatti, la pendenza del primo tratto lineare risulta più bassa rispetto a quella del tratto successivo al plateau, in quanto attribuibile al meccanismo di detwinning.

Introduzione dell'accumulo di deformazione residua per fatica

Un tentativo di introdurre la fatica nel modello di Souza-Auricchio-Petrini è stato svolto nel lavoro di Auricchio et al. (2007) [14] in cui si considera nel modello originario una variabile tensoriale del secondo ordine aggiuntiva, il tensore di fatica \mathbf{q} , che rappresenta la parte di deformazione di transizione di fase che non può essere recuperata allo scarico. La modifica sostanziale del modello riguarda il termine del potenziale termodinamico $\tau_M \|\mathbf{e}^{tr}\|$, che ora viene sostituito da $\tau_M \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|$; tale cambiamento permette appunto allo scarico di non recuperare tutto la deformazione \mathbf{e}^{tr} , ma di forzare \mathbf{e}^{tr} a rimanere almeno pari a \mathbf{q} . Il potenziale termodinamico modificato risulta quindi:

$$\Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \frac{1}{2}h\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \tau_M\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + \quad (2.41)$$

$$L(\mathbf{e}^{tr}) + \frac{1}{2}H\|\mathbf{q}\|^2 - A\mathbf{e}^{tr} : \mathbf{q}$$

Si noti la comparsa di soli due nuovi parametri, A che regola gli effetti di degradazione del materiale, ovvero l'abbassamento dello sforzo critico al procedere dell'accumulo di deformazione inelastica, e H che rappresenta un termine di saturazione in grado di bloccare l'evoluzione di \mathbf{q} . Un esempio di risultati ottenibili dai test numerici effettuati su questo modello è mostrato in Fig. 2.6, in cui si nota tra l'altro uno degli aspetti più negativi del modello. Rimanendo in trazione con il ciclaggio si ha un accumulo di deformazione irreversibile; passando però in condizioni di compressione il plateau di transizione di fase sembra divenire più lungo di quello iniziale, in quanto \mathbf{e}^{tr} parte da valori negativi, per cui prima che la relazione $\|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L$ sia soddisfatta ci può essere un'evoluzione maggiore. Ovviamente questo aspetto è in contraddizione con le evidenze sperimentali, che suggeriscono che anche passando in compressione si abbia un'ampiezza del plateau limitata a causa dell'accumulo di deformazione irreversibile.

Introduzione degli effetti legati ai fenomeni plastici

Più recentemente un altro gruppo di ricerca [7] ha sviluppato ulteriormente le modifiche proposte nel lavoro appena presentato di Auricchio et al. (2007), al fine non solo di modellizzare il fenomeno di accumulo di deformazione per fatica, ma anche di introdurre la possibilità di cogliere aspetti dovuti alla plasticità macroscopica, ovvero lo snervamento del materiale. Per riuscire in questo, un nuovo tensore viene introdotto, \mathbf{e}^{pl} , che rappresenta la deformazione plastica. Dato che in presenza di plasticità macroscopica il campione di materiale non è in grado di recuperare completamente la propria forma, la definizione di deformazione puramente elastica cambia di conseguenza:

$$\mathbf{e}^{el} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - \mathbf{e}^{pl} \quad (2.42)$$

Per semplicità, dato che per completare il modello a questo punto sarebbe necessaria una legge di evoluzione separata per \mathbf{e}^{pl} , nel lavoro di Barrera et al. (2014) si pone $\mathbf{e}^{pl} = a\mathbf{q}$, ovvero direttamente proporzionale al tensore di fatica. Tuttavia in questo modo si condensa all'interno della variabile interna \mathbf{q} il duplice scopo di modellizzare sia la plasticità che la fatica, semplificazione che porta ad avere alcuni problemi, che saranno esemplificati meglio nel seguito (Sez. 4.3.3).

Secondo aspetto fondamentale toccato da questo lavoro è la risoluzione dei problemi del modello di Auricchio et al. (2007) quando si passa da condizioni di carico di trazione a condizioni di compressione, che causavano un plateau erroneamente di

dimensioni maggiori di quelle reali. Per risolvere questo punto l'idea è che ogni evoluzione di \mathbf{q} possa causare effetti irreversibili sul dominio di transizione di fase ε_L , in modo che questo risulti sempre ridotto al procedere dell'accumulo di deformazione irreversibile. Tali considerazioni vogliono esprimere il fatto che man mano che la fatica procede, si ha all'interno del materiale un accumulo di difetti e dislocazioni che impediscono al campione di materiale di riallinearsi in direzioni differenti rispetto a quella in cui inizialmente si erano formate deformazione plastiche. Da ciò deriva il cambiamento del vincolo (2.17) in:

$$\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| \leq \varepsilon_L(t) \quad (2.43)$$

a cui viene aggiunta una legge di evoluzione per il dominio di trasformazione di fase:

$$\dot{\varepsilon}_L = \begin{cases} -\|\dot{\mathbf{q}}\| & \text{se } \varepsilon_L > 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Il potenziale termodinamico del modello risulta il seguente:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = & \frac{1}{2}K\theta^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}\|^2 + \\ & + \frac{1}{2}h\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \tau_M\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + L(\mathbf{e}^{tr}) + \frac{1}{2}H\|\mathbf{q}\|^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Un ulteriore aspetto affrontato da Barrera e coautori è la scelta della più adeguata funzione limite per il dominio elastico, che permetta di ottenere leggi evolutive per le due variabili interne che effettivamente modellizzino sia i fenomeni plastici che quelli di fatica. Questo aspetto verrà trattato nel seguito (Cap. 4).

I due modelli qui presentati, pur mostrando alcuni limiti, sono estremamente interessanti perché arricchiscono il modello di Souza-Petrini-Auricchio, mantenendone le caratteristiche di grande semplicità e stabilità numerica. Una prospettiva sicuramente interessante sarebbe quindi continuare sulla scia di questi lavori per inserire gli effetti di fatica e plasticità macroscopica nel modello di Souza-Auricchio-Petrini, cercando di superare i problemi fino ad ora riscontrati.

2.4.3 Altri modelli costitutivi presenti in letteratura

Nel seguito si citano alcuni modelli costitutivi, scelti tra i numerosi proposti in letteratura per descrivere le SMA, che sono stati ritenuti utili come spunti per ulteriori miglioramenti al modello di Souza-Auricchio-Petrini. Si cita in particolare un modello [44] che focalizza l'attenzione sulla possibilità di cogliere correttamente il meccanismo di crescita e riorientamento delle varianti di martensite ed altri tre

[54–56] che invece sono incentrati sulla capacità di catturare i fenomeni plastici delle SMA.

2.4.3.1 Modello di Arghavani et al. (2010)

Come spiegato da Arghavani et al. (2010) [44], per catturare correttamente il meccanismo di crescita e riorientamento delle varianti di martensite la scelta delle variabili interne di un modello fenomenologico difficilmente potrebbe cadere su variabili scalari, perché non permetterebbero di tener conto della direzione di evoluzione. Il modello di Souza-Auricchio-Petrini sfrutta invece una singola variabile tensoriale che rappresenta le deformazioni inelastiche, in modo che la sua norma sia legata alla quantità di martensite presente, mentre la direzione fornisca informazioni sull'orientamento prevalente delle varianti. Tuttavia sfruttare una singola variabile per tener conto di entrambe le informazioni potrebbe essere limitante, quindi nel lavoro citato si propone un modello molto simile a quello di Souza-Auricchio-Petrini, in cui però la deformazione inelastica $\boldsymbol{\varepsilon}^{ie}$ viene «spezzata» in modo da tener conto in modo separato della sua norma e della sua direzione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ie} = q\mathbf{N} \quad (2.46)$$

con:

$$\|\mathbf{N}\| = 1 \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{ie}\| = q \quad (2.47)$$

A questo punto il potenziale termodinamico viene scelto come:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2}K\theta^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + G\|\mathbf{e} - q\mathbf{N}\|^2 + \tau_M q + \frac{1}{2}hq^2 + (u_0 - T\eta_0) + \\ & + c[(T - T_0) - T \ln(T/T_0)] + L(q) + \lambda(\|\mathbf{N}\| - 1) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Da cui si ottengono le variabili associate del modello:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\theta - 3\alpha K(T - T_0) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - q\mathbf{N}) \quad (2.50)$$

$$Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial q} = \mathbf{s} : \mathbf{N} - (\tau_M + hq + \gamma) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{N}} = q\mathbf{s} - \lambda\mathbf{N} \quad (2.52)$$

$$\bar{K} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = 1 - \|\mathbf{N}\| \quad (2.53)$$

$$\eta = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} = \eta_0 + 3\alpha K\theta - q\frac{\tau_M}{|T - T_0|} + c\ln(T/T_0) \quad (2.54)$$

Per descrivere in modo corretto i fenomeni di trasformazione di fase e riorientamento, vengono scelte due differenti funzioni limite, con raggi del dominio elastico differenti, in modo che il valore di sforzo necessario per produrre un riorientamento delle varianti di martensite sia differente rispetto a quello necessario per attivare la transizione di fase.

$$\begin{cases} F^{tr}(q, Q, \mathbf{Y}) = \sqrt{Q^2 + \|\mathbf{Y}\|^2} - R^{tr} \\ F^{re}(q, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y}\| - R^{re} \end{cases} \quad (2.55)$$

in cui $\mathbf{Y} = (\mathbb{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) : \mathbf{s}$.

L'evoluzione delle due variabili interne che si ottiene è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dot{\zeta}Q \\ q\dot{\mathbf{N}} = \dot{\mu}\mathbf{Y} \end{cases} \quad (2.56)$$

Il modello appena presentato permette quindi di separare il contributo della trasformazione di fase dal riorientamento delle varianti di martensite, introducendo dei cambiamenti non troppo marcati al modello originale di Souza-Auricchio-Petrini. Evitando di stravolgere le equazioni originarie, Arghavani e coautori riescono a questo punto a formulare delle superfici limite separate per i due fenomeni, proprio in virtù del fatto di aver separato le variabili da cui sono dipendenti. Formulare in modo indipendente i due comportamenti permette quindi di utilizzare due soglie critiche differenti, in termini di sforzo, per l'inizio del processo di reorientamento della martensite e per la trasformazione di fase, permettendo quindi far iniziare il processo di riorientamento delle varianti di martensite anche sotto carichi più bassi, visto che fisicamente avviene attraverso un meccanismo di semplice scorrimento. La separazione dei due fenomeni potrebbe quindi portare ad un comportamento del modello più simile a quello sperimentale delle SMA, anche in virtù del fatto che dall' Eq. (2.55) si nota una dipendenza della soglia di trasformazione di fase dal processo di riorientamento, che induce un cambiamento dell'ampiezza dell'isteresi meccanica.

Tuttavia si sottolinea, come anche fatto notare nello stesso lavoro di Arghavani et al. (2010), che per concludere che le modifiche introdotte permettono effettivamente di ottenere un migliore grado di somiglianza con il comportamento reale delle SMA, sarebbero necessarie numerose prove sperimentali. Sarebbe quindi in futuro interessante effettuare una campagna di test sperimentali, anche in situazioni di carico complesse, per dimostrare se il modello appena presentato sia effettivamente una valida evoluzione di quello di Souza-Auricchio-Petrini.

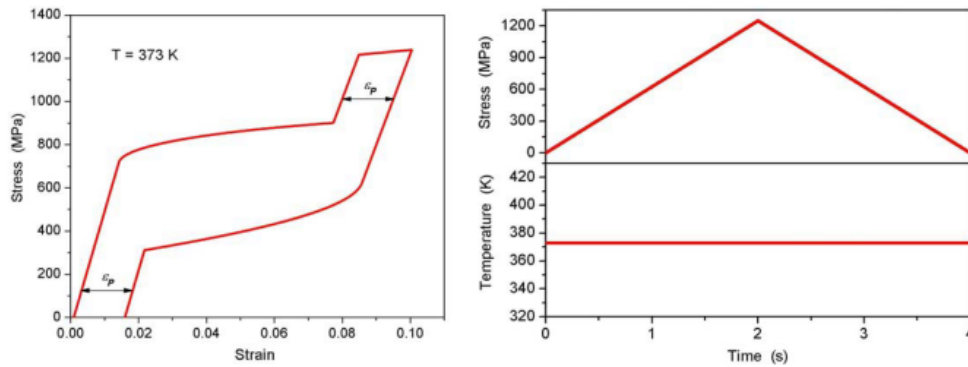


Figura 2.7: Prova di trazione monoassiale con plasticità nel modello di Paiva [54]: a) curva sforzo-deformazione ottenuta b) storia di temperatura e carico imposti. Si noti come al completamento dello scarico rimanga solamente la deformazione irreversibile dovuta alla plasticità, mentre invece ci si aspetta un plateau di recupero di lunghezza ridotta, dovuto ad una stabilizzazione di parte della martensite, e quindi una deformazione residua maggiore.

2.4.3.2 Modello di Paiva et al. (2005)

Il modello proposto da Paiva et al. (2005) [54] [57] cerca di introdurre sia la modellizzazione dell'asimmetrico comportamento tra trazione e compressione, sia la presenza di fenomeni plastici. Non si riportano qui tutte le equazioni del modello, a causa della loro lunghezza e complessità, e anche inutilità per il discorso generale, tuttavia si vuole porre l'attenzione su come tale lavoro parta da ipotesi totalmente diverse rispetto al modello di Souza-Auricchio-Petrini. L'idea di partenza è infatti quella di scrivere un'espressione per il potenziale termodinamico separata per ogni fase presente: quindi viene presentata un'espressione per l'energia della martensite, e un'altra per l'energia dell'austenite, ognuna delle quali espressa in funzione di parametri diversi, come proprietà elastiche e coefficienti di hardening, che tengono conto della specificità della fase. Nel modello in realtà vengono considerate 4 diverse fasi: due per la martensite singola variante, una per l'austenite, una per la martensite multivariante. A questo punto l'energia globale del materiale viene ottenuta sommando tra loro le energie delle diverse fasi, ognuna pesata dalla rispettiva frazione volumetrica. Nel modello, infatti, vengono assunte come variabili interne le varie frazioni volumetriche, oltre che la deformazione plastica. Si sottolinea come la plasticità venga descritta come un fenomeno con hardening sia isotropo che cinematico, i cui coefficienti sono diversi per ognuna delle fasi presenti. A questo punto seguendo un approccio classico, dal potenziale si ottengono, tramite derivazione, le forze termodinamiche associate, utilizzate per esprimere una superficie limite per il dominio elastico e un potenziale di dissipazione. Il modello di Paiva et al. riesce effettivamente a cogliere i fenomeni plastici (Fig. 2.7), tuttavia ha il limite di non considerare

gli effetti che la plasticità può avere sulla transizione di fase, che consistono in una riduzione del plateau. Le nascita di deformazioni plastiche irreversibili all'interno del materiale, infatti, ha come conseguenza il fatto che parte della martensite indotta da sforzo viene stabilizzata, in modo che non sia più disponibile per recuperare la struttura cristallina dell'austenite al termine dell'applicazione del carico. Si sottolinea inoltre come la scelta di descrivere separatamente ognuna delle fasi presenti nel materiale si traduce in un numero di parametri elevato. Un aspetto interessante del modello è invece l'approccio totalmente diverso da quello del modello di Souza-Auricchio-Petrini, basato sulla scrittura di un potenziale separato per ognuna delle fasi presenti nel materiale, che permette di utilizzare come variabili interne le frazioni volumetriche delle fasi stesse, che hanno evidente significato fisico. Inoltre Paiva et al. utilizzano all'interno della modellizzazione della plasticità delle leggi evolutive di tipo sia cinematico che isotropo; in realtà non sono disponibili dati sperimentali a conferma di questo, tuttavia è interessante notare come nella formulazione di un proprio modello possa essere considerato questo aspetto.

2.4.3.3 Modello di Yan et al. (2003)

Un ulteriore modello che considera i fenomeni plastici è quello di Yan et al. (2003) [55], in cui esplicitamente si considera l'effetto che la plasticità può avere sulla capacità del materiale di mostrare trasformazioni di fase; tuttavia una limitazione importante è il fatto che sia stato sviluppato per cogliere solamente il comportamento pseudoelastico delle SMA. In questo lavoro non si segue la procedura classica in cui si parte dalla formulazione di un potenziale termodinamico e di un potenziale di dissipazione, piuttosto, dopo avere scelto come variabili interne la frazione di martensite f e la deformazione plastica ϵ^{pl} , si procede direttamente a scrivere le equazioni che rappresentano le superfici limite per il dominio elastico. In particolare nel lavoro si sfruttano tre diverse superfici limite, due di raggio minore che modellizzano lo sforzo critico per la trasformazione di fase, una di raggio più ampio che determina lo snervamento.

Per quanto riguarda la trasformazione di fase, vengono presentate due diverse funzioni limite, per l'attivazione della trasformazione diretta ed inversa:

$$\begin{aligned} F_{DIR}(\boldsymbol{\sigma}, f) &= \sigma^{eq} + 3\alpha p - Y_{DIR}(f) \\ F_{INV}(\boldsymbol{\sigma}, f) &= \sigma^{eq} + 3\alpha p - Y_{INV}(f) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dove σ^{eq} è lo sforzo equivalente di Von Mises, ovvero $\sigma^{eq} = \sqrt{3/2 \mathbf{s} : \mathbf{s}}$ con \mathbf{s} lo sforzo deviatorico, p la pressione idrostatica, α un coefficiente del materiale da determinare sperimentalmente, $Y_{DIR}(f)$ e $Y_{INV}(f)$ delle funzioni che denotano le caratteristiche di hardening del materiale, che possono essere valutate come spiegato

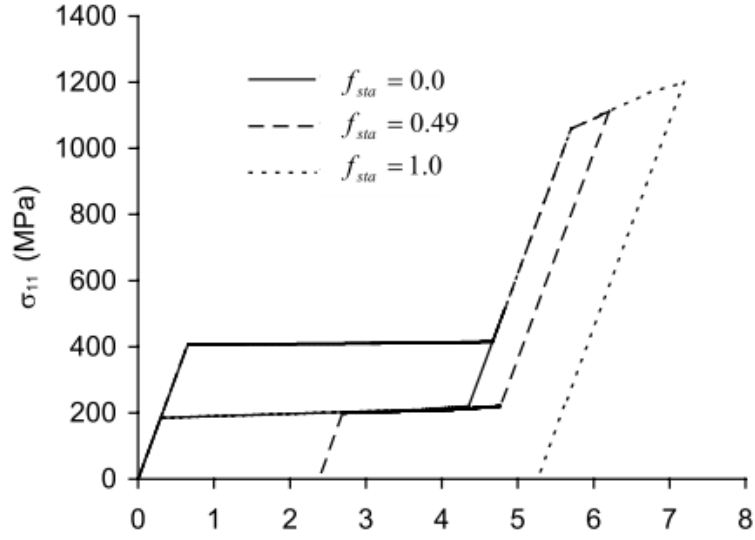


Figura 2.8: Risultati ottenuti con il modello di Yan in una prova di trazione monoassiale. Si noti la crescente percentuale di martensite stabilizzata al procedere delle deformazioni plastiche. [55]

nel lavoro originale [55]. Per l'evoluzione della frazione di martensite si possono ottenere le relazioni seguenti, applicando le condizioni di Kunh-Tucker alla (2.57):

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{1}{dY_{DIR}/df} \left(\frac{3}{2} \frac{\mathbf{s} : \dot{\mathbf{s}}}{\sigma^{eq}} + 3\alpha\dot{p} \right) \quad \text{se } \dot{f} > 0 \\ \dot{f} &= \frac{1}{dY_{INV}/df} \left(\frac{3}{2} \frac{\mathbf{s} : \dot{\mathbf{s}}}{\sigma^{eq}} + 3\alpha\dot{p} \right) \quad \text{se } \dot{f} < 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

A questo punto la deformazione legata alla transizione di fase viene legata direttamente alla frazione di martensite:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr} = \beta \dot{f} \left(\frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sigma^{eq}} + \alpha \mathbf{I} \right) \quad (2.59)$$

Per quanto riguarda invece la soglia di snervamento e la conseguente legge evolutiva per la deformazione plastica, queste hanno la forma:

$$F_{PLA}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \sigma^{eq} - Y_{PLA}(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (2.60)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \frac{9}{4} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}^2} \frac{dY_{PLA}}{d\varepsilon^{pl}} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{s}} \quad (2.61)$$

in cui Y_{PLA} è una funzione che descrive l'hardening del materiale.

Le ultime considerazioni del modello riguardano come la deformazione plastica

agisca sulla stabilizzazione della martensite, impedendo il recupero completo della forma originaria del materiale allo scarico. In modo abbastanza semplice, viene introdotto il concetto di frazione volumetrica di martensite stabilizzata f_{STA} , che ha la funzione di rappresentare un vincolo che deve essere rispettato durante la trasformazione di fase inversa:

$$f > f_{STA} \quad (2.62)$$

Tale relazione stabilisce che perché la trasformazione di fase inversa possa avvenire, deve rimanere una frazione di martensite maggiore di quella stabilizzata. Nel momento in cui, allo scarico, la martensite progressivamente si ritrasforma in austenite, f contemporaneamente diminuisce, finché nella situazione $f = f_{STA}$ la trasformazione di fase si ferma e lo scarico continua solamente attraverso un meccanismo elastico.

Ovviamente perché il modello sia completo, bisogna dare una legge evolutiva a f_{STA} :

$$f_{STA} = \begin{cases} \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\epsilon_c^{pl}} & \bar{\epsilon}^{pl} \leq \epsilon_c^{pl} \\ 1 & \bar{\epsilon}^{pl} > \epsilon_c^{pl} \end{cases} \quad (2.63)$$

dove $\bar{\epsilon}^{pl}$ è una deformazione plastica cumulativa, definita come $\bar{\epsilon}^{pl} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^{pl} : d\epsilon^{pl}$, mentre ϵ_c^{pl} è la deformazione plastica minima sopra la quale la trasformazione di fase non può più avvenire.

I risultati numerici ottenuti con un test monoassiale sono mostrati in Fig. 2.8, in cui si nota chiaramente l'effetto di stabilizzazione della martensite causato dall'avvento delle deformazioni plastiche. Il lavoro di Yan è interessante per il fatto di avere introdotto l'aspetto per cui le deformazioni plastiche sono in grado di ridurre la capacità del materiale di esibire future trasformazioni di fase. Il modello parte da una struttura matematica completamente diversa rispetto a quella sulla quale è costruito quello di Souza-Auricchio-Petrini, tuttavia nel momento in cui si vuole formulare un modello che tenga in considerazione le deformazioni plastiche, diventa anche necessario introdurre dei vincoli simili all'Eq. (2.63), magari matematicamente differenti e formulati tramite le variabili tipiche del modello considerato.

2.4.3.4 Modello di Hartl e Lagoudas (2009)

Ultimo modello che si vuole citare in grado di modellizzare i fenomeni plastici, è quello presentato nel lavoro di Hartl e Lagoudas (2009) [56], in cui gli autori si pongono l'obiettivo di rappresentare sia la pseudoelasticità che la memoria di forma, includendo effetti secondari come, appunto, la plasticità macroscopica, oltre che la fatica funzionale. L'attenzione degli autori è posta nel considerare come i fenomeni

di trasformazione di fase e plasticizzazione si influenzino vicendevolmente, variando per esempio i propri parametri di hardening o di sforzo necessari all'attivazione. Senza entrare nei dettagli, si cita solo il fatto che la base di partenza del modello è la scrittura di un potenziale che rappresenti l'energia di Gibbs del materiale, che in questo modello viene spezzato tra la parte attribuibile alla martensite, una parte relativa all'austenite e un terzo contributo, relativo all'interazione fra le due fasi.

$$G = (1 - \chi) G_A + \chi G_M + G_{MIX} \quad (2.64)$$

dove χ è la frazione di martensite presente. La parte del potenziale relativa all'interazione fra le due fasi è:

$$G_{MIX} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^t + \frac{1}{\rho} g^t \quad (2.65)$$

Mentre la generica espressione per il potenziale della singola fase è:

$$G_* = -\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S}^* : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{1}{\rho} g_*^p + \quad (2.66)$$

$$- \frac{1}{2\rho K^*} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} (T - T_0)$$

in cui ρ è la densità, $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ la deformazione associata alla trasformazione di fase, g^t il termine di energia dovuto all'hardening durante la trasformazione di fase, espresso come una funzione non lineare della frazione di martensite, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ la deformazione plastica, $\boldsymbol{\alpha}$ il tensore di dilatazione termica, K^* il modulo di hardening cinematico per la fase *, \mathbf{S}^* il tensore di cedevolezza elastica per la fase *, g_*^p il termine di energia relativo all'hardening della fase * durante plasticizzazione, anche esso funzione non lineare delle deformazioni plastiche, $\boldsymbol{\beta}$ è invece un *back-stress* plastico, che permette di ottenere una mutua dipendenza dei fenomeni plastici e di trasformazione di fase.

Senza andare oltre con le equazioni del modello, che possono essere trovate nel lavoro originale [56], si vuole solo sottolineare come in questo modello il fenomeno plastico, a differenza del modello di Yan et al. (2003), sia modellizzato con una plasticità cinematica, anziché isotropa; inoltre le leggi evolutive dell'hardening del materiale, sia durante la trasformazione di fase che durante la plasticità, sono non lineari, a differenza di tutti i modelli presentati finora. Questo permetterebbe dei cambi di pendenza più dolci, senza le discontinuità presenti in tutti i risultati mostrati finora, e quindi senz'altro più simili alle evidenze sperimentali. Un altro aspetto di pregio di questo modello è di considerare non solo come la deformazione plastica possa stabilizzare una parte della frazione di martensite presente, ma anche di modellizzare come la soglia per la trasformazione di fase venga modificata dai fenomeni plastici. Inoltre i parametri che regolano l'hardening dopo lo snervamento dipendono dal tipo di fa-

se presente, ovvero sono differenti tra austenite e martensite. Quest'ultimo aspetto tuttavia andrebbe sperimentalmente indagato, in quanto in realtà quando si porta a plasticizzazione una SMA la fase presente è sempre la martensite monovariante, sia che si effettui un test a basse temperature in cui durante il carico avviene uno scorrimento delle varianti, siano in un test ad alte temperature, in cui invece avviene una vera e propria trasformazione di fase da austenite a martensite monovariante. Questo infatti porterebbe a pensare che qualunque sia la temperatura di prova, allo snervamento il materiale si trova nella stessa fase, rendendo quindi inutile lo sforzo modellistico qui compiuto.

Una critica che potrebbe essere fatta a questo lavoro è di aver effettuato pochi test in condizioni di carico omogenee, passando subito all'implementazione numerica del modello in un software agli elementi finiti. Se da una parte questo passaggio dimostra l'efficacia del modello ad essere tradotto in forma discreta, dall'altra bisogna considerare che valutare il corretto funzionamento di un modello da una simulazione numerica complessa è abbastanza difficile, perché questa dovrebbe essere effettuata solo alla fine di un processo di confronto con numerosi semplici test monoassiali o al più biassiali, in modo da capire realmente come il modello risponde a condizioni di carico note.

Durante l'implementazione numerica del modello tuttavia Logoudas fa un'interessante osservazione. Tutti i modelli presentati sono sviluppati in regime di piccole deformazioni, quindi non potrebbero rigorosamente rappresentare il comportamento di strutture che esibiscono elevate rotazioni o distorsioni, che sono frequentemente presenti nelle applicazioni ingegneristiche delle SMA. Invece di formulare un modello in regime di deformazioni finite, sicuramente più complesso e computazionalmente più oneroso di risorse, la riflessione di Lagoudas è che, dato che le SMA subiscono certamente deformazioni significative (8-10%) ma comunque ancora modeste, non è necessario procedere in questa direzione, ma piuttosto in quella di continuare a sviluppare modelli in piccole deformazioni. Per risolvere il problema di considerare anche la presenza di elevate rotazioni strutturali, si può infatti semplicemente affiancare ad un modello in piccole deformazioni la capacità dei software agli elementi finiti di tenere traccia delle rotazioni avvenute nel materiale, provvedendo all'inizio di ogni passo temporale alla rotazione di tutte le quantità tensoriali (variabili di stato) nella nuova configurazione. I software agli elementi finiti, infatti, spesso memorizzano per ogni punto del materiale una matrice di rotazione, che esprime il cambiamento di configurazione tra un passo temporale e quello successivo; questa matrice può essere accuratamente sfruttata proprio per effettuare una rotazione di tutte le quantità tensoriali del modello, adattandole passo dopo passo alle rotazioni subite dal sistema di riferimento a causa delle distorsioni presentate dal materiale nel corso della simulazione numerica.

2.5 Obiettivo del lavoro di tesi

All'interno del Cap. 1 si sono descritte le proprietà peculiari delle SMA, ovvero pseudoelasticità e memoria di forma, soffermandoci su alcuni aspetti secondari, quali l'asimmetria tra trazione e compressione, le differenti proprietà meccaniche di austenite e martensite, l'accumulo progressivo di deformazione al ciclaggio ripetuto, la plasticizzazione e gli effetti di quest'ultima sulla trasformazione di fase. E' evidente che il comportamento sperimentale delle leghe NiTi è complesso, quindi è necessario sviluppare modelli costitutivi che possano modellarle correttamente in modo da poter effettuare simulazioni numeriche che siano predittive. Per esempio nella tesi di dottorato di Dordoni (2014) [8] viene fatto notare che utilizzare un modello che ignori la plasticità durante simulazioni numeriche su dispositivi biomedicali soggetti ad elevate deformazioni porterebbe a delle semplificazioni, in quanto si trarrebbero conclusioni errate sullo stato di sforzo presente, oltre a non considerare il fatto che i dispositivi potrebbero non essere più in grado di tornare alla propria forma originaria.

Alcuni modelli di letteratura sono stati presentati all'interno del Cap. 2, dove in particolare si è citato il modello di Souza-Auricchio-Petrini, che ha come caratteristiche peculiari una grande semplicità e robustezza numerica, dimostrate dal fatto che è stato implementato in alcuni software commerciali. Tale modello possiede anche numerose limitazioni, in primis la mancata modellizzazione delle diverse proprietà elastiche delle fasi presenti e l'assenza di fenomeni quali plasticità e fatica, tuttavia negli ultimi anni sono nati numerosi lavori che provano ad introdurre tali aspetti, come già fatto notare nella Sez. 2.4.2. Due lavori che appaiono interessanti sono quello di Auricchio et al. (2007) [14], nel quale il modello originale viene riformulato per renderlo in grado di cogliere la fatica, e quello di Barrera et al. (2014) [7], in cui si cerca di modificare in modo adeguato il modello precedente per modellizzare anche la plasticizzazione.

Partendo dalle considerazioni fatte in seguito all'implementazione numerica di questi due modelli, necessaria per capirne eventuali limitazioni, e avendo a disposizione dei dati sperimentali sull'effettivo comportamento delle SMA ottenuti mediante della campagne di test sperimentali eseguite ad hoc, l'obiettivo del lavoro di tesi è formulare un nuovo modello costitutivo, che sia in grado di superare le problematiche di quelli precedenti. Piuttosto che formulare un modello totalmente nuovo, si è deciso di utilizzare come base di partenza il modello di Souza-Auricchio-Petrini, aggiungendovi gli aspetti mancanti. Il modello sviluppato, che dovrà essere capace di cogliere i fenomeni di plasticizzazione e fatica, sarà implementato numericamente in modo da dimostrarne l'effettivo funzionamento e la sua robustezza.

Saranno infine condotte delle simulazioni numeriche mediante software commerciali agli elementi finiti, in modo da dimostrare l'utilità del modello formulato nell'ambito di applicazioni ingegneristiche biomedicali.

2.6 Schema di lavoro

Il primo passo del lavoro di tesi è lo studio sperimentale del comportamento delle SMA, in presenza di plasticizzazione e durante l'accumulo di deformazione residua per fatica. In particolare saranno condotte delle campagne di test sperimentali, sottoponendo diversi provini di lega NiTi a prove di trazione monoassiali cicliche a deformazione massima crescente, in modo da capire come la fatica proceda, e come i fenomeni plastici possano influire sulla capacità del materiale di esibire ulteriori trasformazioni di fase.

Il passo successivo sarà l'implementazione numerica dei modelli di Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014), necessaria per poterne testare il funzionamento sotto differenti condizioni di carico, con il fine di evidenziarne eventuali limitazioni e quindi procedere nel proporre delle soluzioni.

Partendo dalle conoscenze acquisite durante le due fasi precedenti, si procederà con il principale obiettivo di questo lavoro di tesi, ovvero la formulazione di un nuovo modello costitutivo per le SMA, in grado di modellizzare fatica e snervamento, superando le problematiche dei modelli precedenti. Il modello sarà formulato ponendo particolare attenzione anche alla proposta di un algoritmo risolutivo discreto. A differenza dei lavori proposti da Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014) non si procederà quindi alla risoluzione delle equazioni del modello sfruttando le funzioni presenti in librerie disponibili in software quali MATLAB, ma si proporrà un algoritmo risolutivo basato su un metodo iterativo di Newton-Raphson. Il modello sarà quindi largamente testato in modo da dimostrarne le capacità predittive, anche attraverso dei confronti con le curve sforzo-deformazione ottenute durante la prima fase di test sperimentali.

Avendone dimostrato le potenzialità, si procederà con l'ultima fase del lavoro di tesi, ovvero nell'implementazione del modello all'interno di un software commerciale agli elementi finiti. Avendo formulato un algoritmo discreto per la risoluzione delle sue equazioni, sarà quindi necessario tradurlo in codice FORTRAN in una subroutine che possa essere sfruttata durante le simulazioni numeriche. Queste saranno svolte su dei dispositivi biomedicali, quali stent vascolari e valvole cardiache, dei quali se ne simulerà la fase d'impianto. Durante questa fase infatti tali dispositivi subiscono notevoli deformazioni, che possono causare la plasticizzazione del materiale: è quindi interessante capire quali siano le differenze riscontrabili durante le simulazioni numeriche utilizzando un modello che tenga in considerazione i fenomeni plastici rispetto alla situazione in cui si utilizzi un modello che ignori tali aspetti.

Capitolo 3

Test sperimentali

Per riuscire a formulare un modello costitutivo sufficientemente accurato in grado di cogliere il fenomeno di fatica e l'accumulo plastico nelle leghe NiTi, è necessario avere a disposizione numerosi dati sul loro comportamento, in modo da poter calibrare il modello su alcuni dati sperimentali e validarlo sui rimanenti; per tale ragione è stata quindi avviata una campagna di prove sperimentali su provini differenti e sotto diverse condizioni di carico. Fino ad ora sono stati eseguiti due set di prove. Il primo consiste in prove di trazione monoassiali su fili in lega di NiTi ed è stato realizzato presso il CNR IENI (Istituto per l'Energetica e le Interfasi), Unità di Lecco, sfruttando una collaborazione presente con il Politecnico di Milano.

La seconda campagna di test è stata invece svolta presso il Laboratorio di Meccanica delle Strutture Biologiche (Labs) del Politecnico di Milano, sfruttando una collaborazione con Medtronic Endovascular Therapies (Roncadelle, BS), la quale ha fornito un tubo di lega NiTi che costituisce il materiale di partenza dal quale l'azienda stessa parte per la produzione degli stent vascolari. E' stato quindi interessante cercare di ripetere delle prove, simili a quelle effettuate a Lecco, su un materiale più vicino a quello che effettivamente è utilizzato industrialmente per la produzione di questa categoria di dispositivi biomedicali. Il fine ultimo del lavoro di tesi è infatti implementare un nuovo e migliore modello costitutivo, in grado di descrivere in modo sufficientemente accurato il comportamento di dispositivi quali stent vascolari e valvole cardiache in condizioni di sollecitazione realistiche. Avere a disposizione dei dati sperimentali del materiale effettivo con il quale tali dispositivi sono realizzati sicuramente sarebbe un vantaggio, tenuto anche conto che i fornitori di leghe NiTi sono pochi, quindi probabilmente il materiale testato è anche utilizzato da numerose altre aziende, oltre a Medtronic, per la realizzazione dei loro dispositivi.

Avendo a disposizione un materiale sottoforma di tubo, sono anche state eseguite alcune prove di compressione e biassiali, ma a causa dei notevoli problemi sperimentali incontrati i risultati delle stesse e le corrispondenti simulazioni sono riportate in Appendice.

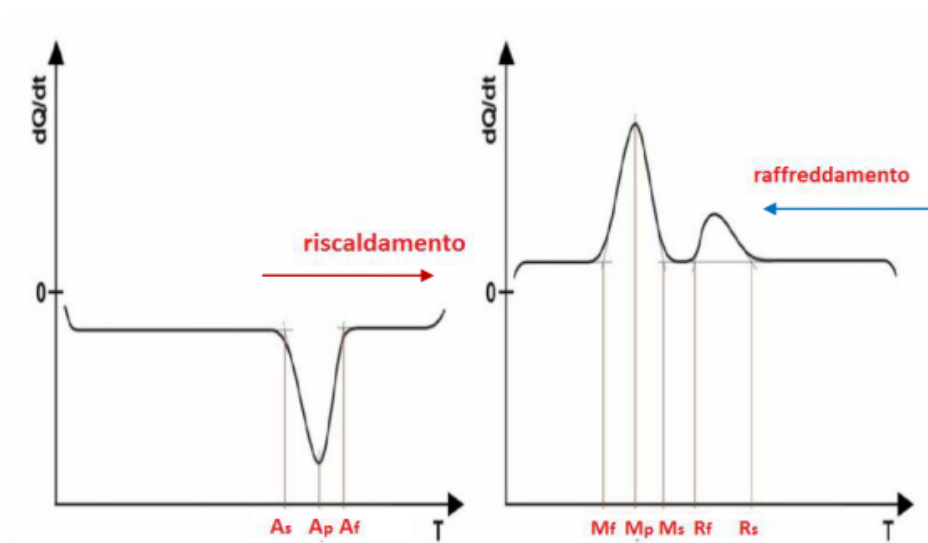


Figura 3.1: Curve flusso termico-temperatura tipiche di una lega a memoria di forma

3.1 Campagna di test sperimentali eseguita presso il CNR di Lecco

3.1.1 Analisi termica

Una prima indagine preliminare riguarda la determinazione delle temperature di trasformazione della lega a memoria di forma, necessaria per definire la temperatura di prova in base al comportamento che si vuole studiare (pseudoeleasticità o effetto a memoria di forma). La calorimetria a scansione differenziale (DSC) permette la determinazione delle temperature di transizione di fase da austenite e martensite, e viceversa, in condizioni di assenza di carico. Si basa sul monitoraggio dell'emissione e dell'assorbimento di calore di un campione di materiale durante il suo raffreddamento e riscaldamento, in relazione ad un materiale con emissioni note. Attraverso la misura del flusso termico in funzione della temperatura, la tecnica permette di ottenere l'energia termica assorbita o ceduta dal campione durante le trasformazioni di fase. La misura del flusso di calore viene riportata su un grafico in funzione della temperatura del campione; la curva ottenuta evidenzia sempre durante il riscaldamento un picco endotermico durante la trasformazione di fase, mentre durante il raffreddamento un picco esotermico (Fig. 3.1). A volte può anche essere presente un ulteriore picco, sia in riscaldamento che raffreddamento, relativo alla transizione del materiale in un fase intermedia tra austenite e martensite, ovvero la fase R.

Per le prove è stato utilizzato uno strumento Seiko Instruments SSC/5200; la curva ottenuta è mostrata in Fig. 3.2. Si vede chiaramente che alla temperatura ambiente di 23°C a cui saranno effettuati tutti i successivi test di trazione meccanica,

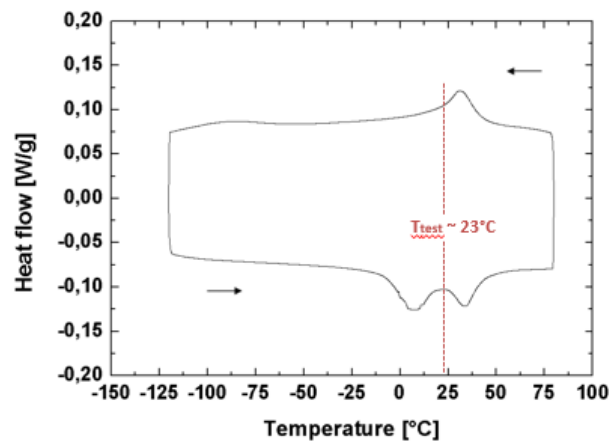


Figura 3.2: Curva ottenuta con tecnica DSC per il materiale utilizzato nelle prove sperimentali eseguite presso il CNR di Lecco.



Figura 3.3: Macchina di prova utilizzata per i test meccanici presso il CNR

il materiale si trova in piena trasformazione di fase, rendendo quindi più difficile la valutazione di tutte le prove effettuate nel seguito. Infatti a tale temperatura il materiale non può essere considerato né pianamente martensite, né austenite.

3.1.2 Descrizione set-up sperimentale per le prove meccaniche

La macchina servoidraulica utilizzata per le prove meccaniche è una MTS 2/M, che può esercitare un carico massimo di 10 kN (Fig. 3.3).

I test sono stati eseguiti su un filo di diametro 1.2 mm in lega di NiTi, e per semplicità a temperatura ambiente, pari a 23°C. Il tratto utile del campione di filo compreso tra gli afferraggi della macchina di prova è di 50 mm; inoltre il metodo utilizzato è stato di imporre una velocità di movimento della traversa di 0.25 mm/min, combinato con l'utilizzo di un estensometro su una porzione centrale di filo di 25

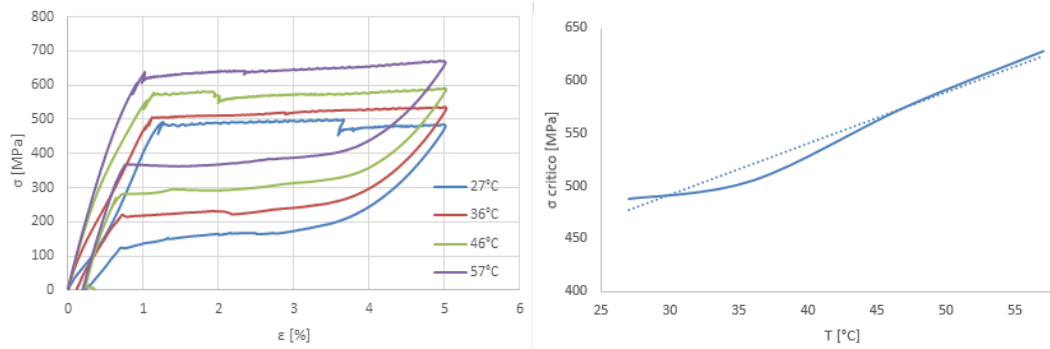


Figura 3.4: A sinistra curva $\sigma - \epsilon$ fino al 5% di deformazione per diverse temperature. A destra legame sforzo critico-temperatura. Si ottiene infine che il parametro β , ovvero la pendenza della retta di regressione del grafico a destra, è 4.87 MPa/K.

mm, in modo da ottenere un controllo della prova in deformazione. L'estensometro utilizzato è il modello MTS 634.12F-25, che lavora in un range di misura in apertura di 12.5 mm, e in chiusura di -2.5 mm. L'utilizzo di un estensometro è infatti necessario per monitorare nel modo più corretto ed accurato possibile una porzione di filo centrale e lontana dagli afferraggi della macchina, in modo da considerare il comportamento di un tratto privo di effetti di bordo. Infatti la presenza degli afferraggi genera in loro prossimità la nascita di sforzi radiali, che provocano il raggiungimento ed il completamento della trasformazione di fase prematuramente rispetto a quanto avviene per la porzione centrale di filo soggetta solo a trazione. Per ottenere delle curve sforzo-deformazione corrette è quindi necessario analizzare solo un piccolo tratto di filo, in cui il comportamento sia omogeneo e non influenzato dallo stato di sforzo indotto dalle ganasce.

Per verificare la costanza della temperatura durante lo svolgimento dei test meccanici si sono utilizzate due termocoppie, una posta direttamente sul campione di filo, l'altra all'interno della camera di misurazione.

3.1.3 Ottenimento del parametro β

Un parametro fondamentale per la caratterizzazione delle SMA è il coefficiente β , che regola la proporzionalità tra lo sforzo di inizio trasformazione di fase e la temperatura. Si sono quindi effettuate delle prove fino al 5% di deformazione a diverse temperature; costruendo la retta di regressione tra lo sforzo di inizio trasformazione di fase e temperatura si è ottenuto il parametro cercato (Fig. 3.4).

Il risultato ottenuto è che per il materiale testato $\beta = 4.87$ MPa/K.

3.1.4 Test ciclici in trazione

Sono state effettuate delle prove cicliche (20 cicli) di carico e scarico in trazione a temperatura ambiente, fino a diverse deformazioni massime, rispettivamente 4%,

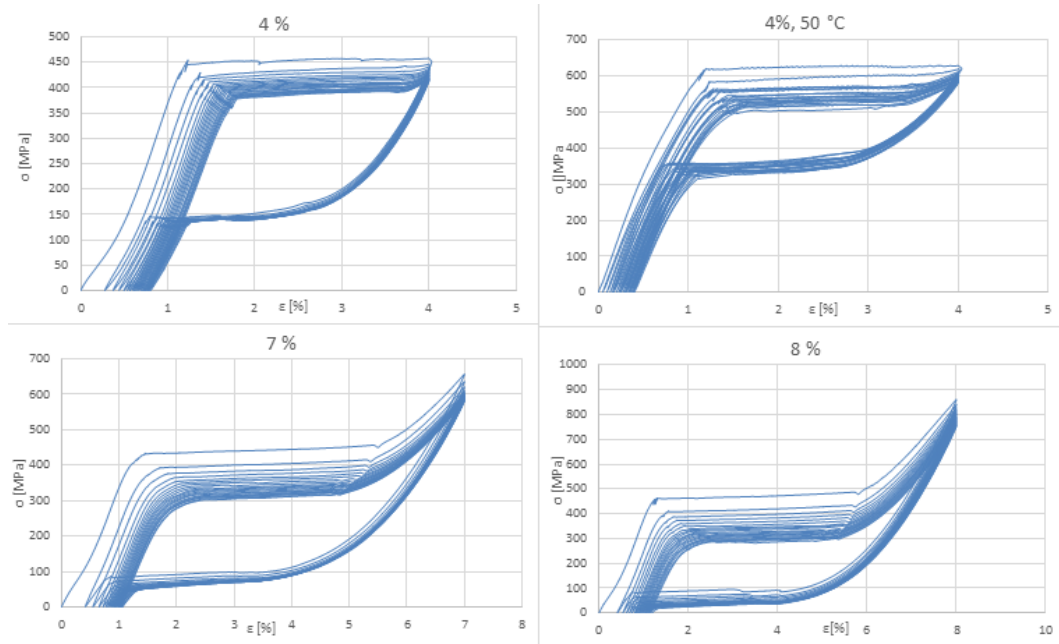


Figura 3.5: Curve $\sigma - \varepsilon$ di prove di trazione al 4%, 7% e 8% di deformazione massima a $T=23^\circ\text{C}$ e di una prova al 4% con $T=50^\circ\text{C}$

7% e 8%; è stata inoltre effettuata una prova al 4% con il materiale mantenuto a 50°C , ovvero ad una temperatura in cui fosse pienamente austenite. Le curve sforzo-deformazione sono mostrate in Fig. 3.5.

Da tali curve si può innanzitutto notare che all'aumentare della deformazione massima imposta aumenta la deformazione inelastica accumulata: al termine dei 20 cicli, nel caso di deformazione al 4% si ha una deformazione residua sotto all'1%, mentre nella prova all'8% sopra l'1.5%, questo è evidente sovrapponendo le curve al 4%, 7% e 8% in un unico grafico (Fig. 3.6). Si vede anche chiaramente come l'accumulo di fatica sia più veloce durante i primi cicli, per poi rallentare vistosamente dopo il quarto-quinto ciclo. Tale comportamento sembra in realtà più presente nelle curve relative alle prove a temperatura ambiente, mentre è meno evidente nella prova a 50°C , in cui l'accumulo di deformazione sembra molto più regolare. E' anche vero, tuttavia, che i dati di tale prova mostrano alcune anomalie, visto che i plateau delle curve sforzo-deformazione sembrano a volte sovrapporsi, e non abbassarsi gradualmente verso sforzi più bassi.

In questi test è presente anche l'effetto di degradazione che la fatica provoca sul materiale, causando un progressivo abbattimento dello sforzo critico necessario per iniziare la trasformazione di fase. Tale abbassamento graduale è più accentuato all'aumentare della deformazione massima imposta: visto che quest'ultima influenza anche l'entità dell'accumulo di deformazioni residue si può intravedere una relazione tra deformazione accumulata e abbassamento del plateau di trasformazione di fase. Anche se in modo meno accentuato, è anche presente un abbassamento graduale del

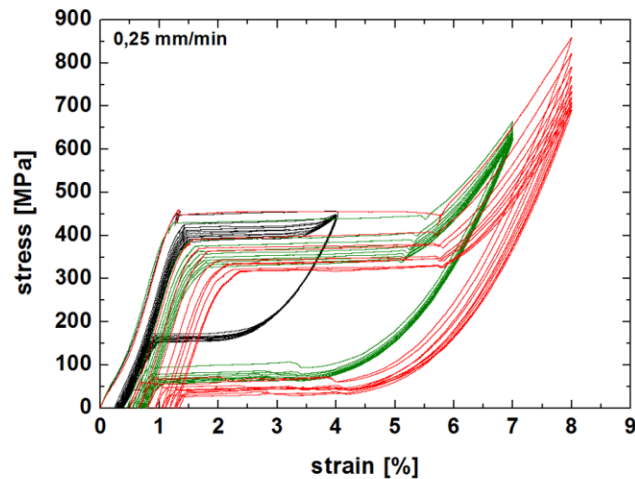


Figura 3.6: Curve $\sigma - \varepsilon$ sovrapposte relative alle prove con 4,7,8 % di deformazione massima

plateau inferiore delle curve. Non si nota invece in nessun test un aumento della pendenza del plateau di trasformazione di fase, che resta praticamente orizzontale anche dopo 20 cicli; questo è contrario ai risultati dei test presenti in letteratura effettuati da Wang et al. (2008) [9], mostrati nella Sez. 1.3.7, in cui il plateau di transizione di fase aumenta progressivamente la propria pendenza.

Un effetto che non era aspettato è che è visibile in Fig. 3.5 è che all'aumentare della deformazione massima imposta, allo scarico il plateau di recupero di deformazione si abbassa notevolmente, passando da 150 MPa nel caso del test al 4% a circa 80 MPa nella prova all'8%, causando un aumento dell'ampiezza dell'isteresi meccanica. Questo comportamento era stato anche evidenziato nel lavoro già citato di Wang et al. (2008), in cui però si affermava come questo abbattimento del plateau sottostante era conseguente al sorgere di eventuali deformazioni plastiche. Nei test condotti dal CNR sembra quindi che tale abbassamento non dipenda tanto dalla deformazione plastica, ma da quella massima raggiunta nel corso della prova. Bisogna anche considerare che il materiale testato si trova in fase R, quindi non in austenite, e questo potrebbe essere la causa dell'abbattimento del plateau sottostante anche senza il raggiungimento della plasticità. Diventa a questo punto interessante la Fig. 3.7, in cui è mostrata una prova condotta a 50°C, in cui si porta il materiale al 10% di deformazione, lo si scarica, e si fanno seguire 5 cicli di carico e scarico al 5%. Confrontando il ciclo al 10% con il primo ciclo al 5% sono evidenti tutti gli aspetti già individuati: l'accumulo di deformazione residua, il contemporaneo effetto degradativo che causa un abbassamento dello sforzo critico, l'allargamento dell'isteresi meccanica a causa della deformazione massima del 10% imposta. Tuttavia si nota che i cicli successivi al primo, condotti a deformazioni massime minori, presentano un plateau inferiore a sforzi più elevati rispetto allo scarico della prima curva. Questo

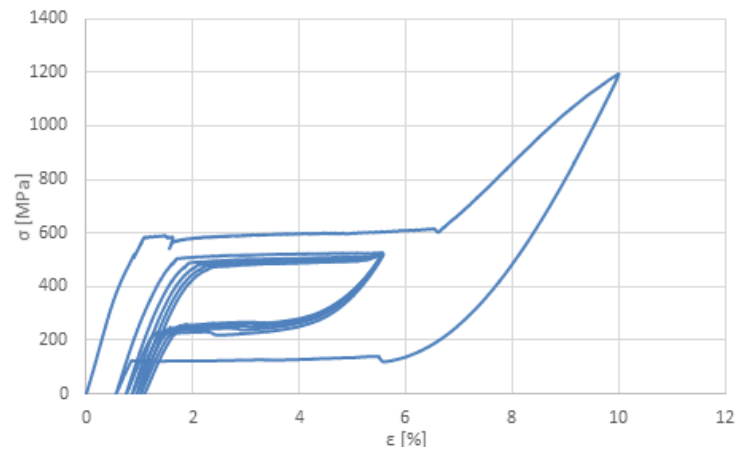


Figura 3.7: Curve $\sigma - \varepsilon$ di una prova di trazione di carico e scarico fino al 10% di deformazione, seguita da 5 cicli al 5%

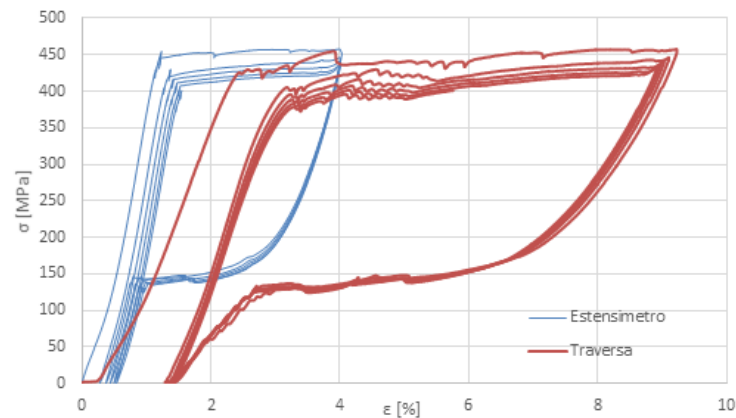


Figura 3.8: Confronto tra la deformazione letta dall'estensimetro e quella ottenuta dal movimento della traversa in una prova ciclica di trazione.

è segno che l'abbattimento del plateau inferiore non sia un effetto irreversibile, ma che invece dipende principalmente dal valore di deformazione massima raggiunta nel ciclo di carico corrente. Tutte queste considerazioni portano a concludere che non si può considerare l'ampiezza dell'isteresi meccanica fissa, ma invece questa possiede un'ampiezza maggiore a seconda della deformazione che viene imposta al materiale.

Si ricorda che la deformazione utilizzata per la realizzazione di tutte le curve mostrate è letta dall'estensimetro, per evitare di considerare nella lettura dei risultati gli effetti legati alla presenza degli afferaggi della macchina. A tal proposito si vuole mostrare in Fig. 3.8 la curva sforzo-deformazione relativa al test di ciclaggio al 4%, nel caso in cui si calcoli la deformazione utilizzando l'estensimetro o invece ricavandola utilizzando lo spostamento della traversa della macchina di prova. E' evidente che quando l'estensimetro legge un 4% di deformazione relativo al tratto centrale del filo, in realtà la traversa ha prodotto una deformazione di quasi il 9% su

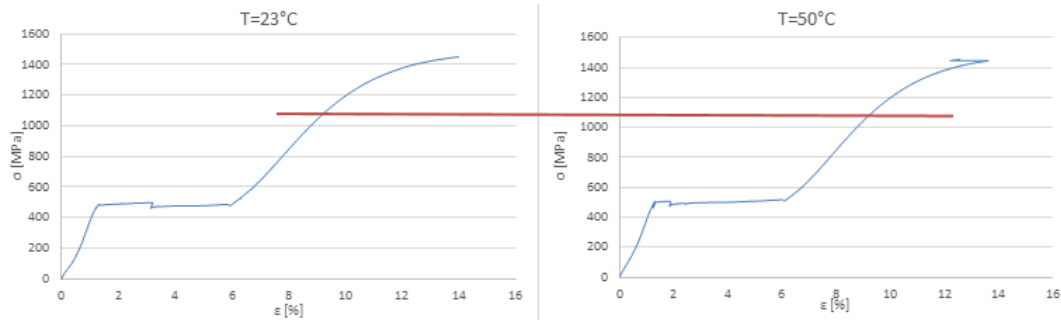


Figura 3.9: Confronto sforzo critico di snervamento su test di trazione condotti a temperatura diverse. A sinistra la prova è stata condotta a temperatura ambiente, a destra a $T=50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

tutta la lunghezza del filo, segno che le porzioni laterali sono molto più deformate di quella centrale, a causa della presenza degli sforzi indotti dalla presenza degli afferraggi. E' inoltre evidente che se ci si limitasse alla lettura dello spostamento della traversa, il plateau di trasformazione di fase apparirebbe molto più ampio. Per condurre delle prove accurate l'unico modo di procedere è quindi effettuare delle misurazioni utilizzando un estensometro sulla zona centrale di filo.

3.1.5 Test in trazione fino a plasticizzazione

Dopo aver effettuato i test della sezione precedente, che consistono sostanzialmente in ciclaggi a varie deformazioni massime, si è passati a delle prove sperimentali in cui si porta a plasticizzazione il materiale.

La prima indagine effettuata consiste nel valutare se la soglia di snervamento del materiale vari con la temperatura. Infatti si potrebbe pensare che la plasticizzazione di una lega a memoria di forma abbia caratteristiche differenti a seconda che si conduca il test ad una temperatura in cui sia stabile l'austenite, piuttosto che la martensite. Nella Fig. 3.9 è mostrata una prova a rottura condotta su filo, sia a temperatura ambiente, in cui il materiale si trova in fase R, sia a 50°C , a cui invece è stabile l'austenite.

Da tale figura si può notare come la temperatura, e quindi il tipo di fase presente all'inizio della prova di trazione, non determini nessun cambiamento sul valore della soglia critica di snervamento. Infatti in entrambe le prove tale sforzo si aggira sempre attorno ai 1100 MPa. Si ritiene che questo risultato possa essere generalizzato anche a temperatura diverse da quelle a cui sono stati condotti i test, affermando quindi che lo snervamento di una SMA non dipenda dalla temperatura. Ciò può essere spiegato considerando che al raggiungimento del limite di plasticità il materiale si trova sempre in fase martensitica monovariante indipendentemente dalla fase di partenza (austenite o martensite multivariante) e quindi lo sforzo critico di snervamento è costante.

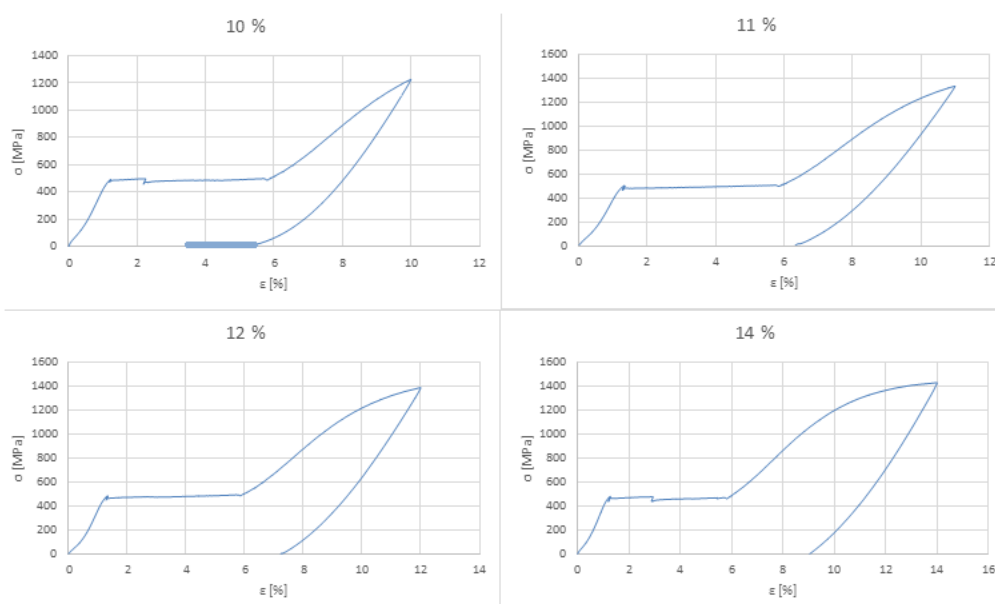


Figura 3.10: Curve $\sigma - \varepsilon$ relative a prove di trazione in cui si porta il materiale in plasticità, fino a differenti deformazioni massime

Nelle prove successive il materiale è stato portato in plasticità, imponendo deformazioni massime via via crescenti per studiare l'effetto che le deformazioni plastiche hanno sulla capacità del materiale di esibire una trasformazione di fase. I risultati sono mostrati in Fig. 3.10. Si noti come il materiale perda velocemente la capacità di esibire una trasformazione di fase inversa. La curva con deformazione massima del 10% mostra ancora un recupero della forma originaria del campione, seppur presentando circa un 3% di deformazione irreversibile. Si fa notare che tale deformazione residua dipende in parte dalla deformazione plastica accumulata, che in questa prova si potrebbe aggirare attorno all'1-1.5%, ed in parte al fatto che il plateau di trasformazione di fase allo scarico appare di lunghezza più limitata rispetto a quello di carico. Si nota anche nella prova un abbattimento del valore di sforzo a cui si sviluppa il plateau inferiore. Tale effetto è tuttavia molto pronunciato rispetto a quanto avveniva nelle prove cicliche già analizzate, tanto che la trasformazione di fase inversa avviene a valori di sforzi quasi nulli. Questo notevole abbassamento del plateau potrebbe essere dovuto al fatto che i test sono stati condotti ad una temperatura in cui è stabile la fase R e non l'austenite. Si ricorda infatti che la Fig. 3.7 mostrava una prova al 10% di deformazione condotta a 50°C: in questa figura si notava chiaramente come il plateau inferiore si era sì abbassato, ma era ancora pienamente visibile, a differenza della figura mostrata in questa sezione. Da ciò si potrebbe concludere che i risultati ottenuti portando il materiale in plasticità a temperatura ambiente, in cui non si trova pienamente in austenite, non possono essere pienamente generalizzati per temperature più elevate, almeno per quanto riguarda la

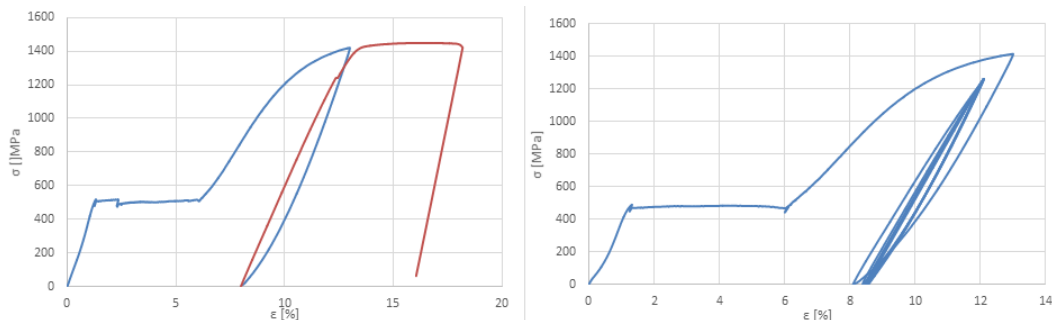


Figura 3.11: Curve $\sigma - \varepsilon$ relative a delle prove di trazione fino a completa plasticizzazione della SMA. A sinistra alla plasticizzazione segue la rottura, a destra si fanno seguire 5 cicli di carico e scarico fino al 12 % di deformazione.

valutazione dell'abbassamento del plateau corrispondente alla trasformazione di fase inversa. In ogni caso la Fig. 3.10 mostra come deformando il materiale sopra al 10% si perda progressivamente la capacità di esibire un recupero di deformazione durante lo scarico. Già al 12% lo scarico avviene sostanzialmente in maniera lineare, come se il materiale fosse totalmente elastico: a tale deformazione massima, infatti, non è più presente nessuna trasformazione di fase. E' interessante a questo punto capire cosa succede al comportamento in termini di sforzo e deformazioni quando si carica nuovamente una SMA che abbia perso la capacità di esibire delle transizioni fase. In Fig. 3.11 sono mostrate due prove, una in cui si deforma il materiale fino al 12%, a cui si fa seguire uno scarico e poi nuovamente un carico fino a circa il 18%. Nella seconda prova dopo aver plasticizzato completamente la SMA si fanno seguire 5 cicli a deformazioni minori. In entrambi i casi si nota che dopo che la SMA ha perso la propria capacità di esibire delle trasformazioni di fase, si comporta sostanzialmente come una materiale elasto-plastico, riuscendo a raggiungere deformazione e sforzi elevati esibendo un comportamento lineare. E' interessante notare che portando il materiale a rottura dopo uno scarico che segue ad una plasticizzazione completa, la curva $\sigma - \varepsilon$ riprende dalla curva del primo carico.

3.2 Campagna di test sperimentali eseguita al Labs

La seconda campagna di test sperimentali è stata condotta presso il Laboratorio di Meccanica delle Strutture Biologiche (Labs) del Politecnico di Milano, effettuando dei test su provini cilindrici cavi ottenuti da un tubo di SMA di diametro esterno 2.16 mm e diametro interno 1.7 mm, fornito da Medtronic Endovascular Therapies. Il materiale di cui è costituito è stabile in austenite a temperatura ambiente e rappresenta il materiale con cui questa azienda parte nella produzione degli stent vascolari. Si è deciso, quindi, di ripetere i test eseguiti dal CNR per avere dei dati su un materiale che si trova pienamente in fase austenitica.



Figura 3.12: Macchina MTS utilizzata per le prove presso il LABS del Politecnico di Milano

3.2.1 Descrizione set-up sperimentale per le prove meccaniche

La macchina di prova a disposizione è una macchina servoidraulica MTS 858 MiniBionix (MTS, Minneapolis, MN) installata presso il Labs del Politecnico di Milano, Fig. 3.12. Questa macchina è costituita da una parte superiore mobile ed una inferiore fissa; la prima è dotata di un attuatore assiale e torsionale, con capacità di carico di 15000 N e 150Nm, equipaggiata con un LVDT (Linear Voltage Differential Transformer), mediante il quale si possono misurare gli spostamenti imposti. La parte fissa è provvista di una cella di carico assiale-torsionale, modello 662.20D-04, con un range di rilevazione assiale di ± 15 kN, e torsionale di ± 100 Nm, con la quale si possono rilevare i carichi imposti. Entrambe le parti presentano delle ganasce per l'afferraggio dei provini, con pressione di contatto regolabile.

La macchina di prova può funzionare sia in controllo di spostamento e di angolo, sia in controllo di forza e coppia applicata; in entrambe le modalità il funzionamento può essere regolato attraverso un pannello di comando (Fig. 3.13) e tramite computer. Per le prove che saranno effettuate è stato scelto di operare in controllo di spostamento, con velocità della traversa di 0.0336 mm/s.

Riprendendo quanto esposto per le prove sperimentali condotte a Lecco, è stato già mostrato come per condurre dei test accurati sia necessario l'utilizzo di un estensometro per monitorare le deformazioni subite dal provino, in modo da misurare effettivamente le deformazioni subite dal suo tratto centrale, escludendo gli effetti di bordo dovuti agli afferraggi. L'estensometro a disposizione era sempre prodotto da MTS, modello 632.11C-20 (Fig. 3.14). Dalla stessa figura si nota come siano



Figura 3.13: Pannello di comando della macchina di prova MTS

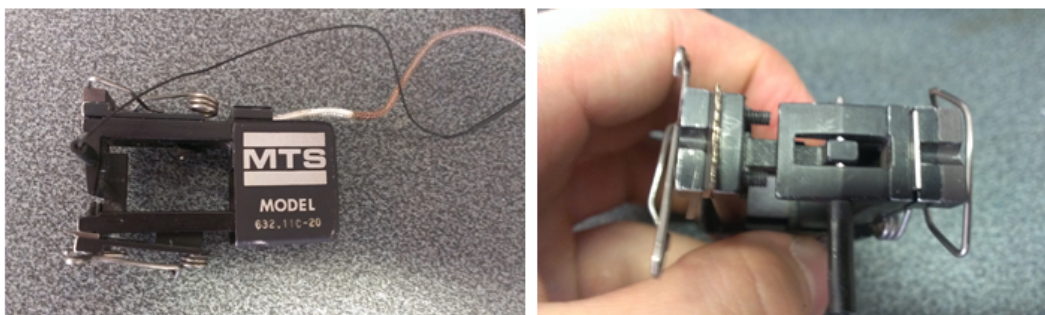


Figura 3.14: Estensometro a disposizione per i test effettuati presso il Labs

presenti due lame e due molle: le seconde hanno la funzione di premere il provino sulle prime, in modo che lo strumento resti saldamente unito per attrito durante le prove, così da seguire il corso delle deformazioni esibite dal materiale. Il range di funzionamento dell'estensometro era ± 0.2 di deformazione. Tuttavia essendo uno strumento molto datato il movimento di compressione risultava limitato, rendendo lo strumento utilizzabile solo per test di trazione.

Il tubo che si aveva a disposizione è stato tagliato in provini di lunghezza 100 mm; l'estensometro è stato fissato nella loro porzione centrale: la lunghezza scelta era la minima che permetteva di ottenere un buon fissaggio dei tubi alle ganasce e contemporaneamente lasciasse sufficiente spazio per la presenza dello strumento di misura. Essendo i provini cavi, per evitare che si rompessero nel punto in cui vengono afferrati dalle ganasce della macchina di prova, alle estremità sono stati inseriti dei chiodi di diametro opportuno. L'apparato sperimentale completamente montato, è mostrato in Fig. 3.15.

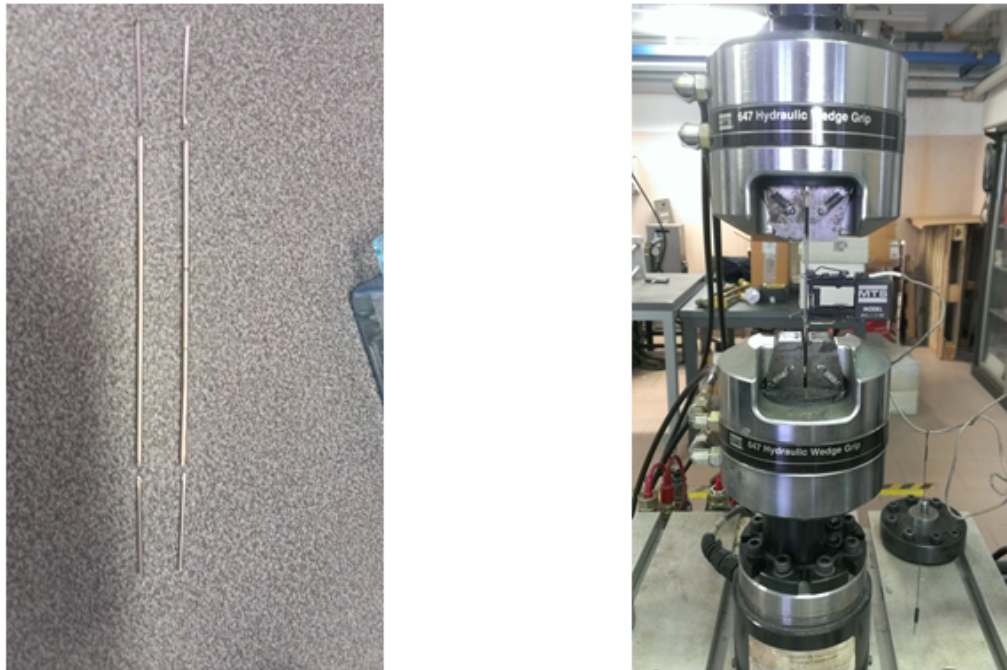


Figura 3.15: Provini utilizzati nelle prove di trazione, costituiti da tubi irrigiditi alle estremità da chiodi, e apparato di prova completamente montato

Si sottolinea che per una completa caratterizzazione del comportamento del materiale sarebbero state necessarie, oltre a prove di trazione, anche numerose prove monoassiali di compressione e biassiali. Tuttavia la strumentazione e il materiale a disposizione hanno limitato la possibilità di effettuare questo tipo di prove. Innanzitutto, come già detto, l'estensometro a disposizione non permetteva di effettuare misurazioni in compressione. In secondo luogo, anche se si fosse riuscito a sostituire lo strumento con uno più adeguato, anche il provino a disposizione era di dimensioni troppo ridotte. Infatti il tubo di cui si disponeva aveva solamente 2.16 mm di diametro esterno e 1.7 mm di diametro interno, quindi aveva una sezione resistente molto piccola, a cui corrisponde un carico critico di instabilità per compressione molto basso. Questo limite ha impedito di svolgere accuratamente una caratterizzazione in compressione.

3.2.2 Test effettuati

Il primo test effettuato è una prova di trazione fino all'8%, a cui segue uno scarico e poi l'applicazione di una deformazione fino al 12% (Fig. 3.16). Tale prova aveva lo scopo principale di permettere di ricavare i parametri del materiale a disposizione.

I test successivi sono dei ciclaggi di carico e scarico a diverse deformazioni massime, rispettivamente al 5%, 8%, 10% e 12 %, ripetuti 15 volte. I risultati sono mostrati in Fig. 3.17.

3. Test sperimentali

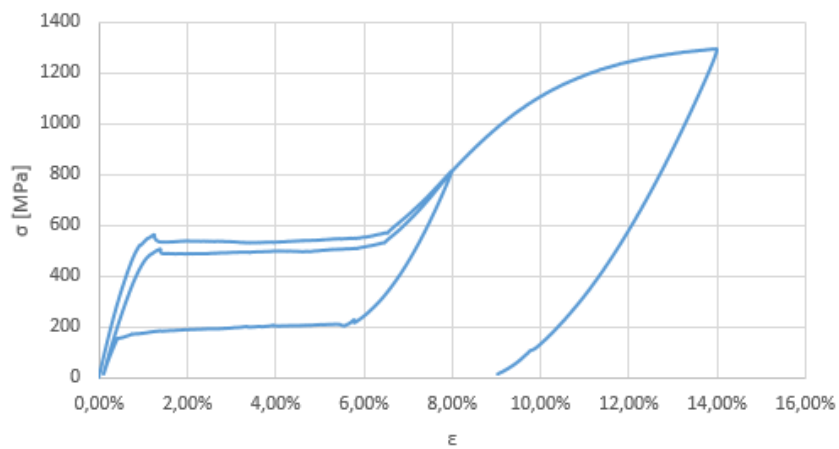


Figura 3.16: Curva $\sigma - \epsilon$ di una prova di trazione fino all'8% di deformazione, seguita da trazione fino alla rottura

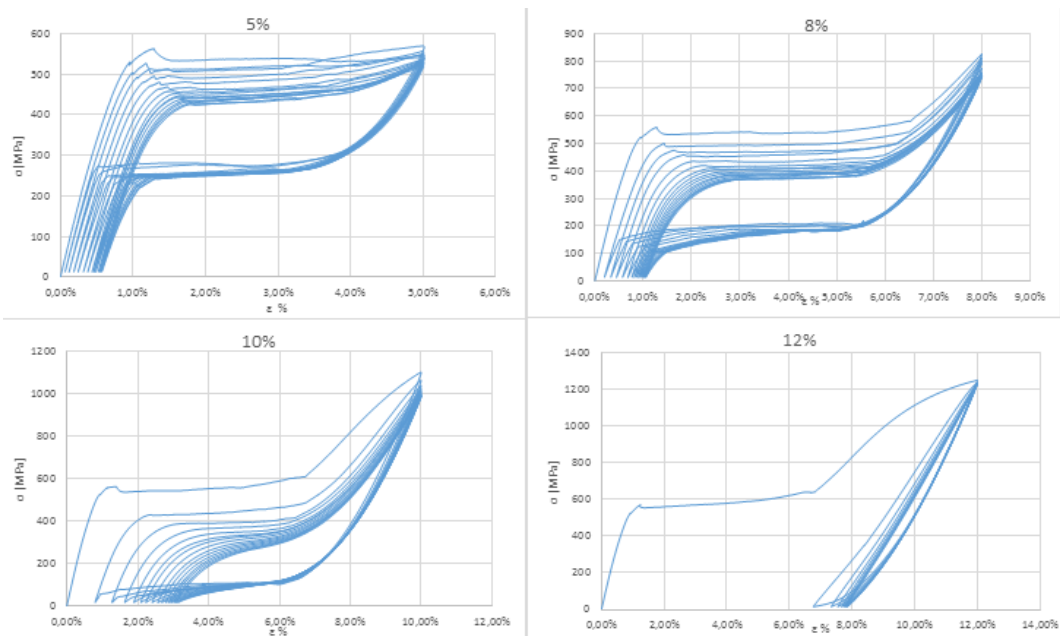


Figura 3.17: Curve $\sigma - \epsilon$ relative a 15 cicli di trazione a diverse deformazioni massime, 5%, 8%, 10% e 12%

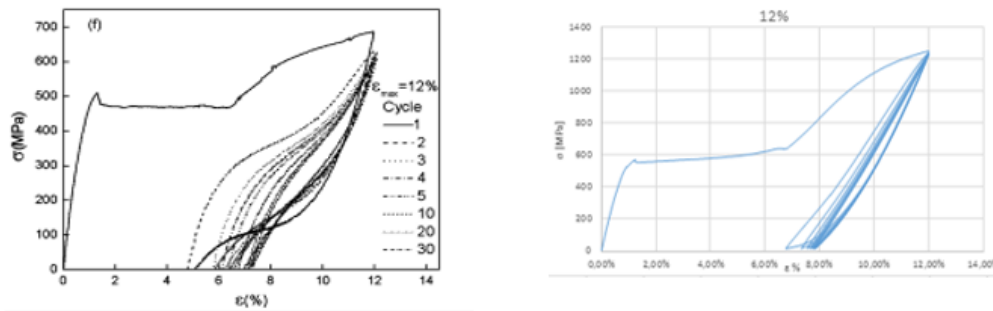


Figura 3.18: Confronto tra il comportamento del materiale testato rispetto a test del lavoro di Wang et al. (2008), nel caso di elevata plasticizzazione

Queste curve evidenziano gli stessi fenomeni presenti nei test condotti presso il CNR di Lecco, in particolare si fa notare che le prove relative a deformazioni del 5% e 8% non portano il materiale in plasticità, mentre invece quelle al 10% e 12% arrivano a snervamento. E' evidente l'accumulo di deformazione irreversibile per fatica, accompagnato dal fenomeno degradativo che provoca un abbassamento del plateau di trasformazione di fase. Inoltre tale accumulo procede più velocemente nei primi ciclaggi, per poi rallentare vistosamente. In realtà il comportamento del materiale durante la prova al 5% è leggermente diverso, in quanto in questo caso l'entità di deformazione residua nata in ogni ciclo di carico e scarico rimane all'incirca costante per un numero di cicli maggiore rispetto alle altre prove mostrate: sembrerebbe quindi che all'aumentare della deformazione massima imposta, l'accumulo proceda in maniera sempre meno costante. Nella prova al 10% si nota anche che il plateau di trasformazione di fase aumenta progressivamente la propria pendenza, mentre invece questo non è presente a livelli minori di deformazione; si sottolinea che rispetto ai risultati ritrovati in letteratura ottenuti da Wang et al. (2008), esiste una differenza, in quanto nel suo lavoro era presente un incrudimento progressivo a qualsiasi livello di deformazione imposta. Nel test al 10% la deformazione accumulata al primo ciclo è notevole, infatti il materiale in parte risente della deformazione plastica causata dallo snervamento. Questo è molto più chiaro nel test al 12%, in cui la deformazione plastica arriva ad essere sufficiente per eliminare la capacità del materiale di esibire ulteriori trasformazioni di fase; in tale situazione il materiale esibisce un comportamento lineare, riuscendo a recuperare elasticamente e linearmente deformazioni dell'ordine del 4%. Rispetto alle curve dei test effettuati da Wang et al. (2008), si vede come il materiale qui testato perda velocemente la propria capacità di avere transizioni di fase, mentre invece il materiale testato nel lavoro di letteratura citato anche con un 12% di deformazione aveva ancora la possibilità di mostrarle (Fig. 3.18). Nei test effettuati sembra quindi che il fenomeno di riduzione dell'ampiezza del plateau avvenga in modo più pronunciato.

Per quanto riguarda invece l'abbattimento del plateau di trasformazione di fase

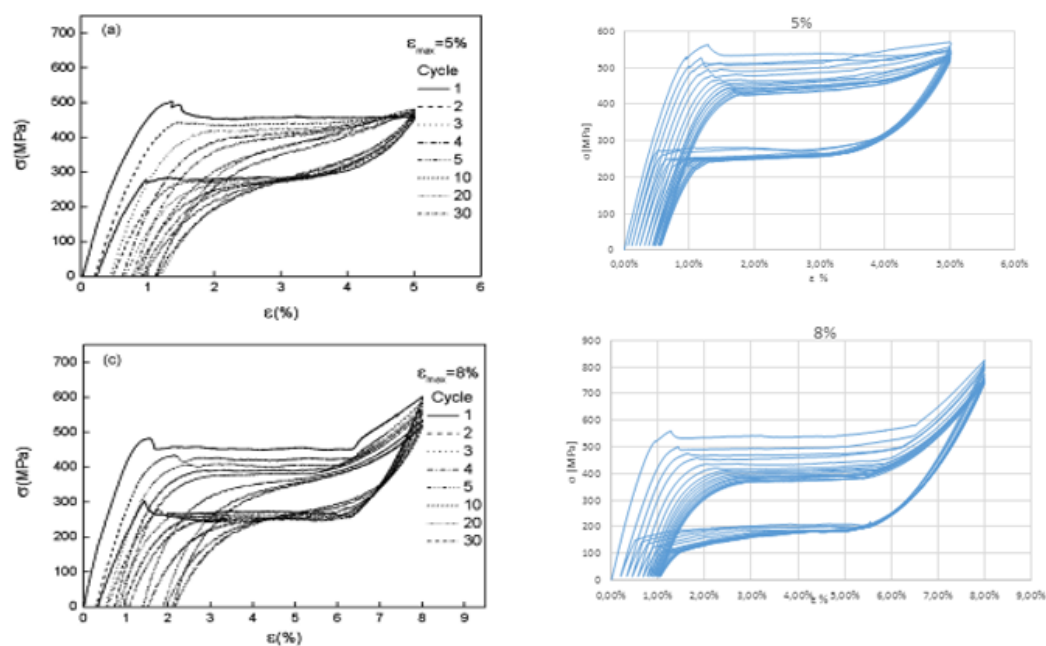


Figura 3.19: Confronto tra la posizione del plateau inferiore a diversi livelli di deformazione massima imposta. A sinistra sono mostrati i risultati ottenuti da Wang et al. (2008), a destra quelli delle prove condotte al Labs. I grafici in alto sono relativi ad un ciclaggio al 5% di deformazione massima, quelli in basso all'8%.

inversa, si ricorda che negli esperimenti di Wang et al. (2008) il fenomeno sembrava dipendere dall'ammontare della deformazione plastica, mentre nei test mostrati sembra essere presente sicuramente quando il materiale plasticizza (test al 10% e 12%) ma anche in assenza di plasticità. Confrontando infatti le curve relative ai ciclaggi al 5% e 8% si vede che lo sforzo corrispondente all'inizio della trasformazione di fase inversa non è fisso, ma decresce con la deformazione massima della prova; questo fenomeno era presente anche nelle prove di Lecco in maniera ancora più pronunciata, dove causava un plateau che si disponeva su valori di sforzo praticamente nulli. Nelle curve di Wang et al. (2008) invece non avveniva nessun cambiamento del plateau inferiore, a meno di entrare in plasticità. In Fig. 3.19 è mostrato un confronto tra le prove cicliche al 5% e 8% effettuati presso il Labs e presenti nel lavoro di Wang et al. (2008); in quest'ultimo il plateau sottostante non si trova a sforzi diversi alle due deformazioni, mentre invece nei test condotti presso il Labs la prova all'8% presenta un plateau inferiore spostato su sforzi più bassi rispetto alla prova al 5%. Questo fa capire come il comportamento delle SMA sia estremamente complesso e mutabile a seconda della tipologia di materiale testato. Probabilmente esistono leghe di Ni-Ti in cui l'abbassamento del plateau inferiore è legato all'ammontare di plasticità raggiunta, altre in cui può essere correlato alla deformazione massima raggiunta. Si sottolinea che a causa di questo complesso comportamento, bisognerebbe valutare l'ampiezza e la posizione dei plateau di trasformazione di fase a diverse deformazioni

massime imposte, in quanto il materiale esibirebbe comportamenti diversi a seconda delle condizioni di carico.

3.3 Considerazioni sulle prove eseguite

Dai risultati ottenuti dalle due campagne di prove sperimentali si sono ricavate delle indicazioni utili per lo sviluppo di un modello costitutivo che possa cogliere il comportamento delle SMA, tenendo in considerazione sia il fenomeno di fatica, che quello di accumulo di deformazione plastica.

Per quanto riguarda la fatica, le prove effettuate hanno evidenziato come la deformazione accumulata ad ogni ciclaggio diventa maggiore all'aumentare della deformazione massima imposta durante la prova. Tale accumulo di deformazione è accompagnato da un fenomeno di degrado del materiale, che porta ad un abbassamento progressivo del plateau di trasformazione di fase durante il carico; anche quello inferiore si abbassa, anche se in maniera più ridotta. Entrambi fenomeni, accumulo di deformazione e degrado, sono più evidenti durante i primi cicli, per poi rallentare in modo evidente già dopo il quarto-quinto ciclo. Le prove effettuate al CNR non hanno inoltre mostrato nessuna variazione della pendenza del plateau di trasformazione di fase, anche con deformazione massime significative; quelle al Labs hanno avuto lo stesso comportamento solo per deformazioni massime del 5% e 8%, in quanto la prova ciclica di trazione al 10% ha evidenziato un progressivo aumento di pendenza. Dato che si è già fatto notare che in letteratura sono presenti curve sperimentali in cui tale aumento di pendenza compare anche in prove cicliche condotte a deformazioni minori, suggerendo quindi che la presenza di tale fenomeno dipenda dalla specificità del materiale testato, sarebbe anche utile tenere in considerazione questo comportamento durante lo sviluppo di un modello costitutivo.

Per quanto riguarda la plasticità una prima interessante osservazione deriva dalla prova a rottura condotta a Lecco su due provini di filo in lega NiTi mantenuti a temperatura differente: in entrambi lo sforzo critico di snervamento rimane lo stesso, permettendo quindi di ipotizzare che tale valore sia indipendente dalla temperatura della prova. E' inoltre evidente che man mano che aumenta la deformazione plastica raggiunta, più la capacità del materiale di esibire una trasformazione di fase si riduce: ciò si può infatti notare dal fatto che i plateau relativi alla transizione di fase, successivi ad un primo raggiungimento del valore critico di snervamento, sono di ampiezza più limitata. Nella formulazione di un modello costitutivo bisogna quindi tenere in considerazione che quando si considera una prova di trazione in cui si arriva allo snervamento del materiale, si ottiene allo scarico una deformazione residua che viene accumulata, in parte dipendente dalla deformazione plastica, in parte invece causata dal fatto che il plateau di trasformazione di fase allo scarico si è ridotto di lunghezza.

Le prove eseguite hanno inoltre evidenziato un ulteriore aspetto, che riguarda il fatto che il plateau inferiore si abbassa con l'aumentare della deformazione massima imposta durante la prova. Questo causa che l'ampiezza dell'anello d'isteresi meccanica non ha un'ampiezza fissa, ma sia invece variabile a seconda delle caratteristiche della prova. Ciò è in contrasto con alcuni dati sperimentali presenti in letteratura, dove invece viene mostrato come tale abbassamento avviene solo quando il materiale entra in plasticità, ed è più accentuato quanto maggiore è la deformazione plastica accumulata. Anche questo quindi è un comportamento che dipende dalle caratteristiche del materiale testato, e non si può quindi trarre un'indicazione valida in modo generale.

Capitolo 4

Implementazione e confronto di due modelli costitutivi per le SMA

Il modello di Souza-Auricchio-Petrini, con le ulteriori modifiche (Sez. 2.4.2) proposte da Auricchio, Barrera e Urbano, costituisce un ottimo punto di partenza per lo sviluppo di un modello costitutivo in grado di rappresentare il comportamento di dispositivi biomedicali che sfruttano la pseudoelasticità o l'effetto a memoria di forma (quali stent, valvole cardiache, microgripper, ecc) e sono soggetti a fenomeni di fatica e plasticizzazione. Il primo passo è stato quello di implementare alcuni dei modelli già esistenti, per metterne in luce i limiti e quindi proporre una soluzione per superarli. Questo capitolo è dedicato alla descrizione dettagliata dei modelli costitutivi proposti da Auricchio et al. (2007) [14] e Barrera et al. (2014) [7], nel seguito indicati rispettivamente come modello di Auricchio e modello di Biscari, enunciando per ognuno innanzitutto la sua forma continua, per poi procedere alla scrittura delle equazioni in forma discretizzata, corredandole con un algoritmo per la loro soluzione basato sul metodo iterativo di Newton-Raphson [49, 58].

4.1 Sviluppo di un'interfaccia in ambiente MATLAB per lo studio di modelli costitutivi per le SMA

Vista la necessità di testarne in modo diretto il comportamento, ogni modello presentato nel seguito, scritto in forma discretizzata, è stato implementato in una funzione MATLAB scritta *ad hoc*, detta nel seguito *dr_model_XXX* (*XXX* è il nome dello specifico modello), che prende come input le variabili di controllo necessarie (deformazione e temperatura al passo corrente, variabili di stato del passo precedente) e restituisce lo sforzo associato alla condizione deformativa imposta. Si sottolinea che a differenza di quanto fatto nei lavori originari di Auricchio e Biscari, per la soluzione del sistema discreto non si è utilizzata la funzione *fsolve()* presente nella libreria di MATLAB che permette di risolvere sistemi lineari di equazioni, ma si è implementato

Algoritmo 4.1 Funzione chiamante il modello costitutivo [10]

```

if (ingresso assegnato come  $\boldsymbol{\varepsilon}$ )
    chiamata modello costitutivo:  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 
else (ingresso assegnato come  $\boldsymbol{\sigma}$ )
    metodo iterativo di NEWTON-RAPHSON ( $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_{passo\ precedente}$ )
    do
        chiamata modello costitutivo:  $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 
        calcolo residuo:  $\mathbf{R}_i = \boldsymbol{\sigma}^{imposto} - \boldsymbol{\sigma}_i$ 
        if  $\|\mathbf{R}_i\| < tolleranza$  break (soluzione trovata)
        calcolo nuova deformazione iterazione successiva:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbb{D}^{-1} : \mathbf{R}_i$ 
    end do
end if

```

l'algoritmo iterativo di Newton-Raphson. Questa scelta, che potrebbe sembrare non efficiente in quanto non sfrutta le potenti capacità dei software a disposizione, è giustificata dal fatto che il fine ultimo di questo lavoro di tesi è l'implementazione numerica di un modello costitutivo nel codice ABAQUS (*Dassault Systemes Simulia Corp., RI, USA*), in modo da effettuare delle simulazioni numeriche su geometrie reali di dispositivi biomedicali. Ovviamente la subroutine implementata non potrà sfruttare le capacità di MATLAB; ne consegue che già nella fase di scrittura delle equazioni dei modelli costitutivi si è deciso di introdurre l'algoritmo risolutivo come descritto nei paragrafi successivi.

Si è detto che la funzione $dr_model_xxx()$ prende come dati di ingresso le componenti del tensore delle deformazioni, che sono, insieme alla temperatura, le variabili di controllo dei modelli implementati. Tuttavia in un classico problema strutturale, non è sempre detto che le condizioni al contorno vengano fornite in termini di componenti del tensore di deformazione, in quanto potrebbero essere assegnate in termini di componenti del tensore degli sforzi, o anche in modo misto, fornendo alcune componenti di sforzo e altre (quelle mancanti) di deformazioni. Per questa ragione la funzione $dr_model_xxx()$ prima descritta è stata implementata all'interno di un'altra funzione, $dr_solver()$, che permette di risolvere il problema qualunque siano i dati di ingresso. Per fare ciò in $dr_solver()$ è stato implementato l'algoritmo (4.1), per cui per ogni input assegnato come componente del tensore degli sforzi si passa al modello una deformazione assegnata (quella del passo precedente) e quindi si itera applicando all'equazione residuale (differenza tra lo sforzo imposto e quello calcolato dal modello) il metodo di Newton-Raphson basato sulla seguente linearizzazione:

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[\frac{d\mathbf{R}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right]_i : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

da cui:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = - \left[\frac{d\mathbf{R}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right]_i^{-1} : \mathbf{R}_i \quad (4.2)$$

Si noti che nelle (4.1)(4.2) la quantità $\left[\frac{d\mathbf{R}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right]$ coincide con il tensore tangente del quarto ordine $\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$ cambiato di segno, infatti:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d(\boldsymbol{\sigma}^{imposto} - \boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = -\mathbb{D} \quad (4.3)$$

Si capisce a questo punto come sia fondamentale che il modello costitutivo, qualsiasi esso sia, oltre che al tensore degli sforzi, debba essere in grado di fornire come output anche il tensore tangente corrispondente a quel particolare passo di carico, la cui formulazione deve essere la più accurata possibile, in modo da permettere una veloce convergenza dell'algoritmo.

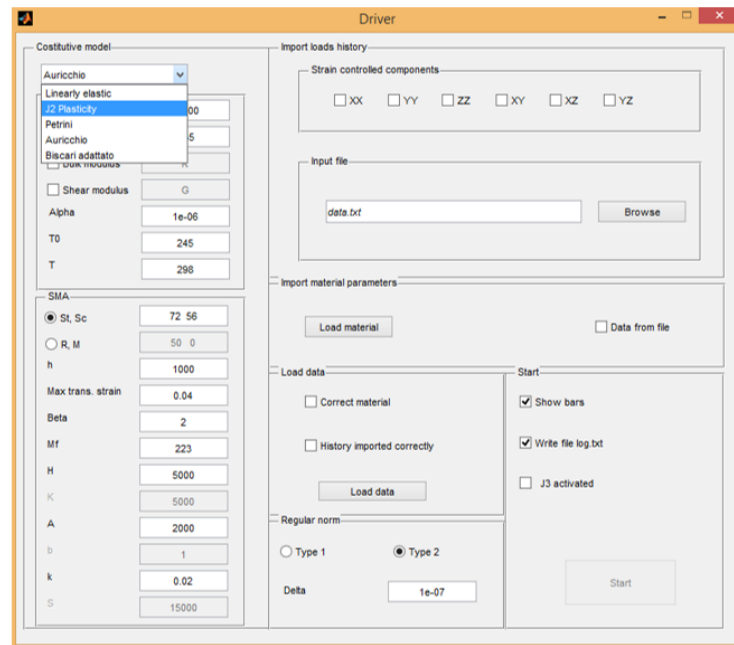


Figura 4.1: Interfaccia grafica

Per agevolare l'uso delle funzioni MATLAB appena descritte è stata anche sviluppata un'interfaccia grafica preparata *ad hoc* (Fig. 4.1), anch'essa programmata tramite MATLAB, sfruttando la programmazione ad eventi. Tale interfaccia permette di scegliere attraverso un opportuno menù a tendina che modello costitutivo si vuole utilizzare, permettendo l'inserimento di tutti i parametri del materiale modellizzato, in modo rapido e semplificato. La seconda funzione di tale interfaccia è l'identificazione del file .txt che contiene la storia di carico che si vuole testare con il modello costitutivo selezionato. Tale file deve essere organizzato su 9 colonne (Fig. 4.2), ognuna separata da uno spazio. Ogni riga corrisponde ad un certo passo di

4. Implementazione e confronto di due modelli costitutivi per le SMA

```

1 10 0.0 0.0 0.0 0.02 0.0 0.0 0
2 20 0.0 0.0 0.0 -0.02 0.0 0.0 0
3 20 0.0 0.0 0.0 0.04 0.0 0.0 0
4 20 0.0 0.0 0.0 -0.04 0.0 0.0 0
5 20 0.0 0.0 0.0 0.07 0.0 0.0 0
6 20 0.0 0.0 0.0 -0.07 0.0 0.0 0
7 20 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0

```

Figura 4.2: File .txt di input

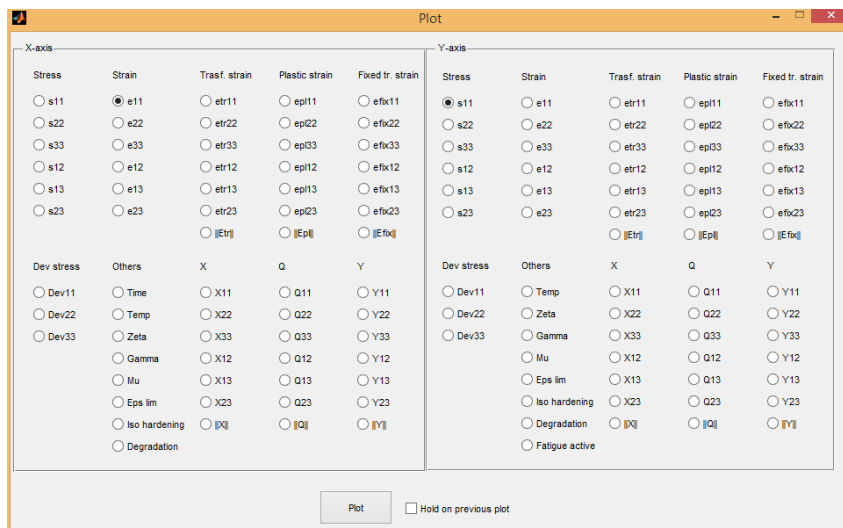


Figura 4.3: Interfaccia grafica per gestire la creazione di grafici

carico, invece le colonne hanno i significati seguenti, da sinistra verso destra:

- numero dell'istante temporale;
- numero di sottointervalli con cui suddividere il corrente passo di carico;
- le 6 componenti del tensore degli sforzi/deformazioni considerate come input: a_{11} , a_{22} , a_{33} e a_{12} , a_{13} , a_{23} .
- incremento di temperatura.

Inoltre dall'interfaccia si può indicare al codice se le componenti lette dal file di input corrispondono a sforzi o deformazioni.

L'output dell'interfaccia grafica consiste in un file di testo .txt in cui ogni riga corrisponde ad un istante temporale e le cui colonne contengono in ordine le componenti di tutte le quantità che possono essere di interesse, ovvero sforzi, sforzi deviatorici, deformazioni, variabili interne, temperatura, ecc.

E' stata inoltre programmata un'ulteriore interfaccia grafica (Fig. 4.3) che permette di importare il file di testo contenente la soluzione del modello e di selezionare in modo molto semplice le quantità di cui si vogliono realizzare dei grafici, in modo da evitare ripetute chiamate manuali alla funzione `plot()` di MATLAB.

4.2 Implementazione del modello di Auricchio et al. (2007)

4.2.1 Formulazione teorica

Il modello proposto da Auricchio et al. (2007) [14] si configura molto simile al modello Souza-Auricchio-Petrini, con l'obiettivo però di migliorarlo tenendo in considerazione gli aspetti sperimentali dovuti alla fatica, ovvero l'accumulo di deformazione irreversibile in seguito all'applicazione di cicli termomeccanici ripetuti, fenomeno spesso accompagnato da una degradazione del materiale, che può essere notata come un abbattimento progressivo degli sforzi critici necessari per causare la trasformazione fase. Rispetto al modello di partenza, la scelta è di introdurre un'ulteriore variabile interna al modello, il tensore del secondo ordine di fatica \mathbf{q} , che rappresenta la deformazione inelastica irreversibile, o meglio, la parte di \mathbf{e}^{tr} che non può essere recuperata durante lo scarico. Quindi le variabili di stato del modello sono:

- variabili di controllo (input): T temperatura assoluta e $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformazione totale;
- variabili interne: \mathbf{e}^{tr} e \mathbf{q} , rispettivamente la deformazione legata alla trasformazione di fase e il tensore di fatica.

Si ricorda che si assume nel modello un regime di piccole deformazioni, quindi la validità della seguente decomposizione: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{\theta}{3}\mathbf{1}$.

Viene lasciato invariato il vincolo (2.17) su \mathbf{e}^{tr} , che esprime un limite di ampiezza per il plateau di trasformazione di fase durante una prova di trazione monoassiale, limite di valore ε_L .

$$\|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (4.4)$$

L'espressione del potenziale termodinamico che rappresenta l'energia libera del materiale viene ritoccata rispetto alla (2.8), diventando:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \frac{1}{2}h\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \beta\langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + \\ & + L(\mathbf{e}^{tr}) + \frac{1}{2}H\|\mathbf{q}\|^2 - A\mathbf{e}^{tr} : \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il significato dei vari termini è già stato trattato nella sezione (2.4.1), quindi qui ci si limita a sottolineare le differenze presenti, che sono:

- la mancanza del termine relativo alla dilatazione termica, che vista la sua semplicità può essere facilmente reintrodotta;

- la presenza di un termine con un parametro H , che controlla la saturazione del fenomeno di evoluzione di \mathbf{q} , bloccandolo sopra un certo valore di deformazione accumulata;
- la presenza di un termine dipendente da un nuovo parametro A , che regola il fenomeno di degrado.

Seguendo la procedura classica, derivando il potenziale rispetto alle variabili del modello, si ottengono le seguenti quantità associate:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\theta \quad (4.6)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - h\mathbf{e}^{tr} - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} - \gamma \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} + A\mathbf{q} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = -\beta \langle T - M_f \rangle \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\partial \mathbf{q}} + A\mathbf{e}^{tr} - H\mathbf{q} \quad (4.9)$$

Si nota la comparsa di \mathbf{Q} , la variabile termodinamica associata al tensore di fatica. Viene modificata anche l'espressione della superficie limite del dominio elastico, in modo da permettere l'evoluzione del tensore \mathbf{q} :

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \|\mathbf{X}\| + k\|\mathbf{Q}\| - R \quad (4.10)$$

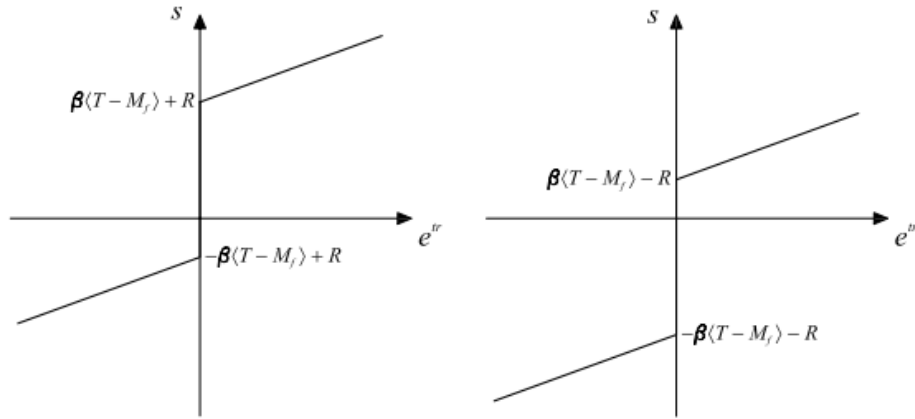
Limitandoci a descrivere le differenze presenti, tale funzione ora dipende da \mathbf{Q} , inoltre la mancanza del termine legato al J_3 di \mathbf{X} è sintomo che si assume un comportamento simmetrico in trazione e compressione. Ovviamente per reintrodurre l'asimmetria basterebbe reinserire questo termine, anche se con tutte le limitazioni già fatte presente in (2.4.1). Si noti la presenza del nuovo parametro k , un fattore di scala tra gli effetti di trasformazione di fase e accumulo di fatica.

Assumendo una legge evolutiva associativa, in cui si fa coincidere il potenziale di dissipazione con la funzione che delimita il dominio elastico, si ottengono le leggi di evoluzione seguenti per le variabili interne:

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \quad (4.12)$$

A cui vanno aggiunte le condizioni di Kuhn-Tucker:


 Figura 4.4: Relazione $s = s(e^{tr})$ nel modello di Souza

$$\dot{\zeta} \geq 0 \quad F \leq 0 \quad F\dot{\zeta} = 0 \quad (4.13)$$

Il modello di Auricchio può in effetti sembrare molto simile a quello originario, quindi si vuole dedicare maggior attenzione alla spiegazione delle modifiche introdotte.

Il primo punto interessante da fare notare in questo modello è come si riesca a modellizzare il fatto che dopo che il tensore di fatica ha subito una certa variazione, la deformazione non possa essere recuperata totalmente durante lo scarico, ma rimanga una deformazione irreversibile pari proprio a \mathbf{q} . Si consideri un caso monoassiale, in cui $F = 0$, e si faccia il confronto con il modello di Souza-Auricchio-Petrini. In quest'ultimo si avrebbe:

$$|X| = \left| s - h e^{tr} - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{e^{tr}}{|e^{tr}|} \right| = R \quad (4.14)$$

ovvero:

$$s = h e^{tr} + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{e^{tr}}{|e^{tr}|} \pm R \quad (4.15)$$

come si vede in Fig. 4.4, ciò permette di concludere che:

$$s e \in [-\beta \langle T - M_f \rangle + R, \beta \langle T - M_f \rangle - R] \implies e^{tr} = 0 \quad (4.16)$$

Nel modello di Auricchio nelle medesime condizioni ed in una situazione semplificata in cui $H = 0$ e $A = 0$ si avrebbe invece che il termine $\beta \langle T - M_f \rangle \frac{e^{tr}}{|e^{tr}|}$ è diventato $\beta \langle T - M_f \rangle \frac{e^{tr}-q}{|e^{tr}-q|}$; seguendo lo stesso ragionamento, come si può vedere in Fig. 4.5, ora si ha:

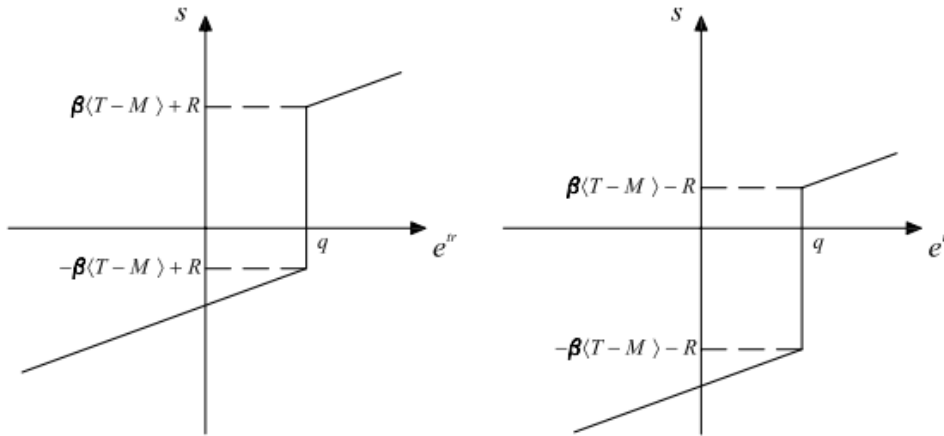


Figura 4.5: Relazione $s = s(e^{tr})$ nel modello di Auricchio

$$se s \in [-\beta \langle T - M_f \rangle + R, \beta \langle T - M_f \rangle - R] \implies e^{tr} = q \quad (4.17)$$

La sola modifica del termine $\beta \langle T - M_f \rangle$ permette quindi di ottenere l'effetto per cui allo scarico e^{tr} è forzata a rimanere pari a q .

Il secondo punto che si vuole toccare è la scelta delle leggi evolutive delle variabili interne, in particolare quella di q , visto che quella di e^{tr} appare immutata. L'idea è che si vuole ottenere una progressiva crescita del tensore q ogni volta che si attraversa il plateau di trasformazione di fase, in modo da ottenere un accumulo progressivo indipendentemente dal verso in cui tale plateau viene attraversato. In altre parole si desidera ottenere una crescita del tensore di fatica sia durante il carico che durante lo scarico, perché altrimenti durante lo scarico, se l'accumulo avvenisse nel verso opposto, si eliderebbero gli effetti. Questo rende necessario legare la crescita di q ad una variabile termodinamica che non cambi verso tra carico e scarico: il tensore Q ha proprio questa caratteristica. Ciò si può notare facilmente pensando ad una prova monoassiale e ad una situazione semplificata in cui sia H che A sono posti a zero, in tale situazione Q è parallelo a $e^{tr} - q$, tensore che mantiene effettivamente lo stesso verso durante carico e scarico. Il discorso appena fatto permette di capire come è scelta la direzione di evoluzione di q , resta ancora da stabilire l'entità dell'accumulo. Questa dipende sostanzialmente dalla nuova forma data al dominio elastico, che si noti, per valori di k abbastanza piccoli rimane comunque praticamente identica a quella del modello di Souza-Auricchio-Petrini, ovvero una ipersfera di raggio R nello spazio dei tensori del secondo ordine, in cui deve essere contenuto \mathbf{X} . Nonostante la forma sia simile, vale la seguente relazione:

$$k \frac{\partial F}{\partial \|\mathbf{X}\|} = \frac{\partial F}{\partial \|\mathbf{Q}\|} \quad (4.18)$$

che si traduce nel fatto che ogni modifica di \mathbf{e}^{tr} si riflette in una modifica di \mathbf{q} , con un fattore di scala k :

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| = k \|\dot{\mathbf{e}}^{tr}\| \quad (4.19)$$

Tornando a ragionare su un'ipotetica prova di trazione monoassiale per un materiale pseudoelastico, ne consegue che se il plateau è ampio ε_L , quando questo è attraversato completamente la deformazione irreversibile accumulata è pari a $q = k\varepsilon_L$. Se si effettuassero più cicli di carico e scarico, visto che l'ampiezza del plateau lentamente si riduce, si ottiene che l'accumulo di deformazione irreversibile rallenta, in quanto l'evoluzione del tensore di fatica funzionale dipende proprio dal tratto percorso durante la trasformazione di fase.

Terzo punto interessante è la funzione attribuita ai due nuovi parametri A e H . Lo scopo di quest'ultimo è di annullare la variabile \mathbf{Q} quando si è raggiunto un certo valore di deformazione irreversibile, impedendo in questo modo ogni evoluzione futura di \mathbf{q} . Considerando un caso semplificato in cui per semplicità $A = 0$, l'espressione di \mathbf{Q} diventa:

$$\mathbf{Q} = \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} - H\mathbf{q} \quad (4.20)$$

Imponendo $\mathbf{Q} = 0$ si può trovare il massimo valore di deformazione irreversibile che può essere raggiunto:

$$\|\mathbf{q}\| = \frac{\beta \langle T - M_f \rangle}{H} \quad (4.21)$$

o, in una prova monoassiale:

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta \langle T - M_f \rangle}{H} \quad (4.22)$$

Si noti che nel caso si sfrutti il modello per modellizzare una situazione a bassa temperatura, il termine $\beta \langle T - M_f \rangle$ si annulla, rendendo quindi impossibile l'instaurarsi della fatica durante prove effettuate sulla martensite. Ciò è coerente con le evidenze sperimentali che mostrano come ciclaggi meccanici sulla fase martensite siano completamente reversibili, ovvero non presentino accumulo di fatica.

Per quanto riguarda il fenomeno della degradazione, risulta invece interessante capire come questo interagisca con in progressivo accumulo di deformazione inelastica, oltre che con la legge di incrudimento cinematico imposta a \mathbf{e}^{tr} . Iniziando con il caso $A = 0$, si può notare analizzando l'espressione di \mathbf{X} (4.8) che man mano che si progredisce con l'accumulo di deformazione irreversibile, allo scarico \mathbf{e}^{tr} non è libera di tornare a 0, ma vincolata su valori sempre maggiori. Questo comporta che duran-

te il carico del ciclo successivo, perchè si raggiunga nuovamente il limite elastico, lo sforzo possa crescere fino a valori maggiori rispetto al primo ciclo. Viceversa, se si passasse in compressione l'effetto sarebbe opposto in quanto il fatto che e^{tr} parta da valori già positivi provocherebbe che verrebbe raggiunto prima il limite elastico, in corrispondenza di sforzi minori rispetto a quelli necessari per un materiale vergine. Attivando a questo punto la degradazione, ovvero ponendo $A > 0$, si crea all'interno della (4.8) un termine con segno opposto rispetto a quello dell'hardening della trasformazione di fase: ciò significa che gli effetti di tale termine sono opposti rispetto a quelli appena descritti. Effettuando dei cicli di trazione, tale termine rinforza l'effetto dello sforzo applicato sul materiale, facendo in modo che effettivamente venga raggiunto più facilmente il limite elastico: questo è proprio l'effetto di degradazione, ovvero il motivo per cui il parametro è stato introdotto. Tuttavia se si immagina di effettuare un ciclo di compressione dopo avere effettuato dei cicli in trazione, il termine dipendente da A ha un effetto totalmente opposto, ovvero permette di raggiungere sforzi più elevati prima di raggiungere l'inizio della trasformazione di fase. In compressione, quindi, per capire se lo sforzo critico è stato incrementato o diminuito, bisogna considerare l'effetto combinato della legge di hardening, in modo da capire quale dei due effetti prevalga sull'altro. Si evince quindi come nel modello di Auricchio l'effetto di degradazione è sì stato introdotto, ma con numerose limitazioni, in quanto risente fortemente dell'interazione con la legge di hardening imposta alla trasformazione di fase: una modellizzazione più corretta non dovrebbe presentare i problemi appena enunciati che consistono in diversi effetti a seconda si effettui una prova di trazione e compressione

4.2.2 Formulazione discreta

Il modello fin qui enunciato è formulato nella sua forma continua, diventa quindi necessario, nel momento in cui l'obiettivo è implementarlo numericamente, riuscire a trasformarlo in discreto. L'implementazione discreta che verrà proposta segue molto da vicino quella usata per il modello Souza-Auricchio-Petrini [12, 13], che non era stata presentata nella sezione (2.4.1), in cui se ne voleva dare solamente una presentazione generale. Quindi riprendendo la discretizzazione che viene data da Auricchio-Petrini per il loro modello, si presenta qui direttamente la sua adattazione al modello di Auricchio.

Il problema viene considerato come un problema tempo-discreto implicito, dipendente dalla deformazione; l'intervallo di interesse $[0, T]$ viene suddiviso in sottointervalli, in ognuno dei quali $[t_n, t]$ si è interessati a calcolare l'evoluzione del problema. Si sottolinea come le quantità con pedice n si riferiscano all'istante precedente, quelle senza pedice all'istante attuale. L'obiettivo è, dati come input la deformazione corrente, la temperatura e la soluzione all'istante precedente, risolvere le equazioni di evoluzione del modello. Queste ovviamente devono essere discretizzate, prima di fare

questo si noti che le equazioni continue, in particolare le (4.8)(4.9)(4.12), dipendono da quantità che rappresentano le derivate di norme di tensori del secondo ordine, che in alcune situazioni potrebbero anche annullarsi, rendendo le derivate non definite. Per evitare questo, la scelta di Auricchio è di sostituire in alcuni punti del modello le norme euclidee classiche con una norma modificata regolarizzata, che anche nel caso abbia argomento nullo esibisca comunque una derivata sempre definita. La norma proposta, e la sua derivata, hanno la seguente forma:

$$\overline{\|\mathbf{a}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta} \quad (4.23)$$

$$\frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\|\mathbf{a}\|} \frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\mathbf{a}} = \frac{\|\mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \quad (4.24)$$

in cui δ è un parametro che regola la regolarità di questa norma, ovviamente se $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\|\mathbf{a}\|} \rightarrow \|\mathbf{a}\|$. Riscrivendo il modello si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \beta\langle T - M_f \rangle \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} + \\ & + \frac{1}{2}h\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + L(\mathbf{e}^{tr}) + \frac{1}{2}H\|\mathbf{q}\|^2 - A\mathbf{e}^{tr} : \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \|\mathbf{X}\| + k\overline{\|\mathbf{Q}\|} - R \quad (4.26)$$

$$\|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (4.27)$$

Le nuove quantità termodinamiche del modello divengono, invece:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\theta \quad (4.28)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - h\mathbf{e}^{tr} - \beta\langle T - M_f \rangle c_1(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \gamma \frac{\mathbf{e}^{tr}}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + A\mathbf{q} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = \beta\langle T - M_f \rangle c_1(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) + A\mathbf{e}^{tr} - H\mathbf{q} \quad (4.31)$$

dove:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta}}$$

Le nuove leggi evolutive sono invece:

$$\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \Delta\zeta k c_2 \mathbf{Q} \quad (4.33)$$

in cui:

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{Q}\|^2 + \delta}}$$

$$\Delta\zeta = \int_{t_n}^t \dot{\zeta} dt \quad (4.34)$$

Per risolvere le equazioni del modello si introduce il procedimento tipicamente usato nella teoria della plasticità classica, basato su una procedura di predittore elastico-correttore inelastico [49,58], tenendo conto che come input al modello vengono date la temperatura e la deformazione corrente. Il metodo consiste nel considerare inizialmente un ipotetico passo trial in cui le variabili interne del modello non cambiano rispetto al passo precedente, verificando in seguito l'ammissibilità di tale assunzione (Alg. 4.2). Se è verificata allora il passo è realmente elastico, le variabili interne vengono lasciate invariate e si calcola il nuovo valore di sforzo corrispondente allo stato deformativo, viceversa se il passo trial non è accettabile si procede a valutare il reale passo inelastico tenendo conto dell'evoluzione delle variabili interne.

Il passo inelastico è inizialmente risolto ponendo $\gamma = 0$, ovvero ipotizzando di essere all'interno del plateau di trasformazione di fase, in cui il vincolo (4.27) non è attivo. Per risolvere le equazioni non lineari del modello si sfrutta un metodo iterativo di Newton-Raphson, quindi sostanzialmente si scrivono in forma residuale¹:

$$\mathbf{R}^X = \mathbf{X} - 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + h\mathbf{e}^{tr} + \tau_M c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - A\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

$$R^{\Delta\zeta} = \|\mathbf{X}\| + k\|\mathbf{Q}\| - R = 0 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}^Q = \mathbf{Q} - \tau_M c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - A\mathbf{e}^{tr} + H\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

¹Per chiarezza con tutto il seguito della trattazione matematica, le quantità scalari sono indicate con lettere non in grassetto, es. F , le quantità tensoriali del secondo ordine con lettere in grassetto, es. \mathbf{F} , le quantità tensoriali del quarto ordine con lettere maiuscole del tipo \mathbb{F} .

Algoritmo 4.2 Modello Auricchio

• **CALCOLO PASSO TRIAL**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{tr,TR} &= \mathbf{e}_n^{tr} \\
 \mathbf{q}^{TR} &= \mathbf{q}_n \\
 \mathbf{s}^{TR} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) \\
 \mathbf{X}^{TR} &= \mathbf{s}^{TR} - h\mathbf{e}^{tr,TR} - \beta \langle T - M_f \rangle c_1 (\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) + A\mathbf{q}^{TR} \\
 \mathbf{Q}^{TR} &= \beta \langle T - M_f \rangle c_1 (\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) + A\mathbf{e}^{tr,TR} - H\mathbf{q}^{TR}
 \end{aligned}$$

• **VERIFICA PASSO TRIAL**

```

 $F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR}, \mathbf{Q}^{TR})$ 
if  $F^{TR} < 0$ 
    passo trial accettabile (elastico)
     $\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}^{tr,TR}$ 
     $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{TR}$ 
else
    passo trial non accettabile (inelastico)
    while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
        Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}$ 
    end while
    if  $\|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L$ 
        while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
            Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, \gamma$ 
        end while
    end if
end if

```

• **AGGIORNAMENTO SFORZO**

$$\mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr})$$

Se la soluzione del sistema sopra non è ammissibile, ovvero $\|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L$, allora si procede ad un nuovo calcolo con Newton-Rapshon, aggiungendo un'equazione aggiuntiva e concedendo che sia $\gamma > 0$:

$$R^\gamma = \|\mathbf{e}^{tr}\| - \varepsilon_L = 0 \quad (4.38)$$

Procedendo in questo modo si è quindi in grado di valutare l'evoluzione di \mathbf{e}^{tr} , \mathbf{q} , γ nel passo temporale corrente. Focalizzandoci ora per completezza nel caso in cui $\gamma > 0$, la risoluzione del sistema di equazioni con Newton-Rapshon richiede la linearizzazione del sistema, ovvero il calcolo della matrice composta dalle derivate delle funzioni residuali prima descritte rispetto alle variabili considerate²:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Per ogni iterazione del metodo tale matrice viene rivalutata, in quanto permette di ottenere il valore delle variabili di interesse all'iterazione successiva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \gamma \end{bmatrix}_n - R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}^Q \\ R^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Quando la norma dei residui risulta essere sotto una certa soglia il metodo iterativo si ferma, in quanto si è giunti a convergenza. Il valore delle quantità riportate nelle equazioni sopra è il seguente:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + h) \Delta\zeta \mathbb{B}^X + \gamma \Delta\zeta \mathbb{B}^e \mathbb{B}^X + \tau_M \Delta\zeta \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X = (2G + h) \mathbf{N}^X + \gamma \mathbb{B}^e : \mathbf{N}^X - \mathbf{A} \mathbf{F}^Q + \tau_M \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - \mathbf{F}^Q)$$

$$\mathbb{R}_Q^X = -\tau_M \Delta\zeta \mathbb{L} \mathbf{F}^Q - \mathbf{A} \Delta\zeta \mathbf{F}^Q$$

$$\mathbb{R}_X^Q = -\mathbf{A} \Delta\zeta \mathbb{B}^X - \tau_M \partial\zeta \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q = \mathbf{H} \mathbf{F}^Q - \mathbf{A} \mathbf{N}^X - \tau_M \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - \mathbf{F}^Q)$$

²Con l'apice si indica l'equazione residuale di cui si sta calcolando la derivata, con il pedice la variabile rispetto alla quale avviene la derivazione. Quindi, per esempio, R_X^Y indica la derivata di R^Y rispetto alla variabile X .

$$\mathbb{R}_Q^Q = \mathbb{I} + H\Delta\zeta\mathbb{F}^Q + \tau_M\mathbb{L}\mathbb{F}^Q$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{N}^X \quad R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = 0 \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^Q$$

$$\mathbf{R}_X^\gamma = \Delta\zeta\mathbf{N}^e : \mathbb{B}^X \quad R_{\Delta\zeta}^\gamma = \mathbf{N}^e : \mathbf{N}^X \quad \mathbf{R}_Q^\gamma = \mathbf{0} \quad R_\gamma^\gamma = 0$$

$$\mathbf{R}_\gamma^X = \mathbf{N}^e \quad \mathbf{R}_\gamma^Q = \mathbf{0} \quad R_\gamma^{\Delta\zeta} = 0$$

Con:

$$\mathbf{N}^e = \frac{\mathbf{e}^{tr}}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} \quad \mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad \mathbf{F}^Q = kc_2\mathbf{Q}$$

$$\mathbb{B}^X = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} [\mathbb{I} - \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X] \quad \mathbb{B}^e = \frac{1}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} [\mathbb{I} - \mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e] \quad \mathbb{F}^Q = kc_2 [\mathbb{I} - c_2^2\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}]$$

$$\mathbb{L} = c_1 [\mathbb{I} - c_1^2(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})]$$

Il modello costitutivo va completato con il calcolo di un tensore del quarto ordine tangente, per assicurare la convergenza quadratica di un metodo di Newton-Rapshon di un software agli elementi finiti che sfrutti questo modello durante le simulazioni numeriche; ovvero è necessario trovare:

$$\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$$

L'idea è di partire dalla differenziazione delle equazioni (4.28) e (4.29), ottenendo:

$$d\mathbf{p} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.41)$$

$$d\mathbf{s} = 2G \left(\mathbb{I} - \frac{d\mathbf{e}^{tr}}{d\mathbf{e}} \right) \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.42)$$

dove:

$$\mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

$$d\mathbf{e} = \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}$$

A questo punto se si considerano le equazioni residuali del modello non solo come funzioni di \mathbf{X} , \mathbf{Q} , $\Delta\zeta$, γ , ma anche di \mathbf{e} , la corrispondente linearizzazione diventa:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{R}^X &= \mathbb{R}_X^X : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X \Delta\zeta + \mathbb{R}_Q^X : d\mathbf{Q} + \mathbf{R}_\gamma^X d\gamma + \mathbb{R}_e^X : de = \mathbf{0} \\
 d\mathbf{R}^{\Delta\zeta} &= \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} : d\mathbf{X} + R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \Delta\zeta + \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} : d\mathbf{Q} + R_\gamma^{\Delta\zeta} d\gamma + \mathbf{R}_e^{\Delta\zeta} : de = 0 \\
 d\mathbf{R}^Q &= \mathbb{R}_X^Q : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q \Delta\zeta + \mathbb{R}_Q^Q : d\mathbf{Q} + \mathbf{R}_\gamma^Q d\gamma + \mathbb{R}_e^Q : de = \mathbf{0} \\
 d\mathbf{R}^\gamma &= \mathbf{R}_X^\gamma : d\mathbf{X} + R_{\Delta\zeta}^\gamma \Delta\zeta + \mathbf{R}_Q^\gamma : d\mathbf{Q} + R_\gamma^\gamma d\gamma + \mathbf{R}_e^\gamma : de = 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

dove:

$$\mathbb{R}_e^X = -2G\mathbb{I} \quad \mathbf{R}_e^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbb{R}_e^Q = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_e^\gamma = \mathbf{0}$$

Le equazioni (4.43) possono essere riformulate come:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\Delta\zeta \\ d\mathbf{Q} \\ d\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : de$$

Linearizzando ora anche e^{tr} :

$$de^{tr} = e_X^{tr} : d\mathbf{X} + e_{\Delta\zeta}^{tr} d\Delta\zeta + e_Q^{tr} : d\mathbf{Q} + e_\gamma^{tr} d\gamma = e_e^{tr} : de$$

si può scrivere:

$$e_e^{tr} : de = \mathbb{E} : de = \begin{bmatrix} e_X^{tr} & e_{\Delta\zeta}^{tr} & e_Q^{tr} & e_\gamma^{tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\Delta\zeta \\ d\mathbf{Q} \\ d\gamma \end{bmatrix}$$

Sostituendo i termini trovati si ha:

$$\mathbb{E} = \frac{de^{tr}}{de} = - \begin{bmatrix} e_X^{tr} & e_{\Delta\zeta}^{tr} & e_Q^{tr} & e_\gamma^{tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

$$e_X^{tr} = \Delta\zeta \mathbb{B}^X \quad e_{\Delta\zeta}^{tr} = \mathbf{N}^X \quad e_Q^{tr} = \mathbf{0} \quad e_\gamma^{tr} = \mathbf{0}$$

si può finalmente scrivere:

$$\mathbb{D} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G(\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} \tag{4.45}$$

Tabella 4.1: Parametri utilizzati per i test sul modello di Auricchio

E[MPa]	ν	T[K]	M_f [K]	h [MPa]
50000	0.35	298	223	1000
β [MPa/K]	ε_L	R[MPa]	k	δ
2	0.04	50	0.02	10^{-7}

4.2.3 Test effettuati

Per verificare la corretta implementazione del modello e studiarne accuratamente le proprietà, si sono eseguiti diversi test sfruttando l'interfaccia in MATLAB precedentemente descritta (Sez. 4.1).

Tutti i test seguenti, a meno che non sia indicato in modo differente, sono stati eseguiti in controllo di sforzo, suddividendo gli step di carico/scarico in 20 sottopassi; i parametri con cui si è calibrato il modello per i test seguenti sono indicati in Tab. 4.1.

Il primo test effettuato, Fig. 4.6, consiste in 10 prove di trazione cicliche fino a 300 MPa, con passo di 15 MPa, seguite da 15 prove in compressione con le medesime caratteristiche di sforzo massimo e ampiezza di step. Si inizia a valutare il caso con A e H entrambi posti a 0.

Dalla Fig. 4.6 si nota come il modello effettivamente mostri un'accumulo progressivo di deformazioni irreversibili, che potrebbe continuare senza mai saturare in quanto si è posto $H = 0$; inoltre e^{tr} dopo aver raggiunto il valore massimo durante il carico, allo scarico non riesce ad annullarsi, ma torna al valore imposto da \mathbf{q} . Nonostante la saturazione della fatica sia disattivata, al progredire dei cicli l'accumulo rallenta, per i motivi teorici già descritti. Inoltre sono molto chiare le due fondamentali problematiche del modello, la prima delle quali riguarda il fatto che avendo disattivato la degradazione, lo sforzo di inizio trasformazione di fase diretta, invece di rimanere costante, subisce un progressivo aumento, fenomeno senz'altro assente in tutti i dati sperimentali a disposizione. Si noti inoltre che Q_{11} subisce una leggera deriva, che in realtà si spiega con il fatto di aver utilizzato nel modello una norma modificata che approssima la classica norma euclidea. Il secondo problema fondamentale del modello riguarda il comportamento quando si passa dalla trazione alla compressione: nonostante durante i cicli in trazione il plateau abbia subito una evidente contrazione, in compressione subisce invece un notevole allungamento, che lo rende addirittura più lungo di quello del materiale vergine. Questo dipende sostanzialmente dall'aver definito un dominio di trasformazione di fase di ampiezza fissa (Eq. 4.27), che non evolve con il progredire del fenomeno della fatica.

Il secondo test effettuato consiste in 10 cicli di trazione in cui si è voluto evidenziare l'effetto del parametro H , che dovrebbe bloccare la fatica sopra un certo valore

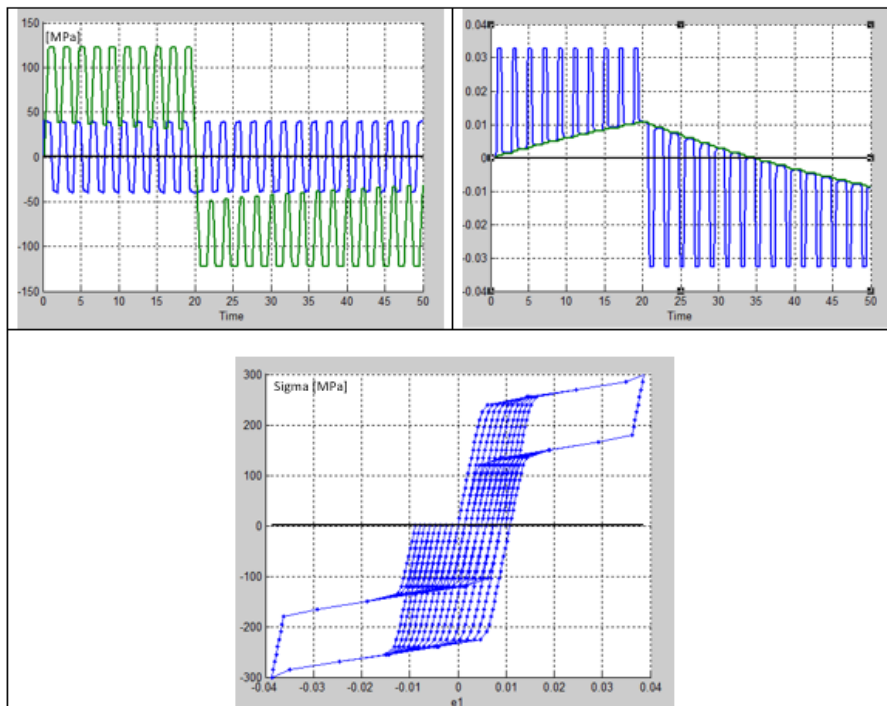


Figura 4.6: Modello di Auricchio. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione con $H=0$ MPa e $A=0$ MPa. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a dx evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sx evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

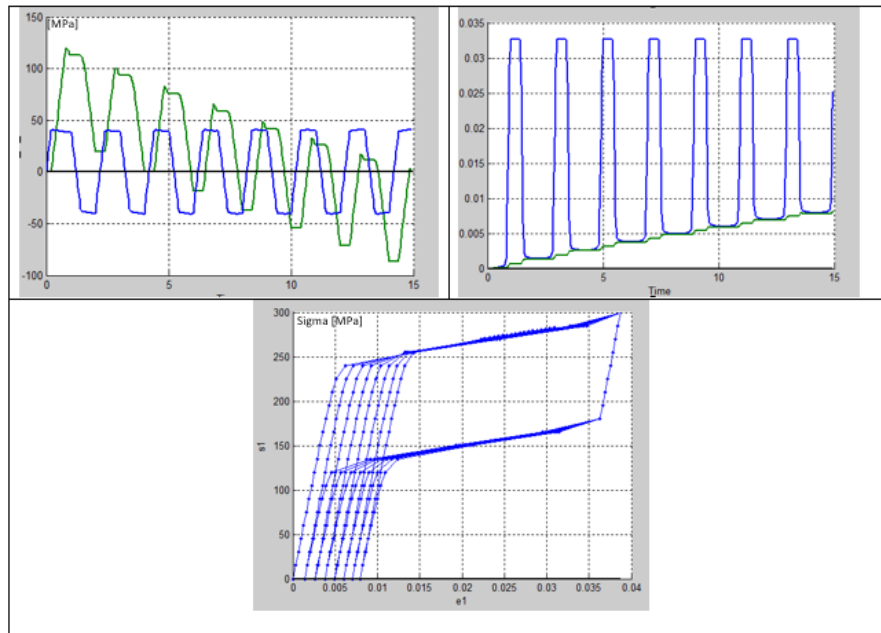


Figura 4.7: Modello di Auricchio. 10 cicli di trazione con $H=15000$ MPa e $A=0$ MPa (il programma si è interrotto all'ottavo ciclo, non raggiungendo la convergenza). In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a dx evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sx evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

di q . Nel test di Fig. 4.7 si è impostato $H = 15000$ MPa.

Si noti che la prova non è stata completata, in quanto in corrispondenza del ciclo di carico in cui il fenomeno della fatica avrebbe dovuto arrestarsi, ovvero del ciclo in cui la variabile Q_{11} si riduce fino a praticamente annullarsi per effetto del parametro H , il codice implementato non arriva a convergenza. Studiando il comportamento del codice, si è visto che in questo punto durante le iterazioni di Newton-Rapshon necessarie per la soluzione del modello, il valore di Q_{11} invece di annullarsi, continuava a passare da valori positivi e negativi tra un'iterazione e quella successiva. Questo evidenzia un problema della formulazione numerica del modello di Auricchio che nel lavoro originario probabilmente non era stata colta, in quanto si erano risolte direttamente le equazioni sfruttando la funzione *fsolve* di MATLAB.

Il terzo test effettuato consiste nel testare il modello completo, attivando sia la saturazione $H = 15000$ MPa, sia la degradazione $A = 2000$ MPa (Fig. 4.8).

Si noti come in Fig. 4.8 sia chiaramente presente, oltre al fenomeno di accumulo di deformazione irreversibile, anche la corretta rappresentazione della degradazione del materiale, che si evidenzia come un abbattimento dello sforzo necessario per iniziare la trasformazione di fase. L'attivazione simultanea di saturazione e degradazione sembra inoltre risolvere i problemi di convergenza riscontrati nel test precedente; tuttavia al passaggio in compressione si verificano strani shift del punto di termine del

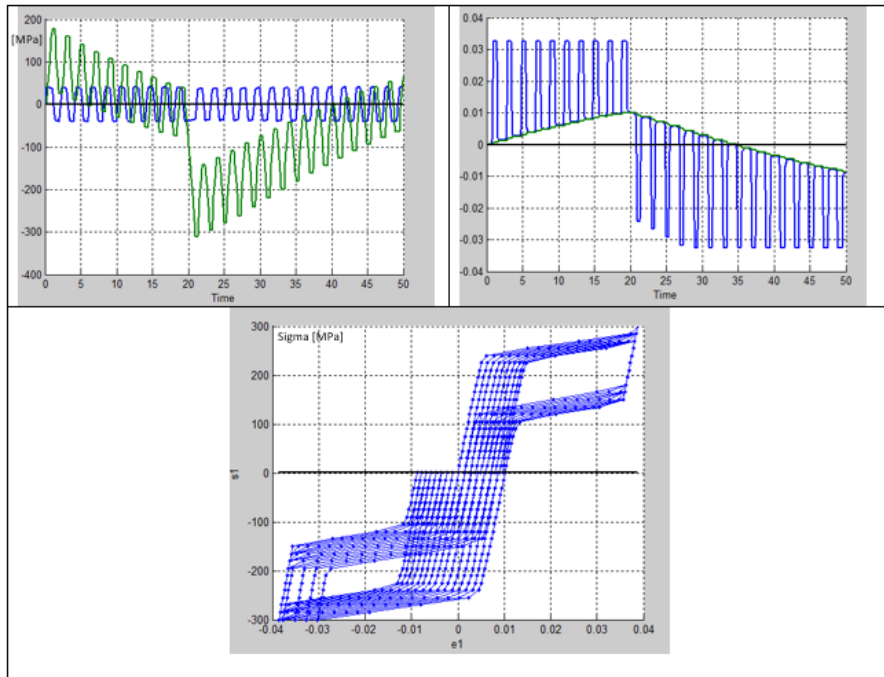


Figura 4.8: Modello di Auricchio. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione con $H=15000$ MPa e $A=2000$ MPa. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a dx evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sx evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

plateau di trasformazione di fase, causati probabilmente dagli effetti che il parametro A assume in compressione, già citati nella sezione 4.2.1. Inoltre si può vedere dalla stessa figura che il parametro A provoca anche un significativo abbattimento del plateau di trasformazione inversa; questo è vero essere presente nei dati sperimentali, ma in maniera molto meno pronunciata, almeno rispetto a quanto accade per il plateau diretto.

Ultimo test riguarda la fatica a basse temperature, in cui si sfrutta il fenomeno della memoria di forma. Le prove consistono quindi in un carico fino a 150 MPa con incrementi di 7.5 MPa a temperatura $T = 223$ K, scarico completo, e recupero della deformazione mediante riscaldamento di 50 K e successivo raffreddamento con step di 2.5 K. In Fig. 4.9 si vede il recupero di deformazione dovuto al riscaldamento, oltre al fatto che è presente il fenomeno della fatica, accompagnato dalla degradazione del materiale. E' inoltre molto evidente come la saturazione del fenomeno agisca già dopo il quinto ciclo, in quanto a questo punto sembra non essere più presente nessun accumulo, dato che le curve sforzo-deformazione appaiono chiaramente coincidenti.

4.2.4 Discussione risultati ottenuti

Dai test effettuati risulta chiaro che il modello sia effettivamente in grado di cogliere l'accumulo di deformazione irreversibile per fatica, sia nel caso si modellizzi

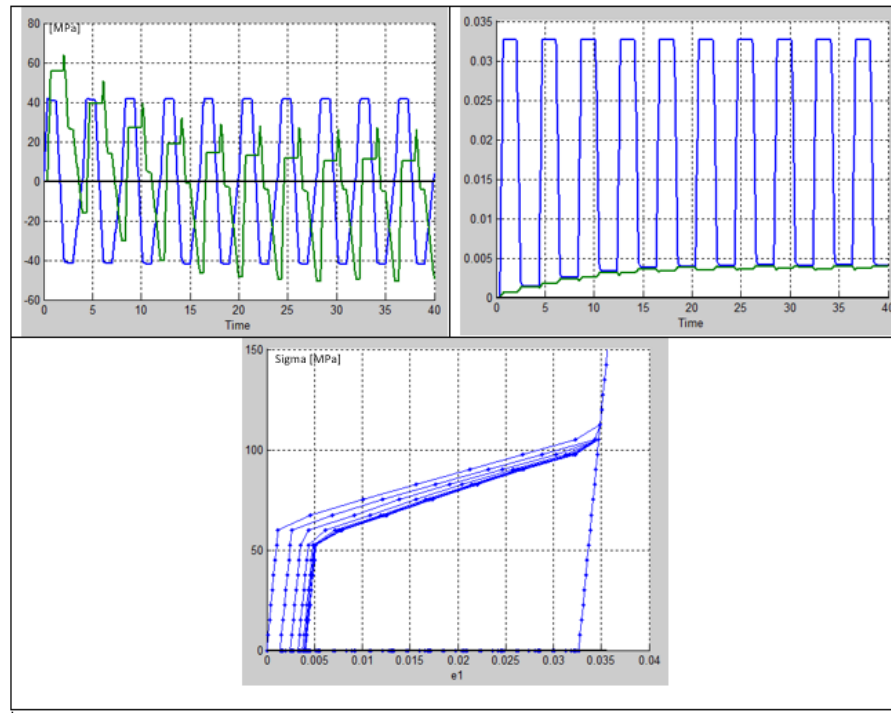


Figura 4.9: Modello di Auricchio. 10 cicli di trazione, ognuno seguito da riscaldamento e raffreddamento, con $H=15000$ MPa e $A=2000$ MPa. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a dx evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sx evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

la pseudoelasticità che la memoria di forma; inoltre anche il fenomeno degradativo subito dal materiale appare chiaramente catturato. Nonostante questo si evidenziano i seguenti limiti:

- non si tiene conto dell'asimmetria tra trazione e compressione, anche se tale aspetto potrebbe essere recuperato utilizzando un dominio elastico definito come nel modello Souza-Auricchio-Petrini;
- non si modella il diverso modulo di Young fra austenite e martensite;
- attivando solo il termine relativo alla degradazione si originano problemi di convergenza, mentre invece attivando anche il termine di degradazione si hanno dei comportamenti inaspettati al passaggio in compressione;
- con la degradazione disattivata si ottiene uno sforzo critico progressivamente crescente in presenza di fatica;
- visto che il dominio di trasformazione di fase è definito in modo da mostrare un'ampiezza fissa nel tempo, in una prova monoassiale, passando da un ciclo di trazione ad uno di compressione, il plateau dovuto al cambiamento di fase

appare dilatato. Questo avviene perché la variabile \mathbf{e}^{tr} dopo un ciclo di trazione allo scarico non si annulla, ma resta pari a \mathbf{q} ; nel passare in compressione, ha la possibilità di tornare prima ad un valore nullo e poi di iniziare ad aumentare nella direzione opposta. Questo grande limite si può anche notare nel fatto che, dopo un certo numero di cicli di trazione seguiti da altrettanti in compressione, la variabile \mathbf{q} ritorna ad un valore nullo: questo implica che i fenomeni plastici si siano cancellati a vicenda, come se si partisse da un materiale nuovo.

4.3 Implementazione del modello di Biscari

4.3.1 Formulazione teorica

Il modello di Biscari è un'evoluzione di quello di Auricchio, ponendosi sostanzialmente due obiettivi:

- aggiungere la capacità di cogliere gli effetti plastici per valori elevati di sforzo, mantenendo al contempo la possibilità di descrivere la fatica;
- considerare che con l'evoluzione di \mathbf{q} , all'interno del materiale si ha la formazione di domini microscopici in cui non possono avvenire eventuali future trasformazioni di fase; ciò implica che il tensore di fatica \mathbf{q} abbia anche un ruolo nello stabilire forma e dimensione del dominio in cui può evolvere il tensore \mathbf{e}^{tr} . Riuscire a modellizzare correttamente questo fenomeno significherebbe risolvere gli aspetti critici che il precedente modello mostrava al passaggio da trazione a compressione.

Il primo aspetto è stato risolto introducendo un nuovo tensore, \mathbf{e}^{pl} , che rappresenta le deformazioni plastiche avvenute a causa dell'applicazione di sollecitazioni elevate. In caso di plasticità macroscopica, come già illustrato in (1.3.5), il materiale non può ripristinare completamente la propria forma, quindi deve essere anche data una nuova definizione della deformazione elastica, che poi comparirà all'interno del potenziale termodinamico del materiale:

$$\mathbf{e}^{el} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - \mathbf{e}^{pl} \quad (4.46)$$

Dovrebbe essere anche fornita una legge di evoluzione per la deformazione plastica, tuttavia la scelta effettuata nel lavoro di Biscari è per semplicità di considerare una relazione di proporzionalità con il tensore di fatica: $\mathbf{e}^{pl} = \mathbf{a}\mathbf{q}$.

Per risolvere la seconda questione l'idea è di modificare l'Eq. (4.4), in modo che se anche \mathbf{q} ritorni a un valore nullo durante dei cicli in compressione che seguono ciclaggi effettuati in trazione, il dominio in cui può muoversi \mathbf{e}^{tr} risulti irreversibilmente modificato. Infatti con il progredire della fatica le dislocazioni e i difetti generati impediscono al materiale di potersi completamente allineare in direzioni differenti

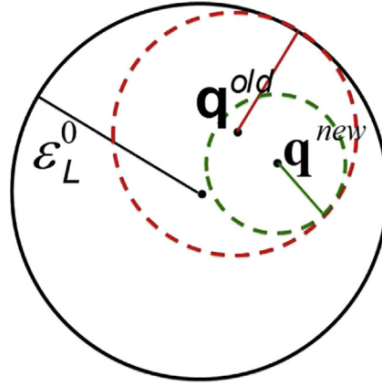


Figura 4.10: Rappresentazione dell'evoluzione del dominio di trasformazione di fase [7]

rispetto a quello in cui si è sviluppata inizialmente una deformazione plastica. Il dominio di trasformazione di fase $\varepsilon_L(t)$ deve essere quindi una sfera nello spazio dei tensori deviatorici del secondo ordine a traccia nulla (Fig. 4.10), tale che:

1. sia centrata in $\mathbf{q}(t)$;
2. se $t_2 > t_1$ allora: $\varepsilon_L(t_2) \subseteq \varepsilon_L(t_1)$;
3. sia la più grande sfera che soddisfi i criteri precedenti.

Questo significa considerare un vincolo su \mathbf{e}^{tr} posto come:

$$\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| \leq \varepsilon_L(t) \quad (4.47)$$

a cui viene associata una legge evolutiva per il dominio della trasformazione di fase:

$$\dot{\varepsilon}_L(t) = \begin{cases} -\|\dot{\mathbf{q}}\| & \varepsilon_L > 0 \\ 0 & \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Il potenziale termodinamico del materiale è posto uguale a:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}\|^2 + \beta\langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + \\ & + \frac{1}{2}h\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + L(\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}) + \frac{1}{2}H\|\mathbf{q}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) \end{aligned} \quad (4.49)$$

da cui si ottengono, mediante derivazione, le quantità:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K[\theta - \alpha(T - T_0)] \quad (4.50)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}) \quad (4.51)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - h(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} - \gamma \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = a\mathbf{s} - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\partial \mathbf{q}} + h(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - H\mathbf{q} \quad (4.53)$$

Rispetto al modello di Auricchio, si possono notare le seguenti differenze:

- gli effetti di dilatazione termica sono stati reintrodotti;
- viene omesso il termine che modella la degradazione del materiale;
- l'hardening cinematico imposto al tensore \mathbf{e}^{tr} ora dipende dalla quantità $(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})$, risolvendo in questo modo gli effetti indesiderati del modello di Auricchio che causavano dei cambiamenti della soglia critica per l'inizio della trasformazione di fase al procedere dell'accumulo di deformazione irreversibile per fatica;
- i due punti precedenti permettono di affermare che la soglia critica risulta sempre fissata sul valore iniziale, non mostrando nessuna evoluzione. Questo risolve alcuni problemi del modello di Auricchio, ma crea una situazione non in accordo con le evidenze sperimentali, in cui la soglia critica diminuisce al procedere del fenomeno di fatica.
- la definizione di \mathbf{Q} ora è dipendente anche dallo sforzo deviatorico.

Per completare la descrizione del modello di Biscari, bisogna ovviamente formulare la superficie limite del dominio elastico, definizione che deve essere modificata in modo appropriato in modo che i meccanismi evolutivi delle variabili interne del modello tengano ora conto sia della plasticità macroscopica che dell'accumulo di deformazione per fatica. Nel lavoro di Biscari bisogna sottolineare la grande attenzione posta su come definire la forma del dominio elastico, che è strettamente legata alla direzione dei versori normali alla superficie stessa, dalle cui componenti dipendono le leggi evolutive delle variabili interne (Fig. 4.11). Definendo la superficie limite in termini di \mathbf{X} e \mathbf{Q} , le definizioni proposte sono le tre seguenti³:

- $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,1} - R \leq 0$, ovvero $\|\mathbf{X}\| + k\|\mathbf{Q}\| - R \leq 0$. Questa è la stessa funzione proposta da Auricchio, che presenta un versore normale con direzione fissa, con angolazione $\varphi = \arctan(k)$. Questa formulazione provoca che ogni variazione di \mathbf{e}^{tr} sia immediatamente seguita da una modifica di \mathbf{q} , infatti:

³Nel seguito, per brevità, il modello con superficie limite $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,1} - R \leq 0$ verrà indicato come *Biscari 1*, quello con superficie $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,2} - R \leq 0$ come *Biscari 2*, quello con $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,\infty} - R \leq 0$ con *Biscari ∞* .

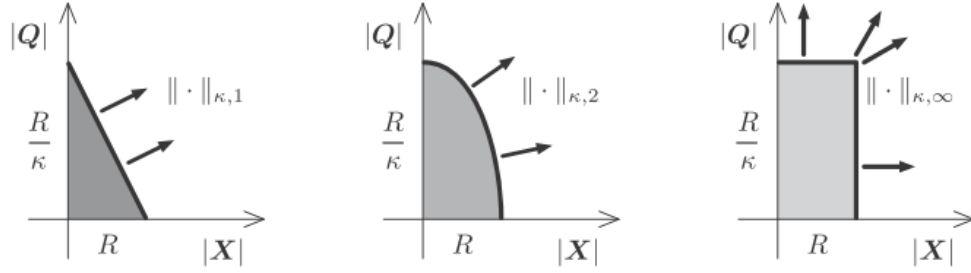


Figura 4.11: Rappresentazione di come le diverse definizioni del dominio elastico inducano superfici limite diversamente orientate [7]

$\|\dot{\mathbf{q}}\| = \tan(\varphi) \|\dot{\mathbf{e}}^{tr}\| = k \|\dot{\mathbf{e}}^{tr}\|$. Questo comportamento, tuttavia, non permetterebbe di cogliere in modo corretto la plasticità, che solitamente ha luogo in corrispondenza di valori di sforzo elevati, in cui ormai nel modello il valore di \mathbf{e}^{tr} è fisso. Con la scelta di questa norma le leggi evolutive sarebbero le stesse di Auricchio:

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.54)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \quad (4.55)$$

- $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,2} - R \leq 0$, ovvero $\sqrt{\|\mathbf{X}\|^2 + k^2 \|\mathbf{Q}\|^2} - R \leq 0$. Usando questa definizione il dominio elastico ha normale alla superficie che cambia direzione in ogni punto, ammettendo quindi anche situazioni in cui si abbia solamente l'evoluzione di una delle due variabili interne. In questo caso le leggi evolutive sono le stesse del caso precedente;
- $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,\infty} - R \leq 0$, ovvero $\max\{\|\mathbf{X}\|, k \|\mathbf{Q}\|\} - R \leq 0$. La scelta della norma del massimo include gli stessi vantaggi della norma euclidea, aggiungendo tuttavia un ulteriore grado di libertà, visto che possono essere scelte due soglie indipendenti per \mathbf{X} e \mathbf{Q} , rispettivamente R e $\frac{R}{k}$. In questo modo in un prova monossiale si raggiunge la soglia di plasticità quando:

$$Q_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{R}{k} \quad (4.56)$$

dove il fattore $\sqrt{\frac{2}{3}}$ deriva dalla natura deviatorica della variabile \mathbf{Q} . Le evoluzioni dei tensori di fatica e di trasformazione di fase diventano due fenomeni indipendenti e separati, con due leggi evolutive del tipo:

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \zeta \mathbf{X} \quad \text{se } \|\mathbf{X}\| \geq R \quad (4.57)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mu} \mathbf{Q} \quad \text{se } k \|\mathbf{Q}\| \geq R \quad (4.58)$$

4.3.2 Formulazione discreta

Per la riformulazione discreta delle equazioni del modello si segue esattamente lo stesso procedimento effettuato precedentemente, quindi in questa sezione la descrizione del procedimento sarà più sintetica. Si ricorda che per i problemi numerici già menzionati (Sez. 4.2.2) diventa fondamentale sfruttare in alcuni punti del modello una norma modificata, in modo che nel calcolo della derivata della norma di alcuni tensori del secondo ordine, che in alcune occasioni potrebbero annullarsi, tale derivata rimanga correttamente definita.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta} \quad (4.59)$$

$$\frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\mathbf{a}} = \frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\|\mathbf{a}\|} \frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\mathbf{a}} = \frac{\|\mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \quad (4.60)$$

Sostituita nel modello, permette di scrivere:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, T) = & \frac{1}{2} K \theta^2 + G \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}\|^2 + \beta \langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + \\ & + \frac{1}{2} h \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + L(\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}) + \frac{1}{2} H \|\mathbf{q}\|^2 - 3\alpha K \theta (T - T_0) \end{aligned} \quad (4.61)$$

da cui si ottengono mediante derivazione le quantità:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - \alpha (T - T_0)] \quad (4.62)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}) \quad (4.63)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - h (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \tau_M c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \gamma c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) \quad (4.64)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = a\mathbf{s} + \tau_M c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) + h (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - H\mathbf{q} \quad (4.65)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta}}$$

Il vincolo (4.47) e l'evoluzione del dominio di trasformazione di fase (4.48), in forma discretizzata, divengono:

$$\overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\| \leq \varepsilon_{L,n} \quad (4.66)$$

con il limite che $\varepsilon_L(t) > 0$.

Nel seguito vengono descritti tre modelli che si basano sulle equazioni discretizzate appena formulate, ma presentano tre diverse norme per la definizione della superficie limite del dominio elastico.

Modello Biscari 1

La scelta della norma a 1 dà origine ad un modello simile a quello di Auricchio, con una superficie limite del dominio elastico:

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \|\mathbf{X}\| + k\overline{\|\mathbf{Q}\|} - R \leq 0 \quad (4.67)$$

da cui mediante derivazione si ottengono le leggi evolutive della variabili interne:

$$\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \Delta\zeta k c_2 \mathbf{Q} \quad (4.69)$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{Q}\|^2 + \delta}}$$

Data l'estrema vicinanza che le equazioni del modello di Auricchio, per potere in seguito fare un confronto migliore, il vincolo (4.66) viene ridefinito introducendo due parametri k_1 e k_2 :

$$\overline{\|\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}\|} + k_2 \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\| \leq \varepsilon_{L,n} \quad (4.70)$$

determinando anche un cambiamento dell'espressione di \mathbf{X} , che diviene:

$$\mathbf{X} = \mathbf{s} - h(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \tau_M c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \gamma c_3 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) \quad (4.71)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta}}$$

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}\|^2 + \delta}}$$

Ponendo i parametri k_1 e $k_2 = 0$, si riottiene il modello di Auricchio, ponendoli entrambi = 1 quello di Biscari. I casi intermedi corrispondono alla situazione in cui il dominio di trasformazione di fase abbia raggio fisso e sia centrato in \mathbf{q} ($k_1 = 1$ e

$k_2 = 0$) o viceversa il raggio possa evolvere, ma il dominio resti centrato in $\mathbf{0}$ ($k_1 = 0$ e $k_2 = 1$).

Il metodo usato per risolvere le equazioni del modello è il medesimo usato per il modello di Auricchio, ovvero basato su una procedura di predittore elastico-correttore inelastico [49, 58], tenendo conto che come input al modello vengono date la temperatura e la deformazione corrente. Il metodo consiste nel considerare inizialmente un ipotetico passo trial in cui le variabili interne del modello non cambiano rispetto al passo precedente, verificando in seguito l'ammissibilità di tale assunzione (Alg. 4.3). Se è verificata allora il passo è realmente elastico, le variabili interne vengono lasciate invariate e si calcola il nuovo valore di sforzo corrispondente allo stato deformativo, viceversa se il passo trial non è accettabile si procede a valutare il reale passo inelastico tenendo conto dell'evoluzione delle variabili interne. La soluzione si basa su un procedimento iterativo di Newton Rapshon in cui si scrivono le equazioni (4.71),(4.65),(4.67) in forma residuale ipotizzando $\gamma = 0$, ovvero di essere all'interno del plateau di trasformazione di fase in cui il vincolo (4.70) non è attivo. Se la soluzione tuttavia non soddisfa quest'ultimo vincolo si aggiunge l'equazione residuale corrispondente alla (4.70) per permettere la valutazione anche di γ .

Il metodo di Newton-Rapshon implica ad ogni iterazione il calcolo di:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \gamma \end{bmatrix}_n - R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}^Q \\ R^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

finché la norma dei residui non soddisfa una certa tolleranza, indice che si è giunti a convergenza del metodo. La matrice R contiene le derivate dei residui, ovvero:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

dove:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + h) \Delta\zeta \mathbb{B}^X + \gamma \Delta\zeta \mathbb{L}_2 \mathbb{B}^X + \tau_M \Delta\zeta \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = (2G + h) \mathbf{N}^X + (2Ga - h) \mathbf{F}^Q + \gamma \mathbb{L}_2 : (\mathbf{N}^X - k_1 \mathbf{F}^Q) + \tau_M \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - \mathbf{F}^Q)$$

$$\mathbb{R}_X^Q = (2Ga - h) \Delta\zeta \mathbb{F}^Q - \tau_M \Delta\zeta \mathbb{L} \mathbb{F}^Q - k_1 \gamma \Delta\zeta \mathbb{L}_2 \mathbb{F}^X$$

Algoritmo 4.3 Modello Biscari 1

- **CALCOLO PASSO TRIAL**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{tr,TR} &= \mathbf{e}_n^{tr} \\
 \mathbf{q}^{TR} &= \mathbf{q}_n \\
 \mathbf{s}^{TR} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) \\
 \mathbf{X}^{TR} &= \mathbf{s}^{TR} - h(\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) - \tau_M c_1(\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) - \gamma c_3(\mathbf{e}^{tr,TR} - k_1 \mathbf{q}^{TR}) \\
 \mathbf{Q}^{TR} &= a \mathbf{s}^{TR} + \tau_M c_1(\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) + h(\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}) - H \mathbf{q}^{TR}
 \end{aligned}$$

- **VERIFICA PASSO TRIAL**

```

 $F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR}, \mathbf{Q}^{TR})$ 
if  $F^{TR} < 0$ 
  passo trial accettabile (elastico)
   $\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}^{tr,TR}$ 
   $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{TR}$ 
else
  passo trial non accettabile (inelastico)
  while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
    Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}$ 
  end while
  if  $\|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L$ 
    while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
      Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, \gamma$ 
    end while
  end if
end if

```

- **AGGIORNAMENTO SFORZO**

$$\mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q})$$

$$\mathbb{R}_X^Q = (2Ga - h) \Delta\zeta \mathbb{B}^X - \tau_M \mathfrak{d}\zeta \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q = (2Ga - h) \mathbf{N}^X + (2Ga^2 + h + H) \mathbf{F}^Q - \tau_M \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - \mathbf{F}^Q)$$

$$\mathbb{R}_Q^Q = \mathbb{I} + (2Ga^2 + h + H) \Delta\zeta \mathbb{F}^Q + \tau_M \mathbb{L} \mathbb{F}^Q$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{N}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = 0 \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^Q \quad \mathbf{R}_\gamma^{\Delta\zeta} = 0$$

$$\mathbf{R}_X^\gamma = \Delta\zeta c_3 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) : \mathbb{B}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^\gamma = c_3 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) : (\mathbf{N}^X - k_1 \mathbf{F}^Q) + k_2 \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbf{F}^Q$$

$$\mathbf{R}_Q^\gamma = -k_1 c_3 \Delta\zeta (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) : \mathbb{F}^Q + k_2 \Delta\zeta \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbb{F}^Q \quad \mathbf{R}_\gamma^\gamma = 0$$

$$\mathbf{R}_\gamma^X = c_3 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) \quad \mathbf{R}_\gamma^Q = \mathbf{0}$$

Con:

$$\mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad \mathbf{F}^Q = kc_2 \mathbf{Q}$$

$$\mathbb{B}^X = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} [\mathbb{I} - \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X] \quad \mathbb{F}^Q = kc_2 [\mathbb{I} - c_2^2 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}]$$

$$\frac{\partial [c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})]}{\partial (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})} = \mathbb{L} = c_1 [\mathbb{I} - c_1^2 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})]$$

$$\frac{\partial [c_3 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q})]}{\partial (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q})} = \mathbb{L}_2 = c_3 [\mathbb{I} - c_3^2 (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{e}^{tr} - k_1 \mathbf{q})]$$

Il modello costitutivo va completato con il calcolo di un tensore del quarto ordine tangente, per assicurare la convergenza quadratica di un metodo di Newton-Rapshon di un software agli elementi finiti che lo sfrutti all'interno di simulazioni numeriche.

$$\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\varepsilon}$$

Seguendo esattamente il medesimo procedimento effettuato per il modello di Auricchio, e partendo dalla differenziazione delle equazioni (4.62)(4.63), questa volta si ottengono le relazioni:

$$dp = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : d\varepsilon \tag{4.74}$$

$$ds = 2G \left(\mathbb{I} - \frac{de^{tr}}{de} - a \frac{dq}{de} \right) \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.75)$$

Ed infine si può ottenere $\mathbb{E} = \frac{de^{tr}}{de} + a \frac{dq}{de}$, che risulta:

$$\mathbb{E} = - \left(\begin{bmatrix} e_X^{tr} & e_{\Delta\zeta}^{tr} & e_Q^{tr} & e_\gamma^{tr} \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} q_X & q_{\Delta\zeta} & q_Q & q_\gamma \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbb{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbb{R}_\gamma^X \\ \mathbb{R}_X^{\Delta\zeta} & \mathbb{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbb{R}_Q^{\Delta\zeta} & \mathbb{R}_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbb{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbb{R}_\gamma^Q \\ \mathbb{R}_X^\gamma & \mathbb{R}_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbb{R}_Q^\gamma & \mathbb{R}_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$e_X^{tr} = \Delta\zeta \mathbb{B}^X \quad e_{\Delta\zeta}^{tr} = N^X \quad e_Q^{tr} = \mathbf{0} \quad e_\gamma^{tr} = \mathbf{0}$$

$$q_X = \mathbf{0} \quad q_{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^Q \quad q_Q = \Delta\zeta \mathbb{F}^Q \quad q_\gamma = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{D} = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} \quad (4.77)$$

Modello Biscari 2

La discretizzazione del modello che utilizza la norma euclidea è stata svolta esattamente con lo stesso metodo seguito nel modello con norma $\|(\mathbf{X}, \mathbf{Q})\|_{k,1}$, senza tuttavia introdurre i parametri aggiuntivi k_1 e k_2 . Si sottolinea che in questo caso la superficie limite del dominio elastico è definita come:

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \sqrt{\|\mathbf{X}\|^2 + k^2 \|\mathbf{Q}\|^2} - R \leq 0 \quad (4.78)$$

Da cui si ottengono le quantità:

$$\frac{dF}{d\mathbf{X}} = c_3 \mathbf{X} = \mathbf{F}^X \quad \frac{dF}{d\mathbf{Q}} = c_3 k^2 \mathbf{Q} = \mathbf{F}^Q \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{X}\|^2 + k^2 \|\mathbf{Q}\|^2}}$$

$$\frac{d^2 F}{d\mathbf{X}^2} = c_3 (\mathbb{I} - \mathbf{F}^X \otimes \mathbf{F}^X) = \mathbb{F}^{XX} \quad \frac{d^2 F}{d\mathbf{Q}^2} = c_3 (k^2 \mathbb{I} - \mathbf{F}^Q \otimes \mathbf{F}^Q) = \mathbb{F}^{QQ} \quad (4.79)$$

$$\frac{d}{d\mathbf{Q}} \left(\frac{dF}{d\mathbf{X}} \right) = -c_3 \mathbf{F}^Q \otimes \mathbf{F}^X = \mathbb{F}^{XQ} \quad \frac{d}{d\mathbf{X}} \left(\frac{dF}{d\mathbf{Q}} \right) = -c_3 \mathbf{F}^X \otimes \mathbf{F}^Q = \mathbb{F}^{QX}$$

e le leggi evolutive delle variabili interne del modello:

$$e^{tr} = e_n^{tr} + \Delta\zeta \mathbb{F}^{XX} \quad (4.80)$$

Algoritmo 4.4 Modello Biscari 2

• **CALCOLO PASSO TRIAL**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{tr,TR} &= \mathbf{e}_n^{tr} \\
 \mathbf{q}^{TR} &= \mathbf{q}_n \\
 \mathbf{s}^{TR} &= 2G (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) \\
 \mathbf{X}^{TR} &= \mathbf{s}^{TR} - \left[h \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}\|} + \tau_M + \gamma \right] c_1 \frac{\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}}{\|\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}\|} \\
 \mathbf{Q}^{TR} &= a\mathbf{s}^{TR} + \left[h \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}\|} + \tau_M \right] c_1 \frac{\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}}{\|\mathbf{e}^{tr,TR} - \mathbf{q}^{TR}\|} - H\mathbf{q}^{TR}
 \end{aligned}$$

• **VERIFICA PASSO TRIAL**

```

 $F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR}, \mathbf{Q}^{TR})$ 
if  $F^{TR} < 0$ 
    passo trial accettabile (elastico)
     $\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}^{tr,TR}$ 
     $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{TR}$ 
else
    passo trial non accettabile (inelastico)
    while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
        Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}$ 
    end while
    if  $\|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L$ 
        while  $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$ 
            Newton-Rapshon per ottenere:  $\mathbf{e}^{tr}, \mathbf{q}, \gamma$ 
        end while
    end if
end if

```

• **AGGIORNAMENTO SFORZO**

$$\mathbf{s} = 2G (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q})$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \Delta\zeta \mathbb{F}^{QQ} \tag{4.81}$$

L'algoritmo seguito è sempre lo stesso illustrato per il modello con norma 1, ovvero l'Alg. (4.4); si riportano nel seguito tutte le equazioni necessarie per sua risoluzione usando un metodo di Newton-Rapshon.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}_X^X &= \mathbb{I} + 2G\Delta\zeta (\mathbb{F}^{XX} + a\mathbb{F}^{QX}) + \Delta\zeta hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) + \\
 &+ \Delta\zeta \left[\tau_M + \gamma + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] \left[c_1 \mathbb{B}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X &= 2G(\mathbf{F}^X + a\mathbf{F}^Q) + hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q) + \\ &+ \left[\tau_M + \gamma + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] [c_1 \mathbb{B}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_Q^X &= 2G\Delta\zeta(\mathbb{F}^{XQ} + a\mathbb{F}^{QQ}) + \Delta\zeta hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ}) + \\ &+ \Delta\zeta \left[\tau_M + \gamma + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] [c_1 \mathbb{B}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ}) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_X^Q &= 2Ga\Delta\zeta(\mathbb{F}^{XX} + a\mathbb{F}^{QX}) + \Delta\zeta H\mathbb{F}^{QX} - \Delta\zeta hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) + \\ &- \Delta\zeta \left[\tau_M + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] [c_1 \mathbb{B}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q &= 2Ga(\mathbf{F}^X + a\mathbf{F}^Q) + H\mathbf{F}^Q - hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q) + \\ &- \left[\tau_M + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] [c_1 \mathbb{B}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_Q^Q &= \mathbb{I} + 2Ga\Delta\zeta(\mathbb{F}^{XX} + a\mathbb{F}^{QX}) + \Delta\zeta H\mathbb{F}^{QQ} - \Delta\zeta hc_1^2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ}) + \\ &- \Delta\zeta \left[\tau_M + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \right] [c_1 \mathbb{B}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ}) + c_2 \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq} (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ})] \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = 0 \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^Q \quad \mathbf{R}_\gamma^{\Delta\zeta} = 0$$

$$\mathbf{R}_X^\gamma = \Delta\zeta c_1 \mathbf{N}^{eq} : (\mathbb{F}^{XX} - \mathbb{F}^{QX}) + \Delta\zeta \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbb{F}^{QX} \quad \mathbf{R}_\gamma^X = c_1 \mathbf{N}^{eq} \quad \mathbf{R}_\gamma^Q = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_Q^\gamma = \Delta\zeta c_1 \mathbf{N}^{eq} : (\mathbb{F}^{XQ} - \mathbb{F}^{QQ}) + \Delta\zeta \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbb{F}^{QQ} \quad \mathbf{R}_\gamma^\gamma = 0$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^\gamma = c_1 \mathbf{N}^{eq} : (\mathbf{F}^X - \mathbf{F}^Q) + \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbf{F}^Q$$

Con:

$$\mathbf{N}^{eq} = \frac{\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} \quad \mathbb{B}^{eq} = \frac{1}{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|} [\mathbb{I} - \mathbf{N}^{eq} \otimes \mathbf{N}^{eq}]$$

$$c_1 = \frac{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta}} \quad c_2 = \frac{\delta}{\left(\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Il modulo tangente ha l'espressione seguente:

$$\mathbb{D} = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} \quad (4.82)$$

in cui $\mathbb{E} = \frac{d\mathbf{e}^{tr}}{d\mathbf{e}} + a \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{e}}$ è pari a:

$$\mathbb{E} = \left[\Delta\zeta (\mathbb{F}^{XX} + a\mathbb{F}^{QX}) \mid \Delta\zeta (\mathbb{F}^{XQ} + a\mathbb{F}^{QQ}) \mid \mathbf{F}^X + a\mathbf{F}^Q \mid \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2G\mathbb{I} \\ 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Modello Biscari ∞

Questo modello si differenzia dai precedenti in quanto definisce la superficie limite del dominio elastico con una norma del massimo, che praticamente si traduce nell'utilizzare due soglie differenti e indipendenti per identificare lo sforzo critico di inizio trasformazione di fase e di snervamento. Tali superfici limite sono le seguenti:

$$F(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\| - R \quad G(\mathbf{Q}) = k \|\mathbf{Q}\| - R \quad (4.84)$$

Dalle quali si possono ottenere le seguenti leggi evolutive, in cui tra l'altro si nota la comparsa di un parametro aggiuntivo (μ), che richiederà per la soluzione del modello costitutivo l'aggiunta di una nuova equazione.

$$\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \mathbf{X} \quad se \|\mathbf{X}\| \geq R \quad (4.85)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \Delta\mu \mathbf{Q} \quad se k \|\mathbf{Q}\| \geq R \quad (4.86)$$

La conseguenza di aver introdotto due superfici limite è che l'algoritmo finora utilizzato debba essere leggermente modificato, in quanto bisogna tenere conto che nel momento in cui si valuta l'ipotetico passo trial, le funzioni limite appena introdotte (4.84) possono essere entrambe soddisfatte, entrambe violate rendendo necessaria l'attivazione di tutte le equazioni del modello, o una violata e un'altra verificata, rendendo quindi necessario attivare la risoluzione solo delle equazioni opportune. Il nuovo algoritmo (Alg. 4.5) parte comunque dal procedimento sfruttato nella teoria della plasticità classica, basato su uno step trial elastico, in cui si ipotizzano le variabili interne rimanere costanti, ed un eventuale correzione inelastica di *return-map*.

L'idea è di iniziare la soluzione del sistema di equazioni partendo solo da quelle relative a \mathbf{X} e $\Delta\zeta$, anche se il secondo limite elastico è stato superato; trovata la

Algoritmo 4.5 Modello Biscari ∞

• CALCOLO PASSO TRIAL

$$\begin{aligned}
e^{tr,TR} &= e_n^{tr} \\
q^{TR} &= q_n \\
s^{TR} &= 2G(e - e^{tr,TR}) \\
X^{TR} &= s^{TR} - h(e^{tr,TR} - q^{TR}) - \tau_M c_1(e^{tr,TR} - q^{TR}) - \gamma c_1(e^{tr,TR} - q^{TR}) \\
Q^{TR} &= a s^{TR} + \tau_M c_1(e^{tr,TR} - q^{TR}) + h(e^{tr,TR} - q^{TR}) - H q^{TR}
\end{aligned}$$

• VERIFICA PASSO TRIAL

$F^{TR} = F(X^{TR})$
 $G^{TR} = G(Q^{TR})$
if $F^{TR} < 0$ **AND** $G^{TR} < 0$
 passo trial accettabile (elastico)
 $e^{tr} = e^{tr,TR}$
 $q = q^{TR}$
else
 passo trial non accettabile (inelastico)

 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr} \Rightarrow solo R^X, R^{\Delta\zeta}$
 end while

 if $\|e^{tr}\| > \varepsilon_L$
 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr}, \gamma \Rightarrow solo R^X, R^{\Delta\zeta}, R^\gamma$
 end while
 end if

 if $G > 0$
 if $\gamma > 0$
 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr}, q, \gamma \Rightarrow R^X, R^{\Delta\zeta}, R^Q, R^{\Delta\mu}, R^\gamma$
 end while
 else
 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr}, q \Rightarrow R^X, R^{\Delta\zeta}, R^Q, R^{\Delta\mu}$
 end while
 end if
 end if
 end if

end if

• AGGIORNAMENTO SFORZO

$$s = 2G(e - e^{tr} - aq)$$

soluzione, si valuta se attivare anche una nuova risoluzione con l'equazione aggiuntiva per γ . A questo punto, quando la soluzione relativa alla trasformazione di fase è completata, nell'eventualità che il limite elastico che identifica la soglia di plasticità sia superato ($G > 0$) si attivano le equazioni rimanenti, utili per trovare il valore dei parametri \mathbf{Q} , $\Delta\mu$. Si ricorda che il sistema di equazioni (si presenta il caso con tutti i termini attivati, ovviamente basterebbe rimuovere le righe non necessarie se si fosse all'interno di un'altra situazione) è valutato con il solito metodo iterativo di Newton-Raphson, scrivendo le equazioni in forma residuale:

$$\mathbf{R}^X = \mathbf{X} - 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}) + h(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) + (\tau_M + \gamma)c_1(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.87)$$

$$R^{\Delta\zeta} = \|\mathbf{X}\| - R = 0 \quad (4.88)$$

$$\mathbf{R}^Q = \mathbf{Q} - 2Ga(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - a\mathbf{q}) - h(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) - \tau_M c_1(\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) + H\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.89)$$

$$R^{\Delta\mu} = k\|\mathbf{Q}\| - R = 0 \quad (4.90)$$

$$R^\gamma = \|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\| - \varepsilon_{L,n} = 0 \quad (4.91)$$

Ad ogni iterazione del metodo si calcola il nuovo valore delle variabili del modello con l'equazione:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \Delta\mu \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \Delta\mu \\ \gamma \end{bmatrix}_n - R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}^Q \\ R^{\Delta\mu} \\ R^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

finché la norma dei residui non soddisfa una certa tolleranza, indice che si è giunti a convergenza del metodo. La matrice R contiene le derivate dei residui:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} & R_\gamma^{\Delta\mu} \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_{\Delta\mu}^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Si riportano ora tutti i termini necessari alla risoluzione del modello:

$$\mathbb{R}_X^X = (1 + 2G\Delta\zeta + h\Delta\zeta)\mathbb{I} + \Delta\zeta(\tau_M + \gamma)\mathbb{L}$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X = (2G + h)\mathbf{X} + (\tau_M + \gamma)\mathbb{L} : \mathbf{X}$$

$$\mathbb{R}_Q^X = (2Ga - h)\Delta\mu\mathbb{I} - \Delta\mu(\tau_M + \gamma)\mathbb{L}$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^X = (2Ga - h)\mathbf{Q} - (\tau_M + \gamma)\mathbb{L} : \mathbf{Q}$$

$$\mathbb{R}_X^Q = (2Ga - h)\Delta\zeta\mathbb{I} - \mathfrak{d}\zeta\tau_M\mathbb{L}$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q = (2Ga - h)\mathbf{X} - \tau_M\mathbb{L} : \mathbf{X}$$

$$\mathbb{R}_Q^Q = [1 + \Delta\mu(h + H + 2Ga^2)]\mathbb{I} + \Delta\mu\tau_M\mathbb{L}$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q = (2Ga^2 + h + H)\mathbf{Q} + \tau_M\mathbb{L} : \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{N}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_\gamma^{\Delta\zeta} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\mu} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} = k\mathbf{N}^Q \quad \mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_\gamma^{\Delta\mu} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_X^\gamma = \Delta\zeta c_1 \mathbf{N}^{eq} \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^\gamma = c_1 \mathbf{N}^{eq} : \mathbf{X} \quad \mathbf{R}_\gamma^\gamma = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_Q^\gamma = -c_1 \Delta\mu \mathbf{N}^{eq} + \Delta\mu \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} \quad \mathbf{R}_{\Delta\mu}^\gamma = -c_1 \mathbf{N}^{eq} : \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_n\|} : \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R}_\gamma^X = c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) \quad \mathbf{R}_\gamma^Q = \mathbf{0}$$

Con:

$$\mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad \mathbf{N}^Q = \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|} \quad \mathbf{N}^{eq} = \frac{\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|}$$

$$\frac{\partial [c_1 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})]}{\partial (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})} = \mathbb{L} = c_1 [\mathbb{I} - c_1^2 (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q})]$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\|^2 + \delta}}$$

Infine il modulo tangente $\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$ ha l'espressione seguente:

$$\mathbb{D} = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} \quad (4.94)$$

dove $\mathbb{E} = \frac{d\mathbf{e}^{tr}}{d\mathbf{e}} + a \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{e}}$ è pari a:

$$\mathbb{E} = \left[\Delta\zeta \mathbb{I} \mid \mathbf{X} \mid a\Delta\mu \mathbb{I} \mid a\mathbf{Q} \mid \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q & \mathbf{R}_\gamma^Q \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} & R_\gamma^{\Delta\mu} \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_Q^\gamma & R_{\Delta\mu}^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2G\mathbb{I} \\ 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

4.3.3 Test

Per verificare la corretta implementazione del modello e studiarne accuratamente le proprietà, si sono eseguiti diversi test sfruttando l'interfaccia MATLAB precedentemente descritta (Sez. 4.1).

Tutti i test seguenti, a meno che non sia indicato in modo differente, sono stati eseguiti in controllo di sforzo, suddividendo gli step di carico/scarico in 20 sottopassi; i parametri con cui si è calibrato il modello per i test seguenti sono indicati in Tab. 4.2.

Modello Biscari 1

Nel primo test è stato effettuato un confronto sugli effetti dei parametri k_1 e k_2 , sia attivando che disattivando la deformazione plastica, ponendo $a = 1$ o $a = 0$ rispettivamente. Il parametro H , responsabile della saturazione del fenomeno di accumulo per fatica, è stato posto in questo primo test pari a 0.

Dalla Fig. 4.12 si evince che attivando entrambi i parametri (senza plasticità, $a = 0$) si ottiene un comportamento coerente con quanto aspettato: i risultati mostrano che le modifiche introdotte dal gruppo di Biscari all'espressione del dominio di trasformazione di fase in cui si può muovere \mathbf{e}^{tr} sono corrette, e non si può prescindere dalla modellizzazione sia di una variazione della sua forma che della sua

Tabella 4.2: Parametri utilizzati per i test sul modello di Biscari

E[MPa]	ν	T[K]	M_f [K]	h [MPa]	T_0 [K]	H [MPa]
50000	0.35	298	223	1000	245	15000
β [MPa/K]	ε_L	R[MPa]	k	δ	α [1/K]	
2	0.04	50	0.02	10^{-7}	10^{-6}	

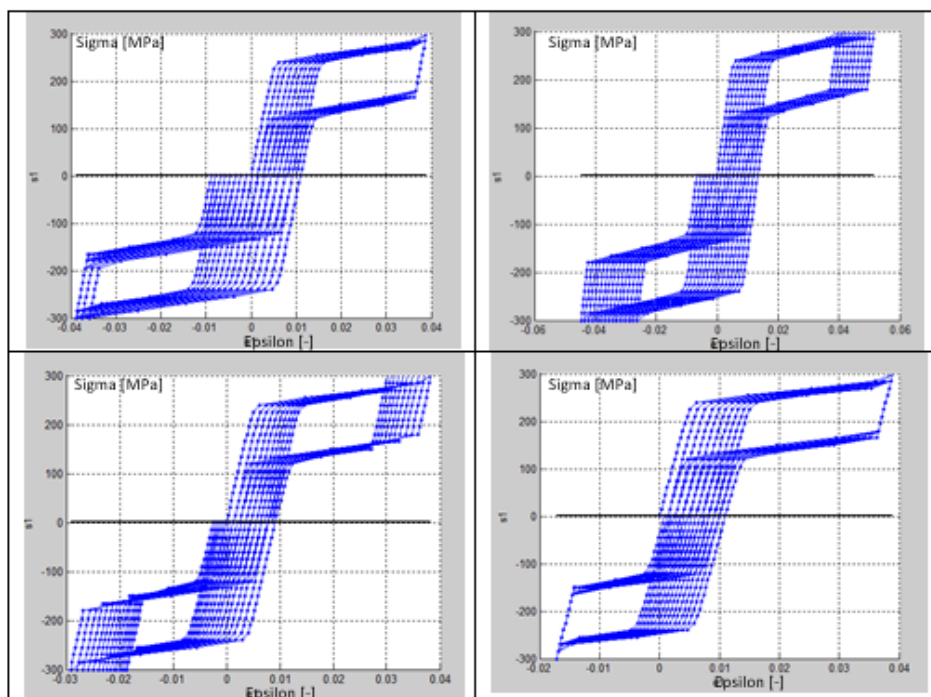


Figura 4.12: Modello Biscari 1, $a = 0$. 10 cicli di trazione seguiti da 15 in compressione, fino a 300 MPa, con passo di 15 MPa. In alto a sinistra $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$, in alto a destra $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, in basso a sinistra $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, in basso a destra $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$.

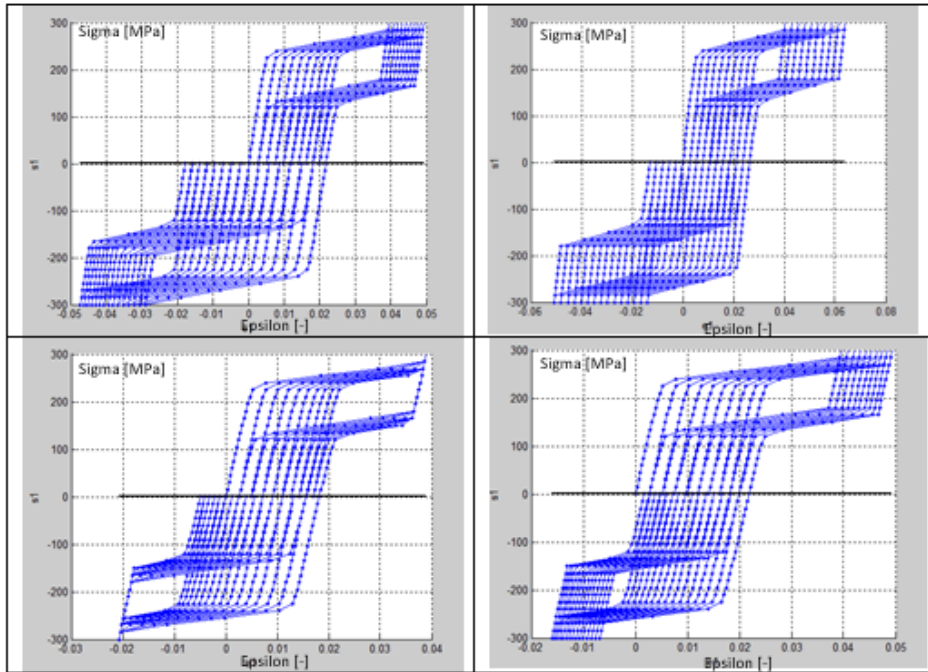


Figura 4.13: Modello Biscari 1, $a = 1$. 10 cicli di trazione seguiti da 15 in compressione, fino a 300 MPa, con passo di 15 MPa. In alto a sinistra $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$, in alto a destra $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, in basso a sinistra $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, in basso a destra $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$.

dimensione. Infatti ponendo $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$ si riottiene il modello di Auricchio, con il problema per cui, nonostante ci sia stato un accumulo di deformazione inelastica durante i cicli di trazione, in compressione il plateau appare di lunghezza maggiore. Attivando k_1 si ottiene un modello in cui il dominio di trasformazione di fase è centrato in \mathbf{q} , con raggio (quindi l'ampiezza del plateau) fisso. Anche questa situazione è errata, in quanto le curve mostrano un plateau che non si riduce al progredire della fatica, ma che semplicemente trasla. Viceversa nel modello con solo $k_2 = 1$ si ottiene un dominio di trasformazione di fase di raggio variabile, ma che rimane centrato nell'origine. Questo comporta che al procedere dell'accumulo di deformazione per fatica il plateau progressivamente si riduce. Tuttavia visto che il dominio di \mathbf{e}^{tr} è centrato nell'origine, la riduzione del plateau appare troppo significativa, comportando che il ramo elastico corrispondente alla martensite progressivamente trasli verso deformazioni minori. Inoltre passando in compressione rimane il problema per cui il plateau appare dilatato. Solo ponendo $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$, situazione corrispondente proprio al modello proposto dal gruppo di Biscari, si ottiene il comportamento desiderato.

La Fig. 4.13 mostra il medesimo test attivando le deformazioni plastiche ($a = 1$): si hanno degli effetti non desiderati, che possono essere spiegati con il fatto che l'accumulo di deformazione irreversibile è presente in due punti del modello. Infatti, ricordando l'equazione (4.64), si nota la presenza di \mathbf{q} sia all'interno del termine

legato allo sforzo elastico, coerentemente con la (4.46), sia del termine $\beta \langle T - M_f \rangle$, che determina la riduzione della lunghezza del plateau. L'inserimento del tensore di fatica nei due punti è corretto nel caso siano presenti deformazioni plastiche macroscopiche, in quanto permette di tenere conto dello shift verso destra delle curve sforzo-deformazione in seguito alla deformazione plastica prodotta, sia della riduzione del plateau; risulta invece non corretto nel caso della sola fatica. In quest'ultima situazione le curve non dovrebbero subire nessuna traslazione, ma solo una riduzione del plateau; in altre parole considerando il tensore \mathbf{q} responsabile solo dell'effetto di fatica, non lo si dovrebbe porre nel termine elastico. Questo evidenzia un limite del modello, che deriva dalla semplificazione di aver considerato la deformazione plastica proporzionale al tensore di fatica funzionale: $\mathbf{e}^{pl} = a\mathbf{q}$. La Fig. 4.13 mostra che nel caso di $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$, situazione corrispondente al modello di Auricchio, sia sempre presente il problema della lunghezza del plateau al passaggio in compressione, inoltre a questo si aggiunge il fatto che al procedere dell'accumulo di deformazione irreversibile le curve subiscono una progressiva traslazione, causata dall'aver posto $a = 1$. Tale spostamento delle curve sforzo-deformazione è anche visibile nel caso in cui si attivi solo il parametro k_1 . Attivando invece solamente k_2 il fenomeno di traslazione non è presente, infatti il ramo elastico della martensite relativo a tutti i cicli meccanici appare sovrapposto; tuttavia rimane il problema della lunghezza maggiore del plateau quando si passa in compressione. Neppure il caso con $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$, situazione corrispondente al modello di Biscari, permette di ottenere buoni risultati, in quanto considerare l'influenza di \mathbf{q} in due punti del modello causa un eccessivo accumulo di deformazione ad ogni ciclo meccanico, che porta al fenomeno di traslazione del ramo elastico della martensite.

Avendo studiato quale sia l'effetto della nuova formulazione del dominio di trasformazione di fase (Eq. 4.66) attivando in modo separato i parametri k_1 e k_2 , responsabili rispettivamente della variazione della sua posizione e della sua dimensione, da qui in poi si considera il modello con $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$, ovvero il modello originale di Biscari.

Si riportano in Fig. 4.14 ($a = 0$) e 4.15 ($a = 1$) le curve dettagliate di una prova con 10 cicli di trazione seguiti da 15 in compressione, fino a 300 MPa, con passo di 15 MPa. Il parametro H , che regola la saturazione dell'accumulo di deformazione irreversibile, è stato attivato e posto pari a 15000 MPa. Dalla Fig. 4.14, corrispondente alla situazione con $a = 0$, si può dedurre che i problemi che il modello di Auricchio presentava nel momento in cui si attivava il parametro H sono stati qui completamente risolti; nelle curve si vede chiaramente la presenza della saturazione del fenomeno di accumulo, che avviene senza problemi di convergenza dell'algoritmo implementato. La saturazione non appare in Fig. 4.15: nel caso in cui $a = 1$, osservando l'andamento della variabile \mathbf{Q} si nota che questa al termine della prova non è ancora arrivata ad annullarsi. Il verificarsi dell'annullamento di \mathbf{Q} , causato dall'a-

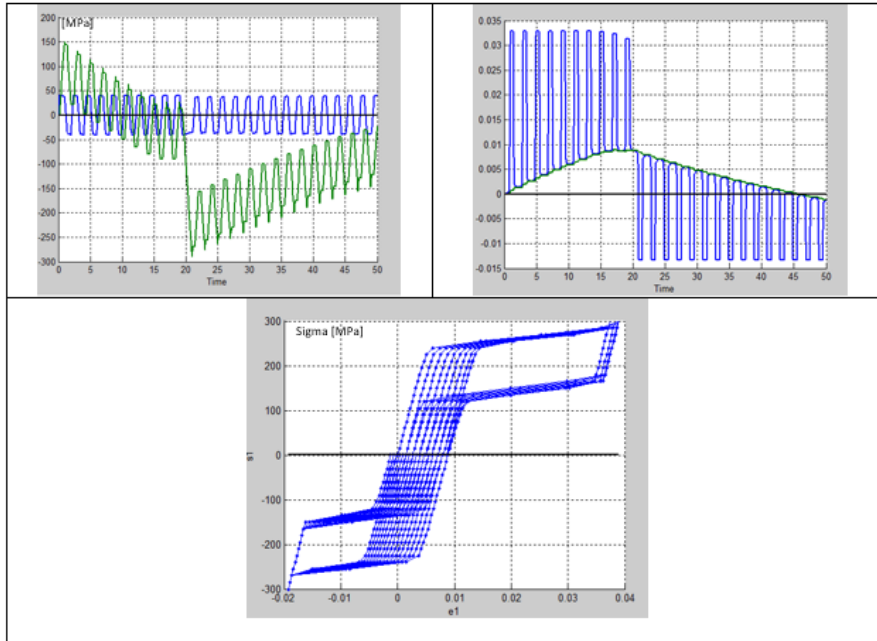


Figura 4.14: Modello Biscari 1, con $a = 0$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

zione del parametro H , è infatti la situazione che permette di fermare il fenomeno di accumulo di deformazione inelastica. Sarebbe quindi che attivando il parametro a il fenomeno di saturazione venga rallentato. Inoltre sono evidenti i problemi già citati per cui se $a = 1$ le curve sforzo-deformazione esibiscono una progressiva traslazione.

In Fig. 4.16 è mostrata invece una situazione intermedia rispetto alle due precedenti, ovvero con $a = 0.2$. Si vede che se il valore di tale parametro è opportunamente tarato, i problemi descritti possono essere limitati, cogliendo in modo più realistico il fenomeno della fatica. In questa prova infatti il fenomeno di traslazione è meno evidente, inoltre è presente la saturazione dell'accumulo di deformazione irreversibile dovuto all'azione di H .

Un grafico utile è quello in Fig. 4.17, in cui si mostra il confronto della curva sforzo-deformazione con quella del modello di Auricchio. Il passaggio tra trazione e compressione viene ora correttamente catturato, inoltre lo sforzo di inizio trasformazione di fase si mantiene costante, invece di aumentare progressivamente, risolvendo uno degli aspetti criticabili del lavoro precedente.

Ultimo test effettuato su tale modello riguarda il tentativo di giungere alla soglia di plasticità macroscopica, con una prova di trazione di fino a 1200 MPa, con 50 sottopassi di carico di ampiezza 24 MPa. I risultati sono mostrati in Fig. 4.18, in cui si nota che nel modello che utilizza la norma 1 non si riesce a cogliere il fenomeno

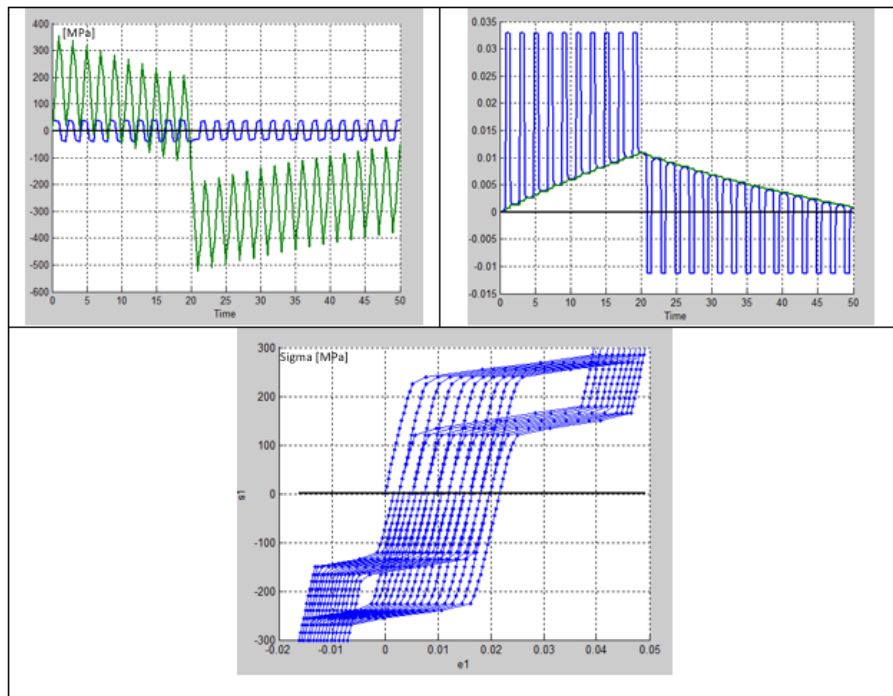


Figura 4.15: Modello Biscari 1, con $a = 1$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione . In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

4. Implementazione e confronto di due modelli costitutivi per le SMA

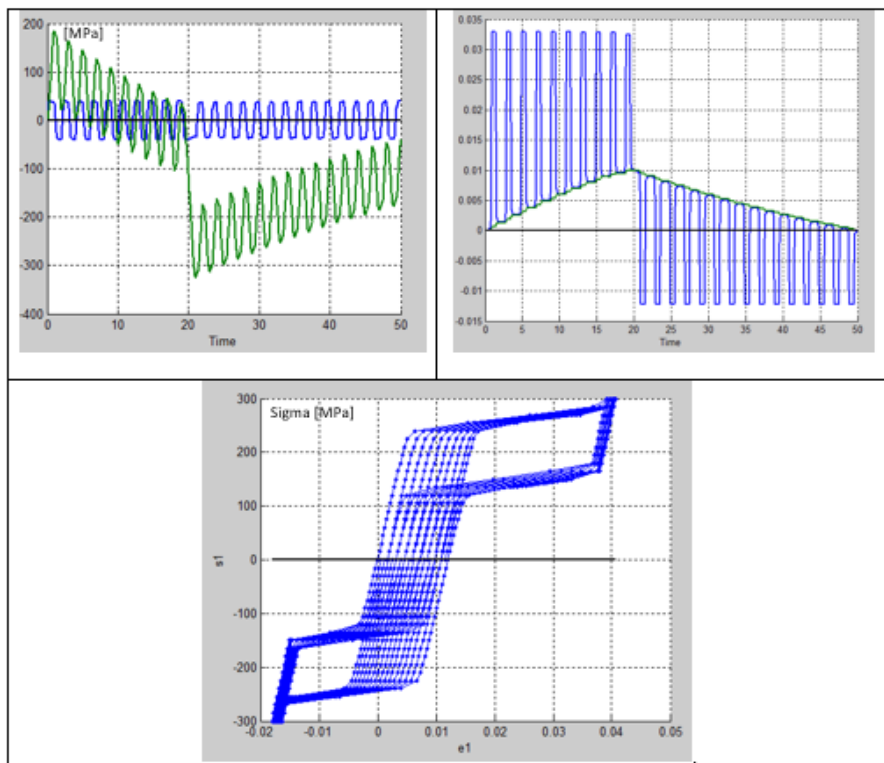


Figura 4.16: Modello Biscari 1, con $a = 0.2$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

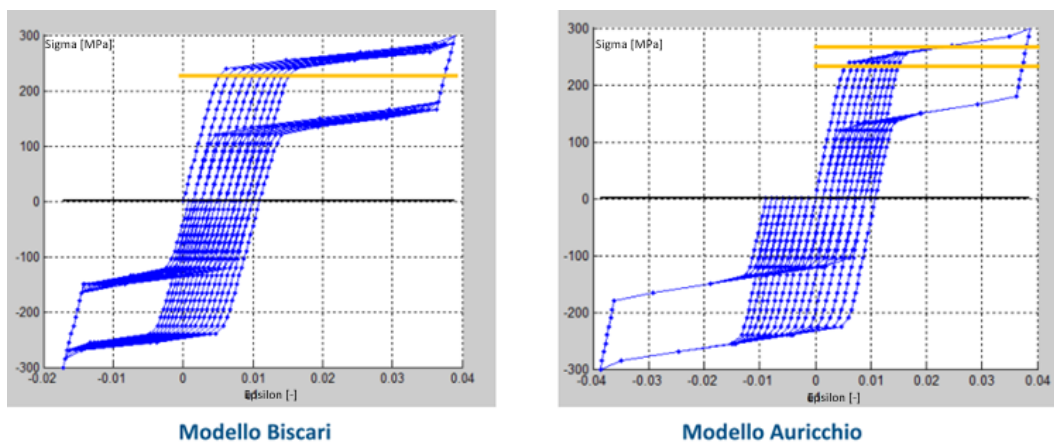


Figura 4.17: Curva sforzo-deformazione, confronto con il modello di Auricchio

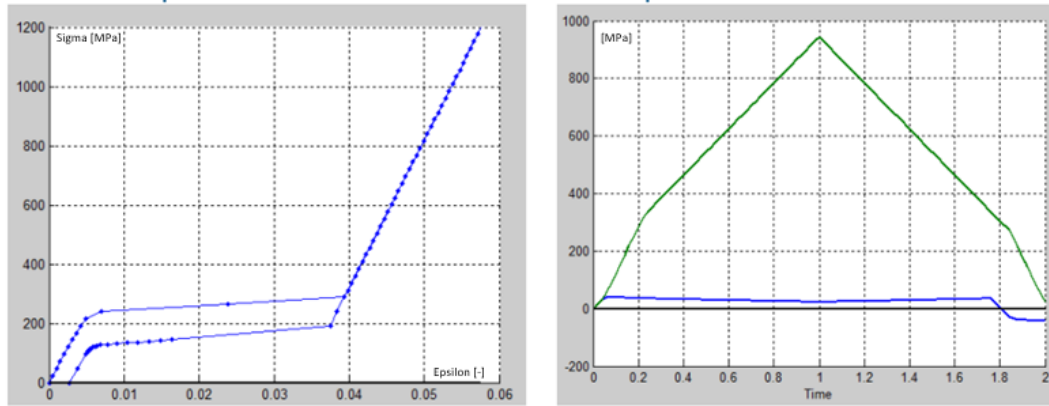


Figura 4.18: Modello Biscari 1. Prova di trazione fino a 1200 MPa, con $a = 1$ e $H = 15000$ MPa. A sinistra curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. A destra evoluzione nel tempo di $\|\mathbf{X}\|$ e $\|\mathbf{Q}\|$, rispettivamente in blu ed in verde.

di snervamento; inoltre se si guarda attentamente l'andamento di \mathbf{X} si nota una lieve diminuzione, a causa del contemporaneo incremento di \mathbf{Q} . Se si aumentasse in modo eccessivo il carico, fino al punto in cui $\|\mathbf{X}\| = 0$, il codice sicuramente non riuscirebbe a trovare una soluzione, in quanto l'equazione (4.67) non potrebbe venire soddisfatta. Tale problema nasce dal fatto che ora l'espressione della variabile \mathbf{Q} , Eq. (4.65), dipende anche dallo sforzo applicato, ovvero da una quantità che può crescere indefinitamente.

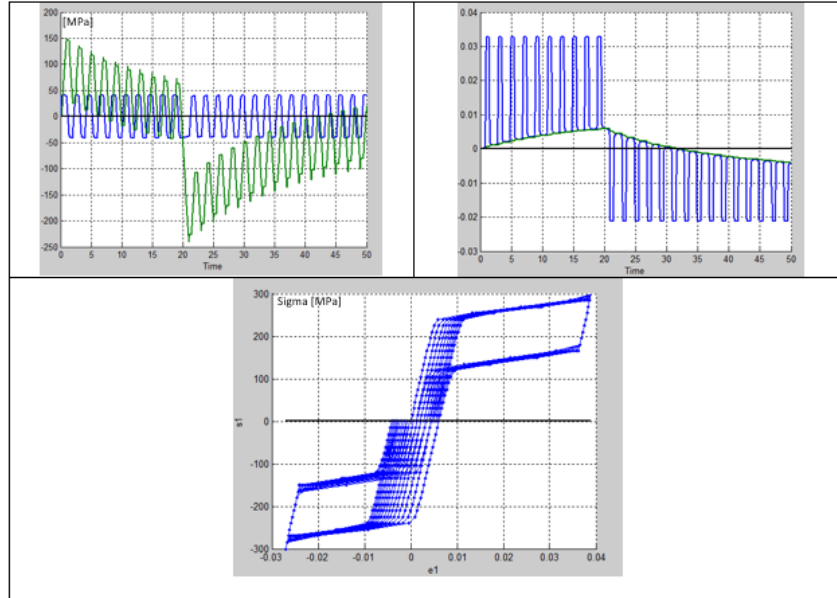
Modello Biscari 2

Si ricorda che i test di questo modello sono stati effettuati con gli stessi parametri della Tab. (4.2), con l'unica differenza che $k = 0.07$, in quanto il valore impostato precedentemente risultava essere troppo piccolo in questa situazione, non permettendo di cogliere i comportamenti desiderati.

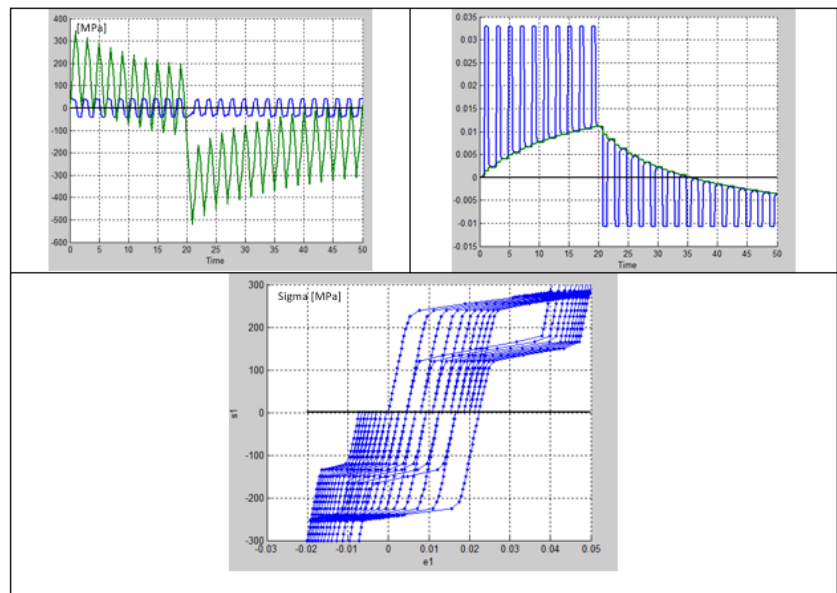
I primi test effettuati sono relativi a 10 cicli di trazione, seguiti da 15 in compressione, fino a 300 MPa con 20 sottopassi di carico di 15 MPa. Si riportano in Fig. 4.19a le curve ottenute riferite al caso con $a = 0$, in Fig. 4.19b quelle relative al caso con $a = 1$.

Anche in questo modello si notano gli stessi problemi di quello che utilizzava la norma 1: attivando il parametro a , ovvero la presenza delle deformazioni plastiche, nel caso in cui si abbia fatica le curve si presentano con una traslazione non desiderata, che deriva sempre dalla semplificazione effettuata di aver considerato deformazioni plastiche e tensore di fatica proporzionali fra loro. Avendo posto il parametro $H = 15000$ MPa, nella situazione con $a = 0$ è presente la saturazione. Questa non è invece presente quando $a = 1$, come anche avveniva nel modello Biscari 1. In Fig. 4.19 è mostrata una situazione intermedia con $a = 0.2$: come nel caso del modello Biscari 1, una scelta adeguata di tale parametro permette di mantenere attive le

4. Implementazione e confronto di due modelli costitutivi per le SMA



(a) Modello Biscari 2, $a = 0$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.



(b) Modello Biscari 2, $a = 0$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

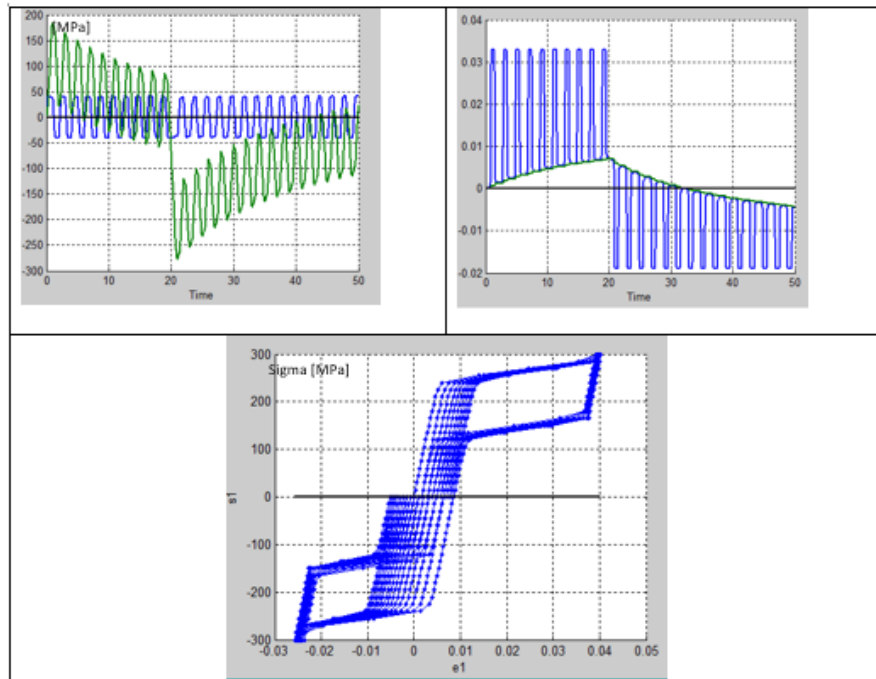


Figura 4.19: Modello Biscari 2, con $a = 0.2$ e $H=15000$ MPa. 10 cicli di trazione seguiti da 15 cicli in compressione. In basso al centro curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} . In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

deformazioni plastiche ($a > 0$) limitando gli aspetti negativi quali la traslazione dei grafici durante la fatica. Inoltre anche in tale condizione si nota la presenza della saturazione del fenomeno di accumulo.

I test successivi indagano invece l'eventuale presenza della capacità del modello di tenere conto dello snervamento del materiale; in tali prove si sono attivate le deformazioni plastiche ponendo $a = 1$. La Fig. 4.20 mostra una prova di trazione fino a 1200 MPa, con 50 passi di carico di 24 MPa, in cui $H=15000$ MPa. Effettivamente si nota che il fenomeno viene correttamente catturato, nonostante si siano evidenziate difficoltà numeriche del codice nel riuscire a trovare la soluzione del modello. Tali problemi probabilmente non erano stati notati nel lavoro originale in quanto per la risoluzione delle equazioni si sfruttavano le capacità della funzione $f_{solve}()$ di MATLAB. Il test di Fig. 4.21 mostra la stessa prova precedente, seguita da 2 cicli di carico e scarico fino a 300 MPa. Come ci si aspetta il plateau si è ormai notevolmente ridotto, ma è presente un fenomeno non propriamente corretto: i cicli più piccoli invece di provocare un ulteriore accumulo di deformazione causano un recupero della deformazione irreversibile, che si evidenzia come una progressiva traslazione verso sinistra delle curve sforzo-deformazione. Ciò è dovuto al fatto che la variabile Q rimane su valori negativi a causa della presenza del parametro H , imponendo una

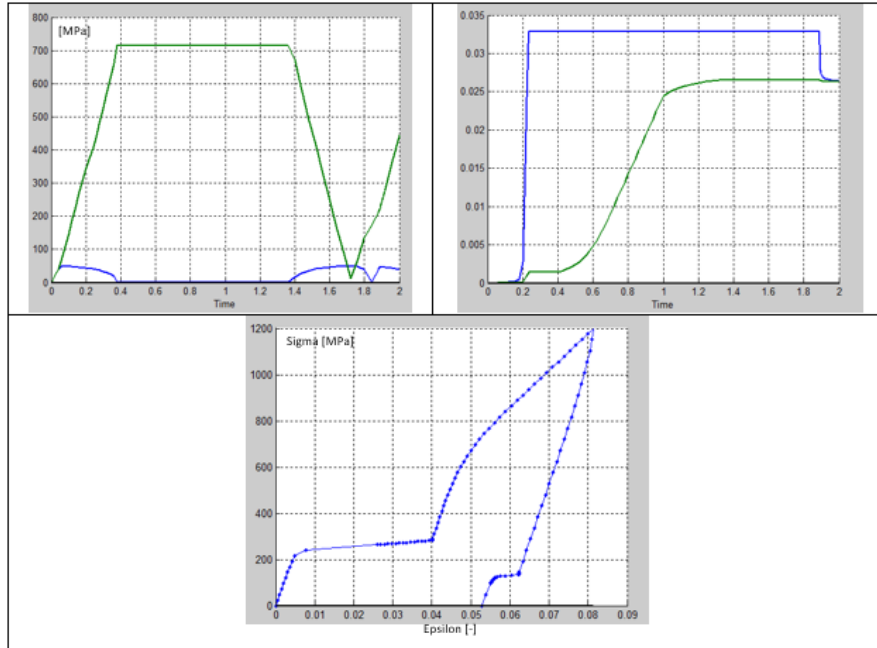


Figura 4.20: Modello Biscari 2, con $a = 1$ e $H = 15000$ MPa. Prova di trazione fino a 1200 MPa. In basso curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a sinistra evoluzione nel tempo di $\|\mathbf{X}\|$ e $\|\mathbf{Q}\|$, rispettivamente in blu ed in verde; in alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} .

progressiva riduzione di \mathbf{q} .

Modello Biscari ∞

Gli ultimi test effettuati riguardano il modello che utilizza due funzioni limite differenti per stabilire le soglie di inizio trasformazione di fase e snervamento del materiale; si utilizzano sempre i parametri della Tab. (4.2), con la differenza che $k = 0.05$, in modo che ne consegua una soglia di plasticità macroscopica corrispondente alla situazione: $Q_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{R}{k} \cong 800$ MPa, per l'Eq. (4.56).

I primi test riguardano i cicli di carico e scarico a 300 MPa; in Fig. 4.22 si mostrano solamente i risultati della simulazione dei primi 3 cicli, che sono già sufficienti per affermare che la fatica non viene più colta, in quanto le curve appaiono totalmente sovrapposte. Ciò è concorde al fatto che la soglia di snervamento, che coincide con quella per l'attivazione dell'evoluzione di \mathbf{q} , ponendo $k = 0.05$ corrisponde a $Q_{11} \cong 800$ MPa, valore a cui non ci si riesce ad avvicinare nel corso della prova; se si aumentasse il parametro k ovviamente si riuscirebbe ad abbassare la soglia a valori più bassi, permettendo l'evoluzione di \mathbf{q} , ma vanificando la possibilità di cogliere invece lo snervamento corrispondente a valori elevati dello sforzo imposto.

Mantenendo $k = 0.05$ e $a = 1$, la prova di trazione fino a 1200 MPa con 50 sottoincrementi di carico di 24 MPa, è mostrata in Fig. 4.23, in cui sono evidenti

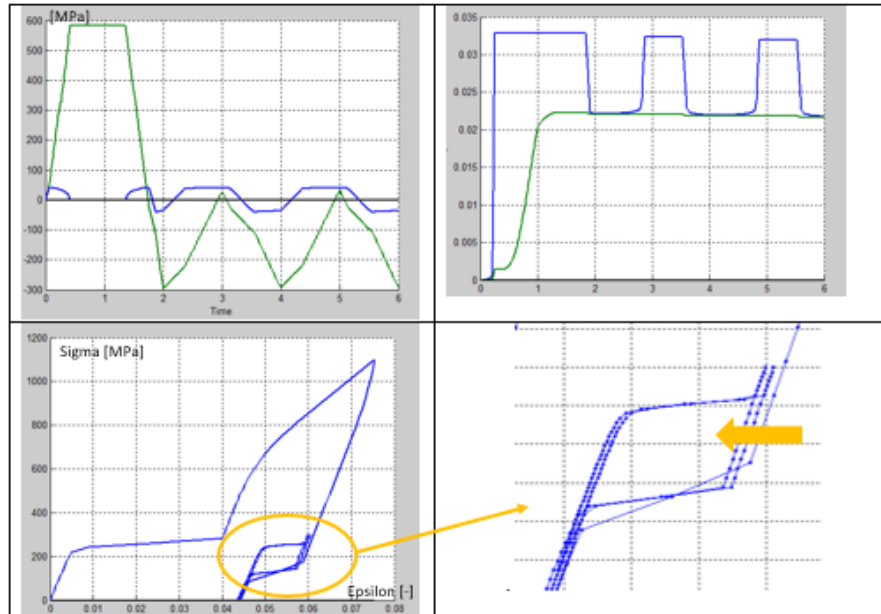


Figura 4.21: Modello Biscari 2, con $a = 1$ e $H = 15000$ MPa. Prova di trazione fino a 1200 MPa, seguita da cicli minori di carico e scarico. In basso a sinistra curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$, in basso a destra un ingrandimento che mostra come l'accumulo di deformazione proceda nella direzione sbagliata in seguito a plasticizzazione. In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde; in alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} .

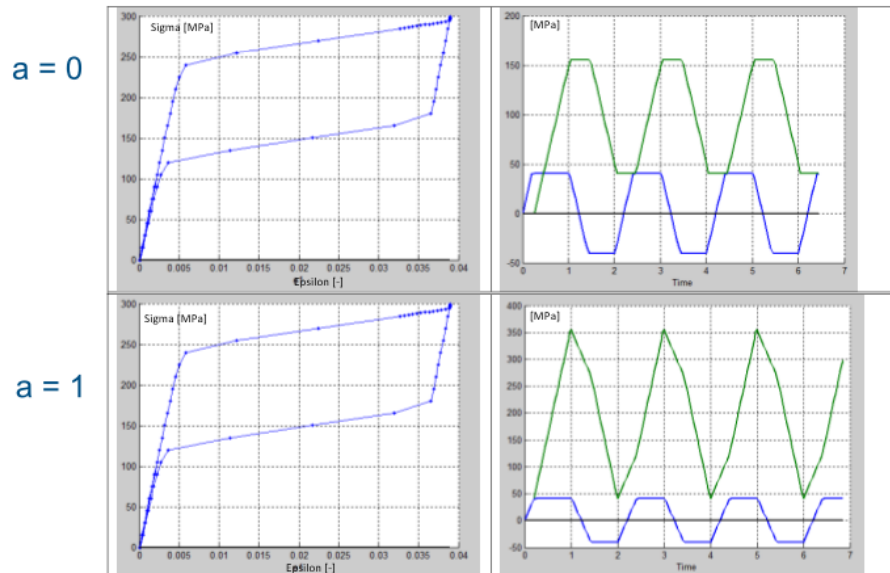


Figura 4.22: Modello Biscari ∞ , con $H = 15000$ MPa. Prova di trazione fino a 300 MPa, ripetuta 3 volte, con 20 sottointervalli di carico di 15 MPa. A sinistra curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. A destra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde.

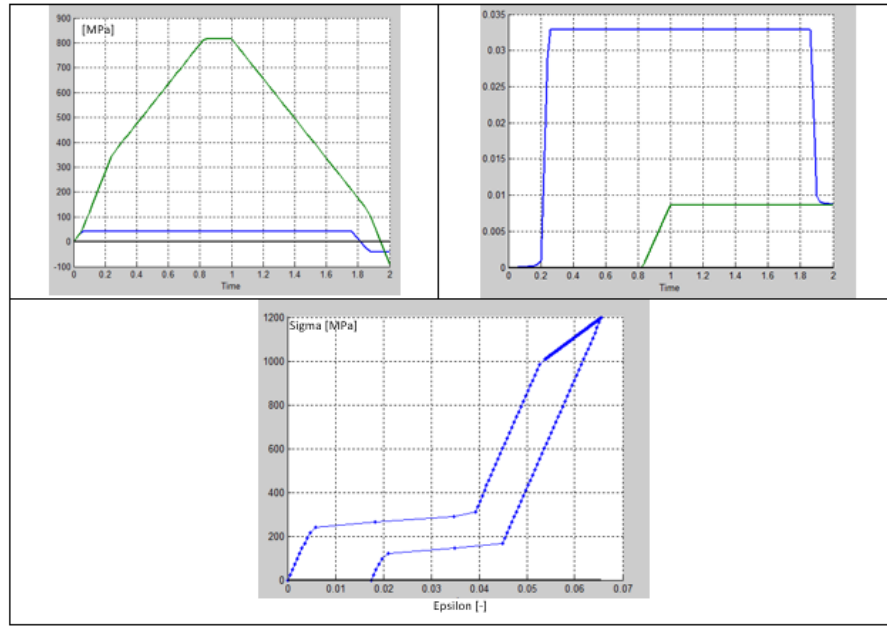


Figura 4.23: Modello Biscari ∞ , con $a = 1$ e $H = 15000$ MPa. Prova di trazione fino a 1200 MPa. In basso curva sforzo-deformazione $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$. In alto a sinistra evoluzione nel tempo di X_{11} e Q_{11} , rispettivamente in blu ed in verde; in alto a destra evoluzione nel tempo di e_{11}^{tr} in blu, e in verde quella di q_{11} .

gli effetti che le deformazioni plastiche causano sul plateau di trasformazione di fase, riducendolo significativamente. Si evidenzia qui un altro problema, in realtà comune a tutte e tre le formulazioni del modello di Biscari, ovvero che esistono dei problemi di convergenza della soluzione del modello nel momento in cui le deformazioni plastiche superano l'ampiezza del plateau di trasformazione di fase. Infatti quando $\|\mathbf{q}\| = \varepsilon_L(0)$, ne consegue per l'Eq. (4.48) che $\varepsilon_L(t) = 0$, ovvero l'Eq. (4.47) diventa:

$$\|\mathbf{e}^{tr} - \mathbf{q}\| = 0$$

che determina che \mathbf{q} non possa crescere oltre al valore massimo assunto da \mathbf{e}^{tr} . Bisogna però notare che questa è una situazione difficilmente verificabile nelle applicazioni di interesse, dove si vuole evitare di raggiungere la plasticità del materiale per non perdere le proprietà legate alla pseudoelasticità.

4.3.4 Discussione risultati ottenuti

Il modello di Biscari ha evidenziato l'indubbio vantaggio di modificare opportunamente il dominio di trasformazione di fase, in modo da modellizzare correttamente il passaggio da condizioni di carico di trazione a condizioni di compressione. Inoltre viene risolto un ulteriore aspetto del lavoro di Auricchio, nel quale alla disattivazio-

ne del parametro A si mostrava l'inconveniente di ottenere un progressivo aumento dello sforzo iniziante la trasformazione di fase. Nei modelli appena testati la legge di incrudimento imposta alla variabile e^{tr} è leggermente modificata, in modo che lo sforzo critico rimane costante durante l'accumulo di deformazione irreversibile; questo costituisce però uno svantaggio, in quanto non permette di cogliere il fenomeno degradativo mostrato dai dati sperimentali.

Il punto critico del lavoro di Biscari è il fatto di non essere riuscito a trovare un'espressione della superficie limite del dominio elastico che garantisca la corretta rappresentazione dei fenomeni di plasticità e fatica in modo simultaneo. Nel caso dell'utilizzo della norma 1, infatti, lo snervamento non è catturato; viceversa il caso con la norma del massimo non modella la fatica. L'utilizzo della norma euclidea sembrerebbe superare questo limite, tuttavia durante le simulazioni sono stati riscontrati notevoli problemi per la convergenza della soluzione del modello, probabilmente legati alla complessità delle derivate delle equazioni presenti; non da meno, si è visto che anche in questo caso sono presenti degli effetti sicuramente contrari all'evidenza sperimentale.

Altra problematica riguarda l'approssimazione introdotta legando le deformazioni plastiche al tensore di fatica, che dà origine ad un limite sulla possibile evoluzione della plasticità macroscopica, sperimentalmente ingiustificato; altro fenomeno legato sempre a tale approssimazione è che durante delle prove cicliche, in presenza di fatica si ottiene una traslazione delle curve sforzo-deformazione, determinata dal considerare le deformazioni plastiche in due punti diversi delle equazioni del modello.

Ultimo aspetto, comunque comune a tutti i modelli che partono da quello di Souza-Auricchio-Petrini, è la mancata rappresentazione della diverse proprietà elastiche di austenite e martensite, oltre al fatto di assumere una funzione limite del dominio elastico simmetrica in trazione e compressione.

Capitolo 5

Proposta di un nuovo modello costitutivo e confronto con i dati sperimentali

5.1 Considerazioni iniziali

I modelli costitutivi per le SMA ad oggi implementati nei software commerciali per simulazioni basate sul metodo agli elementi finiti si limitano a cogliere i classici fenomeni di pseudoelasticità e memoria di forma, non includendo nella loro formulazione nessun aspetto legato all'instaurarsi di comportamenti plastici. In alcuni lavori di tesi svolti in passato si è invece mostrato come tale limitazione possa essere significativa nel ridurre le capacità predittive di un modello numerico. Per esempio nella tesi di dottorato di Dordoni (2014) [8] è presente un'analisi numerica di un dispositivo per la sostituzione percutanea della valvola aortica, ovvero un dispositivo costituito da una struttura autoespandibile in SMA con all'interno una valvola aortica biologica. Tale oggetto, una volta crimpato all'interno di un catetere, viene portato nel luogo di impianto e qui rilasciato, in modo che, sfruttando la proprietà pseudoelastica, possa recuperare la forma espansa originaria permettendo il corretto posizionamento della valvola. Si evince che il crimpaggio, che viene sfruttato per ridurre il diametro del dispositivo da 30 mm fino ad 8 mm, può causare notevoli deformazioni, che possono determinare la comparsa di deformazioni plastiche irreversibili nella SMA. La Fig. 5.1, presa dal lavoro di tesi citato, mostra il confronto tra la curva sperimentale di trazione della lega NiTi con cui è stato costruito il dispositivo, con la curva di trazione ottenuta mediante il modello costitutivo per le SMA presente nel codice commerciale ANSYS Mechanical APDL 14.0 (Ansys Inc., Canonsburg, PA, USA). Tale modello non è in grado di descrivere la plasticità, mentre tiene conto delle diverse proprietà elastiche di austenite e martensite. E' evidente come utilizzando il modello numerico si introduca una notevole semplificazione, in quanto a parità di deformazione

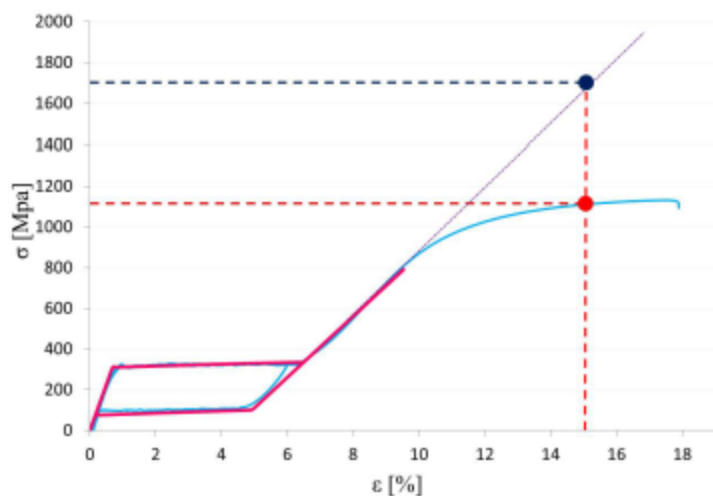


Figura 5.1: Confronto tra curve monoassiali sforzo-deformazione ottenute da dati sperimentali (blu) e da un modello numerico che non catturi la plasticità (rosso e grigio) [8]

subita il modello prevede il raggiungimento di valori di sforzo nettamente superiori a quanto il materiale potrebbe sopportare e, allo stesso tempo, ignorando la plasticità un completo recupero della forma originaria al rilascio del catetere; in presenza di snervamento del materiale invece ciò non può avvenire, come verificato sperimentalmente (Fig. 5.2). Inoltre la valvola, durante il suo funzionamento, è soggetta a cicli di apertura e chiusura che causano sollecitazioni cicliche del materiale. L'incapacità del modello di descrivere la modifica del comportamento meccanico indotta dai carichi ciclici non permette di prevedere correttamente il comportamento a fatica del dispositivo.

Si è quindi ritenuto necessario provvedere alla formulazione di un modello costitutivo per le SMA che sia in grado di modellare i fenomeni di fatica e plasticizzazione. Analizzando la letteratura presente (Cap. 2) si è visto che negli ultimi anni sono stati pubblicati numerosi modelli che si pongono tale scopo (Sez. 2.4.3), che tuttavia presentano delle limitazioni. Inoltre piuttosto di formulare un modello totalmente nuovo, si è deciso di utilizzare come base di partenza il modello di Souza-Auricchio-Petrini, già utilizzato in altri lavori ed anche implementato in software commerciali, aggiungendovi gli aspetti mancanti.

In particolare partendo dallo studio accurato delle proposte di modifica del modello di Souza-Auricchio-Petrini presenti nei lavori di Auricchio et al. (2007) e Barrera et al. (2014), sezioni (4.2) e (4.3) rispettivamente, si è formulato un nuovo modello in grado di superare le limitazioni mostrate da quelli precedenti. La base di partenza è costituita dalle seguenti considerazioni:

- nel lavoro di Auricchio la particolare scelta del dominio elastico oltre che l'intro-

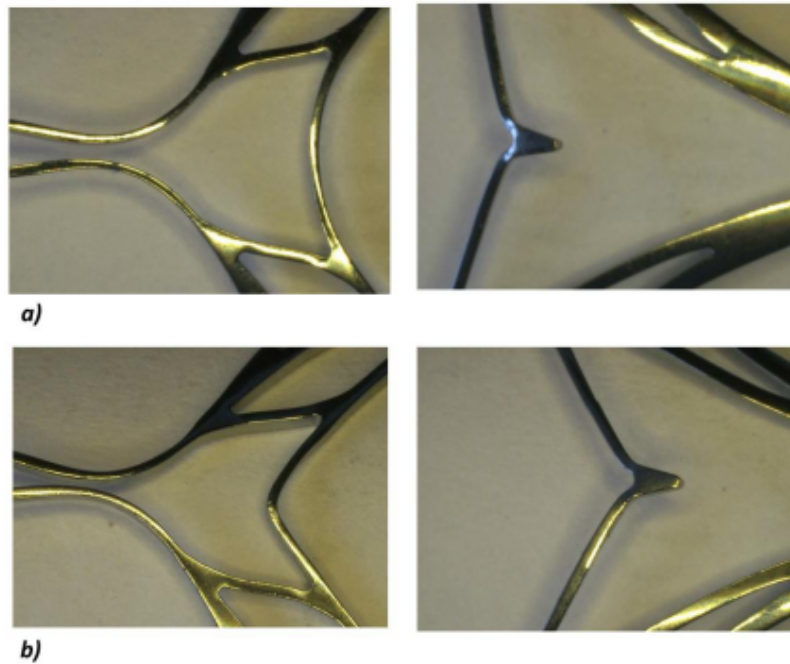


Figura 5.2: Immagini delle zone critiche del dispositivo per la sostituzione della valvola aortica, prima (a) e dopo il crimpaggio (b) [8]

duzione di una variabile tensoriale rappresentante la deformazione accumulata per fatica permette effettivamente di cogliere tale fenomeno, senza andare ad incidere su altri aspetti del modello originale di Souza-Auricchio-Petrini e soprattutto aggiungendo una complessità minima alle equazioni. Tuttavia tale modo di procedere non permette di modellare completamente il fatto che l'accumulo di fatica procede più velocemente nei primi cicli, per poi in seguito rallentare, come evidenziato nei test meccanici descritti nel Cap. 3. Infatti nel modello di Auricchio è presente un meccanismo di rallentamento più graduale, in grado di portare al termine del fenomeno di accumulo in seguito ad un certo valore di fatica raggiunto, ma non si riesce a cogliere come nei primi quattro-cinque cicli meccanici l'accumulo sia molto più evidente dei successivi. Inoltre il termine proposto da Auricchio per modellizzare la saturazione del fenomeno di accumulo causa nel codice problemi di convergenza nella ricerca della soluzione delle equazioni del modello. Per riuscire a bloccare l'accumulo di deformazione per fatica, la scelta è stata, per semplicità, di abbandonare qualsiasi termine che potesse modellizzare la saturazione, ma semplicemente all'interno dell'algoritmo discreto bloccare l'evoluzione delle grandezze relative alla fatica al raggiungimento di una certa soglia.

- nello stesso lavoro si cerca di accompagnare l'accumulo di deformazione irreversibile con il fenomeno di degradazione, ovvero con il progressivo abbattimento

dello sforzo di inizio trasformazione di fase. Come però fatto notare (Sez. 4.2.3), la formulazione utilizzata per introdurre la degradazione crea delle problematiche nel momento in cui si effettua il passaggio da trazione a compressione; non da meno, i test effettuati mostrano in realtà anche un abbassamento del plateau inferiore, che rispetto al comportamento sperimentale delle leghe NiTi è esageratamente pronunciato. Da queste riflessioni ne consegue che non si possa utilizzare lo stesso procedimento usato da Auricchio, piuttosto per evitare i problemi al passaggio da trazione a compressione risulterebbe più efficace riuscire a stabilire un'interazione fra deformazione accumulata ed il termine $\tau_M = \beta \langle T - M_f \rangle$ presente nella definizione del potenziale termodinamico, responsabile effettivamente del posizionamento dello sforzo medio dell'isteresi meccanica. Per risolvere invece la questione di come riuscire ad ottenere un abbassamento del plateau sottostante meno significativo rispetto a quanto accade a quello di trasformazione diretta, non si può fare a meno di evitare di introdurre non solo una dipendenza di τ_M dalla deformazione irreversibile, ma anche una dipendenza da essa di R , parametro che stabilisce l'ampiezza dell'isteresi meccanica presente in una prova monoassiale di trazione. Giocando in modo opportuno sulla posizione della «bandiera pseudoelastica» e sulla sua ampiezza, si potrebbe effettivamente ottenere il risultato desiderato.

- tra tutte le formulazioni del modello di Barrera et al. (2014) si è deciso di optare per la scelta di una funzione di dissipazione definita con la norma del massimo, che si traduce nella completa indipendenza dei fenomeni di trasformazione di fase e di snervamento, garantendo una libertà maggiore nella formulazione del modello.
- la scelta della norma del massimo, che si è visto essere in grado di catturare la plasticità macroscopica, tuttavia causa la perdita di capacità di modellizzare contemporaneamente la fatica (Sez. 4.3.3). Per superare tale inconveniente la scelta è di continuare ad utilizzare una formulazione della funzione di dissipazione basata sul massimo di due quantità, la prima rappresentante la superficie limite usata per la plasticità classica, la seconda uguale alla superficie limite definita da Auricchio per la trasformazione di fase, che automaticamente permette di cogliere la fatica.
- una conseguenza del punto precedente è la necessità di separare in modo netto le variabili che rappresentano le deformazioni plastiche rispetto a quelle che tengono conto della deformazione irreversibile dovuta alla fatica. L'ipotesi di considerare queste grandezze proporzionali fra loro porterebbe a risposte del modello non desiderate, come evidenziato nella discussione dei risultati ottenuti dall'implementazione del modello di Barrera et al. (2014).

- nella modellizzazione della plasticità, in accordo con i dati sperimentali (Sez. 3.1.5), non si deve fare nessuna distinzione sul valore della soglia di snervamento nel caso di test effettuati a bassa o alta temperatura. Inoltre le leggi evolutive della deformazione plastica si suppone siano quelle di una plasticità isotropa, come anche scelto da alcuni modelli presenti in letteratura (Sez. 2.4.3); ovviamente in presenza di dati sperimentali che evidenzino che il comportamento plastico sia in realtà cinematico, basterebbe un cambiamento minimo delle equazioni.
- in alcuni risultati sperimentali ottenuti nel Cap. 3, e in accordo anche con alcuni lavori reperiti in letteratura [9], si vuole che il modello sia in grado di descrivere il comportamento di alcune SMA che esibiscono un progressivo aumento della pendenza del plateau di transizione di fase durante il ciclaggio meccanico.
- in letteratura [9] alcuni test meccanici rivelano che il plateau di trasformazione di fase inversa si abbassa notevolmente in presenza di plasticità. Questo aspetto è stato trovato anche nelle prove sperimentali effettuate presso il Labs, anche se si è notato che è già presente, seppur in maniera meno evidente, anche a livelli di deformazione che non provocano plasticizzazione. Alcuni test effettuati nel Cap. 3 sembrano quindi fare intravedere una relazione tra la deformazione massima applicata e abbassamento del plateau, piuttosto che con la deformazione plastica. Nel modello che verrà formulato si è comunque scelto, per semplicità, di introdurre un abbattimento dello sforzo del plateau inferiore in maniera proporzionale alla deformazione plastica accumulata.
- sarebbe opportuno introdurre una dipendenza dei parametri elastici del materiale dal tipo di fase presente, ovvero il fatto che austenite e martensite abbiano differenti moduli di Young. In letteratura si è già notato come siano state proposte due differenti soluzioni per superare questa limitazione (Sez. 2.4.2): la prima è quella di Auricchio et al. (2009) [15] che consiste nel considerare una dipendenza del modulo di Young del materiale dalla frazione di martensite, introducendo un modello di Reuss per considerare i contributi dati da martensite e austenite. La seconda è la soluzione proposta da Urbano et al. (2015) [6], che molto più semplicemente introduce nel potenziale termodinamico due differenti formulazioni del termine di hardening relativo alla trasformazione di fase, una valida prima del termine del plateau e una valida al completamento della trasformazione di fase. Nel caso si scegliesse la soluzione di Urbano le equazioni del modello risulterebbero più semplici, in quanto si eviterebbe la necessità della presenza della funzione indicatrice, il cui scopo era proprio limitare l'ampiezza del plateau di trasformazione di fase. Inoltre la validità di questa soluzione è già stata verificata nel caso triassiale, mentre invece la soluzione proposta da

Auricchio era stata formulata solamente per una semplice situazione monoassiale. Tuttavia scegliere quest'ultima formulazione permetterebbe di cogliere in modo più adeguato il cambio delle proprietà elastiche all'aumentare della fase di martensite presente, senza nessuna brusca discontinuità come nel caso della soluzione di Urbano. Nel lavoro di Urbano et al. (2015), infatti, il cambio di pendenza avviene solo al termine del plateau di trasformazione, invece sarebbe più realistico un cambiamento graduale delle proprietà elastiche che segua l'evoluzione della transizione dell'austenite in martensite.

- il comportamento delle SMA è asimmetrico in trazione e compressione, tuttavia per semplicità si è deciso di formulare un modello che non tenga conto di questo aspetto. E' anche vero che il modello di Souza-Auricchio-Petrini comprende un dominio elastico introdotto tramite una funzione limite di tipo Prager-Lode, quindi tale aspetto potrebbe essere recuperato nel modello qui formulato seguendo lo stesso procedimento.

5.2 Inserimento dei diversi moduli elastici di austenite e martensite nel modello di Souza-Auricchio-Petrini

Prima di affrontare la formulazione di un nuovo modello costitutivo in grado di descrivere fatica e plasticità, si è valutato quale fosse l'approccio migliore per tenere conto delle diverse proprietà elastiche di martensite ed austenite. Come si è detto nelle considerazioni iniziali di questo capitolo, sfruttando la letteratura ad oggi presente esistono sostanzialmente due strade per riuscire nell'intento: una è rappresentata dalla soluzione proposta da Auricchio et al. (2009) [15], la seconda invece è quella corrispondente al lavoro di Urbano et al. (2015) [6]: nel seguito si descrive come entrambe le soluzioni sono state implementate nel modello di Souza-Auricchio-Petrini e la scelta finale fatta, a valle di alcuni confronti.

5.2.1 Utilizzo del modello di Urbano et al. (2015)

Il lavoro presentato da Urbano et al. (2015) [6] parte dalla stessa formulazione del potenziale termodinamico data nel modello di Souza-Auricchio-Petrini (Sez. 2.4.1), effettuando una modifica al termine di energia legato all'hardening durante la trasformazione di fase, in modo che dipenda da due differenti parametri, che si attivano rispettivamente prima e dopo il completamento della transizione di fase.

$$\Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, T) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \Psi_{tr} + \tau_M\|\mathbf{e}^{tr}\| \quad (5.1)$$

Con Ψ_{tr} definito come:

$$\Psi^{tr} = \begin{cases} \frac{1}{2}h_1 \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 & se \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \frac{1}{2}h_1\varepsilon_L^2 + \frac{1}{2}h_2 (\|\mathbf{e}^{tr}\| - \varepsilon_L)^2 & se \|\mathbf{e}^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.2)$$

Tale modifica si riflette quindi nella definizione di \mathbf{X} , che diventa:

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{e}^{tr}} = \begin{cases} s - (\tau_M + h_1 \|\mathbf{e}^{tr}\|) \frac{\partial\|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial\mathbf{e}^{tr}} & se \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ s - (\tau_M + h_2 (\|\mathbf{e}^{tr}\| - \varepsilon_L) + h_1\varepsilon_L) \frac{\partial\|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial\mathbf{e}^{tr}} & se \|\mathbf{e}^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.3)$$

Una differenza rispetto al modello originale è che ora la variabile \mathbf{e}^{tr} è libera di evolvere anche al termine del plateau di trasformazione di fase: nel modello di Souza-Auricchio-Petrini, infatti, la fine della trasformazione di fase, corrispondente al plateau durante una prova monoassiale di trazione, era ottenuta tramite l'utilizzo di una funzione indicatrice che imponeva il vincolo $\|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L$; nel lavoro di Urbano et al. (2015) tale vincolo non ha più significato, in quanto la fine del plateau avviene attraverso un cambiamento del termine legato all'hardening. Infatti durante il plateau il termine attivo è quello con il parametro h_1 , che rappresenta la pendenza durante il tratto orizzontale della curva e corrisponde al parametro h del modello di Souza-Auricchio-Petrini, mentre quando si vuole terminare la trasformazione si attiva il termine di hardening con il parametro h_2 , che rappresenta la pendenza nel tratto successivo delle curva.

La funzione limite del dominio elastico appare immutata, e pari a:

$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m\frac{J_3}{J_2} - R \leq 0 \quad (5.4)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{X}^2 : \mathbf{1})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{X}^3 : \mathbf{1})$$

da cui deriva la legge di evoluzione per \mathbf{e}^{tr} :

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.5)$$

A questo punto il modello è stato discretizzato, in modo da poter utilizzare come algoritmo risolutivo il metodo iterativo di Newton-Rapshon (Alg. 5.1). Le equazioni del modello vengono quindi scritte in forma residuale; viene introdotta anche una norma regolarizzata in modo che nel calcolo della derivata della norma di alcuni tensori del secondo ordine, che in alcune occasioni potrebbero annullarsi, tale derivata rimanga correttamente definita.

Algoritmo 5.1 Algoritmo discreto per modello di Souza-Auricchio-Petrini con le modifiche introdotte da Urbano et al. (2015)

• **CALCOLO PASSO TRIAL**

$e^{tr,TR} = e_n^{tr}$
if $\|e^{tr}\| < \varepsilon_L(t)$
 vale la formulazione con h_1
else
 vale la formulazione con h_2
end

• **VERIFICA PASSO TRIAL**

$F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR})$
if $F^{TR} < 0$
 passo trial accettabile (elastico)
 $e^{tr} = e^{tr,TR}$
else
 passo trial non accettabile (inelastico)

 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: e^{tr}
 end while

 controllo se vale ancora la formulazione h_1/h_2 , in caso si ricalcola la soluzione ponendosi nell'altro caso

end if

• **AGGIORNAMENTO SFORZO**

$s = 2G(e - e^{tr})$

$$\overline{\|\mathbf{a}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\|\mathbf{a}\|} \frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\mathbf{a}} = \frac{\|\mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \quad (5.7)$$

La nuova legge evolutiva diventa:

$$\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.8)$$

mentre:

$$\Delta\zeta = \int_{t_n}^t \dot{\zeta} dt \quad (5.9)$$

Le equazioni del modello in forma residuale sono:

$$\mathbf{R}^X = \begin{cases} \mathbf{X} - 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + h_1 \mathbf{e}^{tr} + \tau_M c_1 \mathbf{e}^{tr} = \mathbf{0} & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \mathbf{X} - 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + h_2 \mathbf{e}^{tr} + [\tau_M + (h_1 - h_2)\varepsilon_L] c_1 \mathbf{e}^{tr} = \mathbf{0} & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| \geq \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{R}^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R = 0 \quad (5.11)$$

con:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \delta}}$$

Si ricorda, inoltre, che δ è un parametro che determina la regolarità della norma modificata, tale che se $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\|\mathbf{a}\|} \rightarrow \|\mathbf{a}\|$.

Il metodo iterativo di Newton-Rapshon richiede la linearizzazione del sistema di equazioni discrete, quindi il calcolo della matrice che contiene le derivate dei residui rispetto alle variabili del modello:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Ad ogni iterazione del metodo si ottiene il nuovo valore delle variabili di interesse mediante lo schema iterativo seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \end{bmatrix}_n - \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Le derivate dei residui sono riportate nel seguito.

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^X R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = 0 \quad R_{\gamma}^{\Delta\zeta} = 0$$

Se $\|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L$:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + h_1) \Delta\zeta \mathbb{F}^X + \Delta\zeta \tau_M \mathbb{L} \mathbb{F}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X = (2G + h_1) \mathbf{F}^{\hat{X}} + \tau_M \mathbb{L} : \mathbf{F}^{\hat{X}}$$

Se $\|\mathbf{e}^{tr}\| \geq \varepsilon_L$:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + h_2) \Delta\zeta \mathbb{F}^X + \Delta\zeta [\tau_M + (h_1 - h_2) \varepsilon_L] \mathbb{L} \mathbb{F}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X = (2G + h_2) \mathbf{F}^{\hat{X}} + [\tau_M + (h_1 - h_2) \varepsilon_L] \mathbb{L} : \mathbf{F}^{\hat{X}}$$

Dove:

$$\mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \mathbb{B}^X = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} (\mathbb{I} - \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X)$$

$$\frac{\partial [c_1 \mathbf{e}^{tr}]}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbb{L} = c_1 [\mathbb{I} - c_1^2 \mathbf{e}^{tr} \otimes \mathbf{e}^{tr}]$$

$$\mathbf{F}^X = \left(1 - \frac{4mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^3}\right) \mathbf{N}^X + 2m (\mathbf{N}^X)^2 \quad \mathbf{F}^{\hat{X}} = \mathbf{F}^X - \frac{2}{3} m \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^X &= \frac{12mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^4} \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X - \frac{4m}{\|\mathbf{X}\|} \left(\mathbf{N}^X \otimes (\mathbf{N}^X)^2 + (\mathbf{N}^X)^2 \otimes \mathbf{N}^X \right) + \\ &+ \left(1 - \frac{4mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^3}\right) \mathbb{B}^X + \frac{2m}{\|\mathbf{X}\|} (\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{N}^X + \mathbf{N}^X \boxtimes \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Con il simbolo \boxtimes si denota un particolare prodotto tensoriale, come definito nel lavoro di Del Piero [59].

Si completa il modello con il calcolo di un tensore tangente del quanto ordine, $\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\varepsilon}$, che ha espressione:

$$\mathbb{D} = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} \quad (5.14)$$

Tabella 5.1: Parametri utilizzati per i test sul modello di Souza-Auricchio-Petrini con le modifiche proposte da Urbano et al. (2015)

E [MPa]	ν	T[K]	M_f [K]	h_1 [MPa]
50000	0.35	298	223	1000
β [MPa/K]	ε_L	R[MPa]	δ	h_2 [MPa]
2	0.04	50	10^{-7}	25000

Si ricorda che $\mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ e che \mathbb{E} ha la stessa espressione che viene fornita nel lavoro originario di Auricchio-Petrini [12,13], ovvero:

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \Delta\zeta \mathbb{F}^X & \mathbf{F}^{\dot{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

A questo punto per poter testare il modello lo si è tradotto in una funzione MATLAB, in modo da inserirlo all'interno dell'interfaccia grafica descritta nella Sez. 4.1. E' stata effettuata una prova di trazione di carico e scarico in controllo di deformazione, con deformazione massima imposta del 2%, 3%, 4%, 5% e 6%. I passi di carico sono stati divisi in 20 sottointervalli, mentre i parametri usati sono riportati in Tab. 5.1; il parametro di hardening h_2 relativo alla fase dopo la fine del plateau è stato calcolato in modo da ottenere una pendenza pari ad un terzo del modulo dell'austenite, ovvero si è posto:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = \frac{E_A}{3} = \frac{E_A h_2}{E_A + h_2}$$

da cui si può ottenere $h_2 = 25000$ MPa. I risultati sono mostrati in Fig. 5.3.

Il metodo utilizzato da Urbano et al. (2015) per introdurre le diverse proprietà elastiche di austenite e martensite è senz'altro una semplificazione del comportamento reale, in quanto introduce una discontinuità nel modulo elastico del materiale. Infatti le prove di trazione con diverse deformazioni massime imposte mostrano che fino a quando la trasformazione di fase non è completata non si riesce a cogliere nessun cambiamento del modulo di Young; viceversa, appena la trasformazione di fase si completa, il modulo elastico appare notevolmente modificato.

5.2.2 Utilizzo di uno schema di Reuss

Nella seguente sezione si vuole verificare l'estensione al caso multiassiale della proposta di Auricchio et al. (2009) [15], implementando un modello di Souza modificato; in caso di successo si potrebbe pensare di partire da qui estendendo le equazioni per includere gli aspetti plastici e di fatica.

Nel modello di Souza-Auricchio-Petrini, presentato nella Sez. 2.4.1, si assume come variabile interna \mathbf{e}^{tr} , ovvero la deformazione associata alla transizione di fase,

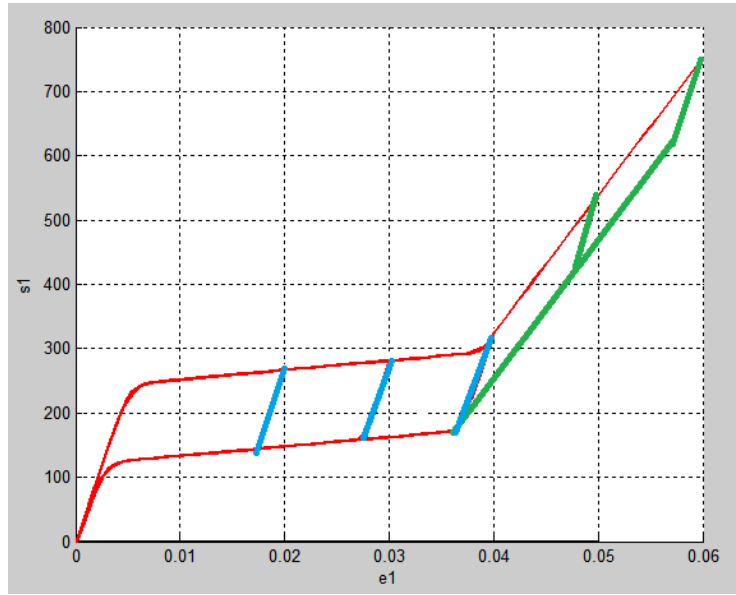


Figura 5.3: Curva sforzo-deformazioni ($\sigma - \varepsilon$) relativa ad una prova di trazione con carico e scarico a differenti deformazioni massime (2,3,4,5,6 %), effettuata con il modello di Urbano. Si noti che allo scarico fino a quando non si arriva al termine della trasformazione di fase (tratti azzurri) non si cattura nessun cambiamento delle proprietà elastiche, che appaiono invece bruscamente mutare appena si entra nel tratto elastico della martensite (tratti verdi).

che deve rispettare il vincolo $\|e^{tr}\| \leq \varepsilon_L$ rappresentante il fatto che in una prova monoassiale di trazione il plateau di trasformazione di fase ha un'ampiezza limitata, ovvero ε_L . Questa considerazione permette di assumere il rapporto seguente come rappresentativo della frazione percentuale di fase martensitica monovariante presente:

$$\%_M = \frac{\|e^{tr}\|}{\varepsilon_L} \quad (5.16)$$

In realtà, a meno di considerare una SMA in una situazione in cui $T > A_f$, ovvero in piena pseudoelasticità, a temperature più basse il materiale partirebbe anche in condizioni scariche con una certa frazione di martensite multivariante, fino alla situazione estrema con $T < M_f$ in cui sarebbe totalmente in martensite multivariante, e il plateau esibito consisterebbe solamente in un riallineamento delle varianti presenti. La frazione totale di martensite dipende quindi non solo dallo sforzo imposto, ma anche dallo stato termico del materiale, per cui:

$$\chi_M = \pi + (1 - \pi) \frac{\|e^{tr}\|}{\varepsilon_L} \quad (5.17)$$

In cui π rappresenta la frazione di martensite multivariante dovuta alla temperatura, che in base ai parametri del modello di Souza-Auricchio-Petrini può essere calcolata come:

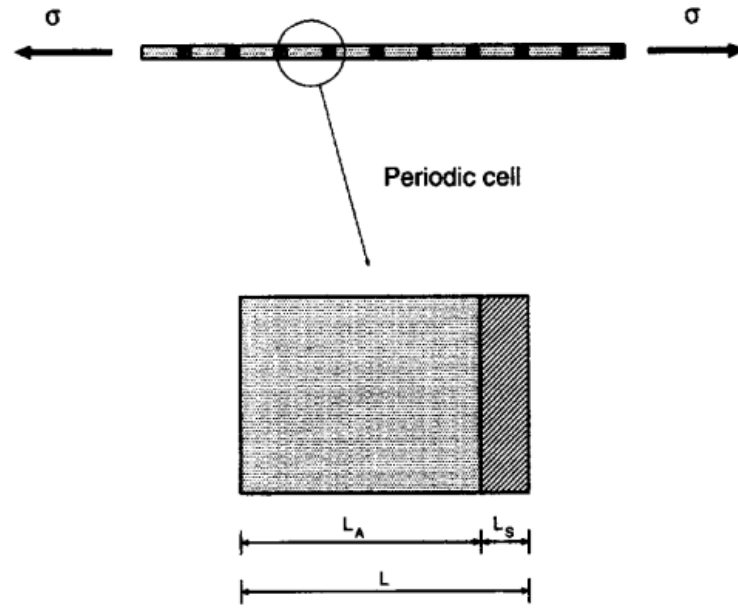


Figura 5.4: Una barra di SMA in trazione può essere considerata come una ripetizione periodica di austenite e martensite

$$\pi = \left\langle 1 - \frac{\beta \langle T - M_f \rangle}{R} \right\rangle \quad (5.18)$$

In un vecchio lavoro di Auricchio e Sacco [53] si presentavano diverse soluzioni per ottenere il modulo elastico di una SMA partendo dalle percentuali delle fasi presenti, arrivando infine alla scelta di uno schema di Reuss. Osservando durante una prova di trazione di un materiale pseudoelastico la nucleazione dei cristalli di martensite, si potrebbe vedere che la loro crescita avviene nel piano ortogonale all'asse del provino, permettendo quindi di considerare il materiale come una ripetizione periodica di parti austenitiche e martensitiche (Fig. 5.4). L'allungamento u di una cella elementare di materiale può essere ottenuto dagli allungamenti subiti da austenite e martensite, u_A e u_M :

$$u = \varepsilon L = u_A + u_M = \varepsilon_A L_A + \varepsilon_M L_M$$

dove L rappresenta la lunghezza della cella elementare, L_A e L_M le lunghezze delle porzioni occupate da ciascuna fase. Andando oltre si può anche scrivere:

$$\varepsilon = \varepsilon_A \frac{L_A}{L} + \varepsilon_M \frac{L_M}{L} = \varepsilon_A (1 - \chi_M) + \varepsilon_M \chi_M$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \chi_M}{E_A} + \frac{\chi_M}{E_M}$$

$$E = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right) \chi_M} \quad (5.19)$$

A questo punto ipotizzando di considerare lo stesso coefficiente di Poisson per le due fasi, si è ottenuta una dipendenza dei moduli elastici della SMA dalla norma dalla deformazione di trasformazione di fase $E(\mathbf{e}^{tr})$, $K(\mathbf{e}^{tr})$, $G(\mathbf{e}^{tr})$. Si ricorda che:

$$G = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right) \chi_M} \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (5.20)$$

$$K = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right) \chi_M} \frac{1}{3(1 - 2\nu)} \quad (5.21)$$

Lasciando immutato il potenziale termodinamico e il dominio elastico del modello di Souza-Auricchio-Petrini (Sez. 2.4.1), si vede però che ora bisogna tenere in considerazione le nuove dipendenze introdotte, per cui la variabile \mathbf{X} cambia espressione.

$$\Psi(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, T) = \frac{1}{2} K \theta^2 + G \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \frac{1}{2} h \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \tau_M \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + L(\mathbf{e}^{tr}) \quad (5.22)$$

$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{X}^2 : \mathbf{1})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{X}^3 : \mathbf{1})$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) - \left[\tau_M + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + \gamma + \frac{\xi}{2(1 + \nu)} \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 \right] \frac{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \quad (5.23)$$

con:

$$\xi = \frac{\partial E}{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}} = \frac{\frac{1-\nu}{\varepsilon_L} E_A \left(1 - \frac{E_A}{E_M}\right)}{(E_A/E)^2} \quad (5.24)$$

Si noti l'introduzione della norma regolarizzata, visto che il modello verrà ora discretizzato in modo da renderne possibile la soluzione delle equazioni usando lo stesso metodo presentato per i modelli del Cap. 4, basato su delle iterazioni di Newton-Rapshon (Alg. 5.2). Le equazioni del modello sono scritte in forma residuale:

Algoritmo 5.2 Algoritmo discreto per modello di Souza modificato

• **CALCOLO PASSO TRIAL**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{tr,TR} &= \mathbf{e}_n^{tr} \\
 \mathbf{s}^{TR} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) \\
 \mathbf{X}^{TR} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) - \left[\tau_M + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR}\|} + \gamma + \frac{\xi \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}\|^2}{2(1+\nu)} \right] \frac{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR}\|}}{\partial \mathbf{e}^{tr,TR}}
 \end{aligned}$$

• **VERIFICA PASSO TRIAL**

$F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR})$
if $F^{TR} < 0$
 passo trial accettabile (elastico)
 $\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}^{tr,TR}$
else
 passo trial non accettabile (inelastico)
 while $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$
 Newton-Rapshon per ottenere: \mathbf{e}^{tr}
 end while
 if $\|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L$
 while $\|\text{residui}\| < \text{tolleranza}$
 Newton-Rapshon per ottenere: \mathbf{e}^{tr}, γ
 end while
 end if
end if

• **AGGIORNAMENTO SFORZO**

$$\mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr})$$

$$\mathbf{R}^X = \mathbf{X} - 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + \left[\tau_M + h\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + \gamma + \frac{\xi\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2}{2(1+\nu)} \right] \frac{\partial\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}}{\partial\mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

$$R^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m\frac{J_3}{J_2} - R = 0 \quad (5.26)$$

$$R^\gamma = \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} - \varepsilon_L = 0 \quad (5.27)$$

Il metodo di Newton-Rapshon richiede la linearizzazione del sistema, ovvero il calcolo della matrice:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Ad ogni iterazione del metodo si ottiene il nuovo valore delle variabili di interesse mediante lo schema iterativo seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \gamma \end{bmatrix}_n - R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \\ R^\gamma \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Le derivate dei residui sono scritte nel seguito (si ricorda che δ è un parametro che determina la regolarità della norma modificata, tale che se $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\|\mathbf{a}\|} \rightarrow \|\mathbf{a}\|$, $\mathbf{1}$ è il tensore identità del secondo ordine, \mathbb{I} il tensore identità del quarto ordine, mentre tutti gli altri parametri sono quelli del modello di Souza-Auricchio-Petrini).

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_X^X &= \mathbb{I} + 2G\Delta\zeta\mathbb{F}^X + \Delta\zeta \left[\tau_M + h\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + \gamma \right] (c_1\mathbb{B}^e\mathbb{F}^X + c_2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e\mathbb{F}^X) + hc_1^2\Delta\zeta\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e\mathbb{F}^X + \\ &+ \frac{\xi}{2(1+\nu)}\Delta\zeta \left\{ -2c_1(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \otimes \mathbf{N}^e + c_1\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2\mathbb{B}^e - 2c_1\mathbf{N}^e \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + \right. \\ &\left. + c_2\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e \right\} \mathbb{F}^X + \frac{\xi^2}{E(1+\nu)}\Delta\zeta\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 c_1^2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e\mathbb{F}^X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X &= 2G\mathbf{F}^{\hat{X}} + \left[\tau_M + h\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + \gamma \right] (c_1\mathbb{B}^e : \mathbf{F}^{\hat{X}} + c_2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e : \mathbf{F}^{\hat{X}}) + hc_1^2\Delta\zeta\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e : \mathbf{F}^{\hat{X}} + \\ &+ \frac{\xi}{2(1+\nu)} \left\{ -2c_1(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \otimes \mathbf{N}^e + c_1\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2\mathbb{B}^e - 2c_1\mathbf{N}^e \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) + \right. \\ &\left. + c_2\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e \right\} : \mathbf{F}^{\hat{X}} + \frac{\xi^2}{E(1+\nu)}\Delta\zeta\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 c_1^2\mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e : \mathbf{F}^{\hat{X}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_\gamma^X = c_1\mathbf{N}^e \quad \mathbf{R}_X^\gamma = \Delta\zeta c_1\mathbf{N}^e : \mathbb{F}^X \quad R_{\Delta\zeta}^\gamma = c_1\mathbf{N}^e : \mathbf{F}^{\hat{X}} \quad R_\gamma^\gamma = 0$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{F}^X R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = 0 \quad R_\gamma^{\Delta\zeta} = 0$$

Con:

$$\mathbf{N}^e = \frac{\mathbf{e}^{tr}}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} \mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} B^e = \frac{1}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} (\mathbb{I} - \mathbf{N}^e \otimes \mathbf{N}^e) \mathbb{B}^X = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} (\mathbb{I} - \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X)$$

$$c_1 = \frac{\|\mathbf{e}^{tr}\|}{\sqrt{\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \delta}} \quad c_2 = \frac{\delta}{(\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \delta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{F}^X = \left(1 - \frac{4mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^3}\right) \mathbf{N}^X + 2m (\mathbf{N}^X)^2 \quad \mathbf{F}^{\hat{X}} = \mathbf{F}^X - \frac{2}{3}m\mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^X &= \frac{12mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^4} \mathbf{N}^X \otimes \mathbf{N}^X - \frac{4m}{\|\mathbf{X}\|} \left(\mathbf{N}^X \otimes (\mathbf{N}^X)^2 + (\mathbf{N}^X)^2 \otimes \mathbf{N}^X \right) + \\ &+ \left(1 - \frac{4mJ_3}{\|\mathbf{X}\|^3}\right) \mathbb{B}^X + \frac{2m}{\|\mathbf{X}\|} (\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{N}^X + \mathbf{N}^X \boxtimes \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Si completa il modello con il calcolo di un tensore tangente del quarto ordine, $\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$, che ha espressione:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}) \mathbb{I}_{dev} + \frac{\xi}{1 + \nu} c_1 \mathbf{N}^e \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \mathbb{E} \mathbb{I}_{dev} + \quad (5.30) \\ &+ [\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} - 3\alpha (T - T_0)] \frac{\xi}{3(1 - 2\nu)} c_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}^e \mathbb{E} \mathbb{I}_{dev} \end{aligned}$$

Si ricorda che $\mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ e che \mathbb{E} ha la stessa espressione che viene fornita nel lavoro originario di Auricchio-Petrini [12,13], ovvero:

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \Delta\zeta \mathbb{F}^X & \mathbf{F}^{\hat{X}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbf{R}_\gamma^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & R_\gamma^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}_X^\gamma & R_{\Delta\zeta}^\gamma & R_\gamma^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Il modello è stato tradotto in una funzione MATLAB e inserito all'interno dell'interfaccia grafica descritta nella Sez.4.1 in modo da poter essere testato.

Il primo test effettuato è una prova di trazione di carico e scarico in controllo di deformazione, con deformazione massima imposta del 2%, 3%, 4%, 5% e 6% (Fig. 5.5). I passi di carico sono stati divisi in 20 sottointervalli, inoltre i parametri usati sono riportati in Tab. 5.2. Si è scelto di impostare un modulo elastico della martensite in modo che sia un terzo di quello dell'austenite, coerentemente con la

Tabella 5.2: Parametri utilizzati per i test sul modello con diverse proprietà elastiche

E_A [MPa]	E_M [MPa]	ν	T[K]	h [MPa]
50000	$E_A/3$	0.35	298	1000
β [MPa/K]	ε_L	R[MPa]	M_f [K]	δ
2	0.04	50	223	10^{-7}

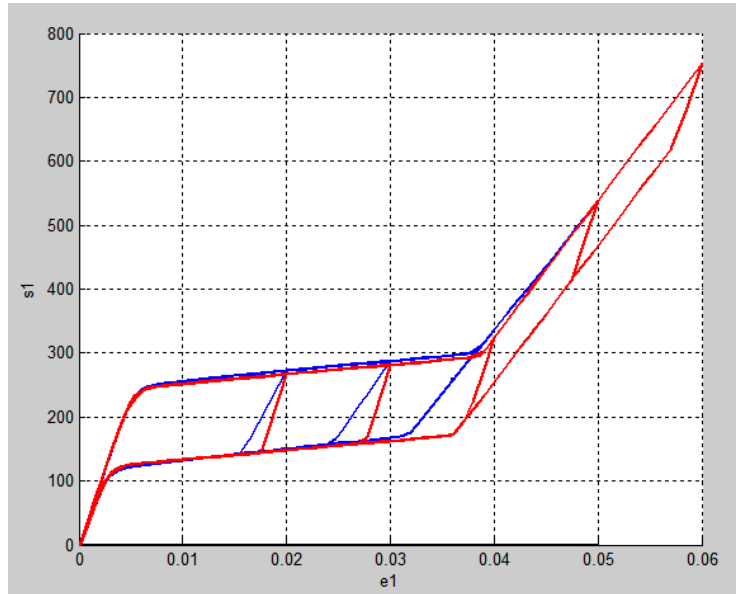


Figura 5.5: Confronto di curve $\sigma - \varepsilon$ relative ad una prova di trazione con carico e scarico fino ad una deformazione del 2,3,4,5,6 % tra il modello presentato e quello di Urbano (Sez. 5.2.1). Il modello formulato nella sezione precedente appare in grado di modificare in modo graduale le proprietà elastiche del materiale man mano che la transizione di fase procede, al contrario di quello di Urbano. Il tratto lineare della martensite invece è catturato meglio da quest'ultimo modello, in quanto l'isteresi meccanica viene estesa anche in questa fase.

sceita fatta nell'implementazione del modello di Urbano et al. (2015) per il parametro h_2 . La Fig. 5.5 mostra in blu la prova effettuata con questo modello, in rosso la medesima prova effettuata con il modello di Urbano, anch'esso implementato nella Sez. 5.2.1. I risultati del primo test sono coerenti con quanto già si aspettava, quindi rivelano che il modello proposto possa essere più efficace rispetto al lavoro di Urbano nel cogliere le diverse proprietà elastiche. A questo punto sono stati effettuati dei test più complessi, rappresentativi di condizioni di sollecitazioni biassiali. In tutte le prove effettuate il modello si è rivelato estremamente instabile, presentando problemi di convergenza durante la soluzione delle equazioni residuali. In particolare, analizzando attentamente il codice si è visto che il metodo iterativo di Newton-Raphson stava effettivamente procedendo verso una soluzione, ma richiedendo un numero di iterazioni eccessivo, tale da rendere inutilizzabile il modello.

A causa di questi motivi, nonostante fosse promettente, si è scelto di abbando-

nare la strada percorsa in questa sezione e di scegliere come modello di partenza per introdurre gli effetti plastici quello di Urbano et al. (2015), in quanto risulta estremamente stabile, probabilmente ancora più di quello di Souza-Auricchio-Petrini per via della mancanza nelle equazioni della funzione indicatrice, che provoca anche la riduzione del numero di equazioni da risolvere. In ogni caso si è consapevoli che con il modello di Urbano et al. (2015) si ottiene solo una semplificazione del reale comportamento di una SMA, quindi si ritiene che un interessante lavoro futuro possa essere studiare più accuratamente i problemi di convergenza del modello qui formulato, pensando magari di risolverli implementando un algoritmo discreto iterativo di risoluzione più complesso rispetto a quello scelto (Newton-Rapson) e/o trovando una strada differente per la formulazione del tensore tangente.

5.3 Formulazione continua del modello con effetti plastici

Lo scopo di questa sezione è di partire dalle linee guida elencate nella Sez. 5.1 e dai risultati ottenuti nella Sez. 5.2 per iniziare formulare un nuovo modello costitutivo, basato sempre sul modello di Souza-Auricchio-Petrini e sull'ipotesi di piccole deformazioni, che però abbia il vantaggio di poter cogliere effetti plastici e di fatica, superando i limiti di lavori presenti in letteratura quali quelli di Auricchio et al. (2007) [14] e Barrera et al. (2014) [7] (Cap. 4).

Il primo aspetto che si è rivelato fondamentale è stato dividere completamente le variabili che descrivono il fenomeno della fatica da quelle che catturano la plasticità macroscopica, in modo che da poter formulare equazioni evolutive per ognuna di essa che siano il più adatte possibile. Da ciò ne deriva che il modello che si enuncierà, seguendo l'approccio termodinamico classico (Sez. 2.3.2), sfrutta le seguenti variabili di stato:

- *osservabili*: deformazione totale imposta $\boldsymbol{\varepsilon}$ e temperatura assoluta T , che sono le quantità che costituiscono i parametri di ingresso del modello;
- *interne*: la deformazione associata alla trasformazione di fase \boldsymbol{e}^{tr} , la deformazione plastica \boldsymbol{e}^{pl} , la parte della deformazione di trasformazione di fase che a causa dei fenomeni di fatica risulta impossibilitata ad esibire future transizione di fase, \boldsymbol{e}^{fix} ; \boldsymbol{e}^{tr} , \boldsymbol{e}^{pl} , \boldsymbol{e}^{fix} sono tensori deviatorici del secondo ordine.

\boldsymbol{e}^{fix} ha la stessa funzione del tensore di fatica \boldsymbol{q} del modello di Auricchio, quindi si vuole ereditarne le leggi di evoluzione, tali da produrne un cambiamento solo durante la trasformazione di fase, grazie ad una particolare formulazione della forma della superficie limite del dominio elastico. \boldsymbol{e}^{fix} rappresenta anche il valore a cui \boldsymbol{e}^{tr} tende allo scarico, in modo che quest'ultima non possa completare la sua evoluzione come in un materiale nuovo, ma invece possa rappresentare come la SMA non recuperare totalmente la forma originaria. \boldsymbol{e}^{pl} è la deformazione plastica, ovvero associata ai

fenomeni che seguono lo snervamento causato dall'applicazione di elevate sollecitazioni; a differenza del lavoro di Barrera et al. (2014) è considerata essere totalmente indipendente dagli effetti di fatica. Si noti come un'ulteriore differenza rispetto al lavoro di Barrera et al. (2014) è che ora e^{fix} rappresenta puramente gli effetti degradativi di fatica, non evolvendo in nessun modo quando viene raggiunta la soglia di snervamento.

In aggiunta a quanto qui enunciato, per la completa formulazione del modello si è resa necessaria l'introduzione di altre due variabili interne, ovvero delle quantità scalari che rappresentano la somma di tutte le variazioni subite da e^{fix} ed e^{pl} durante la storia di carico della SMA, ovvero una sorta di deformazione cumulativa plastica e di fatica:

$$\omega(t) = \int_0^t \| \dot{e}^{fix} \| dt \quad (5.32)$$

$$\eta(t) = \int_0^t \| \dot{e}^{pl} \| dt \quad (5.33)$$

Un aspetto che viene preso dal modello di Barrera et al. (2014) è l'evoluzione del dominio di trasformazione di fase, in cui può muoversi e^{tr} . Si era infatti visto (Sez. 4.3) che per evitare problemi al passaggio da condizioni di carico di trazione a condizioni di compressione, si era dovuta introdurre una dipendenza della dimensione e della forma di tale dominio dal procedere dei fenomeni plastici; inoltre questo diveniva necessario in modo da rappresentare il fatto che il dominio risulti irreversibilmente modificato, dato che le dislocazioni e i difetti generati impediscono al materiale di potersi completamente allineare in direzioni differenti rispetto a quella in cui si è sviluppata inizialmente la deformazione plastica. Si assume quindi, data un'ampiezza iniziale del dominio $\varepsilon_L(0) = \varepsilon_{L0}$, una sua evoluzione del tipo:

$$\varepsilon_L(t) = \begin{cases} - \| \dot{e}^{fix} \| - b \| \dot{e}^{pl} \| & \varepsilon_L > 0 \\ 0 & \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Si vede chiaramente come ora l'evoluzione dipende sia dalle variabili plastiche, sia dalle variabili della fatica, in quanto entrambi i fenomeni concorrono a limitare le trasformazioni di fase future [9]. Il parametro b è un coefficiente numerico che regola l'entità degli effetti plastici sull'ampiezza del dominio di transizione di fase. Inoltre a differenza del modello di Barrera et al. (2014) non viene formulato nessun vincolo per e^{tr} , in quanto in realtà ora tale variabile può crescere indefinitamente, essendo partiti dalla formulazione del modello di Urbano et al. (2015). La fine del plateau dovuto alla transizione di fase viene ottenuta infatti variando il parametro relativo all'hardening della deformazione di trasformazione di fase, invece di impedire effettivamente un ulteriore aumento di e^{tr} .

Il modello che ne risulta dipende quindi da cinque variabili interne, e l'espressione del potenziale termodinamico del materiale si assume avere la forma ($\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}^{tr} - \mathbf{e}^{fix} - b\mathbf{e}^{pl}$) :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{e}^{tr}, \mathbf{e}^{fix}, \mathbf{e}^{pl}) = \frac{1}{2}K\theta^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \Psi_{tras} + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - \mathbf{e}^{pl}\|^2 + \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2}(\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2}\eta(t) \right\} \|\boldsymbol{\xi}\| \quad (5.35)$$

$$\Psi_{tras} = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))) \|\boldsymbol{\xi}\|^2 & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ \frac{1}{2}h_2(\|\boldsymbol{\xi}\| - \varepsilon_L(t))^2 + (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)))\varepsilon_L(t)\|\boldsymbol{\xi}\| & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \quad (5.36)$$

K è il modulo di comprimibilità volumetrica, G il modulo di taglio, T_0 una temperatura di riferimento e α il coefficiente delle dilatazioni termiche, h_1 il coefficiente di incrudimento della trasformazione di fase durante il plateau, h' il parametro che regola l'evoluzione lineare di h_1 al procedere dei fenomeni inelastici, h_2 quello relativo alla fase elastica della martensite, β il parametro di proporzionalità diretta fra sforzo di inizio trasformazione di fase e temperatura, A e ϕ coefficienti legati all'abbattimento dei plateau di trasformazione di fase con il procedere della fatica funzionale, B parametro legato all'abbattimento del plateau di recupero, causato dallo snervamento del materiale. Si sottolinea inoltre che nel seguito spesso si indicherà con τ_M il termine $\beta \langle T - M_f \rangle$.

Derivando il potenziale termodinamico, si possono ottenere le seguenti quantità:

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K[\theta - 3\alpha(T - T_0)] \quad (5.37)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr} - \mathbf{e}^{pl}) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2}(\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2}\eta(t) \right\} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} + \begin{cases} -(h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))) \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ -h_2\boldsymbol{\xi} - (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)) - h_2)\varepsilon_L(t) \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{fix}} = \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2}(\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2}\eta(t) \right\} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} + \begin{cases} (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))) \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ h_2\boldsymbol{\xi} - (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)) - h_2)\varepsilon_L(t) \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{pl}} = \mathbf{s} + b \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2} (\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2} \eta(t) \right\} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} + \quad (5.41)$$

$$+ b \begin{cases} (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))) \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ h_2 \boldsymbol{\xi} - (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)) - h_2) \varepsilon_L(t) \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases}$$

Si noti che essendo partiti dal modello di Urbano, in cui si considerano dei coefficienti relativi all'hardening della trasformazione di fase differenti tra prima e dopo la fine del plateau, si ottiene che ogni variabile termodinamica sia definita in modo diverso in queste due situazioni.

A questo punto bisogna procedere con la formulazione del potenziale di dissipazione: nello specifico caso, seguendo quanto fatto in tutti i modelli, si assume uno schema associativo, quindi tale potenziale coincide con la superficie limite del dominio elastico. Questa sarà formulata sfruttando una norma del massimo fra due quantità, una delle quali rappresenta la soglia limite per la trasformazione di fase, la seconda quella limite per lo snervamento. La superficie limite per l'inizio della trasformazione di fase è formulata in modo indentico a quella del lavoro di Auricchio et al. (2007), in modo da garantire contemporaneamente al procedere della trasformazione di fase anche l'evoluzione della fatica, ovvero di \mathbf{e}^{fix} :

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X}\| + k \|\mathbf{Y}\| + \frac{A(1-\phi)}{2} (\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2} \eta(t) \leq R \quad (5.42)$$

dove R rappresenta la metà dell'ampiezza dell'isteresi meccanica visibile in una prova di trazione monoassiale e k un fattore di scala tra gli effetti di fatica e quelli legati alla transizione di fase. Rispetto alla formulazione di Auricchio et al. (2007) si può vedere come il raggio del dominio elastico non abbia dimensione fissa, ma dipende dalle deformazioni cumulative $\omega(t)$, $\eta(t)$.

Lo soglia di snervamento viene invece formulata nel modo seguente:

$$G(\mathbf{Q}) = \|\mathbf{Q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} H_I \eta(t) - b \left\{ \tau_M - \frac{A(1+\phi)}{2} (\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2} \eta(t) \right\} +$$

$$-bg(\omega(t), \eta(t)) \leq R_2 \quad (5.43)$$

$$g(\omega, \eta) = \begin{cases} (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))) \|\boldsymbol{\xi}\| & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ h_2 \|\boldsymbol{\xi}\| - (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)) - h_2) \varepsilon_L(t) & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \quad (5.44)$$

dove H_I è il coefficiente legato all'hardening isotropo imposto alla deformazione plastica e R_2 il raggio del dominio elastico, sul cui bordo il materiale inizia a mo-

strare plasticità macroscopica. I termini all'interno della parentesi graffe e la funzione $g(\omega(t), \eta(t))$ hanno invece solamente la funzione di annullare il contributo dei termini a loro analoghi contenuti nella definizione di \mathbf{Q} (5.41).

Il potenziale di dissipazione è definito mediante una norma del massimo delle due superfici limite:

$$\varphi = \max \{F, k_2 G\} - R \leq 0 \quad (5.45)$$

$$\text{con } k_2 = \frac{R}{R_2}.$$

Avendo formulato delle soglie diverse ed indipendenti per la trasformazione di fase e la plasticità, si è quindi sicuri di avere completamente separato l'evoluzione di e^{fix} da e^{pl} , eliminando alcuni dei problemi presenti nel lavoro di Barrera et al. (2014). Dal potenziale di dissipazione appena scritto si ottengono le seguenti leggi evolutive:

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad (5.46)$$

$$\dot{e}^{fix} = k \dot{\zeta} \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} \quad (5.47)$$

$$\dot{e}^{pl} = \dot{\mu} \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|} \quad (5.48)$$

A cui sono associate le classiche condizioni di Kunh-Tucker: $F \leq 0, G \leq 0, \dot{\zeta} \geq 0, \dot{\mu} \geq 0$ e $\dot{F}\dot{\zeta} = 0, \dot{G}\dot{\mu} = 0$.

Si vogliono ora sottolineare alcuni aspetti del modello appena formulato:

- sono inseriti gli effetti di dilatazione termica.
- l'evoluzione della fatica e della plasticità sono due fenomeni completamente indipendenti.
- per modellizzare il fatto che a causa di ripetuto ciclaggio meccanico il materiale esibisce un plateau di transizione di fase che progressivamente aumenta la propria pendenza, si è inserita nel modello un'evoluzione lineare del parametro h_1 , relativo alla pendenza durante il plateau, con l'ammontare di fenomeni inelastici avvenuti, sia dovuti a fatica che a plasticità. Si è quindi introdotto una legge del tipo: $h_1(t) = h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t))$.
- il metodo utilizzato per modellizzare la fatica è lo stesso usato nel modello di Auricchio presentato nel Cap. 4, in cui si sfrutta la forma particolare delle superficie limite per l'inizio della trasformazione di fase, in modo che:

$$k \frac{\partial F}{\partial \|\mathbf{X}\|} = \frac{\partial F}{\partial \|\mathbf{Y}\|}$$

che si traduce nel fatto che ogni modifica di e^{tr} si riflette in una modifica di e^{fix} , con un fattore di scala k : $\|\dot{e}^{fix}\| = k \|\dot{e}^{tr}\|$. Ragionando su un'ipotetica prova di trazione monoassiale per un materiale pseudoelastico, ne consegue che se il plateau è ampio ε_L , quando questo è attraversato completamente la deformazione irreversibile accumulata è pari a $e^{fix} = k\varepsilon_L$. Se si effettuassero più cicli di carico e scarico, visto che l'ampiezza del plateau lentamente si riduce, si ottiene che l'accumulo di deformazione irreversibile rallenta, in quanto l'evoluzione del tensore di fatica dipende proprio dal tratto percorso durante la trasformazione di fase. Tuttavia il rallentamento ottenuto in questo modo è molto graduale, quindi non riesce a cogliere l'evidenza sperimentale per cui durante i primi cicli di carico e scarico l'accumulo è molto più pronunciato.

- partendo dalle considerazioni di Urbano si è inserita la dipendenza dalle diverse proprietà elastiche di austenite e martensite, introducendo un secondo parametro di hardening della trasformazione di fase che si sostituisce al primo al termine del plateau.
- l'hardening della trasformazione di fase dipende dalla quantità ξ , piuttosto che solamente da e^{tr} : tale definizione è simile a quella presente nel modello di Barrera et al. (2014), e assicura che al procedere della fatica lo sforzo critico per l'inizio della trasformazione di fase si mantenga costante, risolvendo così gli aspetti negativi del modello di Auricchio et al. (2007).
- il parametro ε_L , che rappresenta l'ampiezza di plateau disponibile, si assume diminuire a causa di entrambi i fenomeni inelastici.
- l'evoluzione della deformazione plastica avviene per un meccanismo isotropo.
- un grande cambiamento riguarda il modo con cui si è affrontata la possibilità di inserire nel modello la degradazione del materiale, ovvero l'abbattimento degli sforzi critici a causa del procedere delle deformazioni inelastiche. In particolare si è deciso di considerare la degradazione proporzionale alla deformazione irreversibile accumulata, ovvero alla quantità $\omega(t) + \eta(t)$, che rappresenta la somma delle deformazioni dovute sia alla fatica che alla plasticità. Tale quantità, per le leggi evolutive assegnate (Eq. 5.32 e 5.33), è monotonamente crescente, ed in questo modo si evitano le problematiche del modello di Auricchio et al. (2007) al passaggio da condizioni di carico di trazione a compressione. In un'ipotetica prova di trazione monoassiale, in cui non si hanno deformazioni plastiche, tale quantità è anche pari al valore assunto da e^{fix} (Fig. 5.6), in modo che il plateau diretto si abbassi di $\Delta\sigma^{sup} = Ae^{fix}$, mentre quello inverso lo si lega alla variazione del primo tramite la relazione: $\Delta\sigma^{inf} = \phi\Delta\sigma^{sup}$. Durante un ciclo di carico e scarico, infatti, la variabile e^{fix} subisce un'evoluzione, determinando allo scarico il fatto che e^{tr} non torni ad un valore nullo, ma rimanga

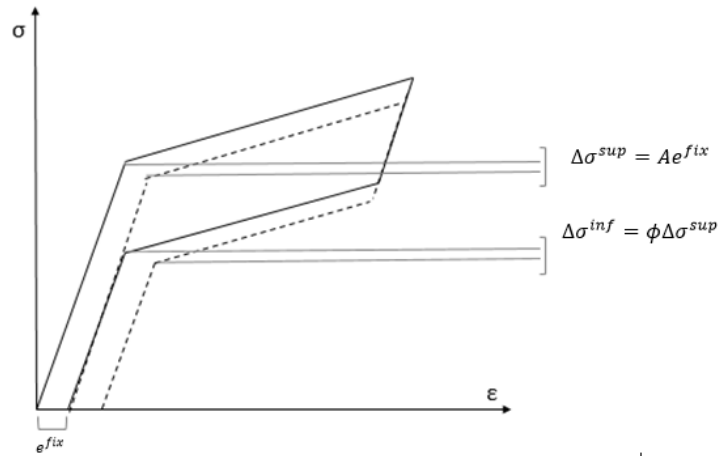


Figura 5.6: Illustrazione del significato dei parametri A e ϕ

vincolata a rimanere uguale ad e^{fix} . Quindi il materiale allo scarico presenta una certa deformazione residua che corrisponde dopo il primo ciclo al valore raggiunto proprio da e^{fix} . Nel modello tuttavia gli sforzi critici sono presenti indirettamente, in quanto corrispondono alle quantità, $\tau_M + R$ e $\tau_M - R$, rispettivamente; per ottenere le variazioni di sforzi desiderate è quindi necessario provvedere a diminuire R della quantità $\frac{A(1-\phi)}{2}e^{fix}$ e contemporaneamente agire sul parametro τ_M , diminuendolo di $\frac{A(1+\phi)}{2}e^{fix}$.

- è stata inserita nel modello anche la possibilità di modellizzare l'abbattimento del plateau inferiore causato dallo snervamento del materiale, mediante un parametro B . Anche in questo caso, come per l'introduzione della degradazione, si vuole rendere il fenomeno proporzionale alla deformazione plastica cumulativa $\eta(t)$; inoltre come nella situazione precedente è necessario agire contemporaneamente su τ_M e R .

5.4 Formulazione discreta

Il modello fin qui enunciato è formulato nella sua forma continua, diventa quindi necessario, nel momento in cui l'obiettivo è implementarlo numericamente, riuscire a trasformarlo in discreto. L'implementazione discreta che verrà proposta segue molto da vicino quella usata per il modello Souza-Auricchio-Petrini [12, 13]: il problema viene considerato come un problema tempo-discreto implicito, dipendente dalla deformazione; l'intervallo di interesse $[0, T]$ viene suddiviso in sottointervalli, in ognuno dei quali $[t_n, t]$ si è interessati a calcolare l'evoluzione del problema. Si sottolinea come le quantità con pedice n si riferiscano all'istante precedente, quelle senza pedice all'istante attuale. L'obiettivo è, dati come input la deformazione corrente, la temperatura e la soluzione all'istante precedente, risolvere le equazioni di evoluzione

del modello. Queste ovviamente devono essere discretizzate, prima di fare questo si noti che le equazioni continue dipendono da quantità che rappresentano le derivate di norme di tensori del secondo ordine, che in alcune situazioni potrebbero anche annullarsi, rendendo le derivate non definite. Per evitare questo si sostituiscono in alcuni punti del modello le norme euclidee classiche con una norma modificata regolarizzata, che anche nel caso abbia argomento nullo esibisca comunque una derivata sempre definita. La norma proposta, e la sua derivata, hanno la seguente forma:

$$\overline{\|\mathbf{a}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}$$

$$\frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\|\mathbf{a}\|}}{d\|\mathbf{a}\|} \frac{d\|\mathbf{a}\|}{d\mathbf{a}} = \frac{\|\mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \delta}}$$

in cui δ è un parametro che varia la regolarità di questa norma, ovviamente se $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\|\mathbf{a}\|} \rightarrow \|\mathbf{a}\|$. Riscrivendo il modello si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, T, e^{tr}, e^{fix}, e^{pl}) &= \frac{1}{2}K\theta^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \Psi_{tras} + G\|e - e^{tr} - e^{pl}\|^2 \\ &+ \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2}(\omega(t) + \eta(t)) - \frac{B}{2}\eta(t) \right\} \overline{\|\xi\|} \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\Psi_{tras} = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)))\|\xi\|^2 & \|\xi\| < \varepsilon_L(t) \\ \frac{1}{2}h_2(\|\xi\| - \varepsilon_L(t))^2 + (h_1 + h'(\omega(t) + \eta(t)))\varepsilon_L(t)\overline{\|\xi\|} & \|\xi\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \quad (5.50)$$

Le nuove quantità termodinamiche del modello divengono, invece:

$$p = K[\theta - 3\alpha(T - T_0)] \quad (5.51)$$

$$\mathbf{s} = 2G(e - e^{tr} - e^{pl}) \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{s} - \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2}(\omega + \eta) - \frac{B}{2}\eta \right\} c_1 \xi + \\ &+ \begin{cases} -(h_1 + h'(\omega + \eta))\xi & \|\xi\| < \varepsilon_L(t) \\ -h_2\xi - (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2)\varepsilon_L c_1 \xi & \|\xi\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2} (\omega + \eta) - \frac{B}{2} \eta \right\} c_1 \boldsymbol{\xi} + \\ & + \begin{cases} (h_1 + h'(\omega + \eta)) \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ h_2 \boldsymbol{\xi} - (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) \varepsilon_L c_1 \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{s} + b & \left\{ \beta \langle T - M_f \rangle - \frac{A(1+\phi)}{2} (\omega + \eta) - \frac{B}{2} \eta \right\} c_1 \boldsymbol{\xi} + \\ & + b \begin{cases} (h_1 + h'(\omega + \eta)) \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t) \\ h_2 \boldsymbol{\xi} - (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) \varepsilon_L c_1 \boldsymbol{\xi} & \|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.55)$$

dove:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \delta}}$$

Le nuove leggi evolutive sono invece:

$$\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{e}^{fix} = \mathbf{e}_n^{fix} + c_2 \Delta \zeta k \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{e}^{pl} = \mathbf{e}_n^{pl} + \Delta \mu \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|} \quad (5.58)$$

$$\omega = \omega_n + c_2 \Delta \zeta k \quad (5.59)$$

$$\eta = \eta_n + \Delta \mu \quad (5.60)$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{L,n} - \begin{cases} c_2 \Delta \zeta k + b \Delta \mu & se \quad \varepsilon_L > 0 \\ 0 & se \quad \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

in cui c_2 è un booleano che disattiva l'evoluzione della fatica durante i fenomeni di plasticità macroscopica, mentre:

$$\Delta \zeta = \int_{t_n}^t \dot{\zeta} dt \quad (5.62)$$

$$\Delta \mu = \int_{t_n}^t \dot{\mu} dt \quad (5.63)$$

Per risolvere le equazioni del modello si introduce il procedimento tipicamente usato nella teoria della plasticità classica, basato su una procedura di predittore elastico-correttore inelastico [49, 58], tenendo conto che come input al modello vengono date la temperatura e la deformazione corrente. Il metodo consiste nel considerare inizialmente un ipotetico passo trial in cui le variabili interne del modello non cambino rispetto al passo precedente, verificando in seguito l'ammissibilità di tale assunzione (Alg. 5.3). Se è verificata allora il passo è realmente elastico, le variabili interne vengono lasciate invariate e si calcola il nuovo valore di sforzo corrispondente allo stato deformativo, viceversa se il passo trial non è accettabile si procede a valutare il reale passo inelastico tenendo conto dell'evoluzione delle variabili interne. La conseguenza di aver introdotto due superfici limite è che l'algoritmo appena descritto, usato con successo nel modello di Souza-Auricchio-Petrini, debba essere leggermente modificato, in quanto bisogna tenere conto che nel momento in cui si valuta l'ipotetico passo trial, le funzioni limite possono essere entrambe soddisfatte, entrambe violate rendendo necessaria l'attivazione di tutte le equazioni del modello, o una violata e un'altra verificata, rendendo quindi necessario attivare la risoluzione solo delle equazioni opportune.

L'idea è di iniziare la soluzione del sistema di equazioni partendo solo da quelle relative a \mathbf{X} , $\Delta\zeta$ e \mathbf{Y} , anche se il secondo limite elastico è stato superato; trovata la soluzione, si valuta se la trasformazione di fase era terminata o meno, decidendo quindi nel caso $\|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t)$ di ricalcolare la soluzione utilizzando il secondo parametro di hardening, h_2 , al posto di h_1 . A questo punto, quando la soluzione relativa alla trasformazione di fase è completata, nell'eventualità che il limite elastico che identifica la soglia di plasticità sia superato ($G > 0$) si attivano le equazioni rimanenti, utili per trovare il valore dei parametri \mathbf{Q} , $\Delta\mu$. Si ricorda che il sistema di equazioni (si presenta il caso con tutti i termini attivati, ovviamente basterebbe rimuovere le righe non necessarie se si fosse all'interno di un'altra situazione) è valutato con il solito metodo iterativo di Newton-Raphson, scrivendo le equazioni in forma residuale. Ad ogni iterazione del metodo si calcola il nuovo valore delle variabili del modello con l'equazione:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Y} \\ \Delta\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta\zeta \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Y} \\ \Delta\mu \end{bmatrix}_n - R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^X \\ R^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}^Y \\ \mathbf{R}^Q \\ R^{\Delta\mu} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

finché la norma dei residui non soddisfa una certa tolleranza, indice che si è giunti a convergenza del metodo. La matrice R contiene le derivate dei residui:

Algoritmo 5.3 Modello proposto

• CALCOLO PASSO TRIAL

$e^{tr,TR} = e_n^{tr}$
 $e^{fix,TR} = e_n^{fix}$
 $e^{pl,TR} = e_n^{pl}$
 $\eta^{TR} = \eta_n \quad \omega^{TR} = \omega_n$
 $s^{TR} = 2G (e - e^{tr,TR} - e^{pl,TR})$
if $\|e^{tr} - e^{fix} - e^{pl}\| < \varepsilon_{L,n}$
 vale la formulazione con h_1
else
 vale la formulazione con h_2
end

• VERIFICA PASSO TRIAL

$F^{TR} = F(\mathbf{X}^{TR}, \mathbf{Y}^{TR})$
 $G^{TR} = G(\mathbf{Q}^{TR})$
if $F^{TR} < 0$ AND $G^{TR} < 0$
 passo trial accettabile (elastico)
 $e^{tr} = e^{tr,TR}$
 $e^{fix} = \mathbf{q}^{fix,TR}$
 $e^{pl} = e^{pl,TR}$
 $\eta = \eta^{TR} \quad \omega = \omega^{TR} \quad \varepsilon_L = \varepsilon_{L,n}$
else
 passo trial non accettabile (inelastico)

 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr}, e^{fix}, \omega, \varepsilon_L \Rightarrow$ solo $\mathbf{R}^X, R^{\Delta\zeta}, \mathbf{R}^Y$
 end while

controllo se vale ancora la formulazione h_1/h_2 , in caso si ricalcola la soluzione ponendosi nell'altro caso

if $G > 0$
 while $\|residui\| < tolleranza$
 Newton-Rapshon per ottenere: $e^{tr}, e^{fix}, e^{pl}, \eta, \omega, \varepsilon_L \Rightarrow$
 $\mathbf{R}^X, R^{\Delta\zeta}, \mathbf{R}^Y, \mathbf{R}^Q, R^{\Delta\mu}$
 end while
end if

end if

• AGGIORNAMENTO SFORZO

$s = 2G (e - e^{tr} - e^{pl})$

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Y^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Y & \mathbb{R}_{\Delta\zeta}^Y & \mathbf{R}_Y^Y & \mathbb{R}_Q^Y & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Y^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

I termini contenuti nella matrice sono riportati nel seguito, nel caso in cui $\|\boldsymbol{\xi}\| < \varepsilon_L(t)$:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + (h_1 + h'(\omega + \eta))) \Delta\zeta \mathbb{B}^X + \Delta\zeta \tau_{M2} \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X = 2GN^X + \tau_{M2} \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2 k \mathbf{N}^Y) + (h_1 + h'(\omega + \eta)) (\mathbf{N}^X - c_2 k \mathbf{N}^Y) + (h' - \phi_1 c_1) c_2 k \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_Y^X = -c_2 k \Delta\zeta \tau_{M2} \mathbb{L} \mathbb{B}^Y - c_2 k (h_1 + h'(\omega + \eta)) \Delta\zeta \mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^X = 2G \Delta\mu \mathbb{B}^Q - b \Delta\mu \tau_{M2} \mathbb{L} \mathbb{B}^Q - b \Delta\mu (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^X = 2GN^Q - b \tau_{M2} \mathbb{L} : \mathbf{N}^Q - b (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbf{N}^Q + b [h' - (\phi_1 + B/2) c_1] \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_X^Y = -\Delta\zeta \tau_{M2} \mathbb{L} \mathbb{B}^X - \Delta\zeta (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Y = -\tau_{M2} \mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2 k \mathbf{N}^Y) - (h_1 + h'(\omega + \eta)) (\mathbf{N}^X - c_2 k \mathbf{N}^Y) + c_2 k (\phi_1 c_1 - h') \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_Y^Y = \mathbb{I} + c_2 k \Delta\zeta \tau_{M2} \mathbb{L} : \mathbb{B}^Y + c_2 k (h_1 + h'(\omega + \eta)) \Delta\zeta \mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^Y = b \Delta\mu \tau_{M2} \mathbb{L} : \mathbb{B}^Q + b \Delta\mu (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y = b \tau_{M2} \mathbb{L} : \mathbf{N}^Q + b (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbf{N}^Q + b [(\phi_1 + B/2) c_1 - h'] \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_X^Q = 2G \Delta\zeta \mathbb{B}^X - b \Delta\zeta \tau_{M2} \mathbb{L} \mathbb{B}^X - b \Delta\zeta (h_1 + h'(\omega + \eta)) \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q = 2G\mathbf{N}^X - b\tau_{M2}\mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) - b(h_1 + h'(\omega + \eta))(\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) + c_2kb(\phi_1c_1 - h')\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_Y^Q = c_2kb\Delta\zeta\tau_{M2}\mathbb{L}\mathbb{B}^Y + c_2kb(h_1 + h'(\omega + \eta))\Delta\zeta\mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^Q = \mathbb{I} + (2G + HK)\Delta\mu\mathbb{B}^Q + b^2\Delta\mu\tau_{M2}\mathbb{L}\mathbb{B}^Q + b^2(h_1 + h'(\omega + \eta))\Delta\mu\mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q = (2G + HK)\mathbf{N}^Q + b^2\tau_{M2}\mathbb{L} : \mathbf{N}^Q + b^2(h_1 + h'(\omega + \eta))\mathbf{N}^Q + b^2[(\phi_1 + B/2)c_1 - h']\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{N}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = c_2k\phi_2 \quad \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} = k\mathbf{N}^Y \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} = 0$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\mu} = -b(h_1 + h'(\omega + \eta))\Delta\zeta\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} = c_2kb(\phi_1 - h'\|\boldsymbol{\xi}\|) - b(h_1 + h'(\omega + \eta))\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y)$$

$$\mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} = c_2kb(h_1 + h'(\omega + \eta))\Delta\zeta\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^Y \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} = \mathbf{N}^Q + b^2(h_1 + h'(\omega + \eta))\Delta\mu\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} = -\sqrt{\frac{2}{3}}HI\eta + b^2(h_1 + h'(\omega + \eta))\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbf{N}^Q + b^2(\phi_1 + B/2) - b^2h'\|\boldsymbol{\xi}\|$$

Con:

$$\mathbf{N}^X = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \quad \mathbf{N}^Q = \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|} \quad \mathbf{N}^Y = \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|}$$

$$\mathbb{B}^* = \frac{1}{\|\ast\|} [\mathbb{I} - \mathbf{N}^* \otimes \mathbf{N}^*]$$

$$\tau_{M2} = \tau_M - \frac{A(1 + \phi)}{2}(\omega + \eta) - \frac{B}{2}\eta$$

$$\frac{\partial [c_1\boldsymbol{\xi}]}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbb{L} = c_1 [\mathbb{I} - c_1^2\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}]$$

$$\phi_1 = \frac{1 + \phi}{2} \quad \phi_2 = \frac{1 - \phi}{2}$$

Invece quando $\|\boldsymbol{\xi}\| > \varepsilon_L(t)$:

$$\mathbb{R}_X^X = \mathbb{I} + (2G + h_2) \Delta\zeta \mathbb{B}^X + \Delta\zeta \tau_{M3} \mathbb{L} \mathbb{B}^X$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X &= 2G\mathbf{N}^X + \tau_{M3}\mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) + h_2 (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) + \\ &+ c_2k [h'\varepsilon_L - (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - \phi_1] c_1\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_Y^X = -c_2k\Delta\zeta\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^Y - c_2kh_2\Delta\zeta\mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^X = 2G\Delta\mu\mathbb{B}^Q - b\Delta\mu\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^Q - b\Delta\mu h_2\mathbb{B}^Q$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X &= 2G\mathbf{N}^Q - b\tau_{M3}\mathbb{L} : \mathbf{N}^Q - bh_2\mathbf{N}^Q + \\ &+ b [h'\varepsilon_L - (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - (\phi_1 + B/2)] c_1\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_X^Y = -\Delta\zeta\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^X - \Delta\zeta h_2\mathbb{B}^X$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Y &= -\tau_{M3}\mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) - h_2 (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) + \\ &+ c_2k [\phi_1 + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L] c_1\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_Y^Y = \mathbb{I} + c_2k\Delta\zeta\tau_{M3}\mathbb{L} : \mathbb{B}^Y + c_2kh_2\Delta\zeta\mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^Y = b\Delta\mu\tau_{M3}\mathbb{L} : \mathbb{B}^Q + b\Delta\mu h_2\mathbb{B}^Q$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y &= b\tau_{M3}\mathbb{L} : \mathbf{N}^Q + bh_2\mathbf{N}^Q + \\ &+ b [(\phi_1 + B/2) + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L] c_1\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_X^Q = 2G\Delta\zeta\mathbb{B}^X - b\Delta\zeta\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^X - b\Delta\zeta h_2\mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q = 2G\mathbf{N}^X - b\tau_{M3}\mathbb{L} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) - bh_2 (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y) + c_2b [k\phi_1 + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L] c_1\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbb{R}_Y^Q = c_2kb\Delta\zeta\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^Y + c_2kbbh_2\Delta\zeta\mathbb{B}^Y$$

$$\mathbb{R}_Q^Q = \mathbb{I} + (2G + HK) \Delta\mu\mathbb{B}^Q + b^2\Delta\mu\tau_{M3}\mathbb{L}\mathbb{B}^Q + b^2h_2\Delta\mu\mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q = (2G + HK) \mathbf{N}^Q + b^2\tau_{M3}\mathbb{L} : \mathbf{N}^Q + b^2h\mathbf{N}^Q + b^2 [(\phi_1 + B/2) + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L] c_1\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} = \mathbf{N}^X \quad \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} = c_2k\phi_2 \quad \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} = k\mathbf{N}^Y \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} = 0$$

$$\mathbf{R}_X^{\Delta\mu} = -bh_2\Delta\zeta \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^X$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} = c_2k [b\phi_1 + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L] - bh_2 \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : (\mathbf{N}^X - c_2k\mathbf{N}^Y)$$

$$\mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} = c_2kbbh_2\Delta\zeta \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^Y \quad \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} = \mathbf{N}^Q + h_2\Delta\mu b^2 \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbb{B}^Q$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} = -\sqrt{\frac{2}{3}}HI\eta + b^2h_2 \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} : \mathbf{N}^Q + b^2 [(\phi_1 + B/2) + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) - h'\varepsilon_L]$$

Con:

$$\tau_{M3} = \tau_{M2} + (h_1 + h'(\omega + \eta) - h_2) \varepsilon_L$$

Il modello costitutivo va completato con il calcolo di un tensore del quarto ordine tangente, per assicurare la convergenza quadratica di un metodo di Newton-Rapshon di un software agli elementi finiti che sfrutti questo modello durante le simulazioni numeriche; ovvero è necessario trovare:

$$\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$$

L'idea è di partire dalla differenziazione delle equazioni (5.51) e (5.52), ottenendo:

$$dp = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.66)$$

$$ds = 2G \left(\mathbb{I} - \frac{de^{tr}}{de} - \frac{de^{pl}}{de} \right) \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} = 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2) \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.67)$$

dove:

$$\mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

$$de = \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}$$

A questo punto se si considerano le equazioni residuali del modello non solo come funzioni di \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Q} , $\Delta\zeta$, $\Delta\mu$, ma anche di \mathbf{e} , la corrispondente linearizzazione diventa:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}^X &= \mathbb{R}_X^X : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X \Delta\zeta + \mathbb{R}_Y^X : d\mathbf{Y} + \mathbb{R}_Q^X : d\mathbf{Q} + \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X \Delta\mu + \mathbf{R}_e^X : de = \mathbf{0} \\ dR^{\Delta\zeta} &= \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} : d\mathbf{X} + R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \Delta\zeta + \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} : d\mathbf{Y} + \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} : d\mathbf{Q} + R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} \Delta\mu + \mathbf{R}_e^{\Delta\zeta} : de = 0 \\ d\mathbf{R}^Y &= \mathbb{R}_X^Y : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Y \Delta\zeta + \mathbb{R}_Y^Y : d\mathbf{Y} + \mathbb{R}_Q^Y : d\mathbf{Q} + \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y \Delta\mu + \mathbf{R}_e^Y : de = \mathbf{0} \\ d\mathbf{R}^Q &= \mathbb{R}_X^Q : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q \Delta\zeta + \mathbb{R}_Y^Q : d\mathbf{Y} + \mathbb{R}_Q^Q : d\mathbf{Q} + \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q \Delta\mu + \mathbf{R}_e^Q : de = \mathbf{0} \\ dR^{\Delta\mu} &= \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} : d\mathbf{X} + R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} \Delta\zeta + \mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} : d\mathbf{Y} + \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} : d\mathbf{Q} + R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} \Delta\mu + \mathbf{R}_e^{\Delta\mu} : de = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

dove:

$$\mathbb{R}_e^X = -2G\mathbb{I} \quad \mathbb{R}_e^Y = \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_e^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \quad \mathbb{R}_e^Q = -2G\mathbb{I} \quad \mathbf{R}_e^{\Delta\mu} = \mathbf{0}$$

Le equazioni (5.68) possono essere riformulate come:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\Delta\zeta \\ d\mathbf{Y} \\ d\mathbf{Q} \\ d\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Y^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Y & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Y & \mathbb{R}_Y^Y & \mathbb{R}_Q^Y & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Y^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : de$$

Linearizzando ora anche e^{tr} ed e^{pl} :

$$de^{tr} = e_X^{tr} : d\mathbf{X} + e_{\Delta\zeta}^{tr} d\Delta\zeta + e_Y^{tr} : d\mathbf{Y} + e_Q^{tr} : d\mathbf{Q} + e_{\Delta\mu}^{tr} d\Delta\mu = \mathbb{E}_1 : de$$

$$de^{pl} = e_X^{pl} : d\mathbf{X} + e_{\Delta\zeta}^{pl} d\Delta\zeta + e_Y^{pl} : d\mathbf{Y} + e_Q^{pl} : d\mathbf{Q} + e_{\Delta\mu}^{pl} d\Delta\mu = \mathbb{E}_2 : de$$

con:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \left(\begin{bmatrix} e_X^{tr} & e_{\Delta\zeta}^{tr} & e_Y^{tr} & e_Q^{tr} & e_{\Delta\mu}^{tr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_X^{pl} & e_{\Delta\zeta}^{pl} & e_Y^{pl} & e_Q^{pl} & e_{\Delta\mu}^{pl} \end{bmatrix} \right). \quad (5.69)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{R}_X^X & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^X & \mathbb{R}_Y^X & \mathbb{R}_Q^X & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^X \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\zeta} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\zeta} \\ \mathbb{R}_X^Y & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Y & \mathbb{R}_Y^Y & \mathbb{R}_Q^Y & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Y \\ \mathbb{R}_X^Q & \mathbf{R}_{\Delta\zeta}^Q & \mathbb{R}_Y^Q & \mathbb{R}_Q^Q & \mathbf{R}_{\Delta\mu}^Q \\ \mathbf{R}_X^{\Delta\mu} & R_{\Delta\zeta}^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Y^{\Delta\mu} & \mathbf{R}_Q^{\Delta\mu} & R_{\Delta\mu}^{\Delta\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$e_X^{tr} = \Delta\zeta \mathbb{B}^X \quad e_{\Delta\zeta}^{tr} = \mathbf{N}^X \quad e_Y^{tr} = \mathbf{0} \quad e_Q^{tr} = \mathbf{0} \quad e_{\Delta\mu}^{tr} = \mathbf{0}$$

$$e_X^{pl} = \mathbf{0} \quad e_{\Delta\zeta}^{pl} = \mathbf{0} \quad e_Y^{pl} = \mathbf{0} \quad e_Q^{pl} = \Delta\mu \mathbb{B}^Q \quad e_{\Delta\mu}^{pl} = \mathbf{N}^Q$$

si può finalmente scrivere:

$$\mathbb{D} = K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G (\mathbb{I} - \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2) \mathbb{I}_{dev} \quad (5.71)$$

5.5 Calibrazione dei parametri del modello costitutivo

Prima di testare accuratamente il modello formulato, diventa necessario spiegare chiaramente come poter calibrare in modo efficace tutti i parametri che compaiono partendo da curve di trazione sperimentali.

I primi parametri che possono essere facilmente trovati sono le pendenze relative ai vari tratti della curva sforzo deformazione del materiale in fase pseudoelastica, Fig. 5.7, partendo da una prova di trazione in cui si porta il materiale a rottura. Il tratto lineare corrispondente alla risposta elastica dell'austenite ha pendenza pari al modulo elastico di tale fase, e corrisponde al modulo elastico da inserire nel modello, E . Altre quantità notevoli sono le pendenze relative agli altri tre tratti tipici della curva sforzo-deformazione. In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_2 = \frac{Em}{E+m} \quad (5.72)$$

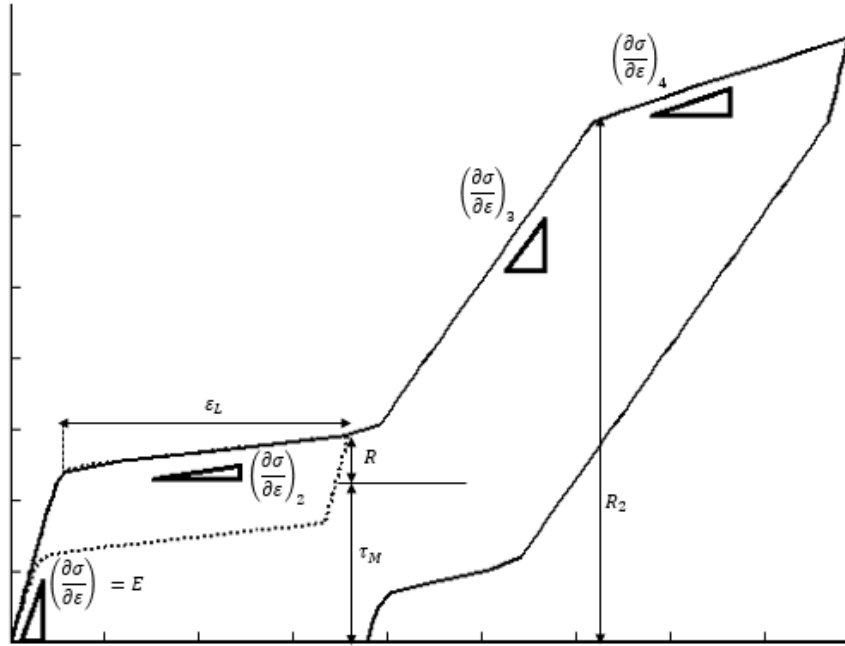


Figura 5.7: Curva sforzo-deformazione con evidenziati i parametri che possono essere ricavati

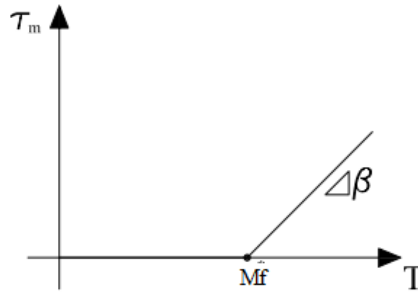
$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_3 = \frac{Eh_2}{E + h_2} \quad (5.73)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_4 = \frac{E H_I}{E + H_I} \quad (5.74)$$

Da cui si possono ottenere h_2 , ovvero il parametro di hardening corrispondente alla fase elastica della martensite, H_I ovvero il coefficiente di incrudimento isotropo relativo alla fase plastica, e m , parametro che in seguito permetterà con ulteriori passaggi di trovare il termine h_1 .

Dalla Fig. 5.7 si possono anche ricavare altri parametri, ovvero R , corrispondente a metà dell'isteresi meccanica, ε_{L0} l'ampiezza iniziale del plateau di trasformazione di fase, R_2 il raggio del dominio elastico, che corrisponde alla soglia di snervamento del materiale. Inoltre la posizione dello sforzo medio della bandiera pseudoelastica corrisponde a τ_M , il quale a sua volta è definito come: $\tau_M = \beta \langle T - M_f \rangle$, in cui M_f è la temperatura al di sotto della quale è stabile la martensite, e β è il coefficiente di proporzionalità lineare tra sforzo di inizio trasformazione di fase e temperatura (Fig. 5.8).

Restano ora da calibrare i parametri relativi alla fatica, determinanti il comportamento del modello quando si effettua una prova di trazione di carico e scarico ciclica. Per fare questo è necessario eseguire due cicli meccanici portando a termine


 Figura 5.8: Rappresentazione del significato del parametro β

la trasformazione di fase, ovvero raggiungendo il ramo elastico corrispondente alla risposta della martensite, senza tuttavia determinare lo snervamento del materiale. Tale prova è mostrata in Fig. 5.9: si nota chiaramente la formazione di una certa deformazione irreversibile dopo il primo ciclo, valore che corrisponde al valore raggiunto durante il primo ciclo dalla variabile e^{fix} ¹. Infatti nel modello la fatica è stata formulata allo stesso modo del modello di Auricchio presentato nel Cap. 4, quindi il fatto che allo scarico non venga recuperata totalmente la deformazione subita deriva dal fatto di impedire a e^{tr} di tornare ad un valore nullo, ma di rimanere invece proprio pari ad e^{fix} .

Il parametro k del modello è il fattore di scala tra gli effetti della fatica e della trasformazione di fase, quindi può essere visto come il rapporto tra la deformazione residua accumulata durante un ciclaggio meccanico e la variazione totale subita da e^{tr} durante la medesima prova. Dato che nella prova sperimentale è stato eseguito un carico e scarico completo, in cui cioè la trasformazione di fase e quindi il plateau è stato percorso nella sua interezza fino a giungere al tratto lineare relativo alla martensite, e^{tr} ha raggiunto durante il carico un valore pari a ε_{L0} , per poi ridursi durante lo scarico fino ad arrivare alla condizione $e^{tr} = e^{fix}$ quando la sollecitazione è stata completamente rimossa. La variabile e^{tr} ha quindi subito una variazione totale pari a $2\varepsilon_{L0} - e^{fix}$, dove ε_{L0} è l'ampiezza del plateau al primo ciclo meccanico. Si può quindi trovare il fattore di scala k rapportando l'accumulo subito da e^{fix} con la variazione totale esibita da e^{tr} :

$$k = \frac{e^{fix}}{2\varepsilon_{L0} - e^{fix}} \quad (5.75)$$

Per quanto riguarda il fenomeno di degradazione del materiale si è deciso di considerarlo proporzionale alla deformazione irreversibile accumulata. Calibrando i parametri del materiale sempre sulla stessa prova di trazione in cui si sono effettuati

¹Si fa notare che in questo paragrafo le variabili tensoriali del modello saranno indicate con lettere non in grassetto, in quanto considerando una prova monoassiale possono essere trattate come fossero degli scalari.

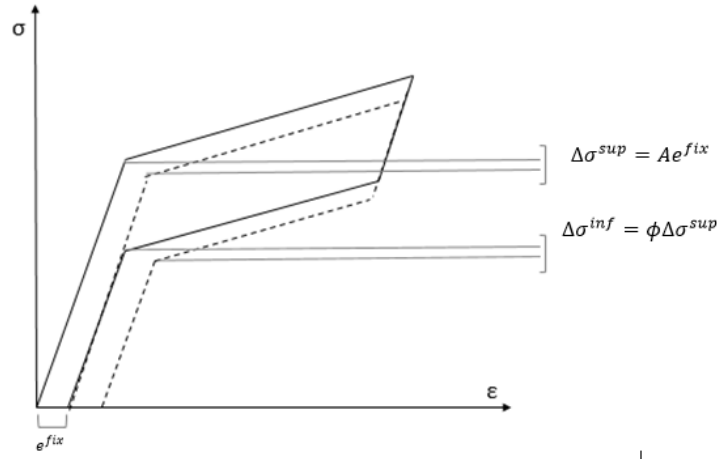


Figura 5.9: Illustrazione del significato dei parametri A e ϕ

due cicli di carico e scarico in cui si è completata la trasformazione di fase raggiungendo il ramo elastico della martensite, il valore raggiunto da e^{fix} dopo il primo ciclo rappresenta la deformazione accumulata per fatica durante tale ciclo. L'effetto di degradazione del materiale, ovvero l'abbassamento $\Delta\sigma^{sup}$ dello sforzo critico di inizio trasformazione di fase viene considerato direttamente proporzionale alla deformazione accumulata, ovvero $\Delta\sigma^{sup} = Ae^{fix}$. L'abbassamento del plateau inferiore viene invece legato all'abbassamento di quello superiore, tramite il parametro ϕ , con la relazione: $\Delta\sigma^{inf} = \phi\Delta\sigma^{sup}$ (Fig. 5.9). Misurando queste due variazioni delle soglie di trasformazione di fase si possono quindi ottenere A e ϕ . Sempre da questa tipologia di prova, nel caso il test sperimentale evidenziasse un aumento di pendenza del plateau all'aumentare della deformazione accumulata, si può calibrare il parametro h' che lega tale variazione di pendenza con la deformazione irreversibile nata durante un ciclaggio. In particolare, sotto l'ipotesi già esemplificata che la pendenza del plateau $(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon})$ vari linearmente con la deformazione accumulata, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{secondociclo} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{iniziale} + h'e^{fix}$$

$$h' = \frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{secondociclo} - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right)_{iniziale}}{e^{fix}} \quad (5.76)$$

Si ricorda che il modello formulato non è in grado di cogliere il fatto che l'accumulo di deformazione per fatica sia più pronunciato durante i primi cicli meccanici, per poi rallentare vistosamente. Di conseguenza la scelta di calibrare i parametri k , A , ϕ , h' sui primi due cicli meccanici porterebbe al fatto che il modello sia in grado di rappresentare correttamente il comportamento meccanico durante tali cicli, discostandosi tuttavia dai risultati sperimentali durante i cicli più avanzati, in quanto

continuerebbe ad esibire un accumulo pronunciato.

A questo punto si può riprendere l'Eq. 5.72 per ricavare il parametro h_1 . Ricordando l'espressione della variabile X all'interno del modello di Souza-Auricchio-Petrini, ovvero:

$$X = s - he^{tr} - \tau_M \frac{e^{tr}}{\|e^{tr}\|}$$

si aveva che il parametro h , che rappresenta il fattore moltiplicativo della variabile e^{tr} , è legato alla pendenza esibita dalla curva sforzo-deformazione durante il plateau di trasformazione di fase tramite la relazione:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_2 = \frac{Eh}{E+h} \approx h \quad \text{se } E \gg h$$

Nel modello qui formulato l'espressione di X è:

$$X = s - h_1 (e^{tr} - e^{fix}) - \tau_M \frac{e^{tr} - e^{fix}}{\|e^{tr} - e^{fix}\|} + A\omega$$

in cui per semplicità si è trascurato il parametro h' e si è tenuto conto che nelle prove di trazione sopra utilizzate per la calibrazione dei parametri si ha una deformazione plastica e^{pl} , e quindi anche $\eta(t)$, pari a zero, in quanto non si giunge a snervamento. La presenza del termine $A\omega$ deriva inoltre dal fatto di aver inglobato nell'espressione di X l'effetto che la degradazione ha sull'ampiezza del dominio elastico. Tenuto in considerazione delle leggi evolutive per e^{fix} e $\omega(t)$, e del fatto che l'evoluzione di e^{fix} in una prova monoassiale è pari a $e^{fix} = ke^{tr}$, si può riarrangiare l'espressione per X , che diventa:

$$X = s - h (e^{tr} - ke^{tr}) - \tau_M \frac{e^{tr} - ke^{tr}}{\|e^{tr} - ke^{tr}\|} + Ake^{tr}$$

ovvero:

$$X = s - [h_1(1-k) - Ak] e^{tr} - \tau_M \frac{e^{tr}}{\|e^{tr}\|}$$

In tale espressione il fattore moltiplicativo della deformazione e^{tr} legata alla trasformazione di fase è:

$$m = h_1(1-k) - Ak$$

Sostituendo tale espressione nell'Eq. 5.72, con l'ipotesi che $E \gg m$, si ottiene

$$h_1 = \frac{m + Ak}{1 - k} \quad (5.77)$$

Si vede che il parametro h_1 , inteso come parametro da inserire nel modello, quindi corrispondente all'hardening al primo ciclo, visto che poi aumenterà per effetto di h' , non è direttamente legato alla pendenza della curva durante la trasformazione di fase, ma risente dei parametri A e k ; ciò è un aspetto negativo del modello, in quanto tale parametro dovrebbe invece essere indipendente da quelli che regolano la fatica, quindi tale aspetto rientra tra le caratteristiche che dovranno eventualmente essere migliorate in lavori futuri che migliorino ulteriormente il modello.

Ultimi parametri che bisogna ricavare dai dati sperimentali sono B , che esprime il legame tra l'abbattimento del plateau inferiore e la deformazione plastica, e b , che regola la riduzione della lunghezza del plateau, sempre dovuta alla plasticità. Per ottenere questi parametri si può partire da una prova in cui si porta il materiale ad una deformazione che non determini l'ingresso del materiale nella zona elastica della martensite, seguita dallo scarico; a questo si punto si sottopone il materiale nuovamente a trazione fino al raggiungimento dello snervamento, e infine lo si scarica prima che si raggiunga il punto di rottura (Fig. 5.10). Per quanto riguarda b tale parametro rappresenta il peso con cui la deformazione plastica incide sulla riduzione del plateau. Dopo lo scarico successivo ad una prova di trazione in cui si è superato lo sforzo critico di snervamento, la deformazione residua presente è dovuta in parte alla deformazione plastica subita ed in parte al fatto che il plateau inferiore è di ampiezza più limitata (non considerando per semplicità il piccolo contributo della deformazione dovuta alla fatica): il parametro b rappresenta il rapporto tra quanto si è ridotto il plateau e l'ammontare della deformazione plastica accumulata.

$$b = \frac{\varepsilon^{scarico} - \varepsilon^{plastica}}{\varepsilon^{plastica}} \quad (5.78)$$

In base a tale definizione, il plateau si riduce in seguito ad una deformazione plastica $\varepsilon^{plastica}$ della quantità $b\varepsilon^{plastica}$. Ne consegue che se $b = 0$, allo scarico la deformazione accumulata è solamente pari alla deformazione plastica, la quale non ha determinato nessuna riduzione del plateau di trasformazione di fase. Se invece avviene anche una riduzione della sua ampiezza, b aumenta, in quanto allo scarico rimane una deformazione residua maggiore rispetto a quella plastica. Per esempio, se $b = 1$, allo scarico rimane il doppio della deformazione plastica, quindi il plateau si è ridotto proprio della stessa misura della deformazione plastica avvenuta durante il carico.

Il parametro B lega la variazione della soglia critica inferiore della curva sforzo-deformazione con la riduzione dell'ampiezza del plateau per effetto della deformazione plastica in maniera direttamente proporzionale; bisogna tuttavia tenere in conside-

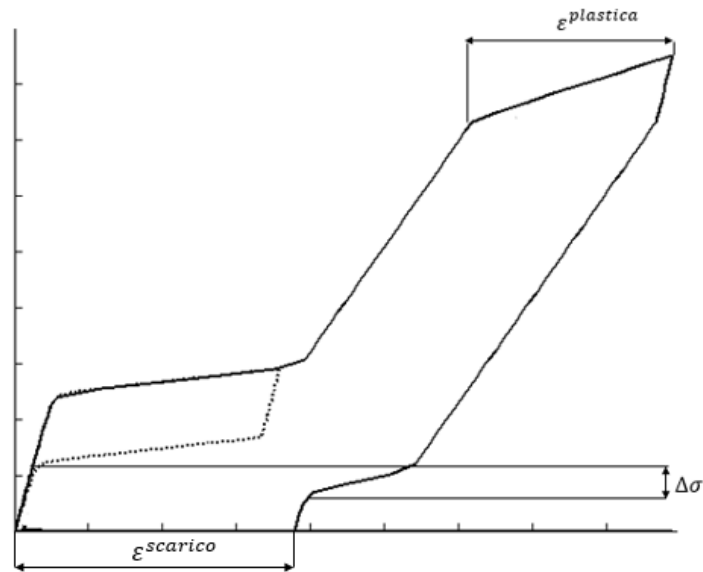


Figura 5.10: Rappresentazione di una prova di carico e scarico di trazione monoassiale fino ad una deformazione minore rispetto ad ε_L , seguita da un ulteriore carico e scarico fino al superamento dello snervamento. Sono indicati in figura la deformazione plastica, la deformazione accumulata visibile dopo lo scarico finale e l'abbassamento del plateau inferiore causato dalla plasticizzazione del materiale.

razione che già il fenomeno di degradazione modellizzato con i parametri A e ϕ causa un abbassamento dello sforzo critico, per cui bisogna depurare $\Delta\sigma$ da tale quantità. Quindi B può essere ottenuto dalla relazione:

$$\Delta\sigma - A\phi\varepsilon^{plastica} = Bb\varepsilon^{plastica} \quad (5.79)$$

5.6 Test numerici

I primi test effettuati sul modello appena presentato hanno avuto come obiettivo verificare che la formulazione data fosse in grado di cogliere tutti i comportamenti di interesse: sono stati quindi scelti parametri arbitrari e si sono considerate diverse storie di carico.

In seguito sono state scelte delle curve di letteratura, relative a varie prove di trazione, e sono state confrontate con quelle ottenute testando il modello costitutivo proposto, opportunamente calibrato. Per ultimo si sono ripetute alcune delle prove condotte sperimentalmente descritte nel Cap. 3, in modo da poter osservare il grado di somiglianza tra le previsioni del modello e i test effettuati.

Tabella 5.3: Parametri utilizzati per i test sul modello formulato

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
$50/25 \cdot 10^3$	0.35	1500	$20000/10^5$	100000	4000	2000	3	0.04	1
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	α [1/K]	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	
0.3	100	750	0.02	10^{-7}	10^{-6}	245	235	5000	

5.6.1 Primi test

Per testare il modello formulato in questo capitolo, l'algoritmo discreto presentato nella Sez. 5.4 è stato tradotto in una funzione MATLAB ed implementato all'interno dell'interfaccia grafica descritta nella Sez. 4.1.

I primi test sono delle semplici prove monoassiali, in cui si vuole controllare che tutti gli aspetti che sono stati introdotti nella formulazione teorica siano effettivamente presenti. I test sono stati effettuati utilizzando i parametri della Tab. 5.3. Nel caso del coefficiente di hardening h_2 relativo al tratto lineare della martensite sono riportati due valori: il primo è utilizzato nel caso di test ad alte temperatura in quanto si vuole che tale tratto sia meno pendente rispetto a quello elastico dell'austenite; il secondo è utilizzato nei test a basse temperature, dove tale tratto dovrebbe essere più pendente rispetto a quello elastico della martensite multivariante. Tuttavia, come già osservato nella Sez. 2.4.2, per come è implementato il modello è possibile solo raggiungere per il tratto elastico della martensite monovariante lo stesso valore della martensite multivariante, inserendo un valore $h_2 \gg E$. Nella stessa tabella sono anche presenti due valori per il modulo elastico E : quello più elevato è utilizzato nei test ad alte temperature e corrisponde all'austenite, quello più basso, posto pari alla metà del primo, corrisponde invece al modulo elastico della martensite multivariante. I passi di carico sono stati divisi in 50 sottointervalli, come i passi relativi a cambiamenti di temperatura; le prove sono effettuate imponendo i valori di sforzo. A sinistra della Fig. 5.11 è mostrata una prova di carico e scarico a 600 MPa, con intervalli di carico di 12 MPa, ripetuta per volte 5 volte, in condizioni di pseudoelasticità, $T = 310$ K. Si vede chiaramente il procedere della fatica, ovvero di un accumulo di deformazione irreversibile, accompagnato da una degradazione del materiale, ovvero una abbassamento graduale dei plateau di transizione di fase; in particolare il valore di sforzo critico del plateau sottostante si abbassa chiaramente di una quantità inferiore rispetto a quello soprastante. L'abbassamento del plateau superiore è ottenuto mediante il parametro A , che lega l'abbassamento dello sforzo critico in maniera direttamente proporzionale alla deformazione accumulata per fatica, e^{fix} modo che: $\Delta\sigma^{sup} = Ae^{fix}$. Al procedere dei cicli il valore di e^{fix} aumenta, determinando quindi un progressivo abbassamento del plateau superiore. L'abbassamento invece di quello inferiore è legato al primo tramite il parametro ϕ , in modo che

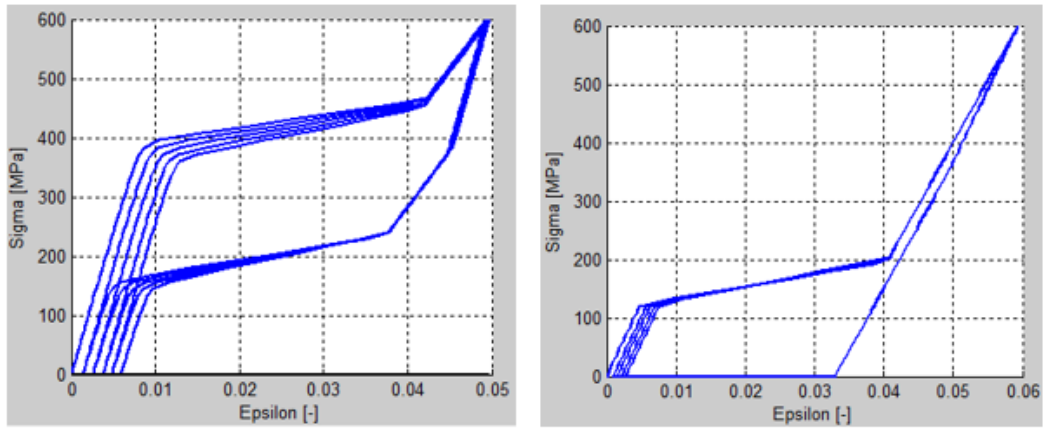


Figura 5.11: Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto imponendo 5 cicli di carico e scarico fino a 600 MPa, in presenza di fatica. A sinistra prova condotta con $T = 310$ K, a destra condotta con $T = 230$ K $< M_f$ durante la fase di carico, scarico e recupero termico innalzando la temperatura fino a 280 K.

$\Delta\sigma^{inf} = \phi\Delta\sigma^{sup}$; dato che in tale prova è stato posto $\phi < 1$, ne consegue che il ramo inferiore si abbassa meno rispetto a plateau di trasformazione di fase durante il carico. Inoltre al procedere dei ciclaggi si vede un aumento progressivo di pendenza del tratto del plateau: ciò è determinato dal parametro h' , che agisce sul parametro di hardening h_1 aumentandolo in maniera proporzionale alla deformazione accumulata: $h_1(t) = h_1(0) + h'e^{fix}$.

A destra della stessa figura, invece, è mostrata una prova di ciclaggio termomeccanico su un materiale inizialmente mantenuto in martensite, a $T = 230$ K $< M_f$: si procede innanzitutto ad un carico fino a 600 MPa, seguito da scarico, riscaldamento di 50 K e infine raffreddamento alla temperatura originaria; i passi di carico sono di 12 MPa, gli incrementi di temperatura di 1 K e la prova è ripetuta 5 volte. Il modello è quindi in grado di cogliere sia la pseudoelasticità che la memoria di forma, inserendo correttamente in entrambe la presenza di fatica.

La Fig. 5.12 mostra invece una prova di trazione su un materiale pseudoelastico ($T = 310$ K) fino a 1000 MPa, con intervalli di carico di 20 MPa. Il materiale in seguito al tratto elastico della martensite entra in plasticità, segnata nella curva-sforzo deformazione da un abbassamento della pendenza; allo scarico il materiale recupera con una transizione di fase inversa la forma iniziale, ma non completamente, segno che le deformazioni plastiche hanno impedito a parte della martensite presente di trasformarsi in austenite. Tale effetto è regolato dal parametro b , che fa in modo che la deformazione accumulata allo scarico sia maggiore rispetto alla deformazione plastica: tale divario permette infatti di ottenere un plateau di scarico di lunghezza più limitata rispetto a quello durante il carico. La deformazione residua al completamento dello scarico è data dalla deformazione plastica subita e dal contributo derivante dall'accorciamento del plateau. Si nota anche il fatto che la plasticizzazio-

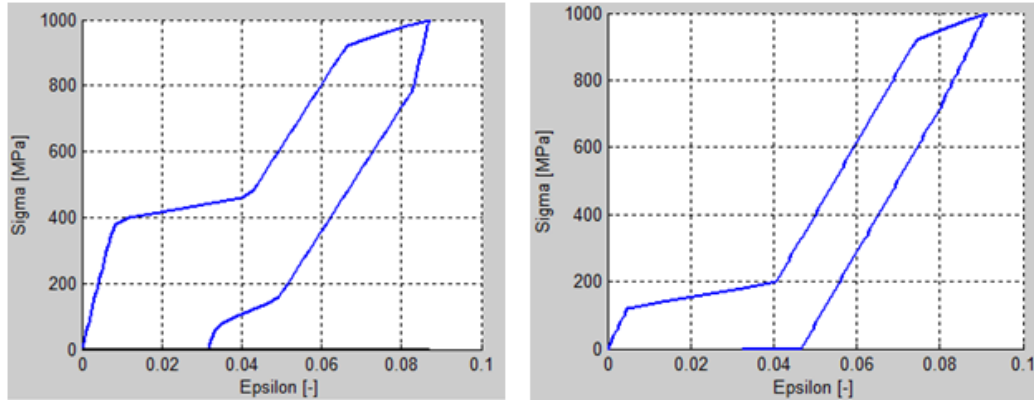


Figura 5.12: Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, in presenza di plasticità, imponendo un ciclo di carico e scarico fino a 1000 MPa. A sinistra prova condotta con $T = 310$ K, a destra condotta con $T = 230$ K $< M_f$ durante la fase di carico, scarico e recupero termico innalzando la temperatura fino a $T = 280$ K

ne del materiale ha attivato gli effetti del parametro B , causando un abbassamento del plateau inferiore più pronunciato rispetto a quanto avveniva per fatica durante le prove precedenti di ciclaggio. L'abbassamento è pari a $\Delta\sigma = (A\phi + bB)\varepsilon^{plastica}$, ovvero è in parte dovuto all'effetto del parametro A che è attivato anche dall'accumulo di fatica, ma è rinforzato dal contributo del parametro B : il fatto inoltre che B agisce solo sul plateau inferiore determina il fatto che entrando in plasticità il materiale esibisce un'ampiezza di isteresi meccanica maggiore.

A destra della medesima figura è presentato lo snervamento di un materiale inizialmente in fase martensitica, a cui segue riscaldamento di 50 K e ritorno alla temperatura iniziale: anche in questo caso la plasticità diminuisce la capacità del materiale di tornare alla forma originaria.

La Fig. 5.13 mostra invece la stessa prova di trazione fino allo snervamento, ma seguita da un carico e scarico in compressione fino a 1000 MPa, sempre con incrementi di carico di 20 MPa. Da questa figura emerge come il modello formulato riesca a superare le difficoltà presenti nel lavoro di Auricchio et al. (2007), Sez. 4.2: il plateau di trasformazione, dopo essersi ridotto a causa della presenza di deformazioni plastiche in trazione, rimane più corto anche passando in compressione; inoltre l'effetto degradativo causa un abbassamento della soglia critica di trasformazione di fase anche in compressione, mentre invece nel modello di Auricchio il termine che regola la degradazione non permetteva questo tipo di risposta.

E' stata inoltre verificata la solidità dell'algoritmo discreto effettuando una prova di trazione fino a 1000 MPa, seguita da scarico, con diversi incrementi di carico (50 MPa, 25 MPa, 12.5 MPa). In Fig. 5.14 si vede come variando l'incremento di carico il modello riesca comunque ad arrivare a convergenza, cogliendo sempre la forma corretta della curva sforzo-deformazione.

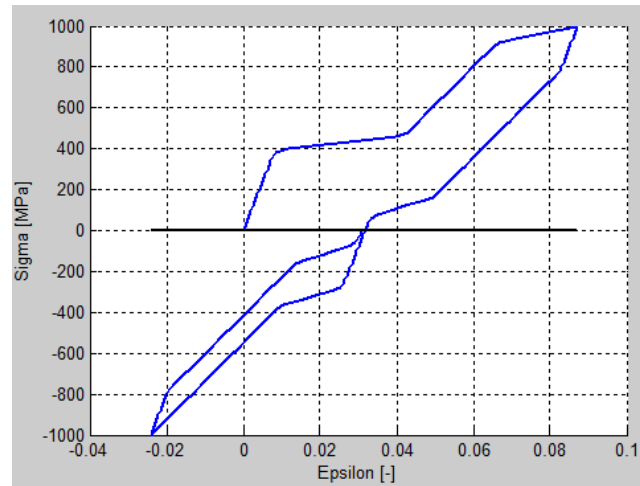


Figura 5.13: Curva $\sigma - \varepsilon$ ottenuta con il modello proposto, relativa ad una prova di trazione seguita da compressione, entrambe fino a 1000 MPa: è evidente come anche in compressione il plateau rimane di lunghezza ridotta.

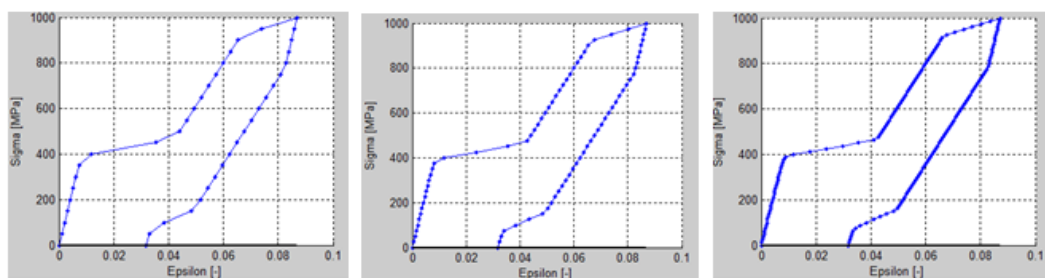


Figura 5.14: Verifica robustezza del modello: confronto tra test svolti con diversi incrementi di carico. Sono mostrate 3 curve $\sigma - \varepsilon$ relative alla stessa prova monoassiale di trazione fino a 1000 MPa, con incremento di sforzo di 50 MPa (sinistra), 25 MPa (centro), 12.5 MPa (destra).

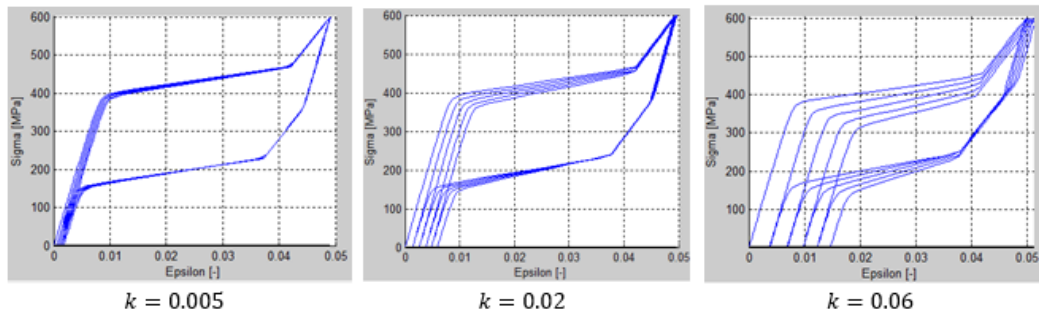


Figura 5.15: Effetto del parametro k sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa

5.6.2 Analisi sensitività dei parametri del modello

In questa sezione si vuole mostrare quale sia l'effetto, sulla risposta del modello formulato in termini di curve sforzo-deformazione, dei singoli parametri introdotti. In particolare ci si concentrerà sui parametri k , A , h' , ϕ , b , B , in quanto gli altri sono già presenti nel modello di Souza-Auricchio-Petrini, mentre invece h_2 è lo stesso presente nel lavoro di Urbano et al. (2015) [6], mentre invece H_I ha il chiaro significato di regolare la pendenza durante la plasticizzazione del materiale, essendo il coefficiente di hardening plastico isotropo.

Per effettuare tale analisi si partirà dai parametri usati nei test della sezione precedente, elencati in Tab. 5.3, e si farà variare uno di essi alla volta. Per quanto riguarda i test sui parametri che regolano la fatica, si sono effettuati 5 cicli di carico e scarico a 600 MPa, suddividendo l'intervallo di carico in 50 sottointervalli.

In Fig. 5.15 è mostrato l'effetto del parametro k , che rappresenta il fattore di scala tra gli effetti della trasformazione di fase e quelli legati alla fatica. Un suo aumento provoca ad ogni ciclo meccanico un accumulo maggiore di deformazione residua, come avviene portandolo da 0.02 a 0.06. Dato che nel modello l'effetto di degrado del materiale e l'aumento della pendenza del plateau sono due fenomeni che vengono considerati direttamente proporzionali all'entità della deformazione accumulata, ne consegue che un aumento di k provoca anche che ad ogni ciclo tali fenomeni siano più evidenti. Una diminuzione del valore di questo parametro da 0.02 a 0.005 porta invece a degli effetti opposti, con una diminuzione della velocità di accumulo. Il parametro k di conseguenza è un parametro che ha notevoli effetti sulla risposta del modello, in quanto è in grado di accentuare o diminuire tutti gli effetti legati alla fatica.

L'effetto del parametro A è invece mostrato in Fig. 5.16; si ricorda che tale parametro regola l'abbassamento del plateau superiore di trasformazione di fase, in modo che avvenga in modo direttamente proporzionale all'entità della deformazione residua accumulata, tramite la relazione $\Delta\sigma^{sup} = Ae^{fix}$. Al procedere dei cicli il

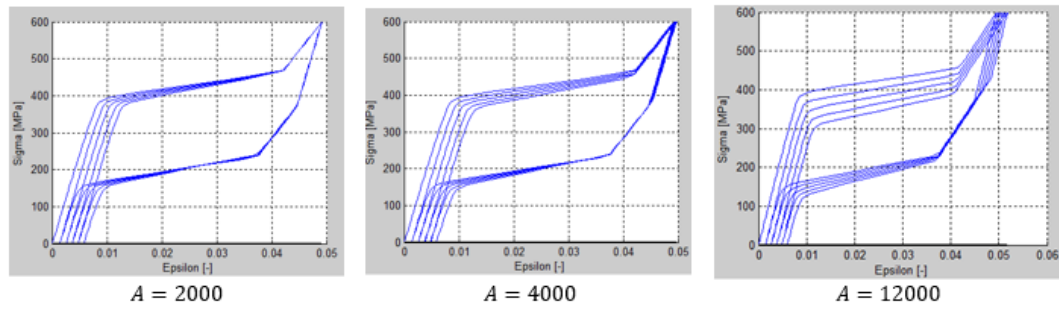


Figura 5.16: Effetto del parametro A sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa

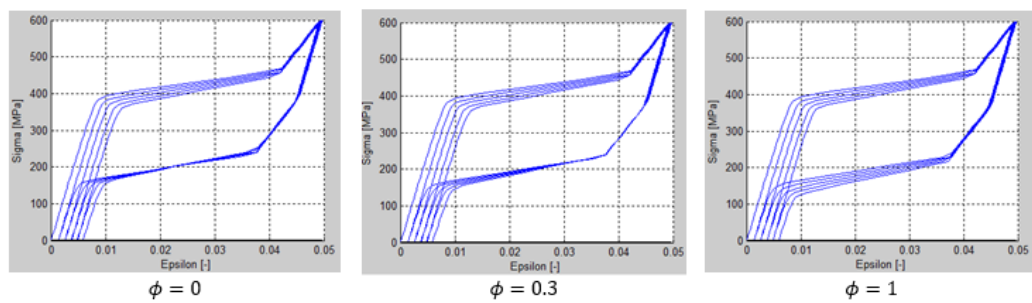


Figura 5.17: Effetto del parametro ϕ sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa

valore di e^{fix} aumenta, determinando quindi un progressivo abbassamento del plateau superiore, tanto superiore quanto maggiore è il valore di A . L'abbassamento invece di quello inferiore è legato al primo tramite il parametro ϕ , in modo che $\Delta\sigma^{inf} = \phi\Delta\sigma^{sup}$; ne consegue che variando A anche quest'ultimo varia la propria posizione in maniera più o meno accentuata. In figura è mostrato l'effetto di un parametro A pari a 2000 MPa, 4000 MPa e 12000 MPa: si nota quanto appena descritto, ovvero il fatto che man mano che il suo valore aumenta, l'abbassamento dei plateau è più pronunciato. In Fig. 5.17 si mostra invece l'effetto di ϕ : questo coef-

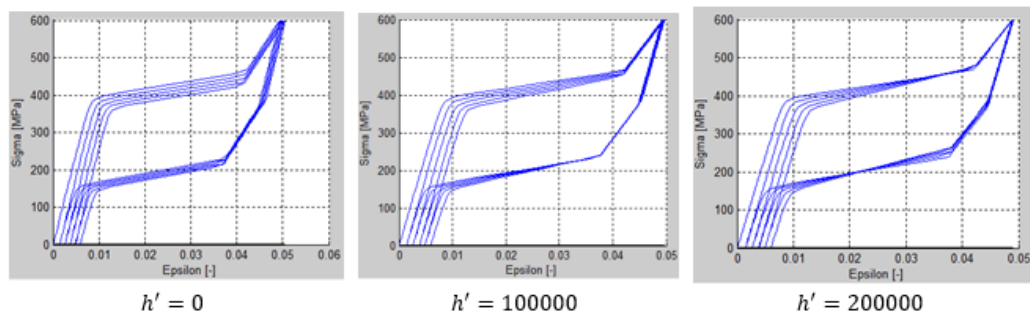


Figura 5.18: Effetto del parametro h' sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione di 5 cicli a 600 MPa

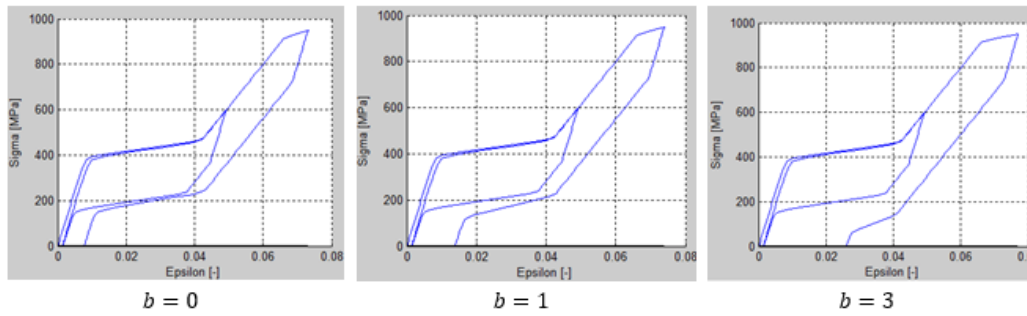


Figura 5.19: Effetto del parametro b sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione fino a 600 MPa, seguita da un secondo ciclo a 900 MPa

ficiente rappresenta percentualmente quanto si abbassa il plateau inferiore rispetto a quello superiore. Ponendolo pari a zero, infatti, il plateau inferiore resta fissato, nonostante sia presente il fenomeno di accumulo che porta ad un abbassamento di quello superiore; viceversa nel caso opposto, quando $\phi = 1$, l'abbassamento subito da due tratti orizzontali è lo stesso.

In Fig. 5.18 è invece mostrata l'influenza del parametro h' , responsabile del progressivo aumento di pendenza del plateau all'aumentare della deformazione accumulata. Si vede che diminuendo tale parametro da 100000 a 0, l'aumento di pendenza non è più presente e i plateau successivi al primo appaiono tutti paralleli fra loro; viceversa se si aumenta il suo valore a 200000, l'effetto diventa molto più pronunciato, tanto che pur avendo una diminuzione per effetto del degrado dello sforzo critico di inizio trasformazione di fase, lo sforzo corrispondente alla fine del plateau appare più elevato. Una scelta più ragionevole di tale parametro, come mostrato nella figura centrale, permette di ottenere invece uno sforzo di fine trasformazione di fase che si mantiene pressoché costante, nonostante sia presente un abbattimento del punto di inizio del plateau.

I test successivi riguardano i parametri legati alla plasticità, ovvero b e B , che influenzano rispettivamente la riduzione della lunghezza e l'abbassamento del plateau inferiore. Per evidenziare il loro effetto sulle curve sforzo-deformazione, i test successivi consistono in due cicli di carico e scarico, il primo fino a 600 MPa, il secondo fino a 900 MPa, suddividendo il passo di carico in 50 sottointervalli. In questo modo si può studiare come varia il plateau inferiore durante il secondo ciclo in cui si porta il materiale in plasticizzazione, confrontandolo con quello del primo, in cui non si arriva allo snervamento.

La Fig. 5.19 mostra l'effetto del parametro b sulla riduzione della lunghezza del plateau in seguito alla comparsa di deformazione plastiche. Si vede che con $b = 0$ allo scarico non c'è stata nessuna riduzione di lunghezza, quindi la deformazione residua presente è solo pari alla deformazione plastica ottenuta durante il carico. Ponendo invece $b = 1$ allo scarico è presente il doppio della deformazione residua della

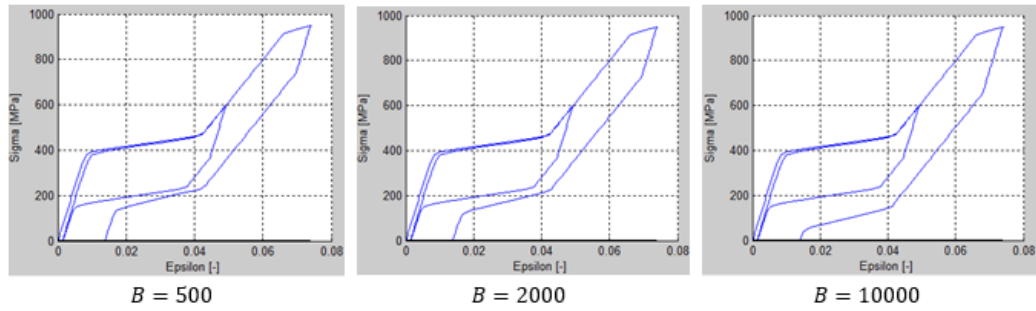


Figura 5.20: Effetto del parametro B sulle curve sforzo-deformazione in una prova di trazione fino a 600 MPa, seguita da un secondo ciclo a 900 MPa

Tabella 5.4: Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali di Wang et al. (2008)

E [MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
50000	0.3	150	7000	90000	5000	10500	3.8	0.063	1
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	α [1/K]	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	T [K]
0	100	520	0.03	10^{-7}	0	-	235	5000	310

situazione precedente; questo deriva dal fatto che il plateau si è ridotto della quantità $b\varepsilon^{plastica}$, con $b = 1$. Dato che la riduzione del plateau attiva gli effetti dei parametri h' e B , si nota che in questa situazione si ottiene anche un aumento di pendenza del tratto orizzontale inferiore, oltre che un suo abbassamento su valori di sforzo meno elevati. Aumentando ulteriormente b , ponendolo pari a 3, si vede che il plateau questa volta si riduce di una quantità pari a $b\varepsilon^{plastica}$, ovvero $3\varepsilon^{plastica}$. Questo determina un abbassamento ed un aumento di pendenza ancora più accentuati.

L'ultimo test effettuato, che riguarda il parametro B , è mostrato in Fig. 5.20: si nota che a parità degli altri parametri, un aumento di B si traduce in un abbassamento del plateau inferiore più evidente, che ha anche come secondo effetto l'ampliarsi dell'isteresi meccanica.

5.6.3 Confronto con prove sperimentali di letteratura

In un secondo set di prove il modello è stato utilizzato per ripetere alcuni test monoassiali riportati in letteratura. In particolare, ci si è rifatti al lavoro svolto da Wang et al. (2008) [9] e riportato in Sez. 1.3.8, in cui è descritta una serie di test monoassiali in controllo di deformazione fino a diverse deformazioni massime, dal 5% al 12%, a 37°C: oltre a mostrare l'effetto della fatica il lavoro vuole indagare come questa avvenga in presenza di deformazioni plastiche ottenute avendo superato la soglia di snervamento del materiale. Non avendo i dati relativi al materiale delle prove, i parametri del modello sono stati calibrati in modo ragionevole dall'osservazione di

5. Proposta di un nuovo modello costitutivo e confronto con i dati sperimentali

Tabella 5.5: Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali di Kan et al. (2010)

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
60000	0.3	6000	-	10^6	8000	-	2.8	0.04	1
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	$\alpha[1/K]$	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	T [K]
0.9	50	-	0.04	10^{-7}	0	-	235	-	310

tali curve, e sono presentati in Tab. 5.4; il confronto tra i dati sperimentali e quelli ottenibili dal modello è presentato in Fig. 5.21. E' interessante notare come dal punto di vista qualitativo il modello proposto sia in grado di descrivere i risultati sperimentali, in particolare per quanto riguarda le curve alle maggiori deformazioni, che introducono la plasticità. La curva rappresentativa della prova al 5% di deformazione massima è quella che viene colta nel modo meno accurato: ciò dipende sostanzialmente dal fatto che a questa deformazione il plateau non si è ancora concluso, quindi nel modello non viene ancora attivato il cambiamento di pendenza legato alle diverse proprietà elastiche per via delle differenti fasi presenti; è altresì vero che anche in tale situazione il miglioramento rispetto al modello Souza-Auricchio-Petrini è notevole, in quanto in quest'ultimo tutti i cicli apparirebbero sovrapposti, senza evidenziare nessun fenomeno degradativo o di fatica. Si specifica che i parametri della Tab. 5.4 sono stati usati per verificare tutte le prove, ai diversi livelli di deformazione imposta; tuttavia nelle prove al 5% e 8% per una migliore coerenza con i dati sperimentali di Wang è stato utilizzato $A = 7000$ MPa, e in particolare in quella al 5% si è posto anche $h' = 150000$ MPa; nella prova al 12% invece è stato necessario ridurre B a 5000 MPa, in modo da evitare un eccessivo abbattimento del plateau sottostante.

Il secondo lavoro a cui si è fatto riferimento è quello di Kan et al. (2010) [4], in cui sono state condotte delle prove cicliche in controllo di sforzo a 37°C. Rispetto ai risultati di Wang et al. (2008), si notano delle curve caratterizzate da una traslazione progressiva verso destra dovuta all'accumulo di fatica. Il confronto con tali prove è mostrato nella Fig. 5.22, mentre i parametri del modello, sempre ottenuti in modo qualitativo tramite osservazione delle curve sperimentali, sono elencati nella Tab. 5.5.

Anche in questo caso il modello presenta una buona somiglianza con i dati sperimentali, riuscendo a cogliere l'aspetto più significativo di tale prova, ovvero la traslazione progressiva verso deformazioni maggiori delle curve all'aumentare dei cicli, accompagnata da un innalzamento della pendenza del plateau di trasformazione.

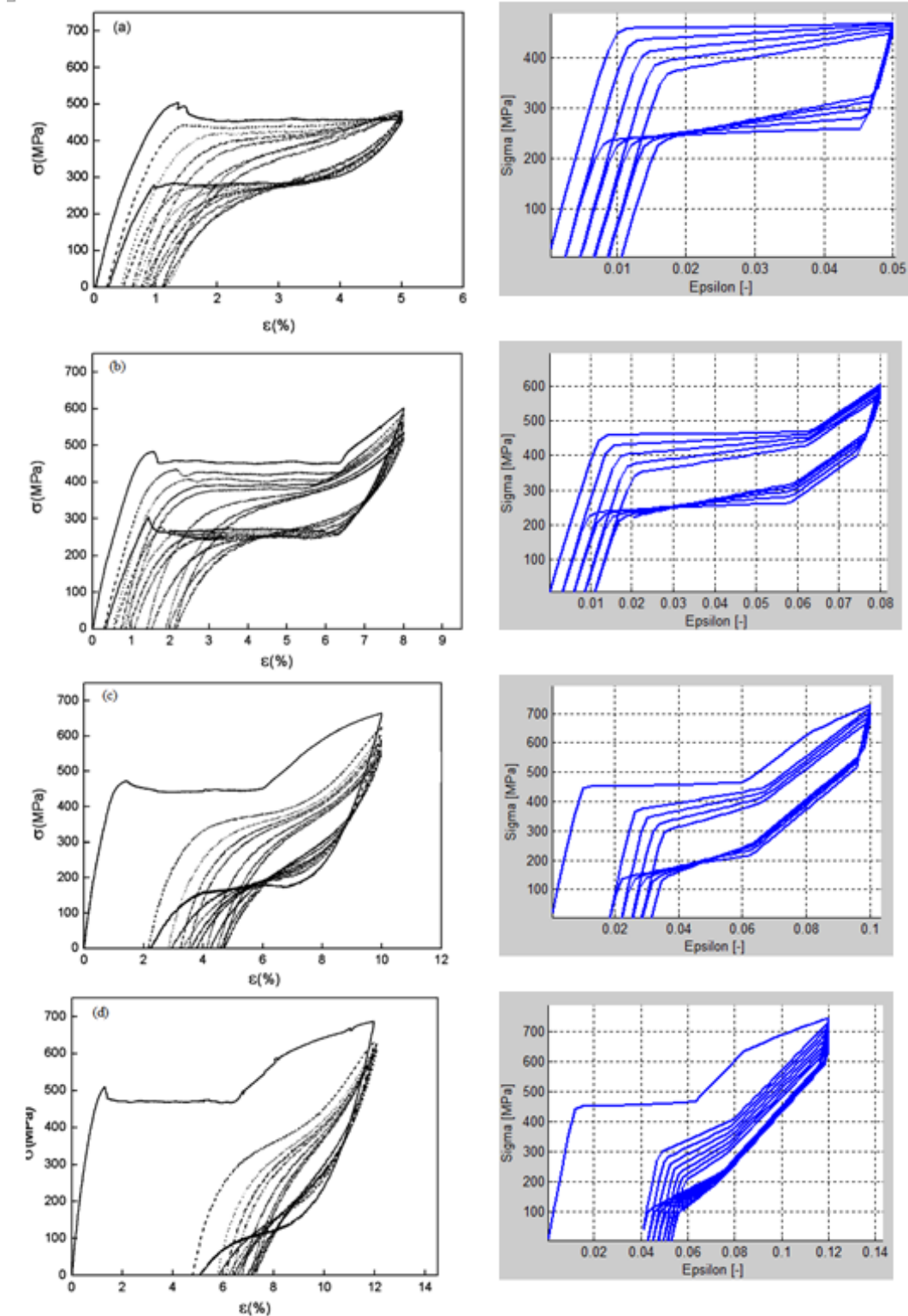


Figura 5.21: Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Wang et al. (2008) [9] (sinistra) e quelle ottenute dal modello proposto (destra). In ordine dall'alto verso il basso: prova fino a 5% di deformazione massima, fino all'8%, fino al 10% e fino al 12%.

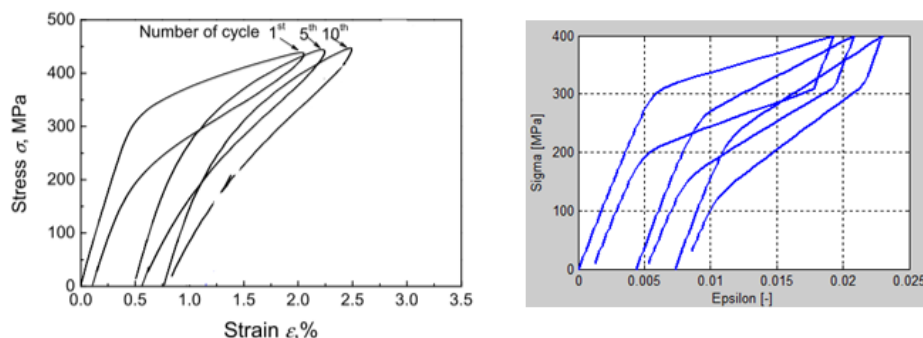


Figura 5.22: Confronto fra curve $\sigma - \varepsilon$ presentate nel lavoro di Kan et al. (2010) [4] (sinistra) e quelle ottenute dal modello proposto (destra).

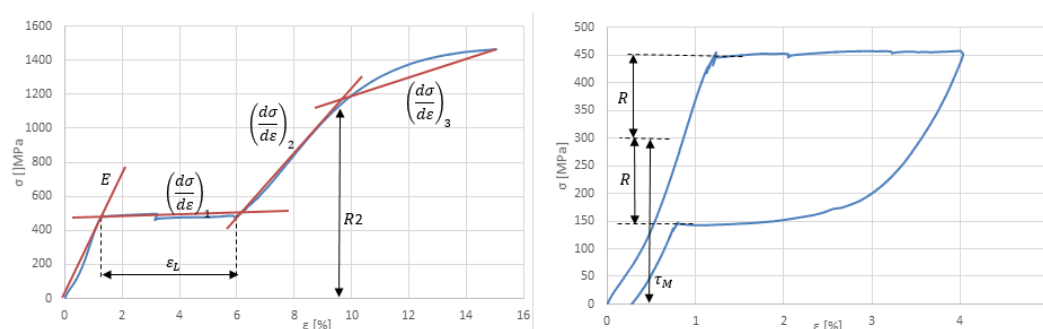


Figura 5.23: Analisi delle curve sperimentali dei test sperimentali eseguiti al CNR di Lecco per l'ottenimento di alcuni parametri di interesse per la calibrazione del modello.

5.6.4 Confronto con le prove sperimentali descritte nel Cap. 3

Nella sezione precedente si è visto come il modello sia in grado di cogliere almeno qualitativamente i principali aspetti presenti nel comportamento sperimentale delle SMA. In questa sezione si vuole invece effettuare un confronto diretto tra i risultati di alcuni test presentati nel Cap. 3 con le predizioni del modello.

Il primo confronto presentato è con i risultati delle prove di ciclaggio meccanico svolte al CNR di Lecco. Per la taratura dei parametri del modello si sono utilizzate la prova a rottura e di ciclaggio a deformazione massima al 4% descritte nel Cap. 3 e mostrate in Fig. 5.23: i dati ottenuti sono riportati in Tab. 5.6.

Si sottolinea che per quanto fatto notare nel Cap. 3, in cui si era puntualizzato come l'isteresi meccanica avesse un'ampiezza variabile con l'aumento della deformazione massima imposta nella prova, i parametri qui mostrati hanno un significato di parametri medi del materiale, in quanto l'ampiezza dell'isteresi del materiale testato non ha misura fissa.

In Fig. 5.24 (sinistra) appaiono sovrapposti i risultati in termini di curva sforzo-deformazione del test sperimentale di ciclaggio al 4% con quelli dati dal modello. Si vede che la sovrapposizione è molto buona: per quanto riguarda il primo ciclo

Tabella 5.6: Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali ottenuti al CNR

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
38978	0.3	967	23145	0	6389	-	4.87	0.0573	1
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	$\alpha[1/K]$	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	T [K]
0.2	138	926	0.059	10^{-7}	0	-	247	7586	296

di carico e scarico l'entità di deformazione residua e dell'abbassamento del plateau praticamente sono lo stesse. L'unica differenza sta nella velocità di accumulo di deformazione per fatica, che nel modello appare più rapida, tanto che in soli 4 cicli si ha una deformazione residua pari a quella di 20 cicli sperimentali. Questa differenza è dovuta al fatto che l'accumulo di deformazione, sperimentalmente, è più significativo nei primi cicli, per poi diminuire vistosamente; il modello sviluppato, invece, coerentemente con l'approccio proposto nel modello di Auricchio presentato nel Cap. 4, è caratterizzato da un accumulo regolare nei vari cicli meccanici, che si riduce ad ogni ciclo in proporzione solo a quanto si è ridotto ogni volta il plateau di trasformazione di fase. Dato inoltre che i parametri del modello sono stati tarati partendo dall'entità dell'accumulo avvenuto durante il primo ciclo, che è più significativo rispetto ai successivi, si spiega il motivo della discrepanza tra i due set di curve. Tuttavia se si fosse maggiormente interessati a cogliere la dinamica della fatica non nel primo ciclo, dove è molto vistosa, ma nei cicli successivi, si potrebbe tarare i parametri del modello che regolano la fatica basandoci sul comportamento medio dei primi 10 cicli, ottenendo in questo caso $k = 0.0032$, $A = 6232$ MPa, $h_1 = 555$ MPa. Il comportamento del modello è mostrato in Fig. 5.24 (destra). In questa situazione si perde quindi la capacità di cogliere il corretto comportamento nei primi cicli, tuttavia la risposta data dal modello è molto più simile per quanto riguarda i cicli successivi.

In Fig. 5.25 è rappresentato invece il confronto per quanto riguarda i test di ciclaggio al 7% e 8%. La somiglianza dei risultati dati dal modello è sempre notevole; anche in queste curve si nota tuttavia la problematica già segnalata, per cui l'accumulo dato dal modello è quasi identico nel primo ciclo, per poi non rallentare come invece è presente nelle curve sperimentali. In ogni caso, come già detto, si potrebbero utilizzare i parametri ottenuti mediando il comportamento su diversi ciclaggi, per avere una risposta più simile nel lungo termine. Si segnala in questo confronto un altro aspetto: le curve sperimentali mostrano come il plateau inferiore si abbassi all'aumentare della deformazione imposta. L'isteresi meccanica è quindi più ampia nella curva sforzo-deformazione relativa alla prova all'8% rispetto a quella al 7%, che a sua volta è maggiore rispetto a quella al 4%. Il modello sviluppato non è invece in grado di cogliere questo aspetto, in quanto è in grado di modellizzare un abbassamento del plateau inferiore solo a seguito della comparsa di deformazioni

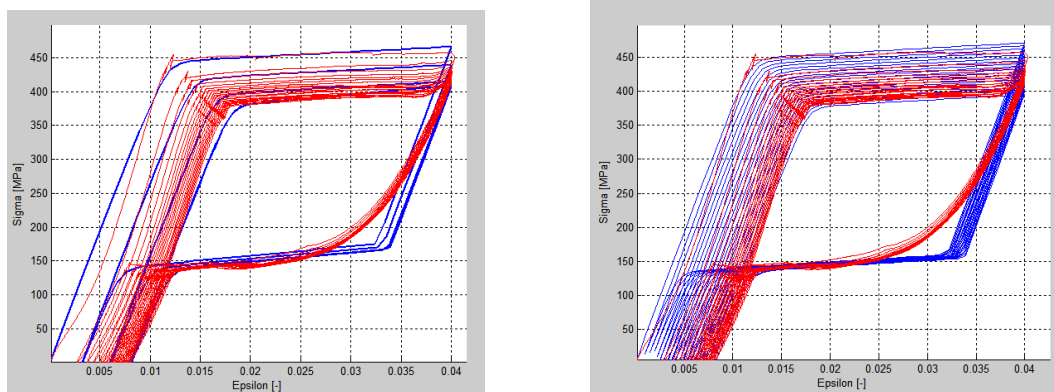


Figura 5.24: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 4% di deformazione eseguiti al CNR. A sinistra i parametri k e A del modello sono calibrati sul primo ciclaggio della prova sperimentale, a destra su un comportamento medio dei primi 10 cicli. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

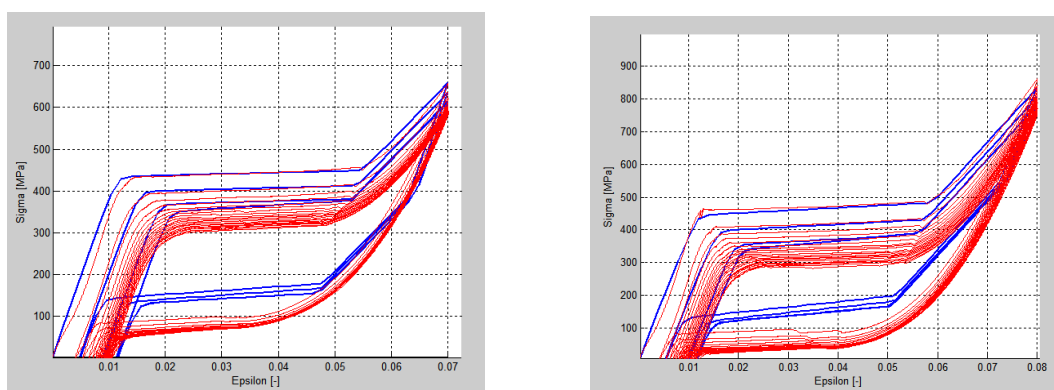
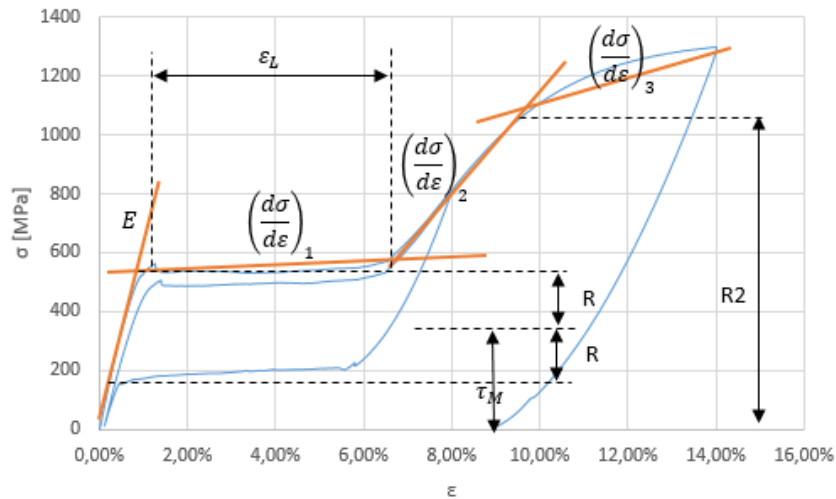


Figura 5.25: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 7% e 8% di deformazione eseguiti al CNR. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

Tabella 5.7: Parametri utilizzati per il confronto con i dati sperimentali ottenuti al LABS

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
49942	0.3	592	16397	0	12211	12600	4.7	0.064	4
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	α [1/K]	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	T [K]
0.2	153	890	0.016	10^{-7}	0	-	238	12304	296

Figura 5.26: Curva $\sigma - \varepsilon$ di una prova di trazione a rottura utilizzata per ottenere i parametri del modello

plastiche, che in queste prove non sono ancora presenti. Dato che i parametri del modello sono stati calibrati sulla prova di laboratorio al 4%, i risultati del modello mostrano un'ampiezza dell'isteresi che è fissa, ed inferiore rispetto a quella misurata nei cicli al 7% e 8%.

Passando ai test eseguiti presso il Laboratorio di Meccanica delle Strutture Biologiche (Labs) del Politecnico di Milano, i parametri del modello, riassunti in Tab. 5.7, sono stati ottenuti da una prova a rottura, preceduta da un ciclaggio all'8% (Fig. 5.26), eccetto che per i parametri b e B ottenuti dal test di ciclaggio al 10% (Fig. 5.29, sinistra), visto che riguardano l'effetto delle deformazioni plastiche sulla trasformazione di fase.

Le prime curve che si vogliono proporre sono un confronto con la prova sperimentale di ciclaggio ripetuto all'8%, riportato in Fig. 5.27 a sinistra. Anche in questo caso il grado di predizione è buono, soprattutto per quanto riguarda i primi cicli, ciò nonostante è presente ancora lo stesso problema evidenziato nel confronto con i test di Lecco, ovvero il fatto che calibrando il modello sul primo ciclo si ottiene un fenomeno di fatica troppo pronunciato. Sempre in Fig. 5.27, a destra, è mostrato lo stesso confronto quando il modello è calibrato su un comportamento medio su 10

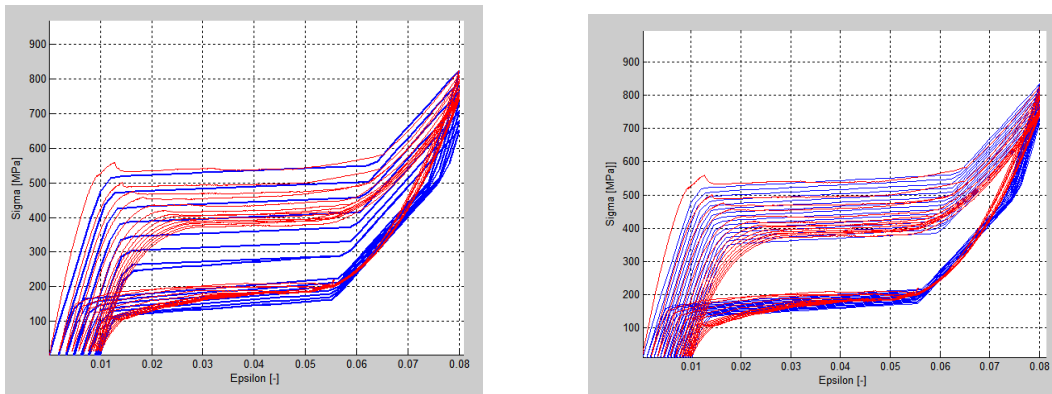


Figura 5.27: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio all'8% di deformazione eseguiti al Labs. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello. A sinistra i parametri k e A del modello sono calibrati sul primo ciclaggio della prova sperimentale, a destra su un comportamento medio dei primi 10 cicli.

cicli ($k = 0.007$ e $A = 11181$), che rende il procedere dell'accumulo di deformazione residua più simile alle prove sperimentali. In Fig. 5.28, a sinistra, è invece mostrato il confronto con la prova al 5% di deformazione. Si era fatto notare nel Cap. 3 che i risultati sperimentali ottenuti mostravano un'ampiezza di isteresi meccanica variabile, ed in particolare la prova al 5% esibiva un'ampiezza minore rispetto a quella all'8% su cui il modello è stato tarato. Questo spiega il motivo per cui il modello mostra un'ampiezza della bandiera pseudoelastica maggiore, visto che non è ancora in grado di modellizzare la variazione di ampiezza al variare della deformazione massima imposta. Calibrando ovviamente i parametri del modello direttamente sulla prova sperimentale al 5%, si otterrebbero i valori $\beta = 5.41\text{MPa}$ e $R = 108\text{MPa}$, ed il grado di predizione diventerebbe estremamente buono (Fig. 5.28, a destra).

La Fig. 5.29 mostra invece il confronto con i risultati dei ciclaggi meccanici al 10% e 12% di deformazione massima. A tale livello di deformazione imposta, in entrambi i casi, il materiale entra in plasticità. Questo causa l'attivazione dell'effetto del parametro B del modello, che provoca un abbassamento del plateau di trasformazione di fase relativo allo scarico, permettendo al modello di seguire le variazioni dell'ampiezza dell'isteresi meccanica. Questo fa in modo che tale aspetto, differentemente da quanto avveniva per i test alle deformazioni minori, è colto bene in prove di trazione con deformazioni tali da portare il materiale a plasticizzare. Si vede dalle curve che il plateau non si mantiene orizzontale durante le prove sperimentali, ma progressivamente aumenta la propria pendenza. Per cogliere tale aspetto è necessario attivare il parametro h' del modello, ponendolo pari a 70000 MPa. I risultati ottenuti in questo caso sono mostrati in Fig. 5.30, dove si può notare un maggiore grado di somiglianza tra risultati sperimentali e la predizione data dal modello. Da tali risultati sembrerebbe quindi che l'aumento di pendenza esibito dal plateau di trasformazione

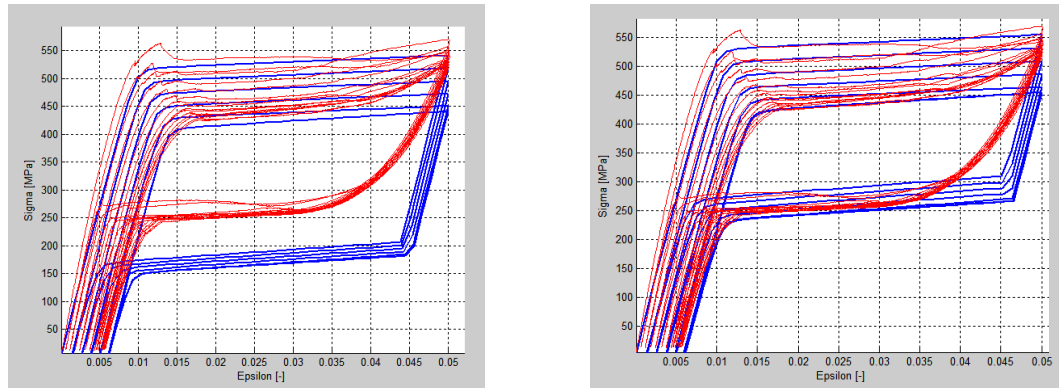


Figura 5.28: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio all'5% di deformazione eseguiti al Labs. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello. A sinistra sono stati usati i parametri mostrati in Tab. 5.7, a destra i parametri R e β sono stati tarati nuovamente, direttamente sulla prova sperimentale al 5%.

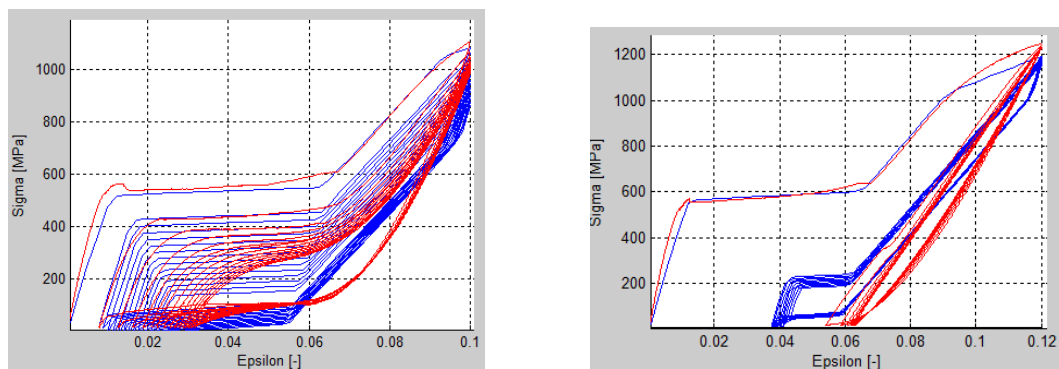


Figura 5.29: Confronto tra i risultati dati dal modello e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

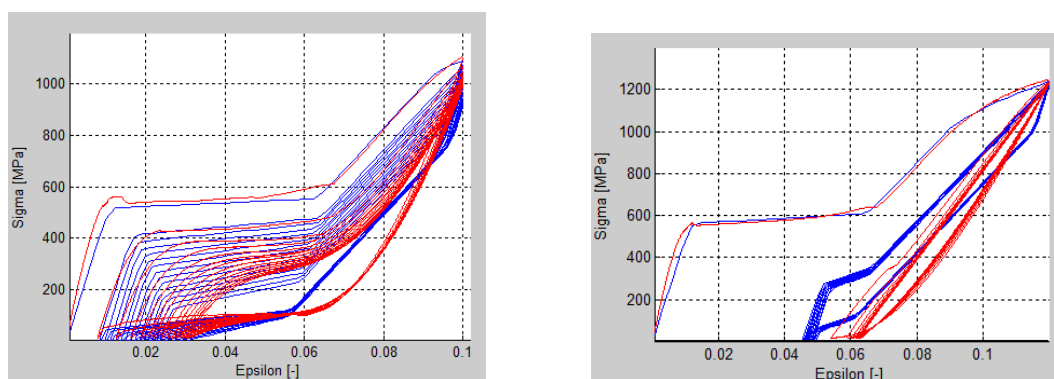


Figura 5.30: Confronto tra i risultati dati dal modello ponendo $h' = 70000\text{MPa}$ e i test di ciclaggio al 10% e 12% di deformazione eseguiti al Labs. In rosso sono mostrate le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali, in blu quelle ottenute con il modello.

di fase si abbia solo quando il materiale entra in plasticizzazione, essendo assente nei test di ciclaggio al 5% e 8%. Ciò è in contrasto con quanto avviene nelle curve di letteratura mostrate nella Sez. 5.6.3, che mostravano un progressivo aumento di pendenza a qualunque deformazione si fosse eseguito il ciclaggio; questo complica la modellizzazione delle SMA, in quanto tale caratteristica è quindi dipendente dal particolare materiale testato, rendendo quindi di volta di volta necessario valutare se attivare nel modello il parametro h' . Nel test al 12% si vede anche chiaramente come l'avvento della plasticità abbia notevolmente ridotto la capacità del materiale di esibire successive transizioni di fase: questo viene correttamente colto dal modello, in quanto già al secondo ciclo di carico il comportamento è divenuto quasi lineare.

5.7 Discussione risultati

Tutti i test effettuati mostrano come il modello sia in grado di cogliere bene il comportamento sperimentale delle leghe di NiTi, sia tenendo conto dell'aspetto della fatica, sia di quello della plasticità. Inoltre è stata introdotta con successo la capacità di modellizzazione del fenomeno degradativo, per cui il plateau di trasformazione si abbassa progressivamente, ed eventualmente aumenta lentamente di pendenza. I primi test effettuati, senza nessun confronto sperimentale, hanno permesso di affermare che il modello coglie sia il comportamento pseudoelastico che quello a memoria di forma; è stata inoltre verificata la robustezza, provando ad effettuare uno stesso test con passi di carico sempre più grandi, che non hanno influito sulla corretta risposta del modello. Anche il confronto effettuato con alcune curve sforzo-deformazione reperite in letteratura è soddisfacente, in quanto mostra come il modello sia in grado di cogliere qualitativamente gli aspetti presenti sperimentalmente.

La fase finale di test, che riguarda il confronto con i dati delle prove condotte nel Cap. 3, mostra un buon grado di predizione del modello, tuttavia sono anche

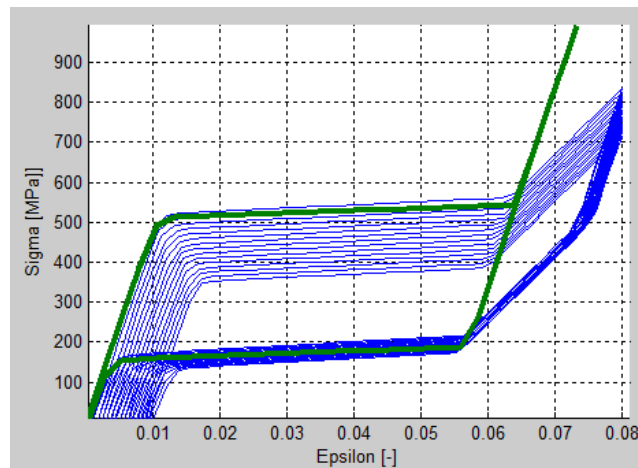


Figura 5.31: Curve $\sigma - \varepsilon$ in cui viene mostrato il confronto tra i risultati dati dal modello nel test di ciclaggio all'8% di deformazione eseguito al Labs (blu) con quelli ottenibili nella stessa condizione di carico con il modello di Souza-Auricchio-Petrini (verde).

emerse delle limitazioni. La principale riguarda il fatto che nelle prove sperimentali i materiali testati hanno esibito un abbassamento del valore di sforzo corrispondente al plateau di trasformazione di fase allo scarico che dipende dalla deformazione massima imposta, mentre nel modello formulato questo aspetto non è presente. Nonostante questo è stata inserita la capacità di avere un aumento dell'isteresi meccanica a causa della plasticità, ma questo non è ancora sufficiente per seguire completamente le evoluzioni di ampiezza della bandiera pseudoelastica.

Altre limitazioni riguardano la mancanza dell'asimmetria in trazione e compressione, e il metodo con cui è modellizzata la fatica, che rispetto al comportamento sperimentale non è ancora in grado di seguire il fenomeno per cui l'accumulo di deformazione rallenta vistosamente dopo i primi cicli. Si è anche già detto durante la presentazione dei vari risultati che tale aspetto negativo potrebbe essere parzialmente risolto tarando i parametri del modello su un comportamento medio su alcuni cicli iniziali. Ovviamente in questo modo non si riesce a catturare completamente la grande deformazione accumulata nel primo ciclo di carico e scarico, tuttavia il comportamento nei cicli successivi diventa molto più simile a quello sperimentale.

Va infine fatto notare che il modello qui presentato a differenza di quello di Souza-Auricchio-Petrini, avendo tenuto in considerazione le modifiche proposte da Urbano et al.(2015), è in grado di considerare le diverse proprietà elastiche tra martensite ed austenite: il netto miglioramento della predizione si vede in Fig. 5.31, in cui si confrontano le curve all'8% con e senza la definizione del secondo valore di hardening dato dal parametro h_2 . In tale figura è anche evidente che il modello di Souza-Auricchio-Petrini non è in grado di mostrare alcun accumulo di fatica, quindi tutti i cicli meccanici appaiono sovrapposti.

5. Proposta di un nuovo modello costitutivo e confronto con i dati sperimentali

Capitolo 6

Simulazioni numeriche

In questo capitolo verranno presentate delle simulazioni numeriche riguardanti dei dispositivi biomedicali realizzati in leghe NiTi, in particolare stent vascolari e dispositivi per la sostituzione di valvole aortiche, in cui si mostrerà l'utilità del modello costitutivo sviluppato nel Cap. 5. I modelli costitutivi per le SMA implementati finora nei software commerciali ignorano infatti il contributo delle deformazioni plastiche o comunque di aspetti legati al degrado del materiale per fatica; in questa sede si vogliono quindi presentare risultati di simulazioni in cui si considerano questi aspetti, analizzando quali siano le eventuali differenze di comportamento globale ottenute.

6.1 Presentazione dei dispositivi

6.1.1 Distretto femoropopliteo: aterosclerosi e stenting

L'arteria femorale (Fig. 6.1) è il tronco arterioso principale dell'arto inferiore e si origina dall'arteria iliaca esterna, dopo il passaggio dietro il legamento inguinale; in seguito si biforca in due rami terminali: arteria femorale profonda (*Deep Femoral Artery, DFA*) e superficiale (*Superficial Femoral Artery, SFA*). La seconda entra nella fosse poplitea e prosegue nell'arteria poplitea (*Popliteal Artery, PA*), che decorre posteriormente all'articolazione del ginocchio fino all'arcata tendinea del muscolo soleo, dove si divide in ulteriori rami. L'insieme di SFA e PA prende il nome di arteria femoropoplitea.

In particolare SFA e PA sono le sedi più frequenti, tra le arterie del corpo umano, di occlusione aterosclerotica. L'aterosclerosi è una patologia a carico delle pareti interne delle medie e grandi arterie, caratterizzata dalla formazione di placche, o ateromi, che portano ad un ispessimento delle parete vasale, dovuto al deposito di materiale lipidico o alla proliferazione di tessuto connettivo (Fig. 6.1). La formazione di una placca ha origine da un danno a carico dell'endotelio, che porta ad un accumulo di lipoproteine a bassa densità (LDL, *low density lipoproteins*) sottoforma di cristalli di colesterolo nella tunica interna della parte del vaso. In seguito a tale lesione

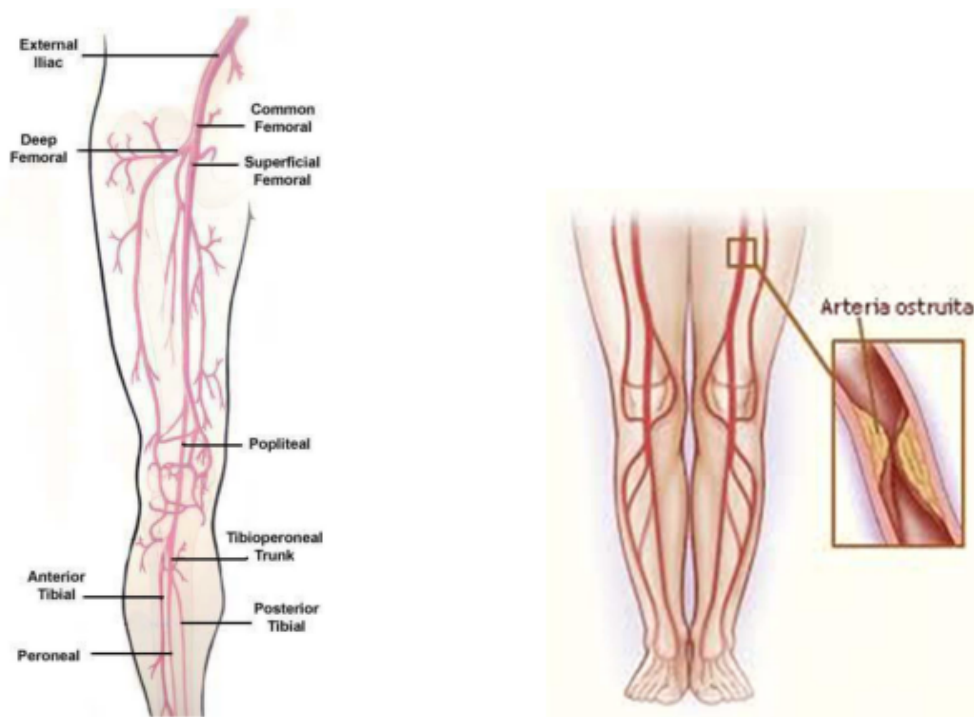


Figura 6.1: A sinistra è mostrato il decorso delle arterie nel distretto femoropopliteo, a destra una placca aterosclerotica nell'arteria femoropoplitea.

si attiva la risposta infiammatoria: i monociti, diventando macrofagi, iniziano a fagocitare sostanze estranee e provocano eventi infiammatori locali, responsabili di una proliferazione delle cellule muscolari lisce e della formazione di una capsula fibrotica, capace di calcificare [60]. L'arteria va quindi incontro ad una stenosi, ovvero ad un restringimento del lume, fino talvolta ad arrivare ad un'ostruzione totale. Questo può ovviamente comportare una minore perfusione di sangue ai tessuti a carico dell'arteria ostruita, con conseguenze che possono anche portare alla loro necrosi. In caso di patologia a carico della SFA la prima sintomatologia avvertibile è un dolore all'arto inferiore durante l'attività fisica, situazione che però può progredire portando problemi anche a riposo, fino ad arrivare ad una situazione ischemica per i tessuti degli arti, a cui è connessa una mortalità del 25% [61].

Le terapie seguite in presenza di tale patologia sono in genere quella chirurgica e quella endovascolare. La prima prevede la realizzazione di un bypass tra arteria femorale ed arteria poplitea (Fig. 6.2), in modo da creare un percorso alternativo al vaso ostruito.

Il trattamento endovascolare, preferibile in caso di occlusioni di entità minore a causa del suo carattere mininvasivo, consiste nell'angioplastica transluminare percutanea (PTA). Un catetere con in punta un palloncino viene inserito per via percutanea, ed una volta posizionato in corrispondenza dell'occlusione viene gonfiato per

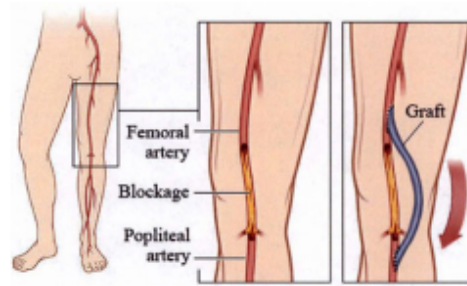


Figura 6.2: Rappresentazione della realizzazione di un bypass vascolare

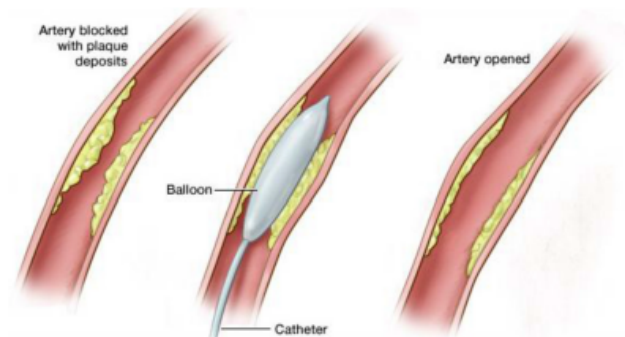


Figura 6.3: Rappresentazione della metodologia PTA

schacciare la placca contro le pareti (Fig. 6.3). Studi di letteratura [62] hanno però riportato che a lungo termine il 60% dei casi ha presentato ristenozi del vaso trattato, quindi oggi a tale terapia è affiancato all'uso degli *stent*, dispositivi meccanici costituiti da una struttura metallica a maglie che forniscono supporto alla parete del vaso impedendone il ritorno elastico e quindi la ristenozi. I primi *stent* erano realizzati in acciaio inossidabile e venivano espansi nel luogo dell'occlusione mediante il gonfiaggio del palloncino: questo causava delle deformazioni plastiche, che permettevano allo *stent* di mantenere il diametro desiderato esercitando una forza radiale sulle pareti del vaso (Fig. 6.4). Tuttavia la scarsa flessibilità del materiale impediva agli *stent* in acciaio di adattarsi alle notevoli sollecitazioni sopportate dalla SFA. Tale arteria, infatti, oltre alla sollecitazione radiale legata alla pulsatilità del flusso sanguigno, è soggetta ad una sollecitazione assiale e flessionale dovuta al movimento dell'arto inferiore, che provoca una continua flessione ed estensione delle articolazioni dell'anca e del ginocchio. L'impianto del dispositivo avviene a gamba tesa e in tale condizione l'arteria è sottoposta a trazione, con una conseguente leggera diminuzione del lume interno; quando il paziente riprende la deambulazione, con il ciclo del passo l'arteria viene ciclicamente rilasciata e posta nuovamente in trazione, causando contemporaneamente una continua sollecitazione assiale allo *stent*, oltre che ad un

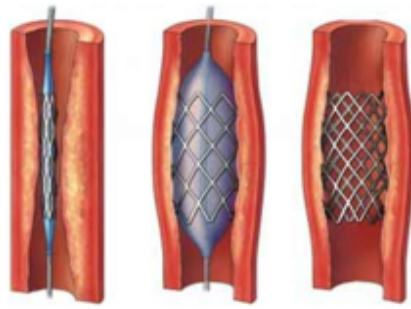


Figura 6.4: Rappresentazione della metodologia di stenting associata a PTA

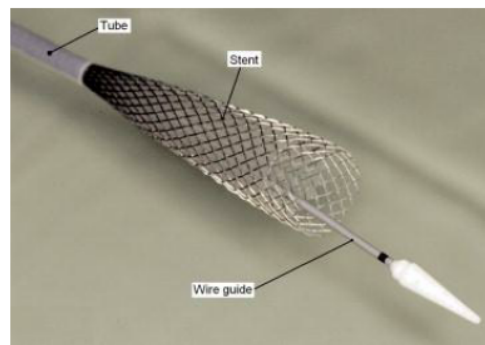


Figura 6.5: Stent autoespandibile in lega NiTi inserito in un catetere

continuo cambiamento del diametro. Essendo tali sollecitazioni maggiori del range di deformazione elastica dell'acciaio inossidabile, che è circa dello 0.5%, nel caso di utilizzo di questo materiale si giunse in breve tempo alla rottura del dispositivo.

L'evoluzione continua dei materiali ha quindi portato alla creazione di stent in lega di NiTi, detti autoespandibili (Fig. 6.5), che permettono grazie alla proprietà di pseudoelasticità di seguire in modo migliore le deformazioni subite dal vaso. Questi dispositivi sono prodotti in configurazione già espansa, con diametro leggermente maggiore di quello del vaso dove saranno impiantati. Attraverso il crimpaggio all'interno di una guaina, il loro diametro viene ridotto notevolmente, in modo da poter essere inseriti fino al luogo dell'occlusione; giunti nella giusta sede la guaina viene sfilata: lo stent, grazie alla pseudoelasticità, si autoespande cercando di tornare al suo diametro iniziale, e spinge le pareti del vaso verso l'esterno. Clinicamente si nota che l'uso degli stent autoespandibili garantisce nel lungo termine il mantenimento della pervietà dei vasi in un numero di casi percentualmente maggiore rispetto all'uso degli stent in acciaio inossidabile [63].

Può essere interessante studiare approfonditamente, magari con l'ausilio di simulazioni numeriche, la procedura di crimpaggio degli stent autoespandibili all'interno del catetere guida: nonostante le leghe NiTi grazie alla proprietà di pseudoelasticità possano sopportare deformazioni notevoli che possono essere recuperate elasticamen-



Figura 6.6: Medtronic CoreValve

te, non bisogna dimenticare che durante questa procedura comunque le sollecitazioni subite sono notevoli. Questo potrebbe far nascere in alcuni punti della struttura metallica degli stent delle deformazioni plastiche irreversibili, che non possono essere recuperate, impedendo quindi il completo ritorno elastico dello stent al diametro espanso. In questo modo anche il comportamento globale degli stent verrebbe alterato, portando eventualmente ad una diversa vita a fatica; diventa quindi necessario avere un modello costitutivo che permetta di cogliere tali aspetti.

6.1.2 Stenosi della valvola aortica: sostituzione tramite catetere (Transcatheter aortic valve intervention, TAVI)

Le arterie principali che partono dal cuore sono l'aorta e l'arteria polmonare; la prima è l'arteria di maggior calibro presente nel corpo umano, con circa 27 mm di diametro, ed è separata dal ventricolo sinistro dalla valvola aortica (AV), che permette di regolare il flusso di sangue. Quando il cuore si contrae la pressione nel ventricolo aumenta, superando quella in aorta e quindi creando un flusso di sangue, aprendo così la valvola. Nel momento in cui la pressione nel ventricolo cade, il flusso di sangue cessa, causando invece la sua chiusura.

Una delle disfunzioni più frequenti a carico del cuore negli anziani è la stenosi della valvola aortica: essa infatti può progressivamente calcificare, degenerando e riducendo la sezione di passaggio per il sangue [64]. Nei primi tempi dopo l'instaurarsi della patologia il paziente è asintomatico, perchè il ventricolo sinistro attua una serie di compensamenti per superare il problema di un'aumentata resistenza al flusso di sangue, per esempio diventando ipertrofico, in modo da avere una maggiore forza di contrazione. Con il progredire della malattia il paziente può diventare sintomatico, con infarti o angine; questo è un punto critico, in quanto la sopravvivenza media a questo punto è di soli 2-4 anni [65].

Il trattamento convenzionale per questi casi è la sostituzione della valvola aortica attraverso un intervento con circolazione extracorporea, che permette di ottenere un

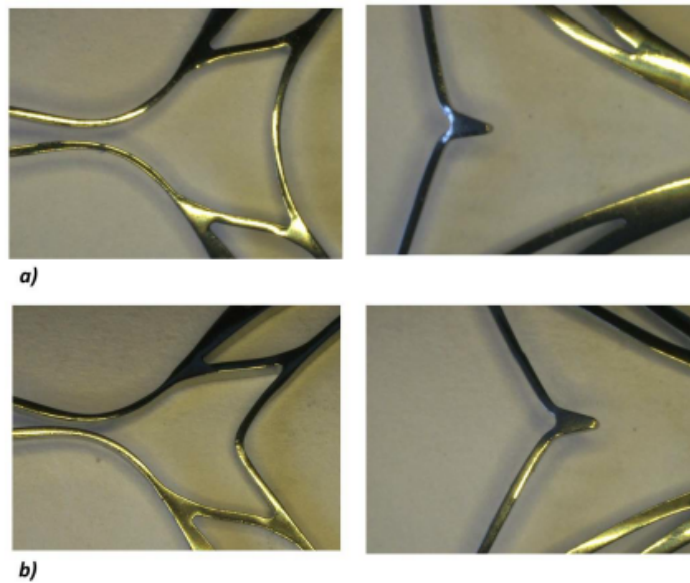


Figura 6.7: Immagini delle zone critiche di uno stent per valvola aortica, prima (a) e dopo il crimpaggio (b) [8]

bypass cardiopolmonare completo. Tuttavia l'intervento è sconsigliato per le persone più anziane, per gli alti rischi connessi. Più recentemente è stata invece sviluppata una nuova metodologia di intervento, ovvero la sostituzione della valvola aortica tramite accesso percutaneo, transfemorale o transapicale. Un esempio di dispositivo biomedicale in uso per questa tipologia di intervento è il Medtronic CoreValve (MCV), ovvero una valvola di pericardio porcino montata su una struttura di lega NiTi (Fig. 6.6). Il dispositivo, mantenuto crimpato in un catetere, è trasportato fino all'anulus aortico; qui il catetere viene sfilato, in modo da permettere il recupero elastico della struttura di NiTi per effetto pseudoelastico. Tale tipologia di intervento ha dimostrato [66] di ridurre la mortalità ad un mese al 12%, contro il 38% della classica chirurgia a cuore aperto.

Anche nel caso di questo dispositivo, la riduzione di diametro imposta durante il crimpaggio nel catetere della struttura di lega NiTi produce notevoli deformazioni; non si può quindi escludere il fatto che alcuni punti raggiungano lo snervamento, subendo delle plasticizzazioni (Fig. 6.7). Quindi anche per i dispositivi per TAVI, nel momento in cui si procede ad effettuare delle simulazioni numeriche, non si può prescindere dall'utilizzo di un modello costitutivo che tenga conto della presenza di deformazioni plastiche. Nel lavoro di tesi di dottorato di Dordoni [8], viene mostrato come l'utilizzo di modelli implementati commercialmente, che non modellizzano lo snervamento della martensite ma prevedono un comportamento indefinitamente elastico, porterebbe a sovrastimare gli sforzi all'interno del materiale a parità di deformazione subita (Fig. 6.8), trascurando ovviamente eventuali deformazioni irreversibili. Questo potrebbe portare a delle valutazioni errate sul comportamento a

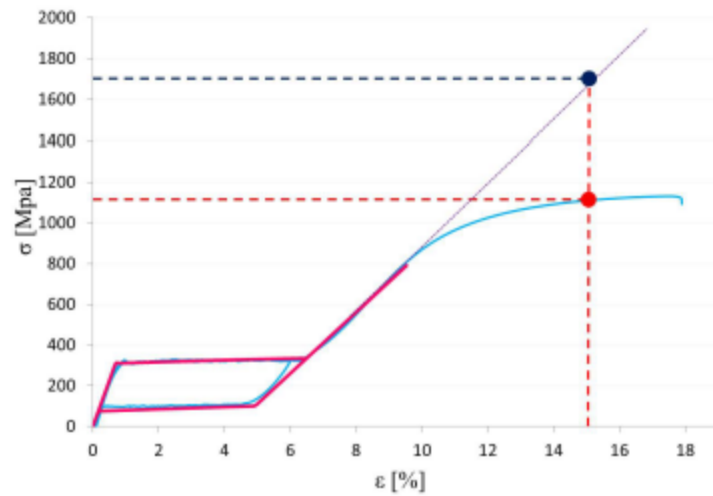


Figura 6.8: Confronto tra curve monoassiali sforzo-deformazione ottenute da dati sperimentali (blu) e da un modello numerico che non catturi la plasticità (rosso e grigio) [8]

fatica del dispositivo.

6.2 Impostazione delle simulazioni numeriche

L'analisi computazionale basata sulla metodologia degli elementi finiti costituisce un valido supporto per lo studio del comportamento meccanico dei dispositivi biomedicali. Le simulazioni numeriche permettono infatti di ricavare informazioni quantitative circa lo stato di sforzo e deformazione locale che si genera nel dispositivo a seguito dell'applicazione di un dato carico, che non potrebbero essere indagate dal punto di vista analitico o sperimentale. Per ottenere risultati significativi è necessario avere a disposizione dei modelli numerici che rappresentino nel modo più accurato possibile le proprietà meccaniche del materiale preso in considerazione. In particolare nel caso delle SMA, visto il loro complesso comportamento in termini di relazione sforzo-deformazione, gioca un ruolo fondamentale nella modellizzazione numerica l'aver a disposizione un legame costitutivo che riesca a cogliere i fondamentali comportamenti esibiti sperimentalmente.

In questo capitolo verranno quindi presentate delle simulazioni numeriche sui dispositivi citati nella sezione introduttiva, in modo da dimostrare l'utilità del modello costitutivo sviluppato nel Cap. 5. Si è infatti già accennato al fatto che le deformazioni subite da tali dispositivi sono notevoli, tanto che potrebbero determinare delle plasticizzazioni. Avere un modello capace di cogliere tale aspetto diventa quindi estremamente utile dal punto di visto ingegneristico.

Tutte le simulazioni presentate saranno eseguite mediante il software ABAQUS

6.13 Standard previa implementazione del modello formulato nel Cap.5 in una subroutine UMAT. ABAQUS permette infatti di definire il comportamento meccanico di un materiale definito dall'utente attraverso la scrittura di una subroutine UMAT [67], che corrisponde a programmare un modello costitutivo in forma discretizzata, utilizzando il linguaggio FORTRAN. Tale subroutine, chiamata per ogni punto di integrazione ad ogni iterazione, riceve in ingresso lo stato di partenza del materiale in termini di variabili di stato del passo temporale precedente e l'incremento di deformazione, e fornisce come output lo stato di sforzo aggiornato, il valore delle variabili di stato, e il tensore tangente $D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, tale da garantire la convergenza della simulazione numerica.

Visto che il modello costitutivo sviluppato nel Cap. 5 era già stato implementato con una formulazione discreta in una funzione MATLAB, qui si è semplicemente proceduto a tradurre tale funzione in linguaggio FORTRAN, seguendo le convenzioni indicate nella documentazione di ABAQUS.

Inoltre durante la formulazione della subroutine UMAT si sono tenute in considerazione le riflessioni di Lagoudas [56], già presentate in Sez. 2.4.3.4, in cui si fa notare come i modelli sviluppati in regime di piccole deformazioni (tra cui rientra anche quello sviluppato nel Cap. 5), non potrebbero rigorosamente rappresentare il comportamento di strutture che esibiscono elevate rotazioni o distorsioni, che sono frequentemente presenti nelle applicazioni ingegneristiche delle SMA. Invece di formulare un modello in regime di deformazioni finite, sicuramente più complesso e computazionalmente più oneroso di risorse, Lagoudas suggerisce, dato che le SMA subiscono certamente deformazioni significative (8-10%) ma comunque ancora modeste, semplicemente di affiancare al modello in piccole deformazioni la capacità del software agli elementi finiti di tenere traccia delle rotazioni avvenute nel materiale, provvedendo all'inizio di ogni passo temporale alla rotazione di tutte le quantità tensoriali (variabili di stato) nella nuova configurazione. ABAQUS permette di eseguire tale operazione fornendo ad ogni passo temporale e per ogni punto di integrazione una matrice *DROT* che rappresenta l'incremento di rotazione rigida subito da un certo punto del materiale. In questo modo, attraverso l'utilità *ROTSIG*, sempre fornita da ABAQUS e che ha la funzione di ruotare quantità tensoriali secondo una matrice di rotazione fornita come ingresso, è possibile convertire le variabili di stato del passo precedente secondo la nuova orientazione del punto di integrazione. Attraverso questo procedimento, pur non avendo sviluppato un modello costitutivo in regime di deformazioni finite, è possibile studiare il comportamento di strutture che esibiscono grandi cambi di conformazione durante il loro funzionamento.

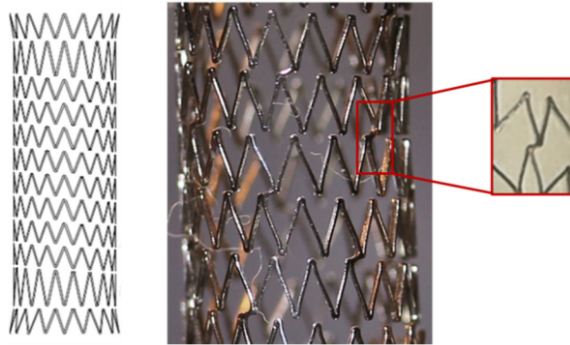


Figura 6.9: Stent commerciale Lifestent. Si notino le connessioni di tipo peak-to-peak.

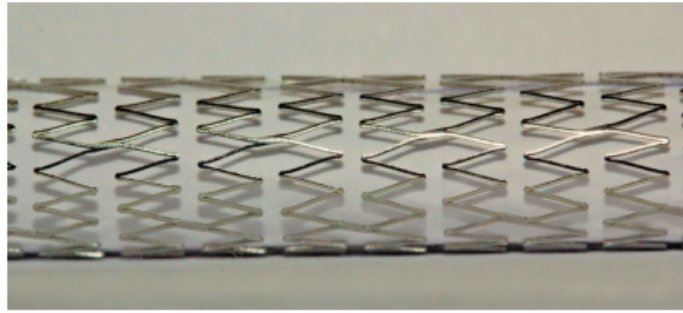


Figura 6.10: Stent commerciale Maris Plus.

6.3 Analisi numerica di stent

Gli stent autoespandibili analizzati nelle simulazioni numeriche sono tre modelli commerciali, il *Lifestent* della Bard Peripheral Vascular, il *Maris Plus* delle Medtronic Endovascular Therapies, e l'*Absolute Pro* della Abbott Vascular.

Il Lifestent (Fig. 6.9) è prodotto con diametri tra 5 mm a 10 mm, con lunghezze che variano tra 20 mm e 170 mm; presenta un design elicoidale con struttura a celle aperte, le cui corone di *strut* (*ring*) sono unite mediante degli elementi di connessione (*link*) disposti *peak-to-peak*.

Il Maris Plus (Fig. 6.10) è prodotto con diametri tra 6 mm a 12 mm e lunghezze da 30 mm a 150 mm; è caratterizzato anch'esso da una struttura a celle aperte ed elementi di connessione *peak-to-peak*.

L'*Absolute Pro* (Fig. 6.11) ha una struttura a celle aperte con ring collegati mediante dei link *peak-to-valley*; è prodotto inoltre con diametri tra 6 e 10 mm, e lunghezze tra 20 e 100 mm.

I modelli geometrici di queste tipologie di stent sono stati ricavati da lavori di tesi precedenti [16–18,68], svolti presso il Laboratorio di Meccanica di Strutture Biologiche (Labs) del Politecnico di Milano, così anche come le caratteristiche meccaniche

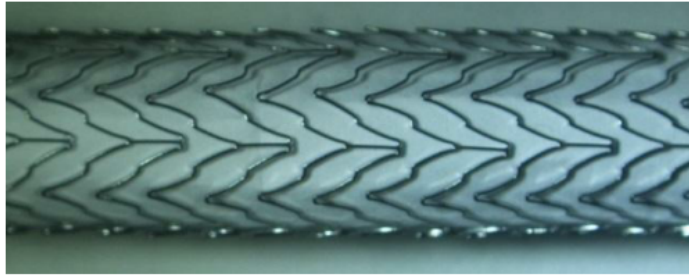


Figura 6.11: Stent commerciale Absolute Pro. Si notino le connessioni di tipo peak-to-valley.

Tabella 6.1: Caratteristiche geometriche dei modelli di stent disponibili

Tipologia di stent	Lunghezza	Diametro esterno
Lifestent	17.24 mm	7 mm
Maris Plus	22.6 mm	8 mm
Absolute Pro	19.59 mm	6 mm

del materiale con cui sono realizzati, ottenute negli stessi lavori mediante delle prove di trazione monoassiale. Il software utilizzato per la realizzazione del disegno CAD di tali dispositivi è Pro/ENGINEER Wildfire 3.0 (Parametric Technology Co.); le caratteristiche dei CAD a disposizione sono tali che per ognuno dei tre stent presentati non si considera l'intera lunghezza del dispositivo, ma solo 8 ring. I dati in termini di diametro esterno e lunghezza delle geometrie CAD sono riassunte in Tab. 6.1.

Per utilizzare le geometrie ottenute in Pro/ENGINEER all'interno delle simulazioni numeriche si è poi proceduto a discretizzare il continuo, realizzando un modello agli elementi finiti. La discretizzazione consiste nel suddividere un corpo continuo in un insieme di elementi finiti, chiamato *mesh*. Gli elementi della mesh sono interconnessi mediante dei *nod*i. Il fine di tale procedura è trasformare un problema strutturale caratterizzato da un numero infinito di incognite in un problema algebrico con un numero finito di incognite, gli spostamenti nodali. Noti questi, mediante l'applicazione delle relazioni cinematiche e del legame costitutivo possono anche essere trovate le deformazioni e gli sforzi all'interno del continuo. La mesh è stata ottenuta tramite il software Altair HyperMesh 11.0 suddividendo la geometria in elementi esaedrici; particolare attenzione è stata posta alla sua regolarità, requisito fondamentale per massimizzare l'accuratezza dei risultati. Una diminuzione della dimensione degli elementi finiti, ovvero una discretizzazione più fitta del continuo, può aumentare l'accuratezza della soluzione, in particolare nei punti geometrici con maggiore concentrazione di sforzi, quali apici degli strut e in prossimità dei link. Tuttavia procedere in questo modo provoca anche un aumento del costo computazionale, inteso come tempo necessario al completamento delle simulazioni, strettamente correlato al

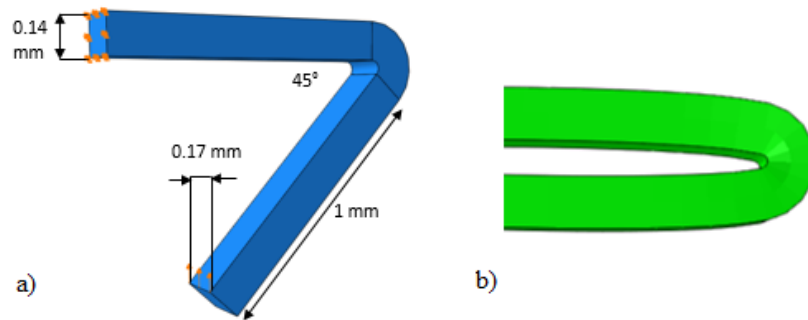


Figura 6.12: a) Rappresentazione della geometria usata per i test di sensitività, con i vincoli imposti b) Deformata ottenuta

Tabella 6.2: Sforzi e deformazioni plastiche utilizzate per calibrare il materiale elastoplastico usato per il test di sensitività della mesh

$\varepsilon^{plastica}$ [-]	σ [MPa]
0.0	150
0.2	250

numero di equazioni da risolvere, e quindi al numero di elementi utilizzati.

6.3.1 Scelta della mesh

Per scegliere il corretto compromesso tra numero di elementi e accuratezza del risultato è stata condotta un'analisi di sensitività della mesh, su una geometria semplificata che rievoca quella di una singola *V-strut* di uno stent, mostrata in Fig. 6.12a. Le dimensioni della sezione sono 0.2 mm x 0.3 mm. Si è applicata a tale geometria una condizione deformativa simile a quella che avviene all'interno degli stent durante la fase di crimping; per questo la faccia di una delle due estremità è stata vincolata con un incastro, mentre al bordo dell'altra è stato imposto uno spostamento verticale di 0.7 mm, in modo da giungere alla fine della simulazione alla configurazione mostrata in Fig. 6.12b. Per semplicità e per escludere influenze legate al modello costitutivo, si è scelto come materiale un generico legame elastoplastico, con $E = 25000$ MPa e $\nu = 0.35$, con legge di hardening isotropo imposta con i dati della Tab. 6.2.

L'analisi di sensitività è stata svolta confrontando i risultati in termini di curve forza-spostamento relative al bordo vincolato a muoversi, nel caso di utilizzo di elementi finiti esaedrici, sia lineari del tipo C3D8, C3D8I, C3D8R, sia quadratici C3D20 e C3D20R. L'elemento C3D8 è il classico elemento esaedrico lineare con 8 nodi e 8 punti di integrazione, C3D8R è l'elemento lineare ad integrazione ridotta, con 8 nodi e un solo punto di integrazione. C3D8I è un elemento lineare ad integrazione com-

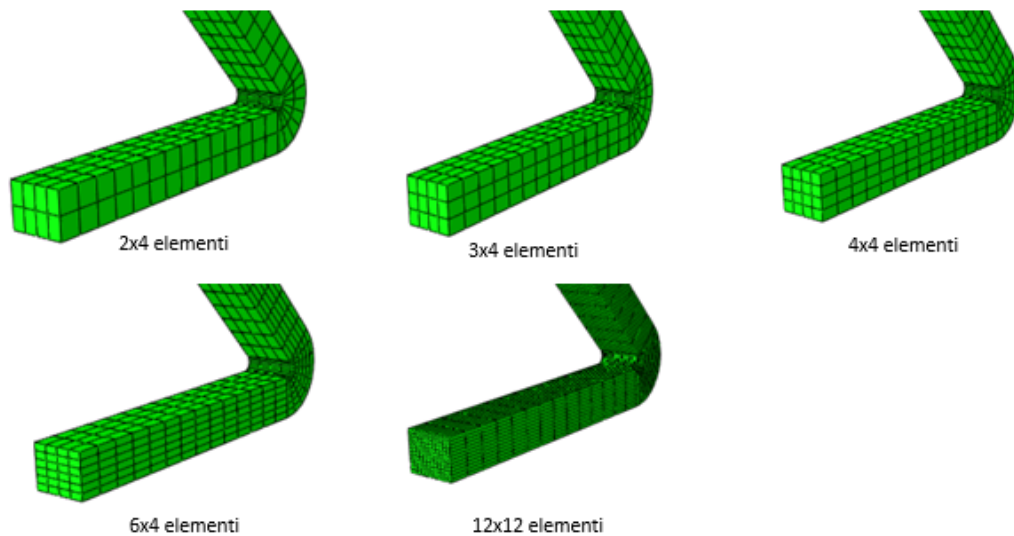


Figura 6.13: Rappresentazione di un dettaglio delle mesh realizzate, con 2, 3, 4, 6 e 12 elementi lungo il piano di flessione della struttura

pleta (8 nodi e 8 punti di integrazione) con modi incompatibili, ovvero formulato con gradi di libertà aggiuntivi in modo da superare la problematica di *shear-locking* che colpisce gli elementi C3D8. Tale problematica, caratteristica dell'elemento lineare ad integrazione completa, deriva dal fatto che gli spigoli dell'elemento per via della formulazione lineare stessa non possono piegarsi. Nel caso la struttura discretizzata con tali elementi sia soggetta prevalentemente a sollecitazioni di flessione, ne deriva che l'uso degli elementi C3D8 causerebbe una sottostima delle deformazioni e la nascita di sforzi spuri. C3D20 è invece l'elemento finito quadratico ad integrazione completa (20 nodi e 27 punti di integrazione), mentre C3D20R è quello quadratico ad integrazione ridotta (20 nodi e 8 punti di integrazione). Per ognuna di queste tipologie sono state svolte delle simulazioni cambiando il numero di elementi della mesh, ovvero ponendo nel piano di flessione 2, 3, 4, 6 elementi. Nell'altra dimensione della sezione si sono usati in tutte le situazioni 4 elementi. Come riferimento è stata usata una mesh con 12x12 elementi nella sezione. Le discretizzazioni ottenute sono mostrate in Fig. 6.13.

Gli elementi finiti quadratici, sia ad integrazione completa che ad integrazione ridotta ci si aspetta permettano di ottenere risultati accurati anche con mesh più rade; ciò nonostante il loro utilizzo in una simulazione porta a costi computazionali maggiori. Tenuto in considerazione che le simulazioni che si vogliono effettuare comportano anche il contatto fra diversi corpi, fenomeno già complesso da simulare nei software per gli elementi finiti, come suggerito anche dalla guida di ABAQUS [67] è

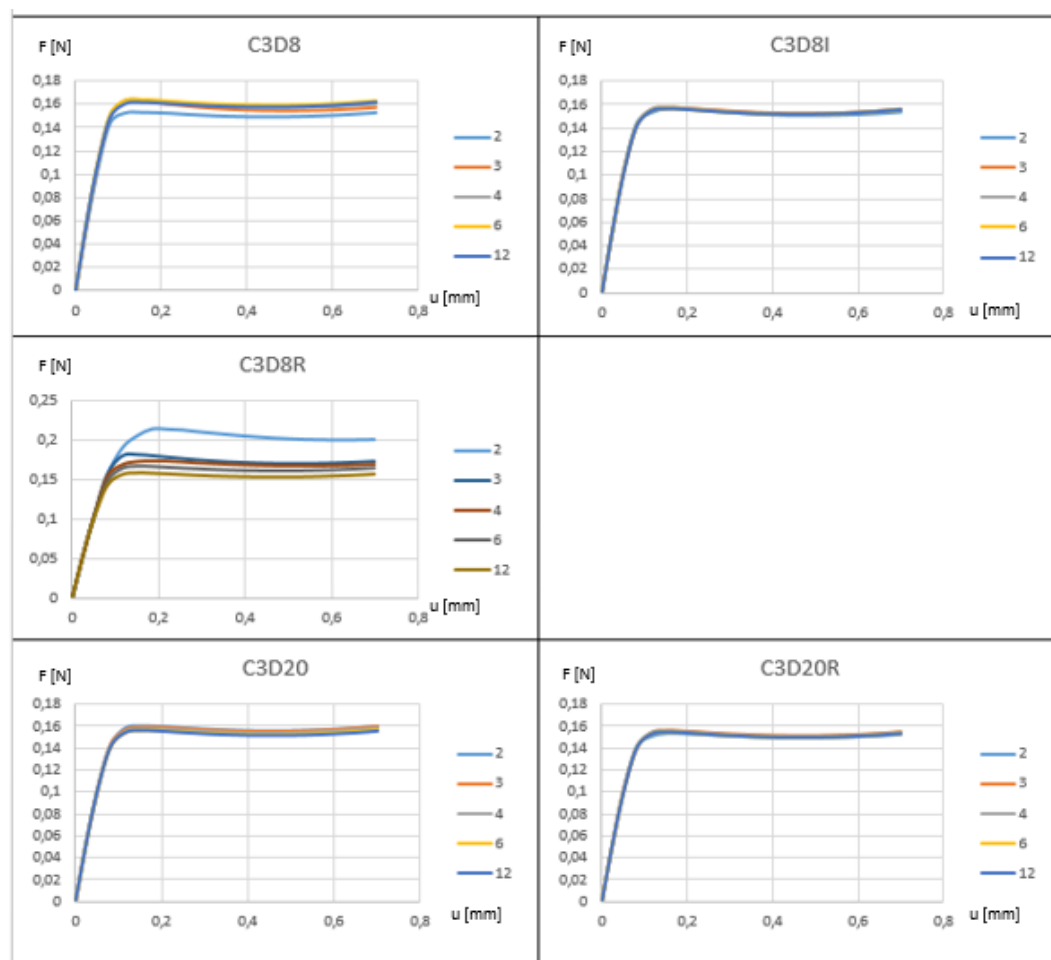


Figura 6.14: Test di sensitività della mesh. Risultati in termini di curve forza-spostamento, suddivisi per tipo di elemento finito.

preferibile rimanere in questo tipo di simulazioni su elementi lineari. Tuttavia bisogna anche tenere in considerazione che il meccanismo deformativo degli stent avviene per lo più per flessione delle singole strut, e quindi i semplici elementi C3D8, soffrendo del fenomeno di *shear-locking*, porterebbero all'ottenimento di risultati poco attendibili. Per questo sarebbe una soluzione migliore l'utilizzo di elementi C3D8R ad integrazione ridotta, che però avendo un solo punto di integrazione richiederebbero una mesh molto fitta per seguire i gradienti di deformazione e di sforzo, o degli elementi C3D8I, che sono opportunamente formulati per non incorrere nel fenomeno di *shear-locking*.

I risultati delle simulazioni sono mostrati in Fig. 6.14, dove si vede l'influenza del numero di elementi sul risultato, per ogni tipo utilizzato. In Fig. 6.15 è invece mostrato il confronto a parità di discretizzazione della tipologia dell'elemento. Dalla Fig. 6.14 si vede che tranne l'elemento C3D8R, tutti gli altri permettono di ottenere già con le mesh meno fitte risultati sovrapponibili con quelli delle discretizzazioni più accurate. Ciò è particolarmente vero per gli elementi di tipo C3D8I e C3D20R

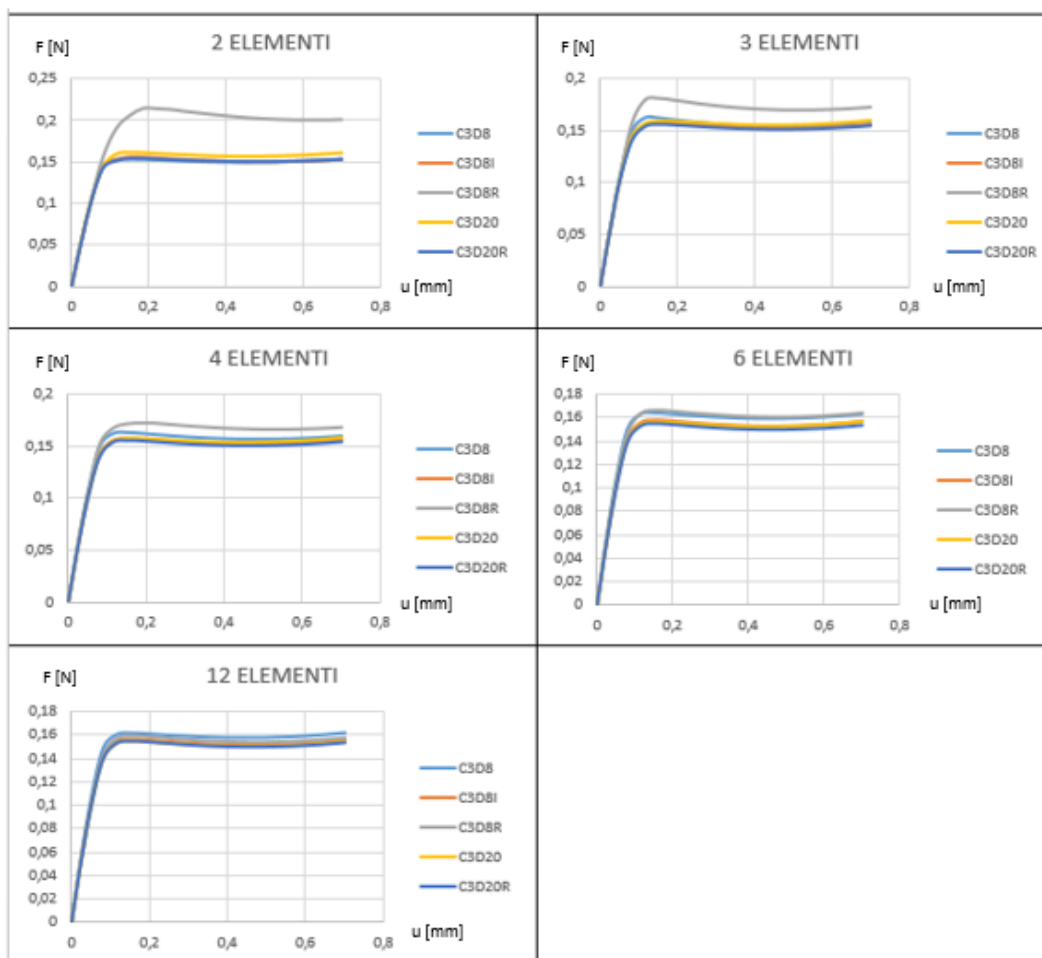


Figura 6.15: Test di sensitività della mesh. Risultati in termini di curve forza-spostamento, suddivisi per numero di elementi utilizzati.

Tabella 6.3: Valori di sforzo di von Mises massimi raggiunti in un elemento finito della zona più sollecitata della struttura a V, al variare del numero di elementi e del loro tipo.

Valori massimi di sforzo di von Mises [MPa]	2 elementi	3 elementi	4 elementi	6 elementi	12 elementi
C3D8	190	189	183	182	183
C3D8I	167	171	173	174	176
C3D8R	192	195	182	177	177
C3D20	168	171	173	175	177
C3D20R	165	171	173	175	176

dove, qualsiasi sia la mesh usata, le curve sono perfettamente sovrapposte. Questo ci permette di concludere che scegliendo tale tipologia di elementi, anche una discretizzazione poco fitta può essere sufficiente per avere dalla simulazione dei risultati attendibili. Tuttavia resta ancora da verificare se si commette un errore significativo scegliendo una tipologia rispetto che un'altra. La Fig. 6.15, per ogni mesh utilizzata, mostra i risultati ottenuti con i vari tipi di elementi finiti; solo C3D8R si discosta dai risultati ottenibili con gli altri, avvicinandosi a questi solo nelle mesh più fitte. Come prevedibile analizzando le curve in figura, l'elemento C3D8 presenta specialmente durante le simulazioni con le mesh più fitte dei valori di forza leggermente superiori rispetto a quelli degli altri elementi, a causa del fenomeno di *shear-locking*. Per analizzare meglio la presenza di tale fenomeno, si sono estratti i valori massimi di sforzo di von Mises raggiunti da uno degli elementi finiti posti nella zona più sollecitata della struttura (Tab. 6.3), ovvero la parte esterna della V. Da tale tabella si possono confermare le stesse considerazioni: C3D8 esibisce *shear-locking*, causando l'ottenimento di valori di sforzo mediamente maggiori. C3D8R, invece, solo con le mesh più fitte permette di ottenere valori vicini a quelli degli altri elementi. C3D8I, C3D20 e C3D20R danno invece dei risultati tra loro comparabili, e già con le mesh rade i valori si discostano poco rispetto a quelli ottenuti con discretizzazioni più fitte. Per motivi di costi computazionali si è deciso di non scegliere per la mesh definitiva degli stent gli elementi quadratici. Si è invece optato per l'elemento C3D8I con 3 elementi nel piano della flessione, visto che il semplice C3D8 ha la problematica legata al *shear-locking*, mentre il C3D8R richiederebbe mesh eccessivamente fitte. Alcune porzioni delle mesh ottenute sono mostrate in Fig. 6.16; il Lifestent è stato discretizzato con 88767 elementi e con 157387 nodi; il Maris Plus con 137880 elementi e 224660 nodi; infine l'Absolute Pro con 62592 elementi e 103279 nodi.

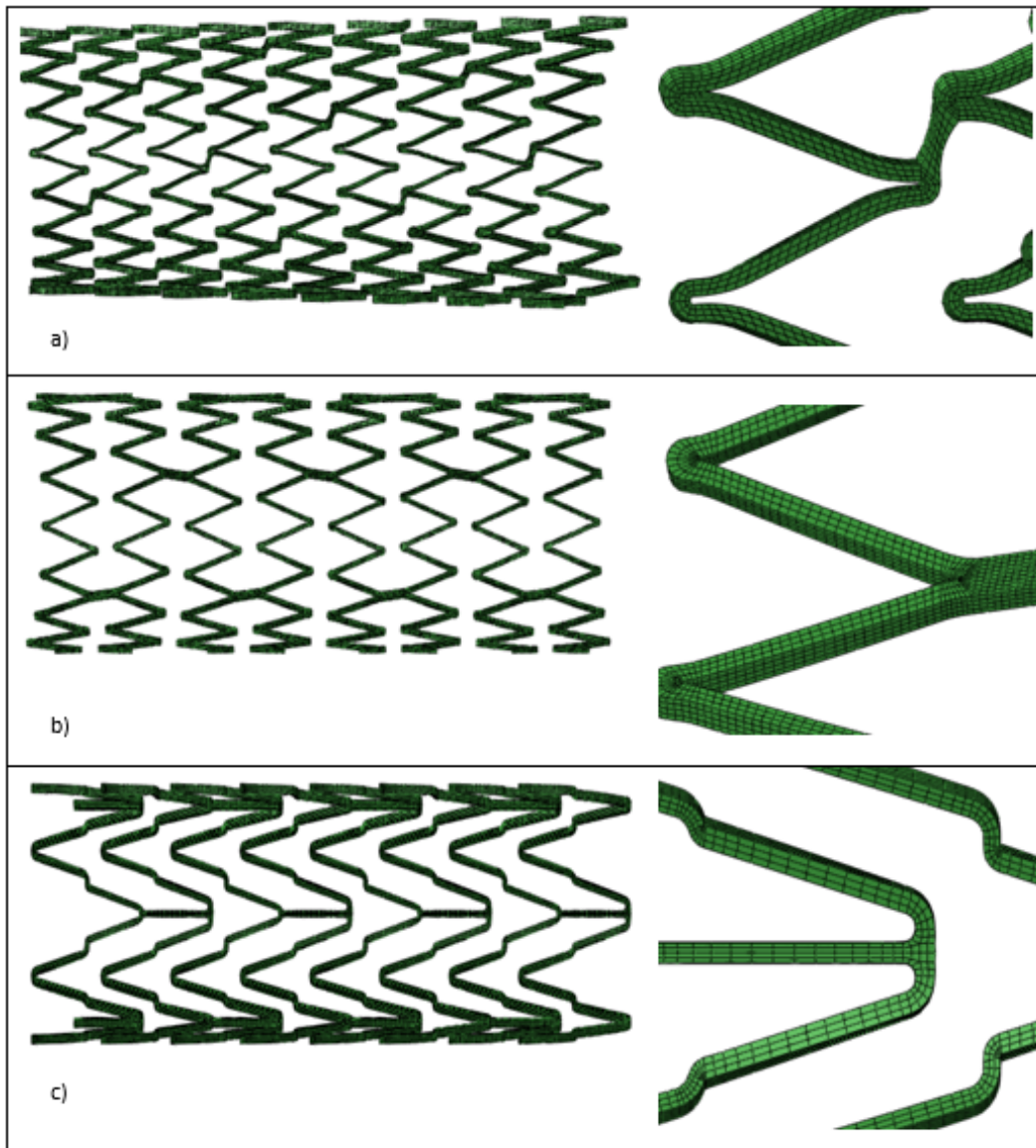


Figura 6.16: Rappresentazione della mesh scelta per le tre geometrie di stent. a) Lifestent b) Maris Plus c) Absolute Pro

Tabella 6.4: Caratteristiche geometriche dei modelli di stent studiati

Stent	Diametro	Diametro dopo il crimpaggio	Riduzione %
Lifestent	7 mm	2 mm	71.4 %
Maris Plus	8 mm	2 mm	75 %
Absolute Pro	6 mm	2 mm	67 %

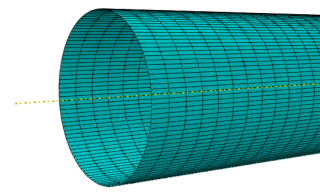


Figura 6.17: Rappresentazione della superficie rigida utilizzata per il crimpaggio

6.3.2 Simulazione di crimpaggio

La prima tipologia di analisi computazionale effettuata è un test di crimpaggio degli stent all'interno del catetere; una volta raggiunto un diametro tale da essere inferiore a quello del lume interno del vaso, lo stent viene rilasciato, ovvero lasciato libero di espandersi. Durante l'impianto in realtà lo stent non è completamente libero di recuperare la propria forma, ma entra in contatto con la superficie interna del vaso. L'utilizzo di stent di dimensione diametrale più grande rispetto al vaso permette infatti di ottenere durante il recupero una forza radiale che mantiene le arterie pervie. Tuttavia tale aspetto sarà studiato solo nelle simulazioni successive; qui si vuole solo effettuare un'analisi di come possa cambiare il comportamento dello stent durante il crimpaggio e il recupero libero, nel caso si trascurino o si considerino le deformazioni plastiche che possono nascere a causa delle forti sollecitazioni indotte dalla notevole riduzione di diametro. Partendo dalle informazioni tecniche fornite dalle rispettive case produttrici, si è visto che il crimpaggio viene effettuato per tutti i modelli qui considerati con un catetere di diametro interno pari a 6 F, che corrispondono a 2 mm. Ne consegue che per i tre tipi di stent la riduzione di diametro subita è mostrata in Tab. 6.4.

Per simulare la fase di crimping viene utilizzata una superficie cilindrica rigida con diametro leggermente superiore a quello dello stent nella configurazione espansa; a tale superficie rigida non viene assegnata nessuna proprietà meccanica in quanto la sua funzione è solamente quella di trasferire uno spostamento radiale ai nodi della superficie esterna degli stent; per questo sarà discretizzata mediante elementi finiti di tipo SFM3D4, ovvero lineari di tipo *Surface*. Una rappresentazione di tale superficie è presente in Fig. 6.17; si noti che la discretizzazione è più fitta in direzione circonferenziale, dove sono stati usati 120 elementi. Le simulazioni, per ognuno degli

Tabella 6.5: Parametri utilizzati per le simulazioni sul Lifestent

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
46300	0.3	207	30260	0	4000	3000	4.29	0.057	2
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	α [1/K]	T_0 [K]	M_f [K]	H_I [MPa]	T [K]
0.2	69.4	-	0.02	10^{-7}	0	-	250	5000	310

stent qui considerati, constano quindi di due step: durante il primo viene imposto uno spostamento radiale alla superficie rigida, tale da portarla in tutte le simulazioni ad avere un diametro di 2 mm. Durante lo step successivo invece tale superficie viene riportata ad avere il diametro iniziale, in modo da permettere l'espansione degli stent. Per fare questo ovviamente è stato definito un sistema di riferimento cilindrico coassiale con lo stent. Durante il primo step allo stent non viene applicato nessun vincolo; per impedirne lo scivolamento viene quindi introdotto dell'attrito con la superficie rigida. Quindi l'interazione tra i due corpi è modellizzata introducendo un comportamento tangenziale con formulazione di tipo *Penalty* e coefficiente di attrito pari a 0.2, e con comportamento normale con relazione *Pressure-Overclosure* di tipo *esponenziale*, con pressione di contatto 0.3 quando la Clearance è nulla, e con Clearance di 0.02 quando la pressione è 0. Tale impostazione ha permesso di ottenere una rapida convergenza della soluzione, semplificando l'interazione tra le due superfici; tuttavia questo non rappresenta un problema in quanto lo scopo delle simulazioni non è cogliere in modo accurato le interazioni degli stent, ma studiare l'eventuale presenza di deformazioni plastiche nate durante il crimpaggio. Durante il secondo step della simulazione alcuni nodi dello stent sono inoltre stati vincolati a non muoversi in direzione assiale e tangenziale, in modo da evitare problemi di convergenza della simulazione al momento del distacco tra superficie rigida e stent.

A questo punto si sono definite le proprietà del materiale degli stent, basandoci sui dati sperimentali ottenuti nei precedenti lavori di tesi già citati [16–18,68]. Agli elementi finiti corrispondenti allo stent è stato assegnato come materiale quello corrispondente alla UMAT implementata. Il modello costitutivo è stato utilizzato nei tre diversi modelli di stent con i dati ottenuti da tali lavori di tesi, e riassunti in Tab. 6.5 per il Lifestent, in Tab. 6.6 per il Maris Plus, in Tab. 6.7 per l'Absolute Pro. Si sottolinea che non si è a conoscenza dei parametri in grado di regolare il fenomeno di fatica e plasticità, quindi si sono supposti dei valori ragionevoli (indicati in corsivo all'interno delle tabelle).

Le prime simulazioni effettuate sono state eseguite con il modello in cui si erano disattivate plasticità e fatica, in modo da osservare il comportamento degli stent durante il crimpaggio ed il recupero elastico in assenza di deformazioni plastiche. In Fig. 6.18 sono mostrati i risultati per il Maris Plus: è presente l'andamento della

Tabella 6.6: Parametri utilizzati per le simulazioni sul Maris Plus

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
42100	0.3	2014	32371	0	4000	3000	3.32	0.0546	2
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	$\alpha[1/\text{K}]$	T_0 [K]	M_f [K]	HI [MPa]	T [K]
0.2	103	-	0.02	10^{-7}	0	-	250	5000	310

Tabella 6.7: Parametri utilizzati per le simulazioni sull'Absolute Pro

E[MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
46920	0.3	983	30000	0	4000	3000	2.93	0.057	2
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	$\alpha[1/\text{K}]$	T_0 [K]	M_f [K]	HI [MPa]	T [K]
0.2	73	-	0.02	10^{-7}	0	-	250	5000	310

deformazione principale massima e dello sforzo equivalente di von Mises in corrispondenza della situazione di massimo crimpaggio. Inoltre viene mostrato anche un grafico sforzo-deformazione relativo ad uno degli elementi più sollecitati, ottenuto definendo un sistema di riferimento con gli assi paralleli ai lati di tale elemento, e considerando la componente di sforzo e deformazione dovuta alla flessione della struttura. Si nota che i punti più sollecitati sono quelli in corrispondenza della parte laterale esterna delle strut, in vicinanza delle punte. In tali zone la deformazione principale massima è di 0.07598, mentre lo sforzo di von Mises 813.01 MPa; inoltre la curva sforzo-deformazione, coerentemente con il fatto che il modello costitutivo è stato tarato disattivando la plasticità e la fatica, non mostra nessun fenomeno di accumulo di deformazione. Gli sforzi raggiunti dallo stent non sono particolarmente elevati, quindi si è consapevoli del fatto che potrebbero non essere sufficienti per far nascere nel dispositivo reale una plasticizzazione. Tuttavia nelle simulazioni successive, per mostrare quale possa essere la conseguenza della presenza di deformazioni plastiche sorte durante la fase di crimpaggio, si è deciso di scegliere una soglia di snervamento sufficientemente bassa, in modo che il materiale riesca a plasticizzare. Partendo dalla curva sforzo-deformazione del punto maggiormente sollecitato, si è deciso di porre una soglia di plasticità rispettivamente di 700 MPa e 600 MPa (corrispondente al parametro R_2 del modello). I risultati sono mostrati in Fig. 6.19 nel caso di soglia a 700 MPa, e in Fig. 6.20 nel caso di soglia a 600 MPa. La distribuzione della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises qualitativamente non cambia, tuttavia si può vedere che nei punti più sollecitati, all'abbassarsi della soglia di snervamento, si abbassa leggermente lo sforzo raggiunto e aumenta la deformazione principale massima. In Fig. 6.19 infatti si raggiunge una deformazione di 0.07622 e uno sforzo di 801.52 MPa, mentre in Fig. 6.20 0.08271 di deformazione e

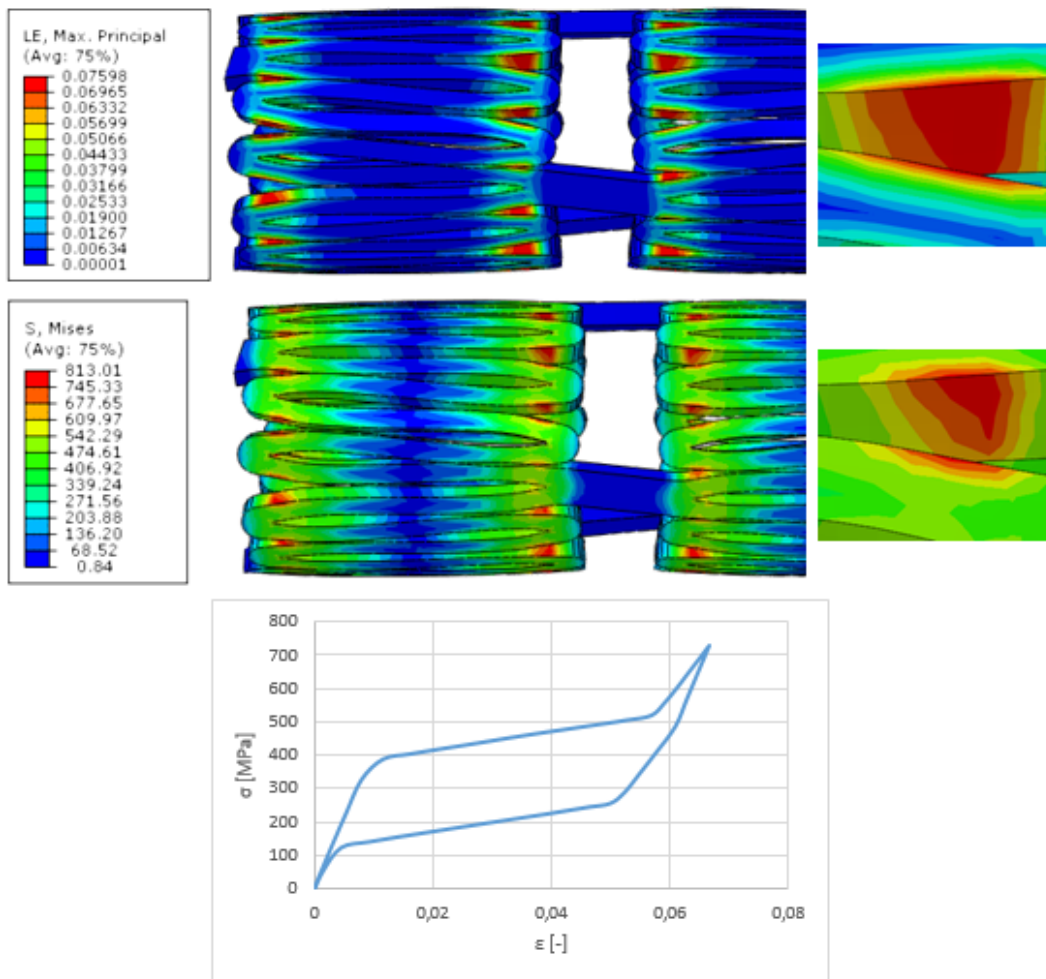


Figura 6.18: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus con la plasticità disattivata. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

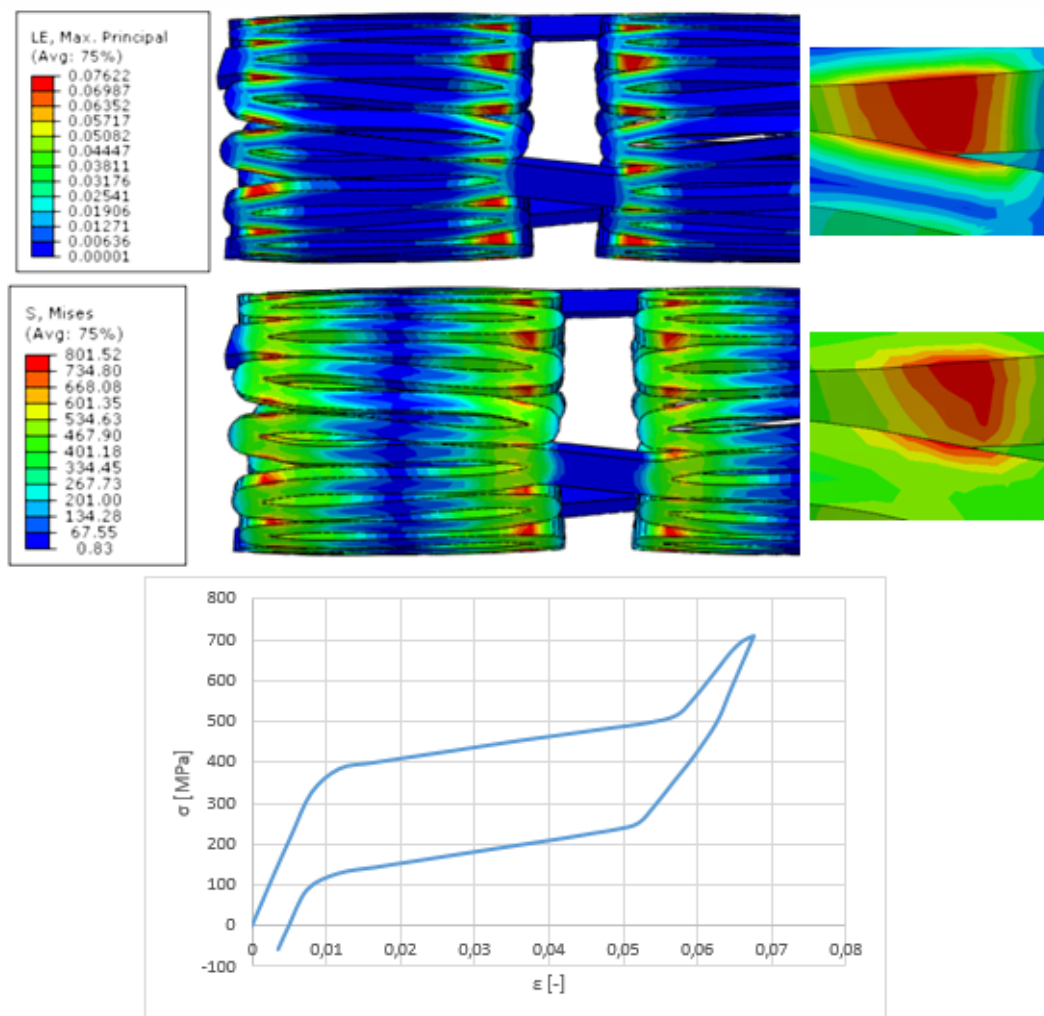


Figura 6.19: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus con soglia di plasticità posta a 700 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

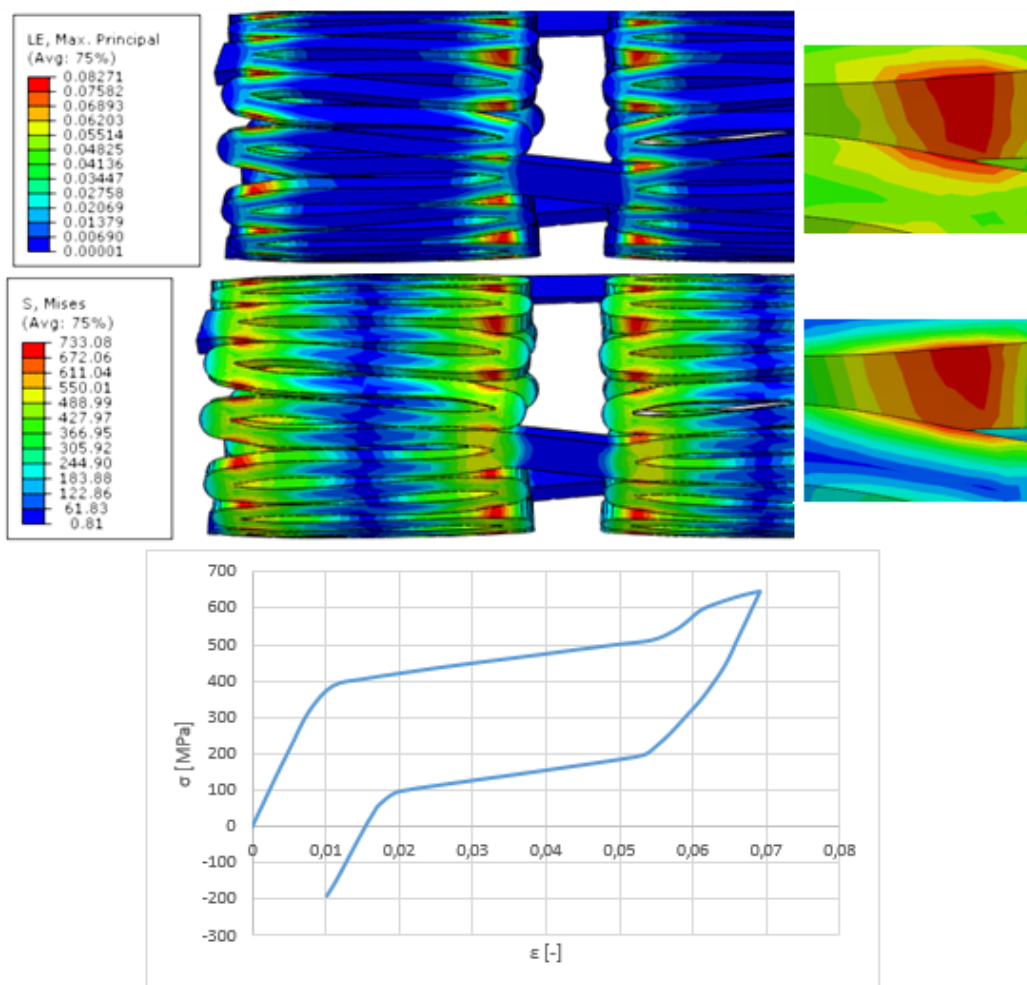


Figura 6.20: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Maris Plus con soglia di plasticità posta a 600 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

733.08 MPa di sforzo. E' interessante notare come varia la curva sforzo-deformazione dell'elemento maggiormente sollecitato: più la plasticità è presente, più il modello permette di cogliere il fatto per cui allo scarico rimane una deformazione plastica residua. Inoltre nel caso la soglia sia posta a 600 MPa, a causa della notevole deformazione accumulata le condizioni di carico si invertono, passando da trazione a compressione; tuttavia in condizioni normali lo stent difficilmente raggiunge tale situazione, in quanto il recupero è limitato dall'arteria in cui è posto. Il fatto che nei punti più sollecitati dello stent sia presente una deformazione residua significativa potrebbe portare alla conclusione che il comportamento globale dello stent ne risenta, non riuscendo quindi a recuperare pienamente la propria forma iniziale espansa. In realtà i punti che raggiungono la plasticità sono pochi rispetto alla dimensione della struttura, quindi il recupero della forma avviene senza problemi. Durante la simulazione si è misurata infatti la riduzione di diametro quando il rilascio è stato completato, nel caso di soglia di plasticità a 700 MPa si ha una riduzione del diametro di solo 1.86 % , mentre con soglia a 600 MPa la riduzione rimane comunque poco significativa, ovvero del 2.86 %. Questo permette di concludere che in realtà la presenza di plasticità non causa problemi dal punto di vista della funzionalità dello stent, tuttavia va ad incidere sulle deformazioni e sugli sforzi dei punti maggiormente sollecitati.

Passando all'analisi dei risultati dell'Absolute Pro, il primo test di crimpaggio e rilascio completo, mantenendo nel modello costitutivo disattivata la plasticità e la fatica, è mostrato in Fig. 6.21. In questo caso si vede che le zone sottoposte alla maggiore deformazione principale massima, che risulta 0.05679, sono diverse rispetto a quelle in cui c'è il più alto valore di sforzo di Von Mises, pari a 833.06 MPa. Le prime corrispondono alla zona esterna delle strut, le seconde a quelle interne. La curva sforzo-deformazione mostrata è relativa ad un elemento posto internamente, che viene sottoposto agli sforzi più elevati. Avendo disattivato la plasticità, come ci si aspetta non è presente nessuna deformazione residua quando lo scarico è completato. Si fa inoltre notare che gli sforzi e le deformazioni presenti in tale curva sono negativi, coerentemente con il fatto che il punto considerato si trova all'interno della struttura a V dello stent, quindi è sottoposto a compressione. Viceversa è mostrato in Fig. 6.22 ed in Fig. 6.23 il medesimo test, ponendo come soglia di plasticità rispettivamente 600 MPa e 500 MPa. Le deformazioni principali massime ottenute non sono molto diverse rispetto al modello senza plasticità, essendo pari a 0.05699 e 0.05696 nei due casi. Tuttavia, come anche nella simulazione sul Maris Plus, lo sforzo di von Mises nel punto maggiormente sollecitato si abbassa quanto più viene abbassata la soglia di snervamento: si passa a 762.31 MPa con la soglia a 600 MPa, e a 657.85 MPa con la soglia a 500 MPa. Le curve sforzo-deformazione mostrano come anche in tali simulazioni le parti più sollecitate dello stent accumulano deformazione plastica che non viene recuperata al rilascio. Questo provoca che quando il recupero della

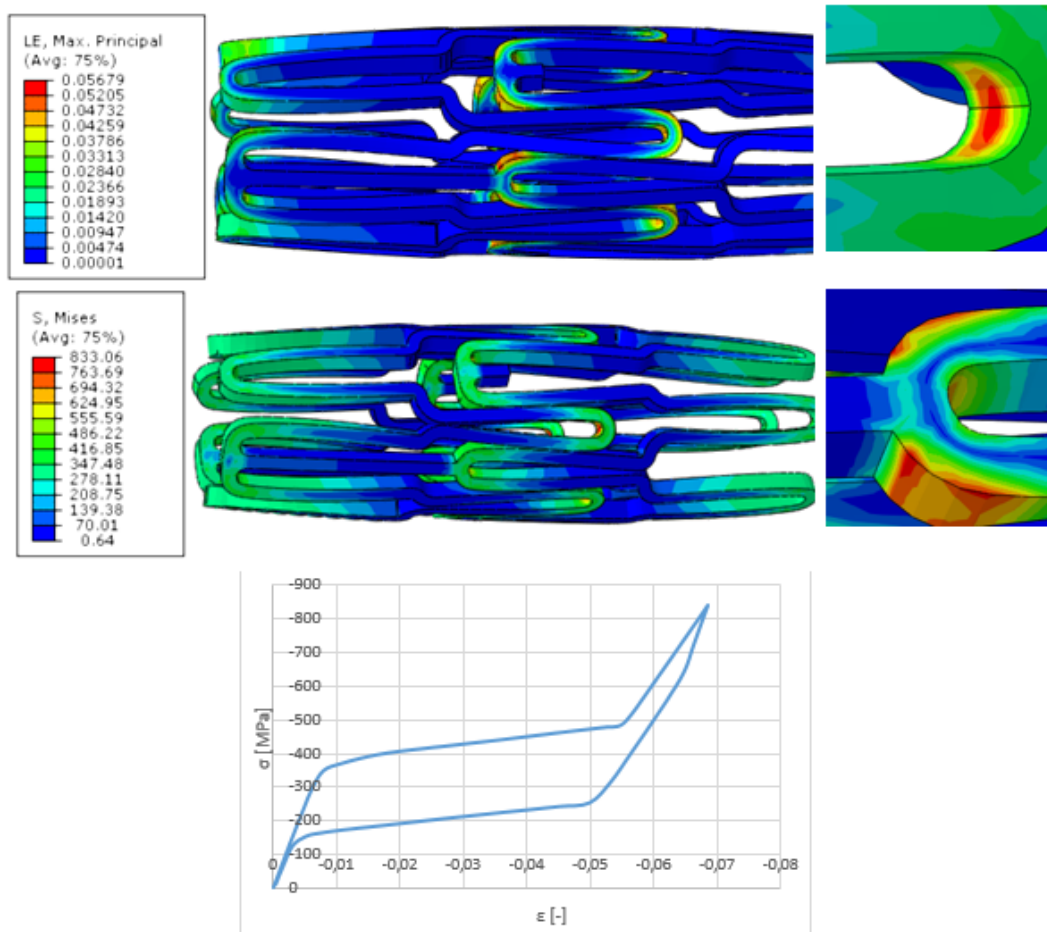


Figura 6.21: Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro, con la plasticità disattivata. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

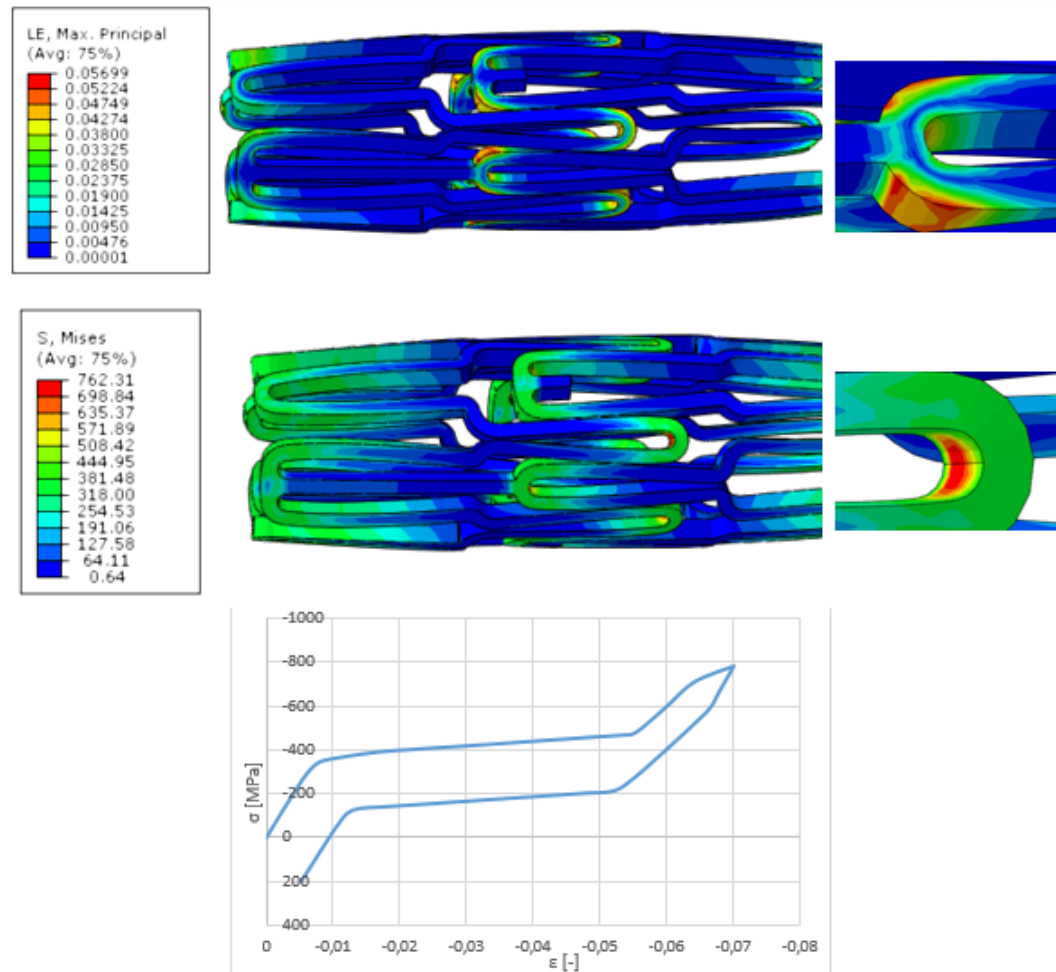


Figura 6.22: Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro con soglia di plasticità posta a 600 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

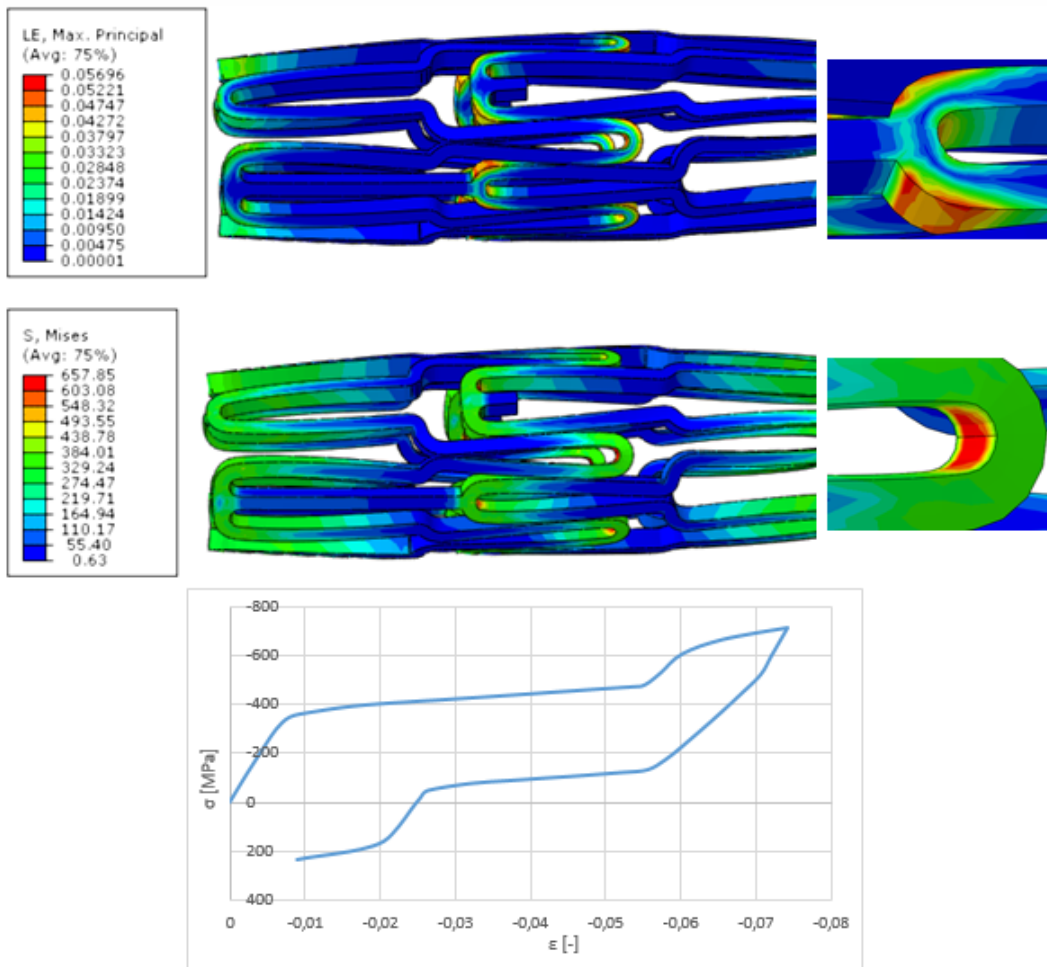


Figura 6.23: Risultati della simulazione di crimpaggio sull'Absolute Pro con soglia di plasticità posta a 500 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

forma espansa è quasi terminato tali zone passano da condizioni di compressione a condizioni di trazione. Questo è particolarmente evidente nel caso si abbassi molto la soglia di plasticità, ovvero nella terza simulazione: qui il punto considerato non solo passa in trazione, ma inizia a percorrere anche il plateau di trasformazione di fase. Si noti che grazie al modello costitutivo formulato lo sforzo critico di inizio trasformazione di fase, nel momento in cui si passa in trazione, risulta più basso di quello che era presente in compressione: ciò è prodotto dall'effetto delle deformazioni plastiche, che hanno influenza anche sul meccanismo di transizione di fase.

Anche per lo stent Absolute Pro si è valutato quanto le deformazioni plastiche incidano sul recupero della configurazione espansa: come per il Maris Plus, dato che i punti che giungono a snervamento sono pochi, la capacità dello stent di riaprirsi non appare molto diminuita, in quanto nella simulazione con soglia posta a 600 MPa si ha avuto una riduzione del diametro finale solo dell'1.86 %, mentre nella simulazione con soglia di plasticità a 500 MPa del 2.33%.

Gli ultimi risultati presentati in questa sezione sono quelli relativi alle simulazioni sul dispositivo Lifestent. Nella fase di massimo crimpaggio si nota che i punti più sollecitati sono quelli in corrispondenza dei *link* di collegamento tra due ring vicini. Nel caso della simulazione con i fenomeni della fatica e plasticizzazione disattivati, Fig. 6.24, in tali zone viene raggiunta una deformazione principale massima di 0.11364, ed uno sforzo di von Mises di 1715.74 MPa. La curva sforzo-deformazione mostra che in tale simulazione, come aspettato, non è presente nessun accumulo di deformazione residua. Rispetto alle simulazioni sugli altri dispositivi in questo caso la sollecitazione raggiunta in alcuni punti dello stent è notevole, in quanto uno sforzo di von Mises di 1715.74 MPa è sicuramente molto vicino, se non superiore, allo sforzo massimo sopportabile dal materiale, e quindi in corrispondenza di tali zone nella situazione reale di impianto verrebbe raggiunto facilmente il punto di snervamento. E' quindi interessante ripetere la simulazione ponendo una soglia critica di snervamento realistica, pari a 1000 MPa, Fig. 6.25, o 800 MPa, Fig. 6.26, per poter verificare quale possa essere la conseguenza della presenza di deformazioni plastiche. Si può notare dalle figure che più il materiale plasticizza (quindi minore è la soglia di plasticità considerata), più la deformazione principale massima raggiunta aumenta, passando a 0.12538 nel caso di soglia di 1000 MPa, e ad 0.14039 nel caso di soglia di 800 MPa; allo stesso tempo lo sforzo di von Mises raggiunto nei punti più sollecitati diminuisce, passando a 1475.91 MPa fino a 1291.52 MPa. Da questi risultati si può quindi trarre una conclusione importante, ovvero che considerando durante la simulazione la presenza di effetti legati alla plasticità la risposta del materiale cambia in modo evidente: gli sforzi raggiunti diminuiscono, mentre aumentano le deformazione raggiunte. Un'altra considerazione importante può essere tratta dall'osservazione delle curve sforzo-deformazione: in presenza di plasticizzazione, durante il rilascio dello stent permane una deformazione residua che non viene recuperata, tanto mag-

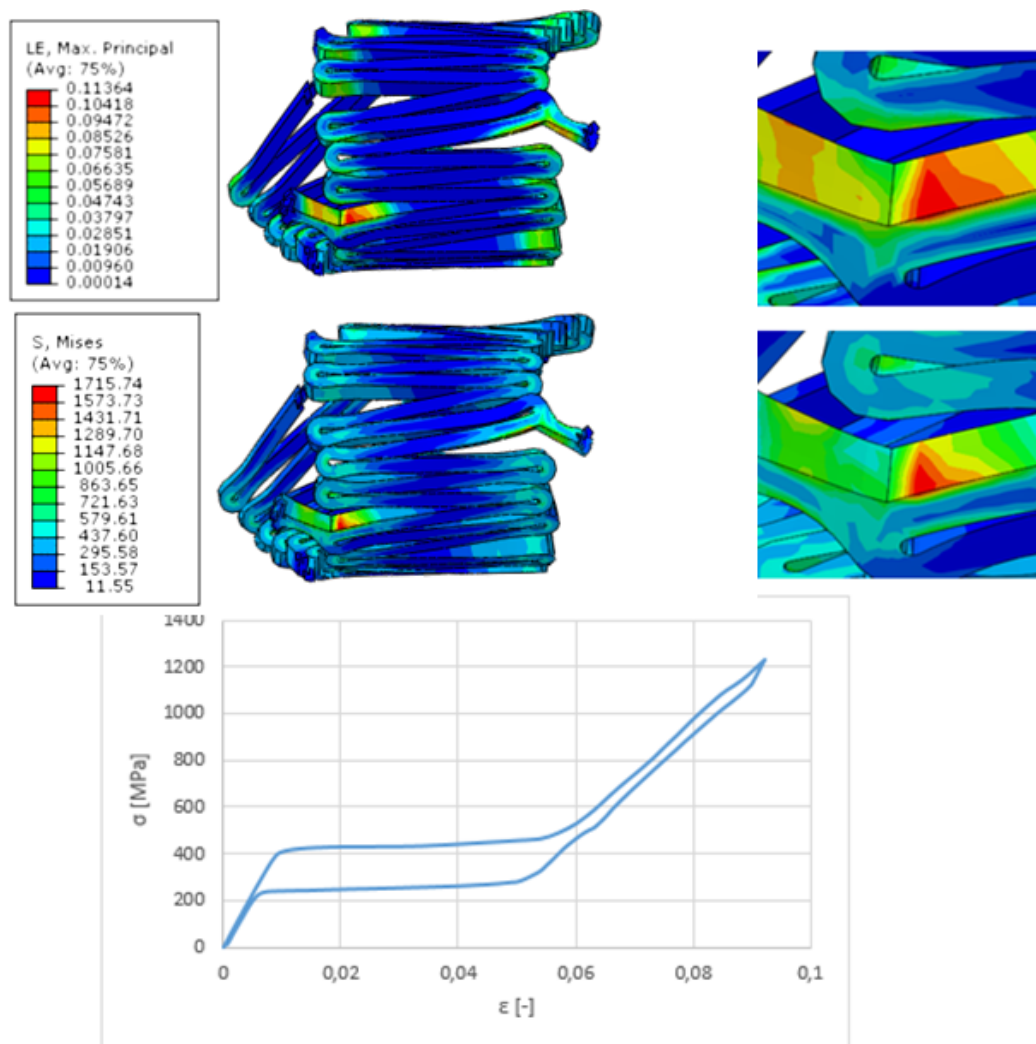


Figura 6.24: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent con la plasticità disattivata. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

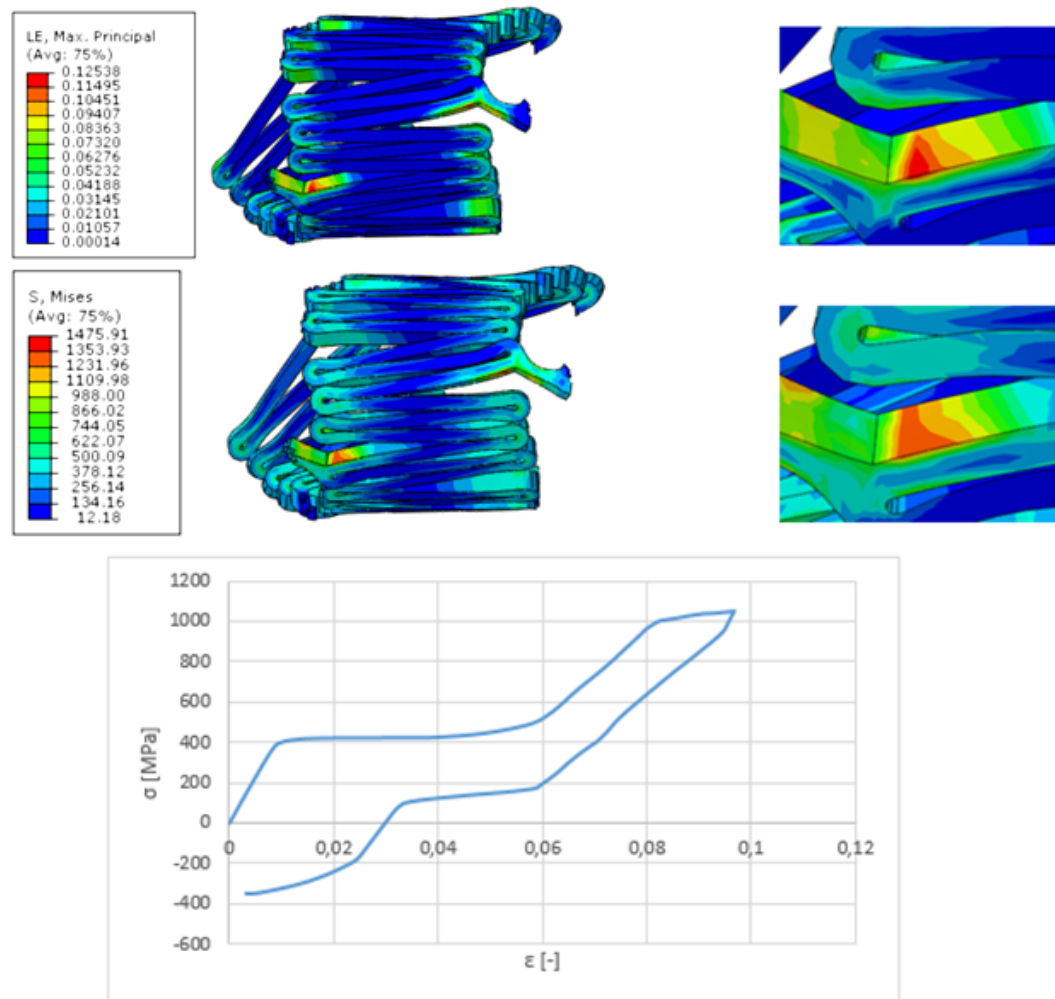


Figura 6.25: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent con soglia di plasticità posta a 1000 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

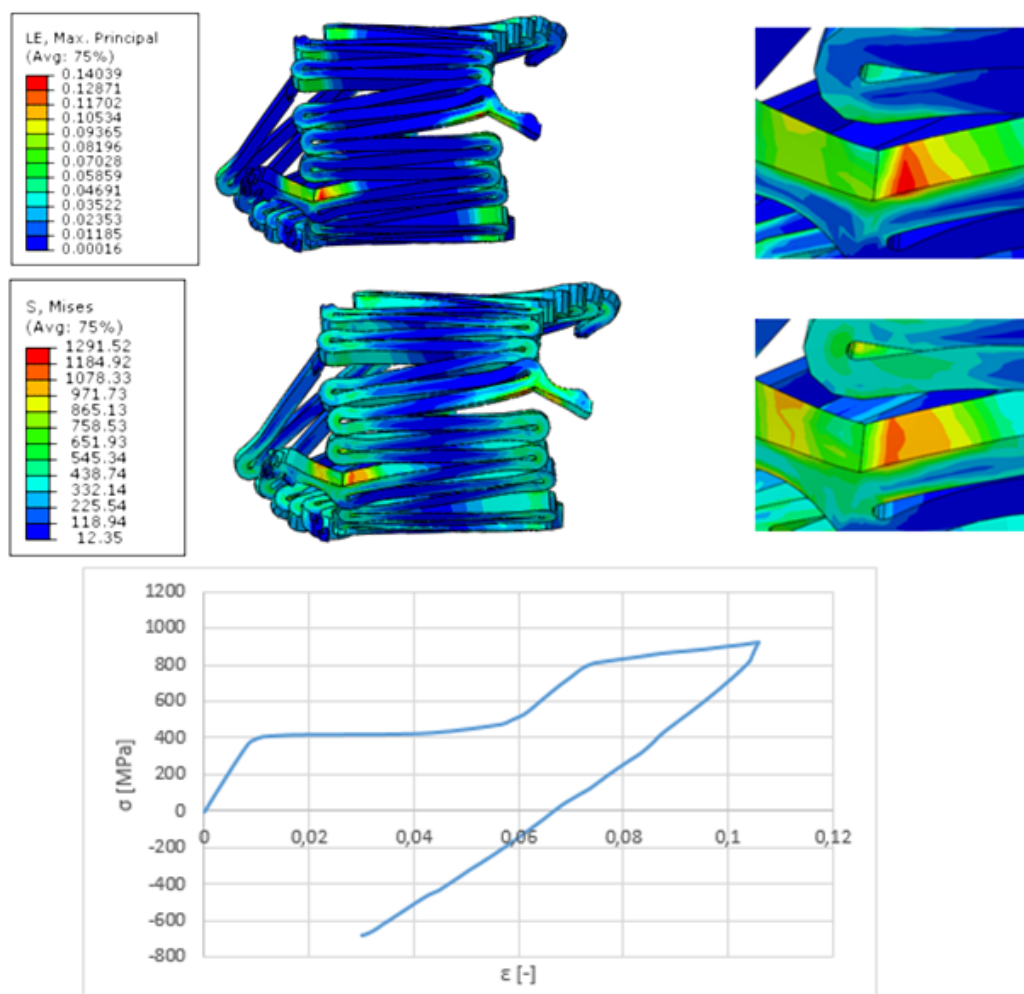


Figura 6.26: Risultati della simulazione di crimpaggio sul Lifestent con soglia di plasticità posta a 800 MPa. In alto è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in basso la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati

Tabella 6.8: Tempi di calcolo necessari al completamento delle analisi numeriche di crimpaggio degli stent.

	Plasticità disattivata	Soglia plasticità più alta	Soglia plasticità più bassa
Maris Plus	188 min	218 min	226 min
Absolute Pro	135 min	137 min	154 min
Lifestent	861 min	941 min	970 min

giore quanto più il materiale ha plasticizzato. Inoltre le condizioni di carico nei punti più sollecitati durante il recupero cambiano, in quanto diventano sollecitazioni di compressione; nel caso della simulazione con sforzo critico di snervamento pari a 1000 MPa, allo scarico la sollecitazione di compressione porta a percorrere anche il primo tratto della trasformazione di fase. Nel caso la plasticizzazione avvenuta sia stata maggiore, come nella simulazione con soglia di 800 MPa, le deformazioni plastiche hanno persino l'effetto di impedire ogni futura trasformazione di fase. In questo caso, infatti, durante il rilascio dello stent il comportamento esibito dai punti più sollecitati è diventato lineare, senza nessuna trasformazione di fase, come se si trattasse di un classico materiale elastoplastico.

Si vuole inoltre sottolineare che in tutte le simulazioni condotte il modello costitutivo è sempre giunto a convergenza. I tempi di calcolo necessari per il completamento delle analisi computazionali condotte sono riportati in Tab. 6.8: si nota che le modifiche introdotte, che permettono di modellizzare i fenomeni plastici, non determinano un aumento considerevole dei tempi di calcolo.

6.3.3 Simulazione di crimpaggio e rilascio in tubo di silicone, seguita da ciclaggio meccanico

La seconda tipologia di test numerici effettuati sulle geometrie di stent disponibili riguarda sempre il loro crimpaggio mediante una superficie rigida, seguito però dal rilascio in un tubo di silicone, con l'obiettivo di simulare il rilascio del dispositivo all'interno dell'arteria. Partendo dai dati tecnici degli stent in esame, si è visto che in sede di intervento la scelta del loro diametro avviene in modo che il vaso in cui saranno posti sia sempre da 1 a 2 mm di diametro minore rispetto al diametro dello stent in configurazione espansa. Questo *oversizing* è responsabile del mantenimento di una forza diretta radialmente verso l'esterno, capace di impedire al vaso di richiudersi.

Partendo dai dati utilizzati nella tesi di Allegretti [16], il materiale scelto per il tubo di silicone è un materiale elastico lineare isotropo, con modulo di Young di 1.94 MPa, e coefficiente di Poisson di 0.45. Tenendo conto di quanto detto per l'*oversizing*, per ogni tipologia di stent sono state condotte delle simulazioni effettuando il rilascio all'interno sia di un tubo con *oversizing* di 1 mm, che con *oversizing* pari a 2 mm. Le dimensioni del tubo, posto sempre di lunghezza pari a 80 mm e spessore 1 mm, sono riportate in Tab. 6.9. Il tubo è poi stato discretizzato ponendo lungo lo spessore 3

Tabella 6.9: Dimensioni dei tubi di silicone utilizzati per i diversi stent, nel caso di alto (1) e minore (2) oversizing. Lo spessore è sempre pari a 1 mm

Stent	Diam. interno 1	Diam. Interno 2
Lifestent	5 mm	6 mm
Maris Plus	6 mm	7 mm
Absolute Pro	4 mm	5 mm

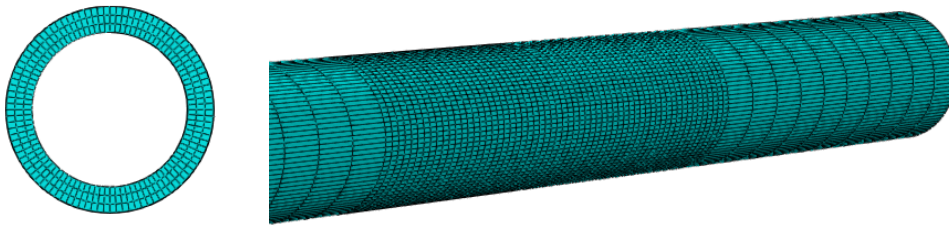


Figura 6.27: Rappresentazione della discretizzazione utilizzata per il tubo di silicone

elementi finiti, e infittendo la mesh nella porzione centrale, ovvero nella parte in cui avviene l'interazione con lo stent, come mostrato in Fig. 6.27.

Per simulare il fatto che l'impianto di uno stent è fatto a gamba estesa, condizione che provoca un allungamento accompagnato da una leggera riduzione del diametro del vaso in cui sarà effettuato il posizionamento del dispositivo, il primo passo della simulazione consiste nell'applicare un allungamento assiale al tubo di silicone del 10%. Al termine dell'intervento il paziente riprende la deambulazione e la gamba può flettersi, rimuovendo quindi lo stato di sollecitazione assiale all'arteria: il tubo di silicone, che rappresenta il vaso, non torna alla lunghezza iniziale, ma subisce un ritorno elastico che dipende da un equilibrio di forze legate all'interazione con lo stent. Per riprodurre numericamente questo comportamento è quindi necessario imporre la condizione di trazione al tubo mediante l'imposizione e la rimozione di una forza, piuttosto che controllandone le estremità in termini di spostamento. È stato quindi condotto un calcolo analitico preliminare, per trovare la forza da applicare alle due estremità del tubo per ottenere uno spostamento assiale tale da produrre un allungamento del 10%. Utilizzando la formula:

$$F = EA\varepsilon \quad (6.1)$$

dove $\varepsilon = 0.1$, ovvero l'allungamento desiderato, $E = 1.94$ MPa e A l'area della sezione di ciascun tubo considerato, si sono ottenuti i valori di forza riassunti in Tab. 6.10, tramite i quali si può quindi procedere con la simulazione vera e propria.

Il primo step della simulazione consiste come detto nell'applicazione della rea-

Tabella 6.10: Valori di forza assiale necessaria per ottenere un allungamento del 10% dei tubi

Diam. interno tubo (spessore 1 mm)	Forza assiale
4 mm	3.05 N
5 mm	3.66 N
6 mm	4.27 N
7 mm	4.88 N

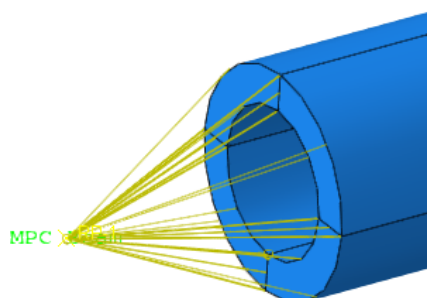


Figura 6.28: Rappresentazione del vincolo MPC applicato ad una estremità del tubo

zione vincolare assiale necessaria per produrre un allungamento del tubo del 10%. Per ottenere questa condizione di carico è stato utilizzato un vincolo *Multi-Points Constraint (MPC)* con degli elementi di tipo *Beam*. Sono stati quindi creati due *Reference Point (RP)* sull'asse del tubo, esternamente ad esso e ad una distanza di 5 mm. Questi due punti sono stati poi collegati con il vincolo MPC alle estremità del tubo, in modo che possano trasferirvi rigidamente le condizioni al contorno (Fig. 6.28). In questo modo le forze assiali nel primo step vengono applicate ai due RP, e da questi possono essere trasmesse al tubo di silicone. In questo step sono inoltre imposti spostamenti radiali e tangenziali nulli per i due RP; per evitare inoltre che il tubo possa muoversi eccessivamente dando problemi di convergenza agli step successivi, ad alcuni nodi della sezione centrale vengono vincolati a 0 gli spostamenti in direzione longitudinale e circonferenziale.

Nel secondo step dell'analisi viene simulato il crimping del dispositivo fino ad un diametro esterno di 2 mm, utilizzando una superficie rigida e le stesse impostazioni relative al contatto tra i corpi presentate nella Sez. 6.3.2. In questa fase è quindi attivato il contatto tra superficie rigida e stent. Il terzo step prevede l'espansione dello stent, tramite un aumento del diametro della superficie rigida fino a quello iniziale. Tuttavia in tale step si attiva anche il contatto tra stent e tubo, quindi lo stent non riesce a recuperare totalmente il proprio diametro, in quanto finisce in contatto con le pareti interne del tubo. Le impostazioni per il contatto tra stent e

Step	Descrizione	Condizioni al contorno	Contatti attivi
1	Trazione del tubo in silicone	- Forza assiale sui RP - $u_R = 0$ e $u_\theta = 0$ sui RP - $u_Z = 0$ sui nodi della sezione centrale del tubo	-
2	Crimping dello stent con superficie rigida	- $u_Z = 0$ e $u_\theta = 0$ sui nodi della superficie rigida - u_R sui nodi della della superficie rigida tale da portare $\phi = 2\text{mm}$	Stent-Sup. rigida
3	Rilascio dello stent nel tubo	- $u_R = 0$ sui nodi della della superficie rigida	Stent-Sup. rigida + Stent-Tubo
4	Annullamento forza di trazione sul tubo	- Forza assiale =0 sui RP	Stent-Tubo
5	Trazione del tubo in silicone	- Forza assiale sui RP	Stent-Tubo
6	Annullamento forza di trazione sul tubo	- Forza assiale =0 sui RP	Stent-Tubo

Tabella 6.11: Schema riassuntivo degli step dell'analisi di rilascio degli stent all'interno del tubo di silicone

tubo sono le stesse usate per il contatto con la superficie rigida. Gli step successivi di analisi prevedono di disattivare il contatto tra parete rigida e stent, mantenendo quello tra quest'ultimo e il tubo; inoltre si procede con la variazione della forza di trazione assiale applicata ai RP, portandola a 0 nel quarto step, per poi riportarla nel quinto step al valore iniziale, per poi nuovamente annullarla nel sesto ed ultimo step. Questi ultimi passaggi vogliono infatti simulare numericamente un ciclaggio meccanico dovuto alla deambulazione del paziente, che causa un rilascio e un allungamento ciclico dell'arteria. Il fatto che il contatto tra stent e tubo venga mantenuto attivo, e che tra essi sia presente una forza di attrito, provoca che il ritorno elastico del tubo venga in parte trasferito al dispositivo, causando in esso una sollecitazione meccanica. In Tab. 6.11 sono riassunti i vari step della simulazione, con le relative condizioni al contorno e i contatti attivi.

I parametri con cui si è utilizzato il modello costitutivo per gli stent sono gli stessi usati nelle simulazioni della sezione precedente, ovvero quelli della Tab. 6.6 per il Maris Plus e della Tab. 6.7 per l'Absolute Pro; per quanto riguarda la soglia di snervamento, si è scelto per il Maris Plus un valore di 700 MPa e per l'Absolute

Tabella 6.12: Valori di sforzo e deformazione massimi e minimi durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato lo stent Maris Plus

	σ_{MAX} [MPa]	σ_{MIN} [MPa]	ε_{MAX} [-]	ε_{MIN} [-]
Oversizing 1 mm Plasticità disattivata	250	230	0.0291	0.0282
Plasticità attivata	240	220	0.0307	0.0298
Oversizing 2 mm Plasticità disattivata	200	160	0.0146	0.0136
Plasticità attivata	180	140	0.0153	0.0144

di 600 MPa. Questi valori sono sono gli sforzi critici di snervamento più elevati che sono stati utilizzati nelle simulazioni precedenti, quindi anche quelli più realistici. Come per i test di solo crimpaggio e rilascio libero, le simulazioni sono state condotte inizialmente disattivando la plasticità, in modo da poter capire come questo fenomeno incida sui risultati. I risultati sono presentati in termini di curve sforzo-deformazione relative al punto più sollecitato, in quanto è utile capire come la sua risposta cambi al variare dell'oversizing dovuto al tubo. Per quanto riguarda il Lifestent, a causa del suo meccanismo deformativo più complesso probabilmente dovuto alla struttura elicoidale, sono stati presenti dei problemi di convergenza legati alla complessità delle interazioni di contatto presenti, che hanno precluso la riuscita delle simulazioni di rilascio all'interno del tubo per questo dispositivo.

In Fig. 6.29 sono mostrati i risultati per lo stent Maris Plus: in particolare in Fig. 6.29a la prova di rilascio in un tubo con 2 mm di oversizing, in Fig. 6.29b quella di rilascio in un tubo con 1 mm di oversizing, in Fig. 6.29c un ingrandimento dei cicli meccanici relativi alla fase di rilascio e riapplicazione del carico di trazione applicato al tubo, nel caso di minore oversizing. Inoltre a sinistra sono mostrati i risultati nel caso in cui non si consideri la presenza di deformazioni plastiche, a destra nel caso invece si ponga la soglia di snervamento a 700 MPa. Si nota che con la soglia di plasticità scelta le deformazioni plastiche che nascono durante il crimpaggio sono molto limitate, per cui la differenza tra le curve sforzo-deformazione presentate nella colonna a sinistra è minima. Ciò nonostante è interessante indagare come sforzi e deformazioni risultino cambiati: in particolare si vede dall'ingrandimento mostrato che, nel caso di oversizing di 1 mm, la presenza di deformazioni plastiche produce un abbassamento dei valori di sforzo tra cui avviene il ciclaggio, e nello stesso tempo un aumento dei valori di deformazione. I valori tra cui avviene il ciclaggio sono riassunti in Tab. 6.12; in ogni caso bisogna notare come la differenza ottenuta nel considerare la plasticizzazione sia limitata. In Fig. 6.30 sono mostrati i medesimi risultati per le simulazioni numeriche effettuate sullo stent Absolute Pro, sia nel caso di plasticità disattivata (sinistra), sia con sforzo critico di snervamento posto a 600 MPa (destra). Si fa notare come in questo dispositivo il punto maggiormente sollecitato è sottoposto a deformazioni e sforzi negativi, ovvero si trova in condizioni di

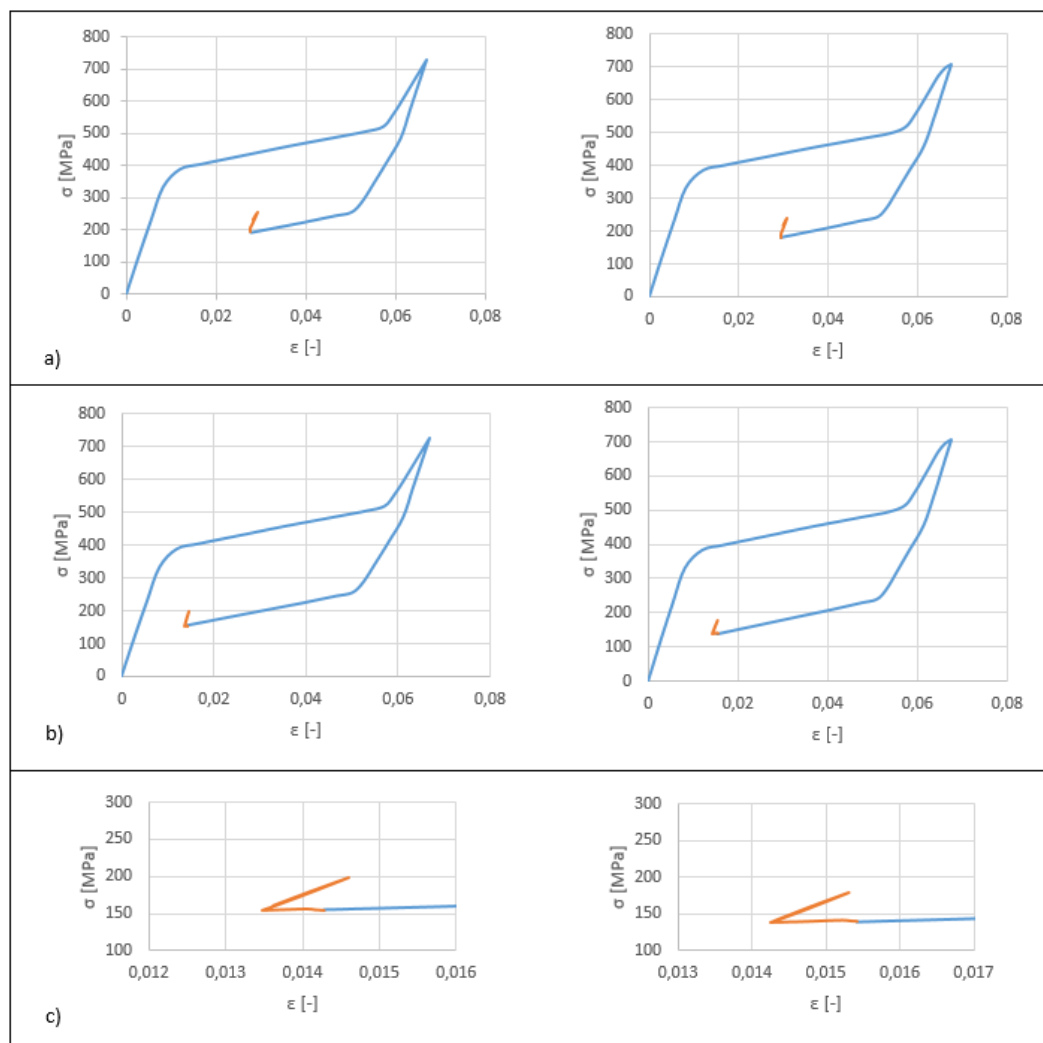


Figura 6.29: Risultati in termini di curve $\sigma - \epsilon$ del punto più sollecitato dello stent Maris Plus: in a) nel caso di rilascio in un tubo con oversizing di 2 mm, in b) nel caso di rilascio in un tubo con oversizing di 1 mm. In c) è mostrato un ingrandimento della parte delle curva b) relativa ai ciclaggi di trazione imposti al tubo. A sinistra le curve sono ottenute con il modello in cui sono state disattivate sia la plasticità che la fatica, a destra le curve in cui invece si considerano tali aspetti.

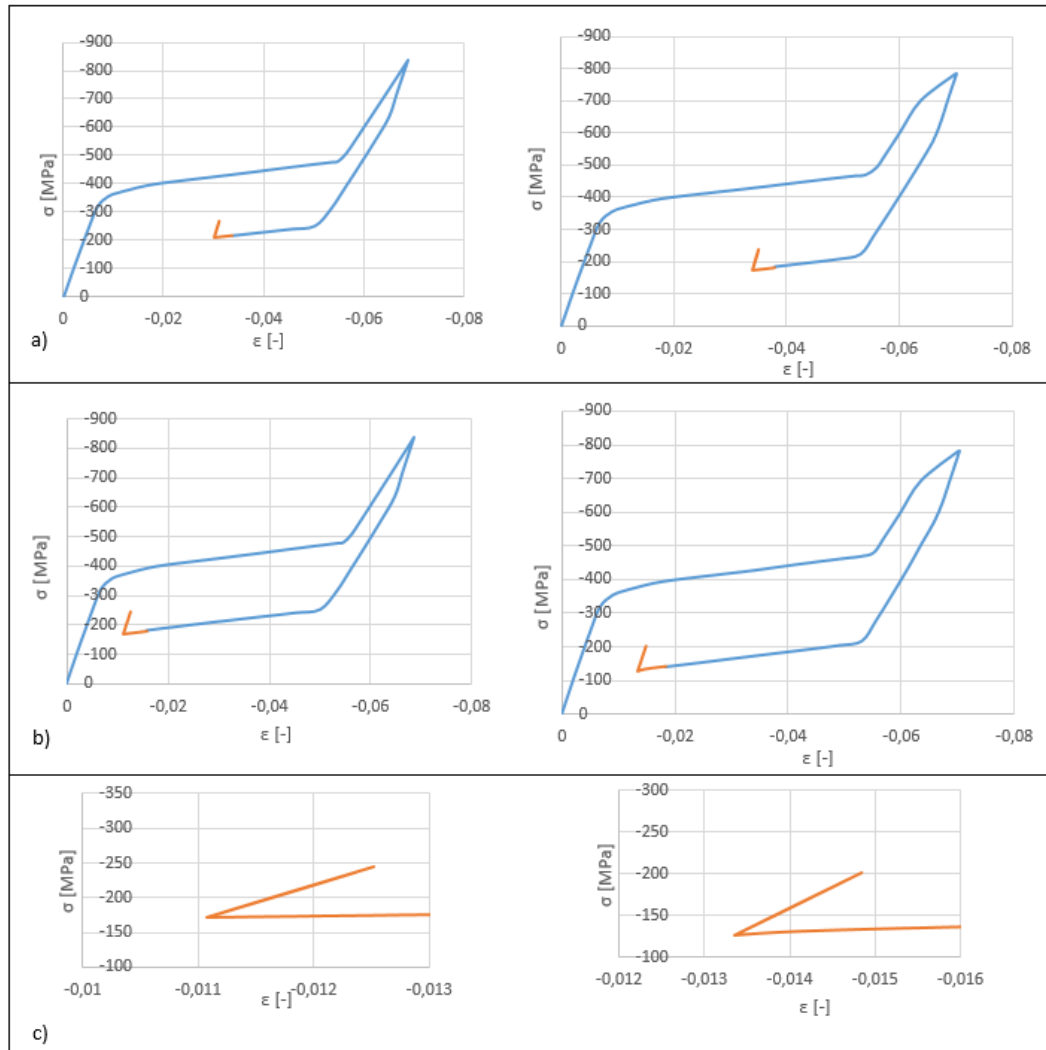


Figura 6.30: Risultati in termini di curve $\sigma - \epsilon$ del punto più sollecitato dello stent Absolute Pro: in a) nel caso di rilascio in un tubo con oversizing di 2 mm, in b) nel caso di rilascio in un tubo con oversizing di 1 mm. In c) è mostrato un ingrandimento della parte delle curva b) relativa ai ciclaggi di trazione imposti al tubo. A sinistra le curve sono ottenute con il modello in cui sono state disattivate sia la plasticità che la fatica, a destra le curve in cui invece si considerano tali aspetti.

Tabella 6.13: Valori di sforzo e deformazione massimi e minimi durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato lo stent Absolute Pro

	σ_{MAX} [MPa]	σ_{MIN} [MPa]	ε_{MAX} [-]	ε_{MIN} [-]
Oversizing 1 mm Plasticità disattivata	266	211	0.0312	0.0302
Plasticità attivata	236	175	0.0350	0.0340
Oversizing 2 mm Plasticità disattivata	246	173	0.0125	0.0111
Plasticità attivata	202	127	0.0148	0.0133

compressione, quindi i valori che saranno mostrati si intendono come valori assoluti. In base alla scelta effettuata sulla soglia di snervamento, si vede dalle curve sforzo-deformazione che attivando nel modello la plasticizzazione, le deformazioni plastiche accumulate nella fase di crimpaggio sono più significative rispetto al caso del Maris Plus. Questo provoca che il loro effetto sulla forma della curva sforzo-deformazione sia maggiore: si nota infatti che in loro presenza il plateau di trasformazione di fase allo scarico si attesta su valori di sforzo minori, provocando un'ampiezza della bandiera pseudoelastica maggiore. L'effetto di questo cambiamento sui valori di sforzo e deformazione ai quali avviene il ciclaggio meccanico successivo al rilascio dello stent è quindi maggiore rispetto al caso delle simulazioni sul Maris Plus, ed è riassunto in Tab. 6.13. I valori di sforzo, in caso di attivazione della plasticizzazione all'interno del modello, diventano significativamente minori, mentre invece le deformazioni si attestano su valori più grandi. L'effetto è molto evidente se si confrontano gli sforzi massimi raggiunti quando il tubo in cui è rilasciato lo stent è posto in trazione: nel caso di oversizing di 1 mm, considerando la plasticizzazione si ha una diminuzione di 30 MPa, mentre con oversizing di 2 mm di 44 MPa. Per le deformazioni invece si ha un aumento sia di quella minima che di quella massima di circa il 0.004 con oversizing minore, e dello 0.002 con oversizing più grande.

6.4 Analisi numerica del dispositivo per TAVI

Per quanto riguarda l'analisi numerica del posizionamento del dispositivo per TAVI, la geometria è stata ottenuta dal lavoro di tesi di dottorato di Dordoni (2014) [8], in cui si studiava nell'ambito di un progetto di ricerca il design di un innovativo dispositivo autoespandibile per il posizionamento della valvola aortica, caratterizzato dall'uso di lembi valvolari in poliuretano. L'uso di questo polimero permette infatti di ottenere dei lembi più sottili, e quindi un dispositivo maggiormente crimpabile prima dell'intervento. Quindi la geometria non corrisponde ad oggi a nessun dispositivo commercialmente presente sul mercato, ma a quella invece di un dispositivo allo stadio ancora di ricerca.

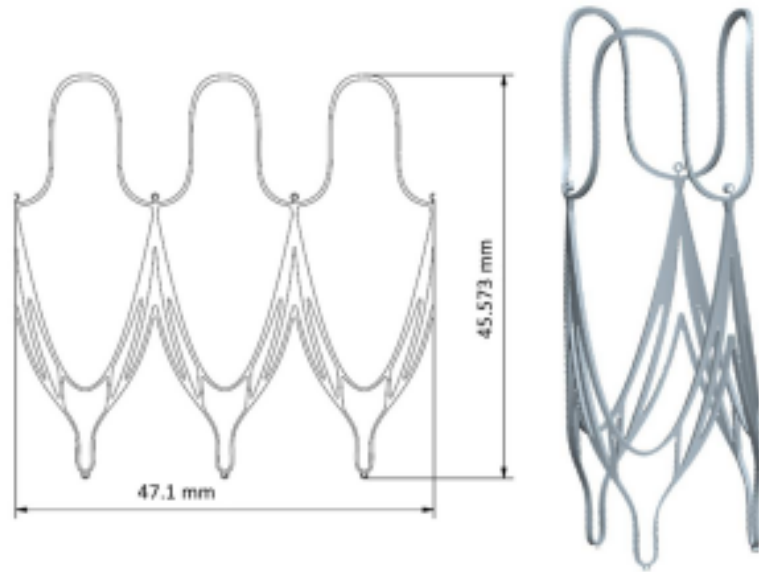


Figura 6.31: Modello geometrico del dispositivo per TAVI

La geometria a disposizione, mostrata in Fig. 6.31, corrisponde al dispositivo alla fine del processo di taglio laser, che è diversa rispetto a quella del dispositivo finito; infatti ricordando brevemente il processo produttivo di tale dispositivo, la forma finale è ottenuta sottoponendo l'oggetto, in seguito al taglio, ad un processo di espansione e successivo annealing. Il materiale è raffreddato fino a raggiungere una condizione martensitica, quindi inserito in un mandrino di diametro progressivamente crescente, che provoca l'espansione del dispositivo fino al diametro finale, in assenza di deformazioni plastiche. Quando tale fase è completata, si passa ad un annealing a temperatura compresa tra 400°C e 600°C , che permette di stabilizzare la forma finale rimuovendo eventuali sforzi residui. Per ottenere la geometria finale è stato quindi necessario replicare numericamente tale processo; il dispositivo nella sua configurazione dopo il taglio laser è quindi sottoposto ad un'espansione radiale seguendo un procedimento simile a quello svolto nel lavoro di Dordoni.

6.4.1 Formatura e crimpaggio

I vincoli di forma imposti dal processo di formatura sono affidati ad una superficie rigida cilindrica esterna, di forma opportuna. L'azione del mandrino è invece replicata da un set di tre superfici rigide interne al dispositivo, vincolate in termini di spostamento a subire un progressivo allargamento radiale (Fig. 6.32). È stato quindi necessario creare un sistema di riferimento cilindrico coassiale al dispositivo. Alle superfici rigide non è stata assegnata nessuna proprietà meccanica, in quanto hanno la sola funzione di trasferire delle reazioni vincolari al dispositivo; per questo sono state discretizzate con elementi di tipo superficie, SFM3D4. La discretizza-

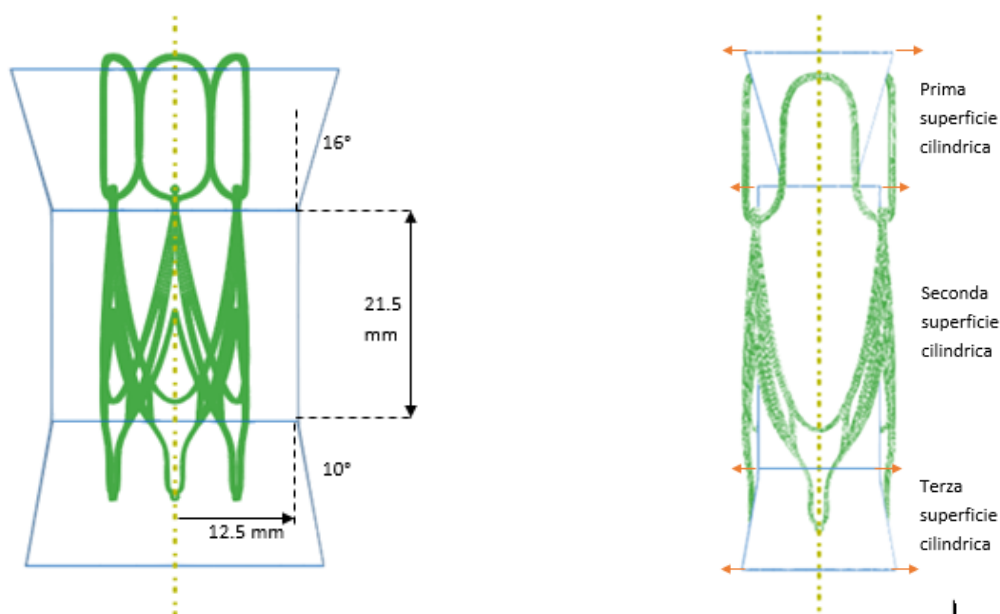


Figura 6.32: Rappresentazione delle superfici cilindriche usate per il processo di formatura del dispositivo per TAVI. A sinistra la superficie esterna, con forma opportuna per riprodurre accuratamente il processo di formatura. A destra le tre superfici su cui è stato imposto il vincolo di spostamento radiale, che replicano l'azione del mandrino

zione in elementi finiti del dispositivo è stata effettuata mediante il software Altair HyperMesh 11.0, ponendo l'attenzione ad avere un numero di elementi maggiore in prossimità delle parti maggiormente curve, lasciando invece una mesh più rada nei tratti più lineari, in modo da ridurre i costi computazionali. Una rappresentazione della mesh utilizzata è mostrata in Fig. 6.33; si noti come le strutture metalliche siano discretizzate con 3x3 elementi nello spessore. Il tipo di elemento finito utilizzato è il C3D8I, come già descritto nella sezione riguardante le simulazioni numeriche sugli stent vascolari.

I contatti tra superfici e corpo sono modellizzati introducendo un comportamento tangenziale con formulazione di tipo *Penalty* e coefficiente di attrito pari a 0.2, e con comportamento normale con relazione *Pressure-Overclosure* di tipo *esponenziale*, con pressione di contatto 0.3 quando la Clearance è nulla, e con Clearance di 0.02 quando la pressione è 0. Tale impostazione ha permesso di ottenere una rapida convergenza della soluzione, introducendo tuttavia un'approssimazione dell'interazione tra i corpi. In ogni caso questa è accettabile, in quanto il fine della simulazione è solamente verificare il funzionamento del modello costitutivo implementato nella UMAT, confrontando i risultati nel caso di presenza o assenza di deformazioni plastiche.

Per quanto riguarda le proprietà del materiale assegnato al dispositivo, si è partiti dalla proprietà meccaniche ricavate sperimentalmente nel lavoro di tesi di dottorato di Dordoni, che tuttavia si riferiscono al solo comportamento pseudoelastico; per i dati mancanti sono stati supposti dei valori ragionevoli, come anche fatto per le

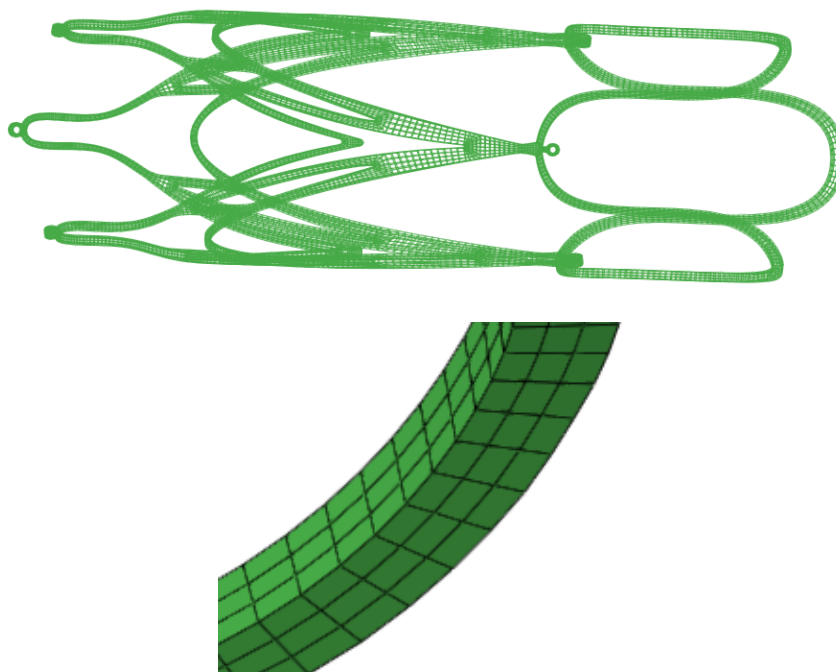


Figura 6.33: Rappresentazione della mesh utilizzata per le simulazioni sul dispositivo per TAVI

Tabella 6.14: Parametri utilizzati per le simulazioni per la valvola aortica

E [MPa]	ν	h_1 [MPa]	h_2 [MPa]	h' [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	β [MPa/K]	ε_L	b
45000	0.3	587	22500	0	2000	500	2.62	0.052	2
ϕ	R [MPa]	R_2 [MPa]	k	δ	α [1/K]	T_0 [K]	M_f [K]	HI [MPa]	T [K]
0.2	96	900	0.02	10^{-7}	0	-	250	8000	250

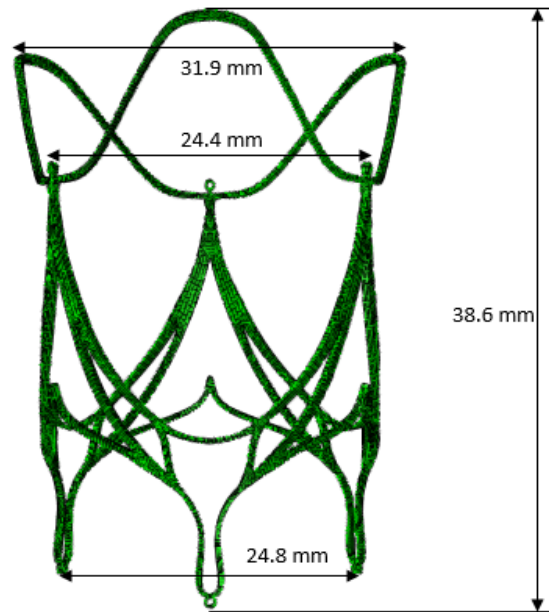


Figura 6.34: Mesh corrispondente al dispositivo al termine del processo produttivo

simulazioni sugli stent vascolari. L'UMAT è stata quindi utilizzata con i parametri mostrati in Tab. 6.14 (in questa fase si è disattivata la modellizzazione della fatica e della plasticità, in quanto non di interesse in questa simulazione, anche a causa del fatto che nel processo di produzione reale all'espansione segue un annealing, capace di annullare eventuali sollecitazioni residue).

Al termine della simulazione relativa al processo di produzione, si è esportata la mesh deformata, utilizzandola come punto di partenza per le simulazioni successive; una sua rappresentazione è data in Fig. 6.34. A questo punto si è in possesso della geometria reale del dispositivo; il primo test numerico effettuato, in maniera simile a quanto effettuato per gli stent, è una simulazione di crimpaggio, seguita da un rilascio libero. Per simulare la fase di crimping viene utilizzata una superficie cilindrica rigida con diametro iniziale di 33 mm; a tale superficie non viene assegnata nessuna proprietà meccanica in quanto la sua funzione è solamente quella di trasferire uno spostamento radiale. Durante il primo step della simulazione viene imposto uno spostamento radiale alla superficie rigida, tale da portarla ad avere un diametro di 8 mm, come mostrato in Fig. 6.35; durante lo step successivo invece tale superficie viene riportata ad avere il diametro iniziale, in modo da permettere il recupero della forma iniziale. La prima simulazione di questo tipo è stata effettuata con i parametri della Tab. 6.14, disattivando la plasticità e la fatica e ponendo come temperatura della prova 37°C , ovvero $T = 310\text{ K}$. Si è consapevoli che nella realtà dopo il crimpaggio il dispositivo non viene lasciato totalmente libero di riacquistare

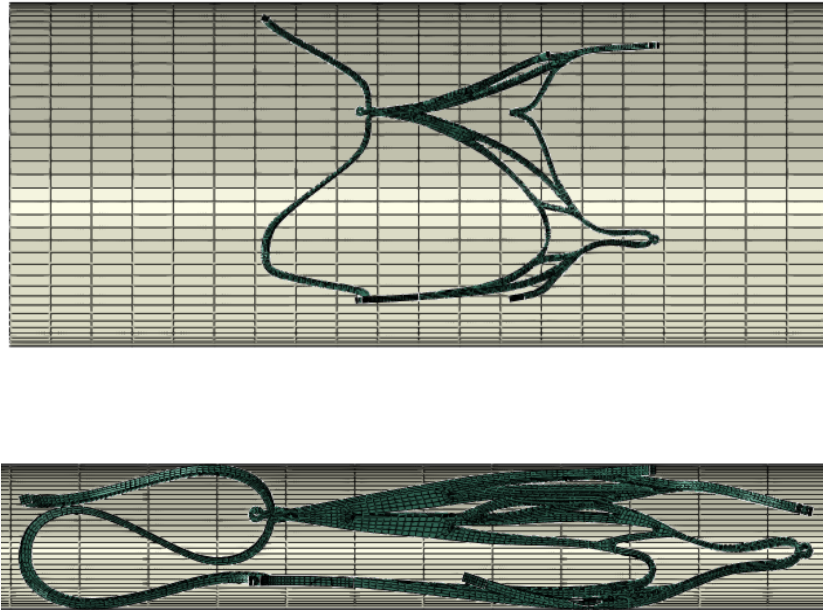


Figura 6.35: Rappresentazione del dispositivo per TAVI e della superficie rigida usata per il crimpaggio, prima e dopo la riduzione del diametro.

il diametro iniziale, in quanto espandendosi si scontra contro l'anulus aortico; tale oversizing è responsabile infatti nel corretto fissaggio del dispositivo durante il suo funzionamento, in quanto da esso si origina una forza radiale che preme contro le pareti esterne. Nonostante questo, si è scelto di effettuare questa prima simulazione permettendo il recupero libero del dispositivo, in quanto il suo obiettivo è solamente indagare quale sia l'effetto della comparsa di deformazioni plastiche durante il crimpaggio. Una simulazione maggiormente rappresentativa della situazione d'impianto verrà inoltre descritta nella sezione successiva.

I risultati di questa prima simulazione sono mostrati in Fig. 6.36: in Fig. 6.36a è mostrato l'andamento della deformazione principale massima, che raggiunge un valore massimo di 0.12304, e lo sforzo di von Mises, che invece ha un massimo di 2054.98 MPa. In Fig. 6.36b è invece mostrata la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente sollecitati della struttura in termini di sforzo presente, ottenuta definendo un sistema di riferimento con gli assi paralleli ai lati di tale elemento, e considerando le componenti di sforzo e deformazione dovute alla flessione della struttura. Coerentemente con il fatto che non si considera il fenomeno di plasticizzazione, non è presente nessuna deformazione residua durante la fase di scarico. Si noti inoltre come tale punto sia soggetto ad una sollecitazione di compressione durante tutta la simulazione. Avendo ignorato i fenomeni legati alla plasticità, è inoltre presente lo stesso aspetto fatto notare nella tesi di Dordoni (2014), ovvero il

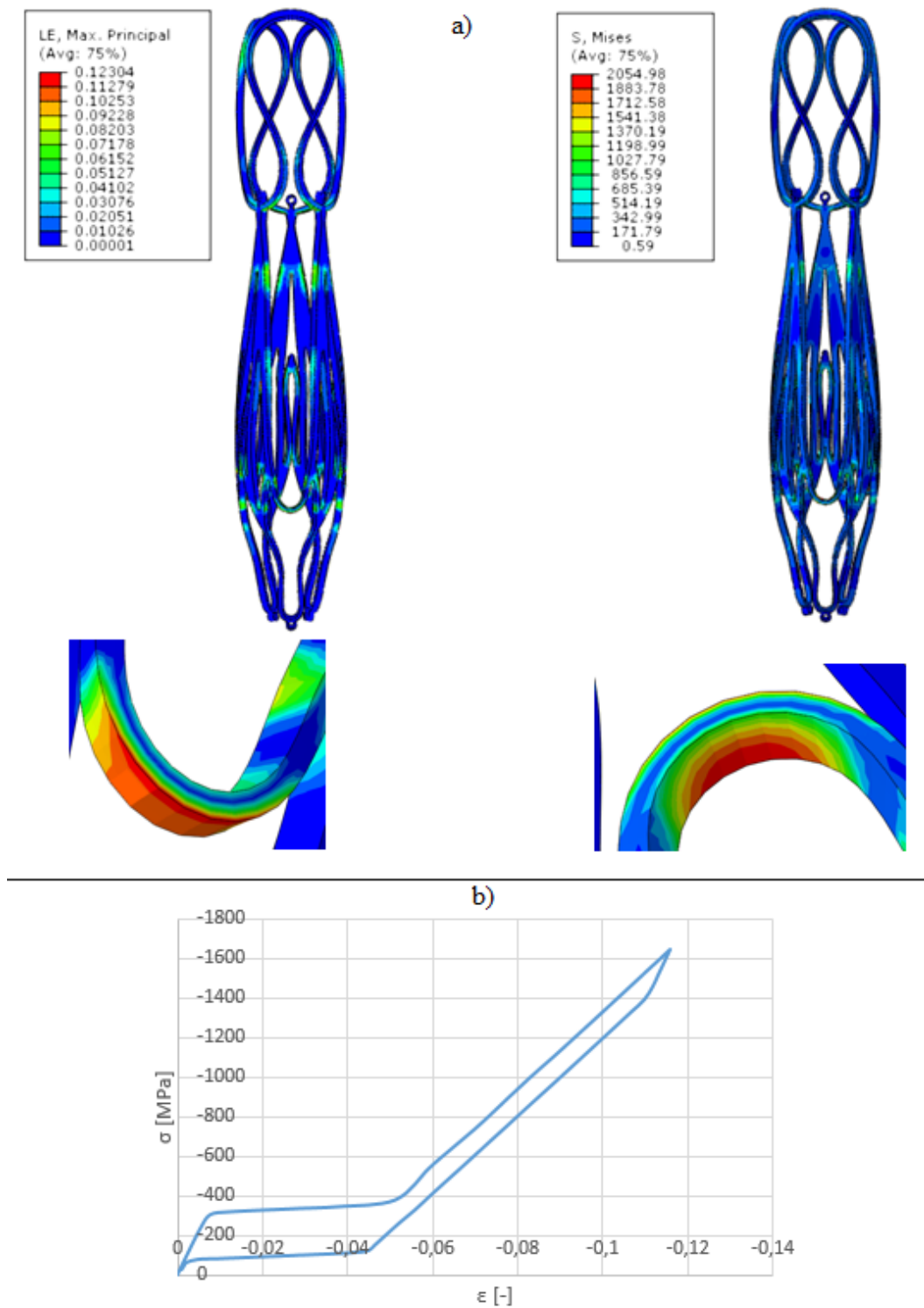


Figura 6.36: Risultati della simulazione di crimpaggio sul dispositivo di impianto della valvola, con la plasticità disattivata. In a) è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in b) la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente più sollecitati.

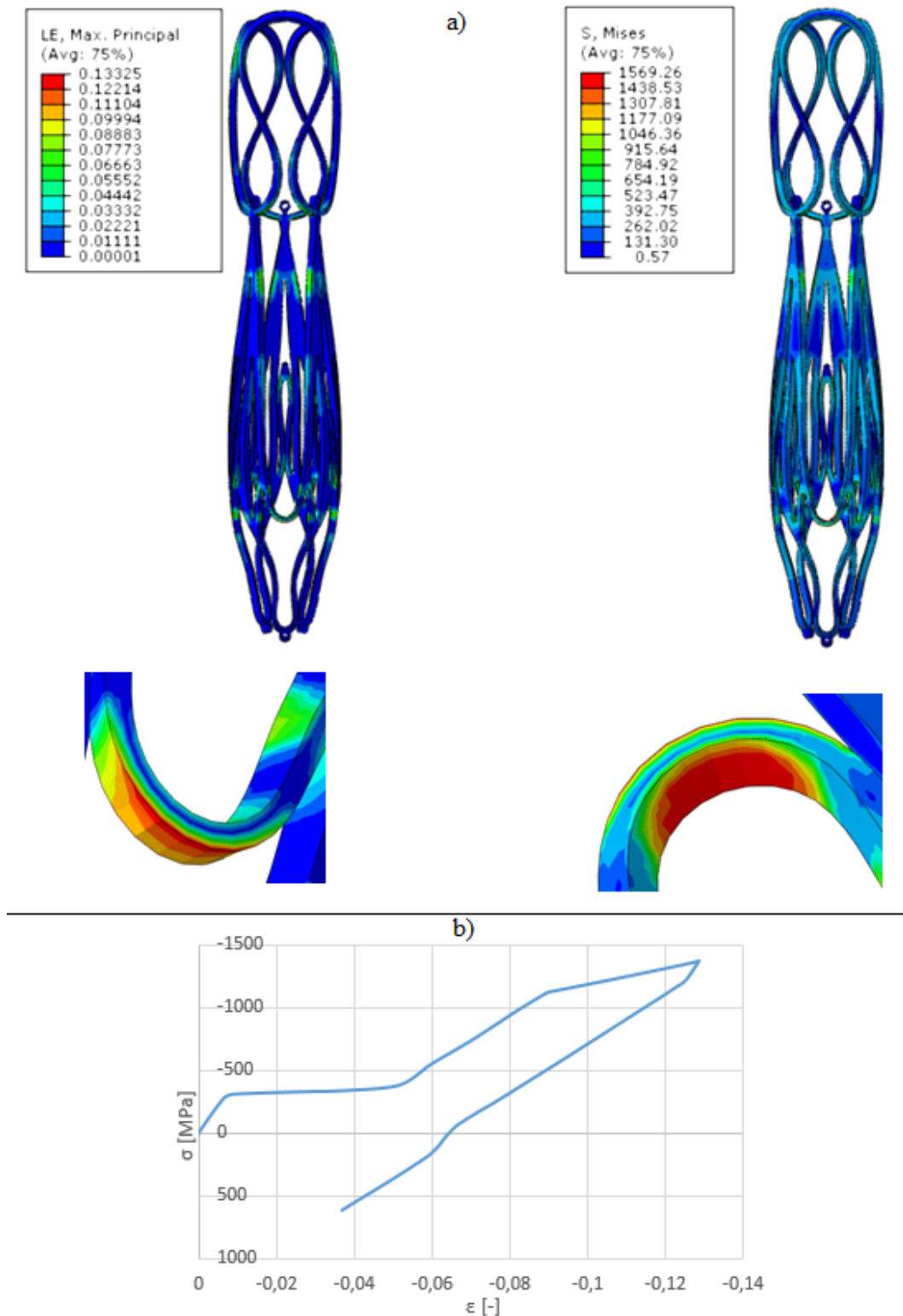


Figura 6.37: Risultati della simulazione di crimpaggio sul dispositivo di impianto della valvola, con soglia di plasticità posta a 1100 MPa. In a) è mostrato l'andamento della deformazione principale massima e dello sforzo di von Mises, in b) la curva sforzo-deformazione di uno degli elementi maggiormente più sollecitati.

fatto che i punti più sollecitati raggiungono uno stato di sforzo notevole, sicuramente maggiore del carico massimo sopportabile dal materiale. La stessa simulazione è stata ripetuta quindi ponendo un valore di soglia di snervamento realistica, pari a 1100 MPa. I risultati sono mostrati in Fig. 6.37: è evidente come gli sforzi di von Mises raggiunti dalla struttura siano minori, con un massimo di 1569.26 MPa; contemporaneamente anche le deformazioni raggiunte sono maggiori, con un valore della deformazione principale massima di 0.13325. E' interessante studiare come cambia la curva sforzo-deformazione di uno dei punti maggiormente sollecitati della struttura in seguito alla presenza delle deformazioni plastiche: allo scarico queste impediscono infatti la trasformazione di fase inversa, effetto visibile per la mancanza del plateau allo scarico. Questo produce una significativa deformazione residua che non viene recuperata, quindi un comportamento durante lo scarico che diviene lineare, come se il materiale fosse un metallo elastoplastico classico. Durante la fase di recupero della forma iniziale del dispositivo, nei punti più sollecitati si inverte la condizione di carico, passando da una sollecitazione di compressione ad una di trazione, raggiungendo fino a 600 MPa. Si vede quindi da questo confronto che la presenza di deformazioni plastiche incide notevolmente in termini di sollecitazioni presenti in alcune zone del dispositivo, situazione che rende quindi importante l'utilizzo di un modello costitutivo, come quello implementato in questo lavoro di tesi, in cui si consideri il fenomeno di plasticizzazione. Non appare invece significativamente modificato il comportamento globale del dispositivo, inteso come capacità di recuperare totalmente la propria forma espansa durante il rilascio. Nonostante alcuni punti subiscano una plasticizzazione notevole, infatti, il diametro a cui il dispositivo torna è ridotto solo del 3.28%.

Si vuole inoltre sottolineare che anche per queste simulazioni il modello costitutivo è sempre giunto a convergenza. Il tempo di calcolo necessario per il completamento dell'analisi computazionale di crimpaggio nel caso di plasticità disattivata è stato di 321 min, mentre attivando la plasticità di 340 min; si evince quindi come le modifiche introdotte nel modello non causano un aumento considerevole dei tempi di calcolo.

6.4.2 Crimpaggio con rilascio nel comparto di silicone

La seconda tipologia di test numerici effettuati riguarda sempre il crimpaggio mediante una superficie rigida, seguito però dal rilascio in un comparto di silicone, che deve simulare il rilascio del dispositivo all'interno del luogo di impianto. Inoltre si sottolinea come sperimentalmente i test sulla vita a fatica di questi dispositivi vengano effettuati rilasciando il dispositivo in una camera di silicone di forma opportuna (Fig. 6.38), applicando poi un'onda di pressione ripetuta ciclicamente. Per semplicità non si è ricostruita la geometria reale del comparto polimerico, come invece fatto nel lavoro di Dordoni, ma lo si è schematizzato come un cilindro, di raggio interno 10 mm, e raggio esterno 13 mm, costituito da un materiale elastico lineare isotropo

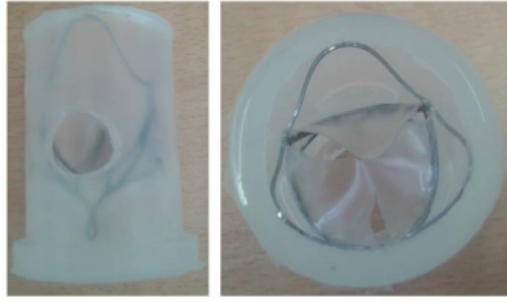


Figura 6.38: Comparto di silicone utilizzato per i test in vitro a fatica

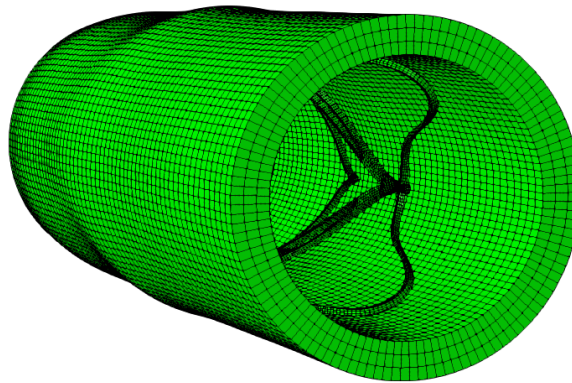


Figura 6.39: Rappresentazione del dispositivo per TAVI espanso all'interno del comparto

di modulo di Young $E = 0.7 \text{ MPa}$, e coefficiente di Poisson $\nu = 0.45$. Tali caratteristiche geometriche sono state ricavate dal lavoro di tesi di dottorato già citato. Durante tutti gli step della simulazione si è provveduto inoltre a vincolare i moti rigidi nelle tre direzioni di una delle estremità del comparto, in modo da garantire la convergenza della simulazione numerica.

Il primo step dell'analisi consiste nell'applicazione sulla superficie cilindrica interna del comparto di una pressione di 100 mmHg (0.013332 MPa), che rappresenta quella dovuta al flusso di sangue durante la fase sistolica. Nel secondo step viene simulato il crimping del dispositivo fino ad un diametro esterno di 8 mm, utilizzando una superficie rigida e le stesse impostazioni di contatto presentate nella Sez. 6.4.1. In questa fase è quindi attivato il contatto tra superficie rigida e dispositivo. Il terzo step prevede l'espansione del dispositivo, tramite un aumento del diametro della superficie rigida fino a quello iniziale. In tale step si attiva anche il contatto con il comparto, quindi il dispositivo non riesce a recuperare il diametro iniziale a causa dell'interazione con le pareti interne del tubo (Fig. 6.39). Le impostazioni per questo contatto sono le stesse usate per quello con la superficie rigida. Si sottolinea il fatto che il dispositivo durante il crimpaggio e le fasi successive è vincolato in tre punti in direzione assiale e circonferenziale, in modo da aiutare la stabilità della simulazione.

Step	Descrizione	Condizioni al contorno	Contatti attivi
1	Pressione sulla superficie interna del comparto	- Pressione di 0.013332 MPa all'interno del comparto - $u_Z = 0$ e $u_\theta = 0$ su 3 nodi del dispositivo - $u_Z = 0$, $u_\theta = 0$ e $u_R = 0$ su una estremità del comparto	-
2	Crimping con superficie rigida	- $u_Z = 0$ e $u_\theta = 0$ sui nodi della superficie rigida - u_R sui nodi della superficie rigida tale da portare $\phi = 8\text{mm}$	Valvola-Sup. rigida
3	Rilascio della valvola nel comparto	- $u_R = 0$ sui nodi della superficie rigida	Valvola-Sup. rigida + Valvola-Comparto
4	Rimozione pressione	-Rimozione pressione dal comparto	Valvola-Comparto

Tabella 6.15: Schema riassuntivo degli step dell'analisi di rilascio della valvola aortica all'interno del comparto di silicone

Il quarto ed ultimo step della simulazione consiste nella rimozione della pressione applicata precedentemente all'interno del comparto, così da simulare la fase diastolica, in modo da causare una sua riduzione di diametro e quindi un'ulteriore sollecitazione imposta alla struttura del dispositivo. L'insieme degli step dei quali consta la simulazione è presentato in Tab. 6.15, con le condizioni al contorno ed i contatti attivi in ogni fase.

Per quanto riguarda il materiale del dispositivo, si sono condotte le simulazioni con i parametri della Tab. 6.14, ponendo sempre $T = 310\text{ K}$; i test sono stati inizialmente condotti disattivando la plasticità, Fig. 6.40 (alto), ed in seguito ponendo una soglia di snervamento pari a 1100 MPa, Fig. 6.40 (basso). I risultati sono mostrati in termini di curve sforzo-deformazione del punto maggiormente sollecitato della struttura del dispositivo. A causa delle notevoli deformazioni plastiche che tali zone del dispositivo subiscono, la curva sforzo-deformazione da loro seguita nel caso in cui si attivi la plasticità all'interno del modello cambia notevolmente. Il punto considerato

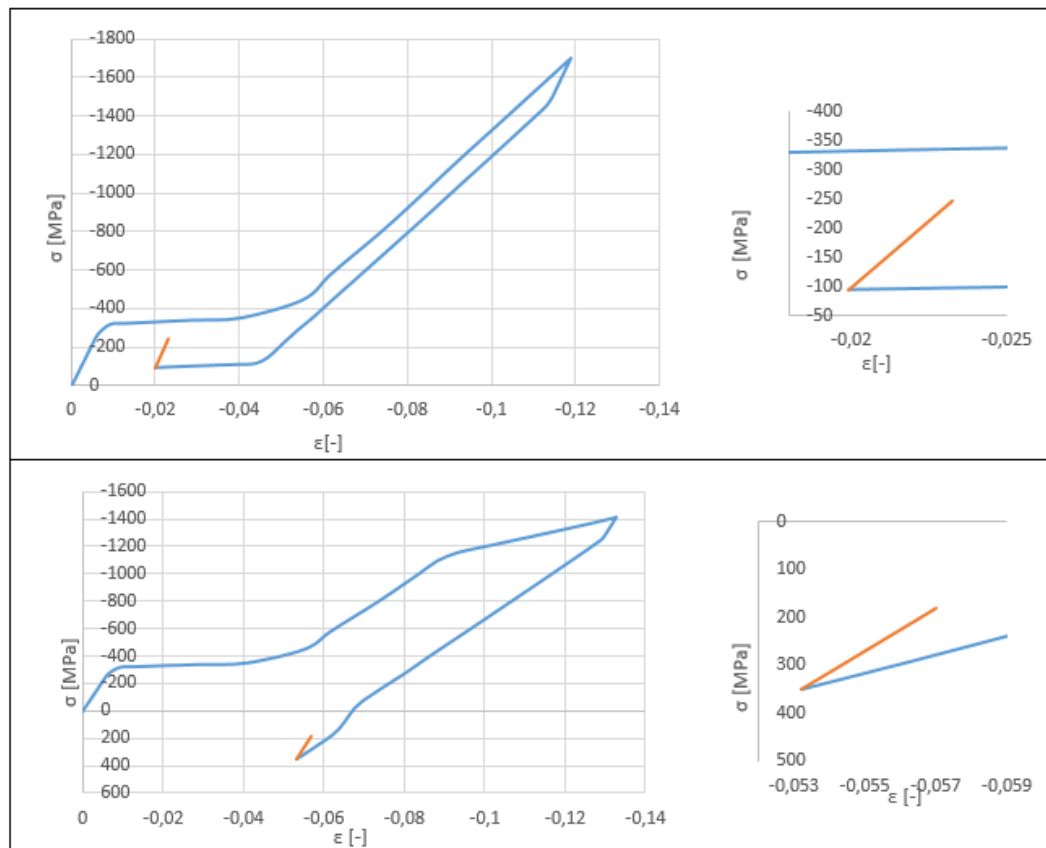


Figura 6.40: Risultati in termini di curve $\sigma-\varepsilon$ del punto più sollecitato del dispositivo per TAVI durante il rilascio nel comparto, nel caso in cui si ignorino (alto) o si considerino (basso) gli effetti legati alla plasticizzazione

è sottoposto prevalentemente a compressione, tuttavia allo scarico le deformazioni residue presenti producono un passaggio a condizioni di carico di trazione, determinando quindi una notevole differenza delle sollecitazioni a cui avviene il ciclaggio dovuto all'applicazione di una pressione all'interno del comparto di silicone. Nel caso di plasticità disattivata, il ciclaggio avviene in prossimità del plateau inferiore di trasformazione di fase della curva sforzo-deformazione, con valori di sforzo ancora negativi; viceversa con la plasticità attivata il fenomeno di plasticizzazione ha determinato l'impossibilità per tali zone del materiale di esibire ulteriori trasformazioni di fase, quindi lo scarico e il successivo passaggio in trazione avvengono in maniera pressoché lineare. In questa situazione il ciclaggio non avviene più in prossimità di

Tabella 6.16: Valori di sforzo e deformazione durante il ciclaggio del tubo in cui è rilasciato il dispositivo per TAVI

	$\sigma_{p=0}$ [MPa]	$\sigma_{p=100}$ [MPa]	$\varepsilon_{p=0}$ [-]	$\varepsilon_{p=100}$ [-]
Plasticità disattivata	-246	-95	-0.0233	-0.0199
Plasticità attivata	181	352	-0.0570	-0.0532

un plateau di trasformazione di fase, ma in corrispondenza del ramo elastico della martensite monovariante, che tra l'altro inizia a valori di sforzo più bassi per via del fenomeno di degrado del materiale. I valori di deformazione e di sforzo tra i quali avviene la sollecitazione ciclica sono riportati in Tab. 6.16. Le deformazioni massime (in valore assoluto) vengono raggiunte in entrambi i casi durante la rimozione della pressione, mentre quelle più basse quando all'interno del compartimento è presente una pressione di 100 mmHg. Considerando la plasticizzazione i valori sono molto diversi: con la plasticità attiva le deformazioni tra cui avviene il ciclaggio sono più che raddoppiate, passando da -0.0199 e -0.0233 a -0.0532 e -0.0570. Per quanto riguarda i valori di sforzo il cambiamento è ancora più evidente. Non attivando la plasticità il materiale resta in condizioni di compressione, con valori di sforzo compresi tra -95 MPa quando il comparto è pressurizzato e -246 MPa quando tale pressione è rimossa. In questo caso quindi l'istante più critico è quando viene rimossa la pressione; ciò non è più vero quando si attiva la plasticità. In questo caso, infatti, si passa in condizioni di carico di trazione, compreso tra 181 MPa in assenza di pressione e 352 MPa quando il compartimento è pressurizzato. In questa condizione l'istante più critico diventa invece la pressurizzazione del comparto. Si può quindi concludere che i cambiamenti in termini di sforzi e deformazioni sono molto significativi, e l'utilizzo di un modello costitutivo, come quello qui implementato, in grado di cogliere i fenomeni plastici permetterebbe di ottenere delle previsioni sulla vita a fatica del dispositivo differenti.

6.5 Considerazioni finali sulle simulazioni numeriche condotte

Le simulazioni numeriche che sono state condotte e presentate in questo capitolo hanno permesso di confermare la robustezza numerica del modello costitutivo e dell'algoritmo discreto di Newton-Raphson per la soluzione della sue equazioni, entrambi formulati nel Cap. 5. Il modello ha inoltre permesso di indagare quali siano le differenze del comportamento di alcuni dispositivi biomedicali nel caso si consideri l'effetto della plasticizzazione subita dal materiale.

Dai risultati delle simulazioni condotte sugli stent Absolute Pro e Maris Plus, si è notato che gli sforzi raggiunti anche nei punti più critici, con le proprietà del materiale utilizzate e nell'ipotesi di comportamento lineare della martensite, non sono tali da ritenere che si generino plasticizzazioni durante il funzionamento del dispositivo. In ogni caso, non avendo potuto misurare le proprietà del materiale in campo plastico ed essendo tali caratteristiche molto variabili in funzione dei trattamenti termo-meccanici subiti dallo stent durante la produzione, si è comunque deciso di considerare delle soglie di snervamento relativamente basse, per riuscire a portare il materiale a plasticizzare e quindi capire come possa eventualmente cambiare il

suo comportamento. Per quanto riguarda lo stent Lifestent, invece, durante il suo crimpaggio, probabilmente per via del suo meccanismo deformativo legato alla forma elicoidale, vengono raggiunti in alcune zone dei valori di sforzo che potrebbero fare entrare il materiale in plasticità, anche considerando valori standard del limite plastico.

In ogni caso, per ogni tipologia di stent analizzata, la risposta globale, in seguito o meno a snervamento, non cambia molto se si verifica o meno lo snervamento della martensite: si è infatti valutato quale sia la riduzione di diametro subita durante il recupero della forma iniziale in seguito al crimpaggio, e si è notato che anche se alcuni punti di tali dispositivi plasticizzano, rimanendo comunque in numero limitato rispetto alla dimensione della struttura metallica, la riduzione di diametro resta intorno al 2-3 %, quindi trascurabile. E' invece molto più interessante studiare come cambia la storia di carico, in termini di curva sforzo-deformazione, seguita dai punti maggiormente sollecitati degli stent. In questo caso, più il materiale subisce una deformazione plastica, più la curva sforzo-deformazione cambia rispetto a quella di un materiale al suo primo ciclo di carico. In particolare si è fatto notare che considerando il fenomeno di snervamento le deformazioni raggiunte sono maggiori, mentre invece calano i corrispondenti valori di sforzo. Questo è particolarmente importante nelle simulazioni in cui avviene il rilascio degli stent all'interno del tubo, per poi sottoporre quest'ultimo ad un ciclo di carico e scarico di trazione. Durante il ciclaggio meccanico subito dallo stent, i valori di sforzo e deformazione tra i quali tale ciclaggio avviene risultano modificati. Infatti più le deformazioni plastiche sono state significative, più l'ampiezza dell'isteresi meccanica aumenta, a causa di un abbassamento del plateau di trasformazione di fase inversa relativo alla fase di scarico. A causa di questo fenomeno si è fatto notare come gli sforzi massimi raggiunti durante il ciclaggio possono calare anche di 40 MPa.

Tale risultato ha un'importanza fondamentale in quanto fa capire che, nonostante il comportamento globale della struttura non ne risenta in modo visibile, potrebbero tuttavia risultare alterate le previsioni di vita a fatica di tali dispositivi, nel caso in cui si utilizzi o meno durante le simulazioni numeriche un modello costitutivo in grado di considerare il fenomeno di snervamento. Tale affermazione appare evidente se si considera come cambia la curva sforzo-deformazione dei punti più sollecitati durante il rilascio libero degli stent, quando la deformazione plastica è stata notevole: in questo caso, infatti, durante lo scarico è presente una deformazione residua, tale da fare invertire le condizioni di carico da condizioni di compressione a condizioni di trazione (o viceversa a seconda dello stent considerato). Solitamente tale situazione è difficilmente raggiungibile, in quanto il recupero della forma iniziale è in parte limitato dalla presenza dell'arteria, tuttavia potrebbe comunque avvenire in corrispondenza di eventuali zone di concentrazione di sforzo.

Le simulazioni effettuate sul dispositivo per TAVI confermano quanto finora illu-

strato. Nelle simulazioni di rilascio libero del dispositivo, si è visto che a causa della notevole deformazione subita durante il crimpaggio, se non si considera la plasticità in alcuni punti potrebbero essere raggiunti dei valori di sforzo così elevati da superare il punto di rottura del dispositivo. Solo attivando la modellizzazione della plasticità il comportamento del materiale diventa verosimile, in quanto gli sforzi raggiunti nei punti più sollecitati si riducono anche di 500 MPa. In questo caso la curva sforzo-deformazione seguita da tali punti si modifica, in quanto le deformazioni plastiche precludono ogni futura trasformazione di fase, dando origine ad un comportamento del materiale durante il rilascio del dispositivo che diventa praticamente lineare, come fosse un materiale elasticoplastico. I cambiamenti nella curva sforzo-deformazione descritta dai punti più sollecitati diventano determinanti nelle simulazioni di rilascio nel comparto di silicone, nelle quali viene applicata e poi rimossa una pressione di 100 mmHg. In queste analisi computazionali il ciclaggio meccanico subito dal dispositivo, nel momento in cui si attiva la plasticità all'interno del modello, avviene a valori di sforzo di trazione, mentre invece utilizzando un modello che non consideri la plasticizzazione avviene in condizioni di compressione. Anche le deformazioni raggiunte dalle zone più sollecitate cambiano, praticamente raddoppiando in presenza di deformazioni plastiche.

Si può quindi concludere che l'utilizzo nelle simulazioni numeriche di un modello costitutivo che introduca il fenomeno della plasticizzazione sia un aspetto importante, in quanto i risultati ottenibili sono significativamente differenti, soprattutto in termini di valori di sforzi massimi raggiunti dalla struttura. Questo potrebbe essere determinante in futuri lavori che si rivolgono allo studio della vita a fatica dei dispositivi biomedicali, dove un cambiamento della previsione numerica dei valori di sollecitazione raggiunta porterebbe ad una differente stima della durata del loro funzionamento.

Capitolo 7

Conclusioni e sviluppi futuri

I risultati ottenuti dalle due campagne di prove sperimentali presentate all'interno del Cap. 3 hanno permesso di ottenere delle indicazioni utili per lo sviluppo di un modello costitutivo in grado di cogliere il comportamento delle SMA, tenendo in considerazione sia il fenomeno di fatica, che quello di accumulo di deformazione plastica.

Per quanto riguarda la fatica, le prove effettuate hanno evidenziato come la deformazione accumulata ad ogni ciclaggio diventa maggiore all'aumentare della deformazione massima imposta durante la prova. Tale accumulo di deformazione è accompagnato da un fenomeno di degrado del materiale, che porta ad un abbassamento progressivo del plateau di trasformazione di fase durante il carico; anche quello inferiore si abbassa, anche se in maniera più ridotta. Entrambi fenomeni, accumulo di deformazione e degrado, sono più evidenti durante i primi cicli, per poi rallentare in modo significativo già dopo il quarto-quinto ciclo. Le prove effettuate al CNR non hanno inoltre mostrato nessuna variazione della pendenza del plateau di trasformazione di fase durante il carico, anche con deformazione massime significative; quelle al Labs hanno avuto lo stesso comportamento solo per deformazioni massime del 5% e 8%, in quanto la prova ciclica di trazione al 10% ha evidenziato un progressivo aumento di pendenza. In letteratura sono presenti delle curve sperimentali in cui tale aumento di pendenza compare anche in prove cicliche condotte a deformazioni minori, suggerendo quindi che la presenza di tale fenomeno dipenda in realtà dalla specificità del materiale testato.

Per quanto riguarda la plasticità una prima interessante osservazione deriva dalla prova a rottura condotta a Lecco su due provini di filo in lega NiTi mantenuti a temperatura differente: in entrambi lo sforzo critico di snervamento rimane lo stesso, permettendo quindi di ipotizzare che tale valore sia indipendente dalla temperatura della prova. Man mano che aumenta il grado di plasticizzazione, più si riduce la capacità del materiale di esibire trasformazione di fase: i plateau relativi alla transizione di fase, successivi ad un primo raggiungimento del valore critico di snervamento,

sono di ampiezza più limitata. Nella formulazione di un modello costitutivo bisogna quindi tenere in considerazione che quando si considera una prova di trazione in cui si arriva allo snervamento del materiale, si ottiene allo scarico una deformazione residua che viene accumulata.

Le prove eseguite hanno inoltre evidenziato un ulteriore aspetto, che riguarda il fatto che il plateau inferiore si abbassa con l'aumentare della deformazione massima imposta durante la prova. Questo causa che l'ampiezza dell'anello d'isteresi meccanica non abbia un'ampiezza fissa, ma sia invece variabile a seconda delle caratteristiche della prova. Ciò è in contrasto con alcuni dati sperimentali presenti in letteratura, dove invece viene mostrato come tale abbassamento avviene solo quando il materiale entra in plasticità, ed è più accentuato quanto maggiore è la deformazione plastica accumulata. Anche questo quindi è un comportamento che dipende dalle caratteristiche del materiale testato, e non si può quindi trarre un'indicazione valida in modo generale.

Nel Cap. 4 sono stati implementati e testati accuratamente con diverse storie di carico i modelli di Auricchio et al. (2007) [14] e Barrera et al. (2014) [7], che rappresentano due evoluzioni del modello di Souza-Auricchio-Petrini, dal quale si è partiti in questo lavoro di tesi per formularne uno nuovo che tenga in considerazione anche i fenomeni legati alla fatica e alla plasticizzazione. Il modello di Auricchio et al. (2007) è apparso in grado di cogliere l'accumulo di deformazione irreversibile per fatica, sia nel caso si modellizzi la pseudoelasticità che la memoria di forma; inoltre anche il fenomeno degradativo subito dal materiale appare catturato. Nonostante questo è presente un importante limite: visto che il dominio di trasformazione di fase è definito in modo da mostrare un'ampiezza fissa nel tempo, in una prova monoassiale, passando da un ciclo di trazione ad uno di compressione, il plateau dovuto al cambiamento di fase appare dilatato. Inoltre con tale modello dopo un certo numero di cicli di trazione seguiti da altrettanti in compressione i fenomeni plastici si cancellano a vicenda, come se si partisse da un materiale nuovo. Il modello di Barrera et al. (2014) ha l'indubbio vantaggio di modificare opportunamente il dominio di trasformazione di fase, in modo da modellizzare correttamente il passaggio da condizioni di carico di trazione a condizioni di compressione, risolvendo le problematiche del precedente. Il punto critico di tale lavoro è il fatto di non essere riuscito a trovare un'espressione della superficie limite del dominio elastico che garantisca la corretta rappresentazione dei fenomeni di plasticità e fatica in modo simultaneo. Altra problematica riguarda l'approssimazione introdotta legando le deformazioni plastiche al tensore di fatica, che dà origine ad un limite sulla possibile evoluzione della plasticità macroscopica, sperimentalmente ingiustificato. Ultimo aspetto, comunque comune a tutti i modelli che partono da quello di Souza-Auricchio-Petrini, è la mancata rappresentazione della diverse proprietà elastiche di austenite e martensite, oltre al fatto di assumere una funzione limite del dominio elastico simmetrica in trazione e

compressione.

Partendo dai risultati ottenuti nelle prove sperimentali e dall'implementazione dei due precedenti modelli costitutivi, all'interno del Cap. 5 ne è stato formulato uno nuovo. Tale modello supera le problematiche di quelli precedenti, riuscendo a cogliere simultaneamente sia il fenomeno di accumulo di deformazione per fatica, sia la plasticizzazione del materiale. Seguendo quanto presentato all'interno del lavoro di Urbano et al. (2015) [6], si è riusciti ad inserire il fatto che, in una prova in pseudoelasticità, il tratto lineare della risposta elastica della martensite è di pendenza minore rispetto a quello iniziale relativo alla risposta elastica dell'austenite. E' stata introdotta anche con successo la capacità di modellizzazione del fenomeno degradativo, per cui i plateau di trasformazione si abbassano progressivamente, ed eventualmente aumentano lentamente di pendenza. Il modello è in grado inoltre di considerare gli effetti che la plasticità ha sulla capacità del materiale di esibire future trasformazioni di fase: più la deformazione plastica è stata elevata, più i plateau di trasformazione di fase riducono la propria ampiezza, segno che la plasticizzazione ha stabilizzato parte della martensite monovariante, dando quindi origine anche ad una deformazione residua non recuperabile. In presenza di deformazioni plastiche elevate tale stabilizzazione può arrivare ad eliminare completamente la presenza del meccanismo di trasformazione di fase, dando origine ad una risposta lineare, come se il materiale fosse elastoplastico. Infine è stato introdotto nel modello un termine che permette di ottenere allo scarico un abbassamento del plateau di trasformazione di fase inversa, più pronunciato all'aumentare della plasticizzazione subita. Ciò permette di ottenere nei cicli successivi al fenomeno di snervamento un'ampiezza dell'isteresi meccanica aumentata. Il confronto effettuato con alcune curve sforzo-deformazione reperite in letteratura e con quelle relative alle prove sperimentali condotte è soddisfacente, in quanto mostra come il modello sia in grado di cogliere gli aspetti presenti sperimentalmente.

Nel Cap. 6 il modello costitutivo formulato è stato implementato in una subroutine UMAT, in modo da poter essere utilizzato all'interno del software ABAQUS 6.13 Standard per effettuare delle simulazioni agli elementi finiti su dei modelli di stent vascolari e su un dispositivo per il posizionamento della valvola aortica, che riprodussero la procedura di impianto, quindi il crimpaggio all'interno di un catetere e il loro rilascio. Ciò ha permesso di confermare la robustezza numerica del modello costitutivo, indagando al contempo quali siano le differenze del comportamento di questi dispositivi biomedicali nel caso si consideri l'effetto della plasticizzazione subita dal materiale. Utilizzando il nuovo modello costitutivo si è in grado di modellizzare correttamente il fatto che in alcune zone si originano delle deformazioni irreversibili. I punti che in tali dispositivi sono sollecitati in modo sufficiente per giungere fino alla soglia di snervamento sono pochi rispetto alla dimensione della struttura, quindi la risposta globale, in termini di capacità di tornare al diametro originale espanso in se-

guito al crimpaggio, non è risultata cambiare in modo significativo, essendosi ridotta sotto al 3%. E' interessante notare che nel caso della valvola cardiaca, quando non si considera il fenomeno plastico le simulazioni predicono valori di sforzo eccessivi, sicuramente maggiori di quello massimo sopportabile dal materiale: solo utilizzando un modello che consideri la plasticizzazione si ottiene un comportamento computazionale più verosimile. L'aspetto tuttavia che appare maggiormente mutato, nel momento in cui si considerano o meno le deformazioni plastiche, è invece la storia di carico seguita dai punti maggiormente sollecitati, in termini di deformazioni e sforzi raggiunti. In particolare sono state condotte delle analisi computazionali dove si fa avvenire il rilascio dei dispositivi all'interno di un tubo di silicone, a cui segue un ciclaggio meccanico, che nel caso degli stent rappresenta la sollecitazione ciclica di trazione imposta all'arteria durante la deambulazione del paziente, e nel caso della valvola cardiaca alla sollecitazione dovuta alle pressioni del ciclo cardiaco. Considerando la plasticizzazione del materiale, il ciclaggio meccanico avviene tra valori di deformazione maggiore e valori di sforzo nettamente minori; ciò si traduce che nel caso si fosse interessati a condurre uno studio della vita a fatica, diventa fondamentale l'utilizzo di un modello costitutivo come quello formulato in questo lavoro di tesi, in quanto una variazione delle sollecitazioni imposte potrebbe tradursi in notevoli differenze nelle previsioni di durata del dispositivo. Ciò è particolarmente vero anche per un fenomeno osservato in quelle simulazioni numeriche che hanno portato alcuni punti dei dispositivi a plasticizzare notevolmente: in queste, infatti, durante il recupero della forma espansa le condizioni di sollecitazione si sono invertite, proprio a causa della deformazione residua accumulata, passando da trazione a compressione (o viceversa, a seconda del punto critico e del dispositivo considerato). Questo fenomeno non è presente se si utilizza un modello costitutivo che non considera la plasticizzazione, in cui invece la condizione di carico resta durante tutta la simulazione con lo stesso segno. Questo aspetto fa quindi capire come il modello formulato possa rivelarsi di grande utilità per simulare in modo maggiormente realistico il funzionamento dei dispositivi biomedicali, permettendo di ottenere delle predizioni maggiormente accurate.

Limitazioni e sviluppi futuri

Durante l'esecuzione delle prove sperimentali volte ad investigare il comportamento a fatica e la plasticizzazione di campioni di lega NiTi, si sono incontrate alcune difficoltà, in particolare in riferimento a quelle con condizioni di carico di compressione e biassiali. La ridotta sezione resistente dei campioni a disposizione ha comportato, nonostante l'utilizzo della minima lunghezza di libera inflessione consentita dalla macchina di prova, un carico critico di instabilità estremamente basso, tale da impedire di sottoporre il materiale a sollecitazioni che permettessero di su-

perare il plateau di trasformazione e raggiungere lo snervamento in compressione. Inoltre per monitorare correttamente nel corso dei test sperimentali le deformazioni sarebbe stato necessario l'utilizzo di un estensometro, che tuttavia proprio per la ridotta lunghezza dei provini non poteva essere impiegato. Per questo non si è riusciti ad eseguire un'appropriata caratterizzazione del comportamento del materiale in compressione, che avrebbe permesso di inserire all'interno del modello anche aspetti legati alle asimmetrie di comportamento tra trazione e compressione citate in letteratura. Per gli stessi motivi anche le prove biassiali sono state difficoltose. Sarebbe quindi interessante in futuro ampliare questa fase di test sperimentali sulle leghe di NiTi, in modo da avere un più ampio database da cui partire per migliorare ulteriormente il modello formulato, oltre che per poterlo testare in diverse condizioni di carico. I test sperimentali condotti hanno inoltre evidenziato che l'ampiezza dell'isteresi meccanica durante una prova di trazione su un materiale pseudoelastico dipende dalla deformazione massima imposta: più questa è elevata, più durante lo scarico si ottiene un evidente abbassamento del plateau inferiore di trasformazione di fase. Inoltre il fenomeno è risultato reversibile in quanto, facendo seguire al materiale un ciclo con deformazione massima minore, si è visto che il plateau inferiore tornava alla posizione iniziale. Questo comportamento è tuttavia in contrasto con alcuni test sperimentali di letteratura, nei quali il fenomeno di allargamento dell'isteresi meccanica è presente solo come conseguenza della plasticizzazione del materiale, e l'abbassamento del plateau inferiore aumenta all'aumentare della deformazione plastica accumulata. Sarebbe quindi interessante ripetere le prove sperimentali di trazione condotte nel Cap. 3 utilizzando diversi tipi di lega NiTi, in modo da cercare di capire se tale differenza di comportamento sperimentale possa essere dovuta alla specificità del materiale testato.

Il modello formulato, per semplicità, ha tenuto conto dell'abbassamento del plateau inferiore come conseguenza delle deformazioni plastiche accumulate; se anche futuri test sperimentali confermeranno invece la sua dipendenza dalla deformazione massima imposta durante i cicli di carico bisognerà procedere ad una correzione delle equazioni del modello. Un aspetto migliorabile è la modellizzazione del fenomeno di accumulo di deformazione per fatica, che nel modello formulato è stata inserita allo stesso modo presentato nel lavoro di Auricchio et al. (2007). Questa formulazione ha lo svantaggio di rappresentare un accumulo di deformazione che avviene in modo uniforme durante il ciclaggio meccanico, contrariamente a quanto si è visto sperimentalmente per cui la deformazione accumulata è più significativa durante i primi cicli di carico e scarico. Calibrando quindi il modello proposto sui dati sperimentali del primo ciclo meccanico si ottiene un accumulo molto elevato per ogni ciclo e quindi il raggiungimento della deformazione massima in un numero estremamente ridotto di cicli. Sarebbe quindi necessario condurre innanzitutto uno studio sperimentale che indaghi, e possibilmente permetta di ottenere una relazione, tra la deformazione

accumulata per fatica e il numero di cicli percorsi; questo permetterebbe di avere una base di partenza per la riformulazione all'interno del modello del fenomeno di accumulo di fatica. Altro limite presente nel modello è la mancata modellizzazione dell'asimmetria tra trazione e compressione, a causa della mancanza di dati sperimentali dovuta alle difficoltà sopra descritte. Inoltre, sperimentalmente non è stato indagato il comportamento a memoria di forma sia per la fatica che per la plasticizzazione, quindi il modello, pur potendo descrivere questi effetti, deve essere su essi ancora validato ed eventualmente modificato a valle di nuovi dati sperimentali.

La fase finale del lavoro di tesi è stata l'implementazione del modello costitutivo all'interno del software ABAQUS per effettuare delle simulazioni numeriche su dei dispositivi biomedicali, quali tre diversi modelli di stent e un dispositivo per il posizionamento della valvola cardiaca. Si vuole sottolineare che il fine di tali analisi computazionali non era lo studio accurato del comportamento dei dispositivi, ma solamente mostrare l'utilità in ambito ingegneristico del modello formulato, facendo notare eventuali differenze nei risultati numerici nel caso si utilizzi un modello costitutivo in grado o meno di cogliere la plasticizzazione. I risultati delle simulazioni di crimpaggio e rilascio dei dispositivi hanno mostrato che in termini di comportamento globale della struttura, la funzionalità non risulta alterata dall'eventuale presenza di plasticizzazione del materiale: ciò è stato valutato in termini di capacità del dispositivo di ritornare al diametro originale. Questo risultato in realtà non stupisce, in quanto questi dispositivi sono oggi in uso clinico, il che conferma che l'eventuale plasticizzazione non è causa di una perdita della loro funzionalità. Le analisi computazionali in cui si però è tenuto anche conto dell'interazione tra dispositivo e distretto di impianto hanno rivelato che i punti maggiormente sollecitati dei dispositivi subiscono delle sollecitazioni differenti, nel caso si considerino le deformazioni plastiche: in particolare durante il ciclaggio meccanico a cui sono sottoposti durante il loro funzionamento le deformazioni si attestano su valori maggiori, mentre gli sforzi risultano ridotti. Le analisi computazionali che si pongono quindi come scopo lo studio della vita a fatica di tali dispositivi non possono prescindere dall'utilizzo di un modello costitutivo che tenga conto anche dei fenomeni plastici, in quanto altrimenti produrrebbero delle previsioni errate. Da ciò consegue che il modello formulato potrebbe essere usato in futuro in lavori di analisi della vita a fatica di alcuni dispositivi biomedicali sottoposti a sollecitazioni tali da portare a snervamento il materiale, a cui segue l'applicazione di una sollecitazione ciclica. Per esempio gli stent vascolari durante il crimpaggio, a causa della notevole riduzione di diametro imposta, raggiungono la plasticizzazione, che sicuramente influisce sulla vita a fatica del dispositivo. Il modello qui formulato rappresenta quindi uno strumento computazionale potente, che permetterà in futuro di effettuare su di essi simulazioni numeriche maggiormente realistiche, considerando un comportamento delle lega NiTi più vicino a quello esibito sperimentalmente. Probabilmente l'utilizzo di questo modello costitutivo

permetterà di ottenere dei risultati numerici differenti da quanto ottenuto finora, anche per via del fenomeno evidenziato nelle simulazioni computazionali condotte, in cui si è notato come durante il recupero della forma espansa il fatto di avere una deformazione irreversibile significativa può portare ad invertire le condizioni di carico delle zone più sollecitate, portandole da compressione a trazione, o viceversa. Finora tale aspetto nelle simulazioni numeriche sui dispositivi biomedicali non era mai stato considerato, proprio per la mancanza di un modello costitutivo in grado di cogliere la fase plastica del materiale. Oltre all'applicazione degli stent vascolari, il modello formulato potrebbe anche essere utilizzato in analisi computazionali su altri dispositivi biomedicali, dei quali si è interessati a conoscere se le elevate deformazioni a cui sono sottoposti producano un'eventuale plasticizzazione, ed in caso affermativo come questa influisca sul loro comportamento.

Bibliografia

- [1] D. Stoeckel. Nitinol medical devices and implants. *Min Invas Ther & Allied Technol*, 2000: 9(2) 81-88.
- [2] E. Patoor, A. Eberhardt, and M. Barveiller. Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys. *Journal de Physique IV*, 06, 277-292, 1996.
- [3] A. L. McKelvey and R.O. Ritchie. Fatigue-crack growth behavior in the superelastic and shape-memory alloy nitinol. *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*, 2001.
- [4] Q. Kan and G. Kang. Constitutive model for uniaxial transformation ratchetting of super-elastic niti shape memory alloy at room temperature. *International Journal of Plasticity* 26, (441-465), 2010.
- [5] Duerig, Pelton, and Stockel. An overview of nitinol medical applications. *MaterMaterials Science & Engineering, A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing (A273-275)* 149-160, 1999.
- [6] M. Urbano and F. Auricchio. Modeling permanent deformations of superelastic and shape memory materials. *Journal of Functional Biomaterials*, 6 (398-406), 2015.
- [7] N. Barrera, P. Biscari, and M. Urbano. Macroscopic modeling of functional fatigue in shape memory alloys. *European Journal of Mechanics A/Solids* 45 (101-109), 2014.
- [8] E. Dordoni. *Fatigue analysis of Nitinol cardiovascular devices*. PhD thesis, Politecnico di Milano, 2014.
- [9] X. Wang, B. Xu, and Z. Yue. Phase transformation behavior of pseudoelastic niti shape memory alloys under large strain. *Journal of Alloys and Compounds* 463 (417-422), 2008.

- [10] F. Auricchio. Mechanics of solid materials: theoretical and computational aspects. Appunti corso: European School of Advanced Studies on Sismic Risk Reduction, 2001.
- [11] A.C. Souza, E.N. Mamiya, and N. Zouain. A three-dimensional model for solid undergoing stress-induced phase transformations. *Eur. J. Mech. A/Solids* 17 (789-806), 1998.
- [12] F. Auricchio and L. Petrini. Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (1255-1284), 2002.
- [13] F. Auricchio and L. Petrini. Three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (807-836), 2004.
- [14] F. Auricchio, A. Reali, and U. Stefanelli. A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity. *International Journal of Plasticity* 23 (207-226), 2007.
- [15] F. Auricchio, A. Reali, and U. Stefanelli. A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behaviors and transformation-dependent elastic properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (1631-1637), 2009.
- [16] D. Allegretti. Sviluppo di metodologie sperimentali e numeriche per l'analisi della fatica assiale di stent periferici in nitinol. Master's thesis, Politecnico di Milano, 2014.
- [17] C. F. Bianchi. Caratterizzazione meccanica e a fatica di stent periferici in nitinol. Master's thesis, Politecnico di Milano, 2013.
- [18] L. Cagliani. Caratterizzazione sperimentale delle proprietà a fatica del nitinol per stent periferici. Master's thesis, Politecnico di Milano, 2011.
- [19] M. Gandhi and B. D. Thompson. *Smart Materials and Structures*. 1992.
- [20] T.W. Duerig, K.N. Melton, and D. Stockel. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. 1990.
- [21] J. Van Humbeeck, J. Stalmans, and P. Besselink. Shape memory alloys. *Metals as Biomaterials*, 1988.
- [22] K. Otsuka and C.M. Wayman. *Shape Memory Materials*. 1998.

-
- [23] D.C. Lagoudas. *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. 2008.
- [24] A.R. Pelton, J. DiCello, and S. Miyazaky. Optimization of processing and properties of medical-grade nitinol wires. In *Proceedings of the Second International Conference in Shape Memory and Superelastic Technologies*. eds. S. Russel, A.R. Pelton, SMST-2000.
- [25] A.P. Stebner, D.W. Brown, and L.C. Brinson. Young's modulus evolution and texture-based elastic-inelastic strain partitioning during large uniaxial deformation of monoclinic nickel-titanium. *Acta Materialia* 61 (1944-1956), 2013.
- [26] J. Wang and H. Sehitoglu. Martensite modulus dilemma in monoclinic niti-theory and experiments. *International Journal of Plasticity* 61 (17-33), 2014.
- [27] K. Taillard, S.A. Chirani, S. Calloch, and C. LExcellent. Equivalent transformation strain and its relation with martensite volume fraction for isotropic and anisotropic shape memory alloys. *Mechanics of Materials* 40, 151-170, 2008.
- [28] P.Y. Manach and D. Favier. Shear and tensile thermomechanical behavior of near equiatomic niti alloy. *Materials Science & Engineering, A* 222, 45-57, 1997.
- [29] M. Panico and L.C. Brinson. A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 2491-2511, 2007.
- [30] C. Grabe and O.T. Bruhns. Path dependence and multiaxial behavior of polycrystalline niti alloys within the pseudoelastic and pseudoplastic temperature regimes. *International Journal of Plasticity* 25, 513-545, 2009.
- [31] G. Eggeler, E. Hornbogen, A. Yawny, A. Heckmann, and M. Wagner. Structural and functional fatigue of niti shape memory alloys. *MateMaterials Science & Engineering, A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing* (24-33), 2004.
- [32] J. van Humbeek. Cycling effects, fatigue and degradation of shape memory alloys. *Journal de Physique III, Vol. 1*, 1991.
- [33] Miyazaki, Mizukoshi, Ueki, Sakuma, and Liu. Fatigue life of ti-50 at.alloy wires. *Materials Science & Engineering, A: Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing* (A273-275), 1999.
- [34] Bertacchini, D. Lagoudas, and E. Patoor. Thermomechanical transformation fatigue of tinicu sma actuators under a corrosive environment - part i: Experimental results. *International Journal of Fatigue* 31 (1571-1578), 2009.

- [35] Rebelo, Gong, Hall, Pelton, and Duerig. Finite element analysis on the cyclic properties of superelastic nitinol. *ABAQUS Users' Conference (601-613)*, 2004.
- [36] Feng and Sun. Shakedown analysis of shape memory alloys structures. *International Journal of Plasticity 23 (2)*, 183-206, 2007.
- [37] Maletta, Sgambiterra, Furguiele, Casati, and Tuissi. Fatigue of pseudoelastic niti within the stress-induced transformation regime: a modified coffin-manson approach. *Smart Materials and Structures 21*, 2012.
- [38] M. Mertmann and G. Veganni. Design and application of shape memory actuators. *Eur Phys J Spec Top 158*, p. 221-230, 2008.
- [39] C. Trepanier, M. Tabizian, L.H. Yahia, L. Bilodeau, and D.L. Piron. Effect of modification of oxide layer on niti stent corrosion resistance. *Journal of Biomedical Materials Research, 43: 433-440*, 1998.
- [40] D. Stoeckel, A. Pelton, and T. Duerig. Self-expanding nitinol stent: material and design considerations. *European Radiology 14: 292-301*, 2004.
- [41] Pelton, Stoeckel, and Duerig. Medical uses of nitinol. *Materials Science Forum Vols. 327-328 pp.63-70*, 2000.
- [42] J. van Humbeek. Introduction to shape memory alloys. *Proceedings of the School and Symposium on Smart Structural Systems Technologies, Porto, Portugal, 3-23*, 2010.
- [43] K.D. Hjelmstad. *Fundamentals of Structural Mechanics - Second Edition*. 2005.
- [44] J. Arghavani. *Thermo-mechanical behavior of shape memory alloys under multi-axial loadings: constitutive modeling and numerical implementation at small and finite strain regime*. PhD thesis, Sharif University, Tehran, Iran, 2010.
- [45] M. Ferraro. *Advanced Modeling of Stents: from constitutive modeling to biomedical (isogeometrical) analysis*. PhD thesis, IUSS, Pavia, Italy, 2014.
- [46] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [47] K.R. Rajagopal and A.R. Srinivasa. Mechanics of the inelastic behavior of materials - part 1, theoretical underpinnings. *International Journal of Plasticity 14*, pp 945-967, 1998.
- [48] K.R. Rajagopal and A.R. Srinivasa. Mechanics of the inelastic behavior of materials - part 2, inelastic response. *International Journal of Plasticity 14*, pp 969-995, 1998.

-
- [49] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. 1998.
- [50] F. Auricchio, A. Coda, A. Reali, and M. Urbano. Sma numerical modeling versus experimental results: Parameter identification and model prediction capabilities. *Journal of Materials Engineering and Performance* 18 (649-654), 2009.
- [51] *ANSYS Mechanical APDL Material Reference*, 2013.
- [52] F. Auricchio, G. Scalet, and M. Urbano. A numerical/experimental study of nitinol actuator springs. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2014.
- [53] F. Auricchio and E. Sacco. A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32 (1101-1114), 1997.
- [54] A. Paiva, M.A. Savi, A.M. Barbosa Braga, and P.M.C. Lopes Pacheco. A constitutive model for shape memory alloys considering tensile-compressive asymmetry and plasticity. *International Journal of Solids and Structures* 42 (3439-3457), 2005.
- [55] W. Yan, C.H. Wang, X.P. Zhang, and Y.W. Mai. Theoretical modelling of the effect of plasticity on reverse transformation in superelastic shape memory alloys. *Materials Science and Engineering A* 354 (146-157), 2003.
- [56] D.J. Hartl and D.C. Lagoudas. Constitutive modeling and structural analysis considering simultaneous phase transformation and plastic yield in shape memory alloys. *Smart Materials and Structures* 18, 2009.
- [57] A. Paiva and M.A. Savi. An overview of constitutive models for shape memory alloys. *Mathematical Problems in Engineering* (p. 1-30), 2006.
- [58] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method - Vol 2: Solid Mechanics*. 2000.
- [59] G. Del Piero. Some properties of the set of fourth-order tensors with application to elasticity. *Journal of Elasticity* 3 (245-261), 1979.
- [60] A. Redaelli and F. Monteverchi. *Biomeccanica, analisi multiscala di tessuti biologici*. 2008.
- [61] L. Norgren, W.R. Hiatt, Dormandy, M.R. Neheler, and K.A. Harris. Inter-society consensus for the management of peripheral arterial disease. *J. Vasc. Surg. ; S5A-S67A*, 2007.

- [62] F. Schillinger and E. Minar. Endovascular stent implantation for treatment of peripheral artery disease. *Eur. J. Clin. Invest.* ; 165-170, 2007.
- [63] J.M. Gibbs, C.S. Peña, and J.F. Benenati. Treating the diseased superficial femoral artery. *Tech. Vasc. Interv. Radiol.* 13: 37-42, 2010.
- [64] H. Gray. *Anatomy, descriptive and surgical.* 1977.
- [65] J. Ross and E. Braunwald. Aortic stenosis. *Circulation*, 38 : 61-67, 1968.
- [66] J. Webb, S. Pasupati, K. Humphries, C. Thompson, R. Moss, D. Ricci, J. Ye, A. Cheung, and S. Lichtenstein. Percutaneous transarterial aortic valve replacement in selected high-risk patients with aortic stenosis. *Circulation*, 116: 755-763, 2007.
- [67] *ABAQUS 6.13 Documentation.*
- [68] A. Trotta. Approccio numerico-sperimentale per la caratterizzazione meccanica di stent periferici in nitinol. Master's thesis, Politecnico di Milano, 2014.

Appendice

In questa Appendice vengono riportate le prove di compressione e biassiali eseguite presso il Labs sui provini di tubo in lega NiTi, ed i relativi confronti con le predizioni date dal modello costitutivo formulato.

Si è già detto nel Cap. 3 che il problema principale legato all'esecuzione di queste prove è l'instabilità strutturale, che viste le ridotte dimensioni dei provini era facilmente raggiungibile. Questo ha reso impossibile l'uso dell'estensometro, in quanto per il suo corretto posizionamento erano necessari provini di almeno 100 mm di lunghezza, dimensione che provocava un carico critico estremamente basso. Infatti bisogna tenere conto che le SMA esibiscono un plateau di trasformazione di fase, durante il quale il legame sforzo-deformazione ha un modulo elastico molto basso, il quale deve essere inserito nell'equazione (7.1) presa dalla teoria dell'instabilità euleriana delle aste, per ottenere il carico critico corrispondente ad una certa lunghezza del provino:

$$\sigma = \pi^2 \frac{4EJ}{Al^2} \quad (7.1)$$

in cui J è il modulo di inerzia flessionale della sezione del provino, $J = \frac{\pi}{32} (D_{est}^4 - d_{int}^4)$, A è l'area della sezione ed l la lunghezza di libera inflessione. Si può capire dalla formula sopra, inserendo i dati geometrici del tubo a disposizione e come modulo elastico la pendenza relativa al tratto di trasformazione di fase ottenuta nelle prove in trazione, che ad una lunghezza di 70 mm (100 mm di lunghezza, depurati dal tratto perso nelle ganasce) corrisponde un carico critico sotto i 100 MPa, insufficiente anche solo per portare il materiale all'inizio della sua transizione di fase in compressione. Per questo motivo si è deciso di eliminare l'utilizzo dell'estensometro, in modo da ridurre il più possibile la luce libera del provino compresa fra gli afferraggi, rendendola pari a 7.5 mm, il minimo ottenibile con la macchina idraulica di prova, aumentando in questo modo il carico massimo raggiungibile. Ne consegue che le misure ottenute in compressione non sono veramente rappresentative del reale comportamento del materiale, tuttavia si fa notare che i parametri principali che lo descrivono sono già stati ottenuti dalle prove in trazione. In effetti la prova in compressione che viene presentata ha solo lo scopo di analizzare qualitativamente quale

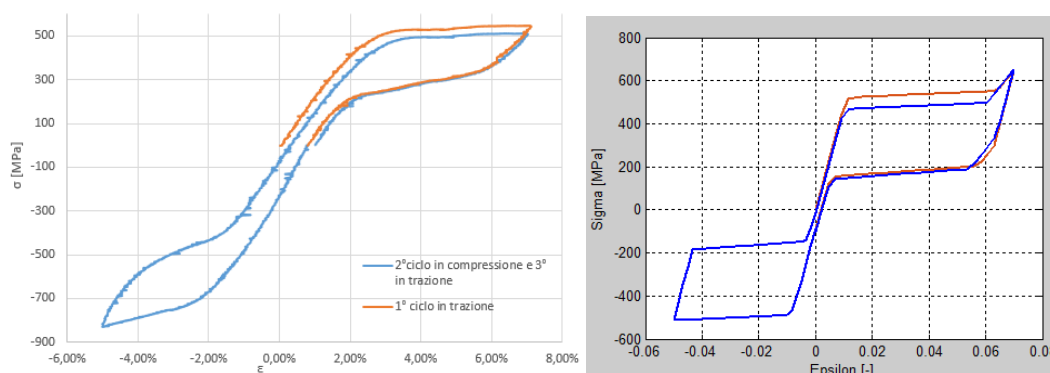


Figura 7.1: Curva $\sigma - \varepsilon$ di una prova monoassiale in cui si porta il provino al 7% di deformazione in trazione, si scarica, si applica una deformazione in compressione del 5%, e infine si fa seguire un'ulteriore ciclo in trazione. A sinistra i risultati sperimentali, a destra quelli ottenuti con il modello.

sia il comportamento di una SMA in compressione rispetto alla trazione, evidenziando eventuali asimmetrie, con l'attenzione posta principalmente sullo studio di come l'effetto di degradazione e fatica del materiale si comporta quando si passa da condizioni di carico in trazione a compressione. Sarebbe stata utile anche un prova che portasse il materiale in plasticità in compressione, ma questa avrebbe richiesto dei provini con area resistente maggiore, in modo da poter applicare carichi significativi; tale prova sarebbe stata utile per vedere se esistono asimmetrie per quanto riguarda la soglia di snervamento e i relativi parametri di incrudimento della SMA, oltre che per capire se il comportamento plastico fosse isotropo o cinematico.

L'unica tipologia di prova che si è riusciti a condurre in condizioni di compressione è mostrata in Fig. 7.1 (sinistra). In tale prova il provino viene sottoposto ad un allungamento in trazione di 0.525 mm, corrispondente a una deformazione totale del 7%, seguito da scarico e carico in compressione fino ad un accorciamento di 0.375 mm, pari al 5% di deformazione. A questo punto il provino viene scaricato e nuovamente portato in trazione, con lo stesso allungamento del primo ciclo. La prima cosa evidente è una chiara asimmetria: lo sforzo critico per la trasformazione di fase è più elevato in compressione, passando da circa 500 MPa in trazione a circa 700 MPa in compressione. Anche la pendenza della trasformazione di fase è più elevata, mentre è più difficile analizzare un'eventuale differenza in termini di ampiezza del plateau, a causa della ridotta deformazione imposta in compressione, necessaria per evitare i già presentati fenomeni di instabilità.

Altre considerazioni che possono essere fatte riguardano come si comporta la degradazione del materiale al procedere del fenomeno della fatica: dopo il ciclo in compressione, la fatica determina un abbassamento dello sforzo corrispondente al plateau influenzando il ciclo successivo in trazione. Questo porta a concludere che il fenomeno degradativo, che provoca un abbassamento del plateau, non si limita ad

abbassare la soglia di trasformazione di fase nelle medesime condizioni di carico, ma invece la riduce anche effettuando un passaggio da trazione a compressione.

I risultati ottenuti con il modello costitutivo formulato nel Cap. 5 con i parametri della Tab. 5.7 sono mostrati in Fig. 7.1 (destra). Si vede che la predizione che viene ottenuta non è ottimale, in quanto il modello non riesce a cogliere l'asimmetria presente tra condizioni di carico di trazione e compressione. Inoltre bisogna tenere in considerazione che sperimentalmente durante l'esecuzione di tale test l'uso di un estensometro non è stato possibile, quindi non si è sicuri del vero carico imposto al materiale nella porzione centrale del provino, a causa degli effetti di bordo dovuti agli afferraggi della macchina di prova. Quindi le misure ottenute sperimentalmente sono rappresentative di una risposta media del materiale, che tiene purtroppo conto degli sforzi indotti dalle ganasce. Questo spiega anche il motivo per cui, relativamente alla trasformazione di fase, il modello entra nel ramo elastico della martensite, mentre i risultati sperimentali mostrano che tale trasformazione non è ancora conclusa in corrispondenza di una deformazione del 7%. Ciò è coerente con quanto mostrato nel Cap. 3 in Fig. 3.8, dove si spiegava che le deformazioni ottenute partendo dal movimento della traversa erano molto maggiori rispetto a quelle lette dall'estensometro, fatto che causava una lunghezza del plateau maggiore.

Nonostante il confronto presenti delle differenze, si possono notare anche degli aspetti colti con successo dal modello: in particolare il fatto che dopo il ciclo in compressione, la fatica determina un degrado del materiale che influisce sulla posizione del plateau nel successivo ciclo di trazione, abbassandolo.

Ultima tipologia di test effettuato è un semplice test biassiale, in cui si applica al materiale sia uno spostamento assiale che una rotazione. Anche in questo caso sarebbe stato utile avere delle condizioni di carico biassiali che includessero il raggiungimento di condizioni di plasticità, che tuttavia non erano possibili a causa dei problemi di instabilità strutturale. In Fig. 7.2 sono mostrate due prove biassiali effettuate, a sinistra la storia di carico imposta in termini di deformazioni, a destra gli sforzi ottenuti. La prima prova (a) consiste nell'applicazione contemporanea di una componente assiale deformativa del 5% e di una componente torsionale deformativa del 2.5%. Segue l'inversione della componente torsionale al -2.5% ed infine lo scarico, contemporaneo per le due componenti di deformazione, il tutto ripetuto per 5 cicli. La seconda prova (b) consiste invece in una applicazione contemporanea di deformazione assiale del 5% e torsionale del 2.5%, seguita da inversione delle deformazione assiale al -5%, ed infine scarico, sempre tutto ripetuto per 5 cicli. La velocità imposta alla macchina di prova è sempre di 0.0336 mm/s per la componente assiale, mentre invece la velocità di rotazione è quella che permette di ottenere il completamento della deformazione torsionale nello stesso intervallo di tempo necessario per completare l'applicazione della deformazione assiale. Quello che appare nelle prove è che anche in condizioni biassiali si nota il fenomeno di accumulo di deformazione per fatica, che

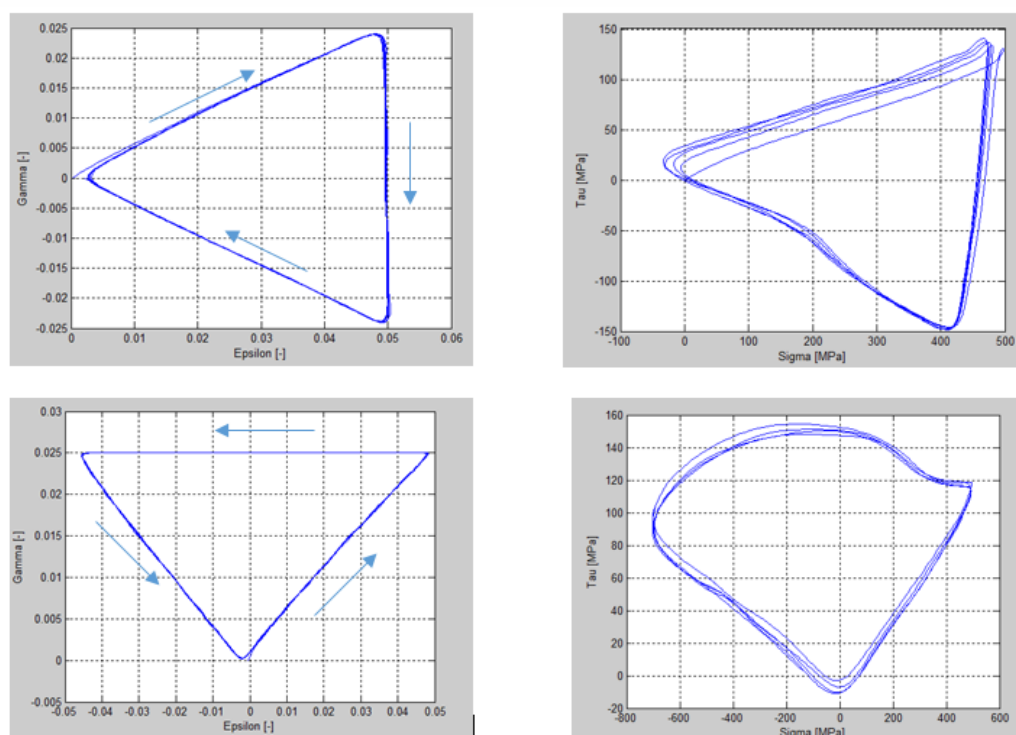


Figura 7.2: Test biassiali effettuati presso il Labs. A sinistra la storia di deformazione imposta, a destra gli sforzi corrispondenti ottenuti.

a causa del controllo in spostamento imposto ha fatto nascere allo scarico dei valori di sforzo negativi, in entrambe le tipologie di carico. In Fig. 7.3 sono mostrati i risultati ottenuti con il modello in termini di sforzi, in particolare a sinistra è mostrato il test (a), a destra il test (b): si vede che la forma qualitativa è simile, anche se sono presenti alcune differenze, probabilmente in parte spiegabili con il fatto di non avere letto le deformazioni utilizzando un estensometro. Date le difficoltà riscontrate nell'eseguire le prove di compressione e biassiali, sarebbe in futuro interessante effettuare un'ulteriore campagna di test sperimentali, questa volta utilizzando dei provini di materiale di sezione resistente maggiore, in modo poter utilizzare un estensometro senza il pericolo di raggiungere problematiche legate all'instabilità strutturale. In questo modo si potrebbero avere dati sufficienti per caratterizzare completamente il comportamento delle SMA in condizioni di compressione, in modo poi da poter ampliare il modello costitutivo formulato in modo che diventi in grado di cogliere le asimmetrie presenti. Inoltre l'utilizzo dell'estensometro permetterebbe di avere dati più attendibili con cui confrontare le predizioni ottenute dal modello, in modo da capire se le differenze mostrate nella sua risposta rispetto ai dati sperimentali qui mostrati siano dovute solamente alla lettura errata delle condizioni di carico, o anche da problemi legati alla sua formulazione matematica.

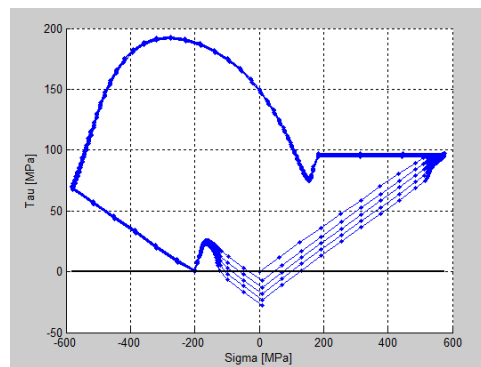
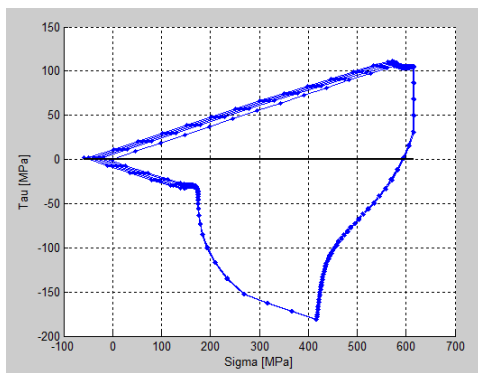


Figura 7.3: Risultati in termini di curve $\sigma - \tau$ ottenuti dal modello, simulando le storie di carico biassiali imposte sperimentalmente