

TESI DI LAUREA MAGISTRALE



**Generalizzazione dei processi di Lévy per la  
calibrazione della superficie di volatilità implicita nei  
derivati azionari**

Candidato:  
**Jean-Philippe Orsi**  
Matricola 799416

Relatore:  
**Dr. Roberto Baviera**

# Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va ai miei genitori che mi hanno sempre supportato nelle mie scelte, mi hanno incoraggiato e hanno sempre avuto fiducia in me. Mi avete sempre lasciato libero di fare ciò che amavo di più, di coltivare le mie passioni. Se non fosse stato per voi e per i sacrifici che avete fatto per me non avrei mai potuto conseguire questo importante risultato. Grazie di cuore.

Ringrazio il mio relatore Roberto Baviera per il tempo e gli sforzi che ha dedicato alla mia tesi e per la sua più totale disponibilità. Ho sempre potuto contare sulla sua presenza nei momenti di difficoltà, sulla sua competenza e sui suoi numerosi e preziosi consigli.

Un grazie agli amici che ho trovato qui a Milano per avermi accompagnato in questi anni universitari, per i momenti condivisi insieme. Grazie a chi mi ha sempre ospitato a casa sua come fossi suo fratello, a chi mi ha sempre aiutato nei momenti di difficoltà, alle serate passate insieme, alle suonate fatte insieme, a tutti gli “High Five”. Con voi ho trascorso anni fantastici qui a Milano.

Un ringraziamento va agli “Amici Felici” (ossimoro onomatopeico, cit. Leone) di Roma: senza di voi non avrei mai passato estati indimenticabili tra falò, funky-tarro, mare, partite di beach volley, grigliate, partite di tressette e serate alla Spiaggetta. Ricordatevi che l'estate non è ancora finita, e non finirà mai!

Grazie al Picci e a Carlos, i due migliori amici del liceo che si possano desiderare. Nonostante la lontananza è come se non ci fossimo mai divisi (soprattutto per l'unico neurone che condividiamo). Grazie a Bea, la migliore amica del liceo che si possa desiderare. Con voi sono cresciuto e so che su di voi potrò sempre contare: “If I fall back down, you're gonna help me back up again”.

Grazie a Giulia (altrimenti detta Conqui), che da due anni a questa parte mi vede sempre spuntare a casa sua e mi tratta come se fossi un re. Mi sento

fin troppo servito e riverito!

Un ringraziamento speciale va a mio fratello e amico Michel per essere riuscito a convivere pazientemente con me questi ultimi due anni (non è facile) e per aver sempre dimostrato fiducia in me. Soprattutto grazie per aver contribuito alla mia tesi aiutandomi con le tue competenze matematiche (visto che l'ho scritto?).

Grazie a mia nonna per avermi cresciuto, per essersi sempre presa cura di me, per avermi sempre chiesto “Come va a scuola?”. Ora dovrai cambiare domanda! Un grazie anche alla mia cagnolina Birba, ormai membro della famiglia da 16 anni, per le immense feste che mi fa ogni volta, dopo lunghi periodi che non ci vediamo.

Grazie ai miei vicini di casa e amici, Fabrizio e Stefania. Grazie per esservi sempre preoccupati di me in questi anni, per la vostra immensa disponibilità, per le vostre attenzioni nei miei confronti e per le abbuffate della domenica. Ora ve lo posso finalmente dire: ho finito la tesi!

Un grazie di cuore va alla mia Giulia, per avermi sempre supportato (e sopportato...) in questi anni. Mi sei sempre stata accanto sin dall'inizio, non hai mai dubitato delle mie capacità e hai avuto fin troppa pazienza con me. Sei riuscita a trasformare le mie giornate più nere in giornate piene di sole. Hai reso questi anni speciali.

*Milano, Settembre 2015*

Jean-Philippe

*Chop your own wood, and it will warm you twice.*

Henry Ford

# Abstract

In the present work a new calibration technique for implied volatility surface with a class of models with jumps is developed. The goal is to use models that present a few parameters to be calibrated: therefore models that use additive stochastic processes are proposed. Despite their parameter parsimony, such models present an adequate fit of implied volatility's spot surface.

We describe in detail a step-by-step method for calibration on real market data. The market data used in the model calibration are all quoted exchange traded options prices having Euro Stoxx 50 and S&P 500 as underlyings, obtained at a given point in time. The results of the calibration are very good and a scaling behaviour of the two key parameters is observed. In order to justify the observed scaling for one of these parameters we study numerically the asymptotic behaviour of these models, comparing with exponential Lévy models.

# Abstract

Nel presente lavoro di tesi viene sviluppata una nuova tecnica per la calibrazione della superficie di volatilità implicita che prevede l'utilizzo di una classe di modelli con salti. L'obiettivo è quello di utilizzare modelli che presentino pochi parametri da calibrare: si propongono dunque modelli che sfruttino i processi stocastici additivi. Tali modelli, nonostante la loro parsimonia di parametri, presentano un fit adeguato della superficie spot di volatilità implicita.

Si descrive dettagliatamente il metodo di calibrazione step-by-step su dati di mercato reali. I dati di mercato utilizzati durante la calibrazione del modello sono tutti i prezzi quotati delle opzioni scambiate sul mercato scritte su Euro Stoxx 50 e su S&P 500 ad un dato istante. I risultati della calibrazione sono estremamente soddisfacenti e si osserva uno scaling rispetto al tempo dei due parametri chiave. Per giustificare lo scaling di uno di questi parametri si effettua uno studio asintotico di questi modelli dal punto di vista numerico, confrontando i modelli exponential Lévy.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>viii</b>
<b>1 Modelli additivi</b>	<b>1</b>
1.1 Nozioni preliminari . . . . .	2
1.1.1 Definizioni di base e processi stocastici . . . . .	2
1.1.2 Martingale . . . . .	3
1.1.3 Funzione generatrice di momenti e funzione caratteristica . . . . .	3
1.2 Processi stocastici additivi e di Lévy . . . . .	4
1.2.1 Distribuzioni infinitamente divisibili . . . . .	4
1.2.2 La formula di Lévy-Khintchine e il teorema di Sato . . . . .	5
1.2.3 Subordinatori additivi Positive Tempered Stable . . . . .	7
1.3 Il modello di Black '76 . . . . .	9
1.3.1 Pricing . . . . .	9
1.3.2 Limitazioni del modello di Black '76 . . . . .	9
1.4 I modelli exponential Lévy . . . . .	10
1.4.1 Pricing . . . . .	11
1.4.2 Limitazioni degli exponential Lévy . . . . .	11
1.5 I modelli additivi . . . . .	12
1.5.1 Costruzione del processo additivo . . . . .	12
1.5.2 La tripletta caratteristica . . . . .	16
1.5.3 Gli exponential Lévy come caso particolare . . . . .	17
1.5.4 L'assenza di arbitraggio nei modelli additivi . . . . .	18
<b>2 Descrizione dei dati mercato</b>	<b>21</b>
2.1 Dati di mercato . . . . .	21
2.1.1 Interpolazione della curva di sconto . . . . .	24
2.2 Filtro di liquidità . . . . .	25

---

2.2.1	Il prezzo forward alla data di riferimento . . . . .	26
2.3	La superficie di calibrazione . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Calibrazione del modello sul mercato</b>	<b>29</b>
3.1	La volatilità implicita . . . . .	29
3.1.1	Il mercato equity . . . . .	31
3.2	La formula di Lewis . . . . .	32
3.2.1	Variante della formula di Lewis . . . . .	34
3.2.2	I modelli VG e NIG . . . . .	36
3.3	La Fast Fourier Transform . . . . .	37
3.3.1	L'algoritmo di Cooley e Tukey . . . . .	37
3.3.2	Le limitazioni dell'FFT . . . . .	39
3.3.3	L'applicazione alla calibrazione . . . . .	39
3.4	Risultati della calibrazione . . . . .	40
3.4.1	Prezzi e volatilità calibrati . . . . .	41
3.4.2	I parametri . . . . .	50
3.4.3	Il modello calibrato . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Il comportamento asintotico</b>	<b>57</b>
4.1	Il comportamento asintotico degli exponential Lévy . . . . .	57
4.1.1	La volatilità implicita . . . . .	58
4.2	Simulazioni numeriche . . . . .	60
4.2.1	Confronto tra modello additivo ed exponential Lévy . . . . .	62
	<b>Conclusioni</b>	<b>68</b>
	<b>A Dimostrazioni</b>	<b>70</b>
	<b>B Notazione</b>	<b>81</b>



# Introduzione

Nel corso degli ultimi anni si sono intensificate le ricerche in ambito finanziario con l'obiettivo di trovare modelli che descrivessero in maniera adeguata l'andamento delle fluttuazioni di mercato, da applicare sia in ambito *risk management* che in ambito *option pricing*. Il più famoso e il più diffuso al giorno d'oggi per quanto riguarda l'option pricing è il modello di Black&Scholes (1973) la cui ipotesi fondamentale è l'assunzione che il prezzo di un asset sia un moto Browniano geometrico. Da questo derivò il modello di Black (1976) in cui si assume che il *forward price* del sottostante abbia il seguente andamento:

$$F_t(t) = F_0(t)e^{f_t}, \quad (1)$$

dove  $f_t = -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t$ .

Sebbene la semplicità teorica e computazionale di questo modello siano state essenziali per il suo successo, esso non è privo di difetti e di limitazioni.

Oltre al modello di Black, hanno aumentato la loro popolarità i processi di Lévy e altri processi stocastici con salti da utilizzare nei modelli finanziari. In particolare i modelli *exponential Lévy* sono modelli di tipo (1) in cui il processo stocastico  $f_t$  è un generico processo di Lévy.

Come nel caso del modello di Black, gli exponential Lévy hanno il vantaggio di essere facilmente trattabili sia dal punto di vista teorico che computazionale, ma presentano tuttavia anch'essi delle limitazioni. In particolare, possiedono una grossa limitazione in fase di calibrazione. Nel caso in cui si calibri il modello su un'unica data di expiry, la calibrazione risulta soddisfacente. Mentre nel caso in cui si calibri il modello su più date di expiry, il modello non risulta adeguato non riuscendo a rappresentare in maniera adeguata la *superficie di volatilità implicita* osservata. Inoltre, dal punto di vista teorico, gli exponential Lévy descrivono un comportamento asintotico della superficie di volatilità implicita

---

con un punto angoloso all'ATM per time to maturity vicini a zero che non si riscontra nella realtà dei mercati finanziari.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è quello di studiare e presentare un modello che descriva adeguatamente il sottostante e che permetta una soddisfacente calibrazione del modello utilizzando tutte le opzioni europee per i due sottostanti più liquidi tra gli equity derivatives, e quindi utilizzando opzioni con diversi strikes e diverse date di expiry.

Si desidera dunque individuare un modello che possieda pochi parametri e che sia trattabile con relativa facilità dal punto di vista computazionale durante la fase di calibrazione con un adeguato trade off tra numero di parametri e risultati di calibrazione ottenuti.

Numerose sono le novità di questa tesi.

In primo luogo sono stati introdotti i *modelli additivi*. Questi riprendono il modello (1) in cui  $f_t$  è una particolare scelta di *processo stocastico additivo*. I processi additivi sono una generalizzazione dei processi di Lévy: a differenza di quest'ultimi, nei processi additivi viene meno l'ipotesi di stazionarietà degli incrementi. Il modello considerato, per una particolare scelta di parametri è un "classico" exponential Lévy. Rispetto agli exponential Lévy presentano una difficoltà in più in quanto possiedono parametri dipendenti dal tempo, ma consentono una calibrazione molto più accurata. Un ulteriore vantaggio è il fatto di poter utilizzare tecniche e formule analitiche già presenti per gli exponential Lévy, come la *formula di Lewis*. Infatti, fissando la data di expiry, il modello additivo considerato può essere visto come un exponential Lévy.

In secondo luogo è stata considerata la calibrazione del modello su tutte le opzioni quotate sul mercato dei due principali indici azionari, eseguendo delle "fotografie" del mercato a diversi istanti, ottenendo una descrizione molto accurata della superficie di volatilità implicita osservata.

In terzo luogo sono state osservate delle relazioni di scaling nel tempo per i due set di parametri chiave nel modello, quello responsabile della vol-of-vol ( $\kappa(t)$  nella tesi) e quello responsabile dell'asimmetria ( $\eta(t)$  nella tesi).

Infine è stato mostrato che questo scaling sembra essere legato a particolari caratteristiche del modello. Mentre, come già evidenziato, i modelli exponential Lévy presentano un punto angoloso all'ATM per time to maturity brevi, è stato mostrato numericamente come lo scaling del parametro  $\kappa(t)$  osservato è quello

che corrisponde ad una superficie di volatilità derivabile all'ATM anche per tempi piccoli.

L'obiettivo è dunque costruire e studiare un modello additivo in grado di avere prestazioni soddisfacenti durante la fase di calibrazione per tutte le date di expiry disponibili e che rispecchi fedelmente ciò che si osserva nei mercati finanziari quando il time to maturity tende a zero.

Per raggiungere l'obiettivo la tesi si articola nel seguente modo:

Il Capitolo 1 fornisce le nozioni di base sui processi additivi. Vengono riportati alcuni risultati a proposito delle distribuzioni infinitamente divisibili e i celebri teoremi di Lévy-Khintchine e di Sato. Vengono poi trattati particolari processi stocastici, i *subordinatori additivi*, che sono utilizzati nella costruzione dei processi additivi. Particolare attenzione è rivolta ai subordinatori additivi *positive tempered stable*. Infine si passa alla costruzione del modello additivo e alla caratterizzazione di quest'ultimo, e si osserva come il modello additivo introdotto per la dinamica del forward rispetti l'assenza di arbitraggio.

Il Capitolo 2 descrive i dati raccolti e utilizzati durante la fase di calibrazione del modello. In primo luogo vengono descritte le caratteristiche delle opzioni europee relative agli indici Euro Stoxx 50 e S&P 500, scelte in base ad un criterio di liquidità: le opzioni europee equity più liquide per il mercato europeo e americano, rispettivamente. Vengono analizzate le curve di sconto utilizzate a seconda degli indici. Vengono presentati alcuni criteri di liquidità che portano alla selezione delle opzioni più liquide e viene mostrato come si procede per ricavare il forward price alla data di riferimento. Infine si descrive la superficie dei prezzi di mercato su cui si calibra il modello.

Il Capitolo 3 si concentra sulla tecnica di calibrazione che è stata implementata. Si presentano i risultati numerici ottenuti, mostrando l'efficienza della calibrazione, e si discute a proposito dei comportamenti ottenuti dei parametri rispetto al tempo. Inoltre si confronta la superficie calibrata ottenuta con il modello additivo considerato con la superficie calibrata ottenuta con gli exponential Lévy.

Il Capitolo 4 analizza numericamente il comportamento asintotico dei model-

li additivi. Inizialmente sono presentati gli studi a proposito del comportamento asintotico degli exponential Lévy e viene mostrato il comportamento della volatilità implicita asintotica e la formazione del punto angoloso di cui si era parlato. Infine si effettuano alcune simulazioni numeriche e vengono confrontati asintoticamente i modelli exponential Lévy e i modelli additivi.

L'Appendice A presenta le dimostrazioni delle proposizioni e dei teoremi principali enunciati nel corso di questo lavoro.

L'Appendice B presenta un riassunto della notazione utilizzata nella tesi.

# Capitolo 1

## Modelli additivi

L'obiettivo di questo capitolo è presentare un nuovo modello per descrivere l'andamento del prezzo forward.

Inizialmente vengono introdotte alcune nozioni di probabilità e descritte le proprietà principali dei processi additivi, in seguito vengono presentati il modello di Black '76 e il modello degli exponential Lévy (tra i modelli stocastici maggiormente utilizzati nei modelli finanziari) come sottocasi di processi additivi. L'incapacità di questi modelli di riprodurre fedelmente ciò che si vede nel mercato implica l'esigenza di introdurre un nuovo modello in grado di catturare le peculiarità (*stylized facts*) viste nel mercato.

Il fine è dunque introdurre e calibrare un modello del tipo

$$F_t(t) = F_0(t)e^{f_t t} \quad (1.1)$$

dove  $F_s(t)$  è il forward price di un sottostante con expiry in  $t$  e valutato in  $s \leq t$  e  $f_t$  è un processo additivo avente espressione

$$f_t = \Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t} + \mu(t) \quad (1.2)$$

con  $S_t$  un processo stocastico tale che possenga specifiche caratteristiche (si mostrerà che si tratta di un subordinatore additivo) e  $\Theta(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $\mu(t)$  funzioni deterministiche del tempo. Una volta definiti le prime due funzioni, la terza sarà definita di conseguenza. Si mostrerà che il processo (1.2) soddisfa le proprietà dei processi additivi sotto opportune ipotesi e che racchiude in sé il modello exponential Lévy come caso particolare.

Infine verrà mostrata quale forma debba possedere il parametro  $\mu(t)$  affinché il modello rispecchi la proprietà di essere un modello *Risk Neutral*.

## 1.1 Nozioni preliminari

In questa sezione vengono enunciati definizioni e teoremi nell'ambito dei processi stocastici fondamentali per la trattazione di questa tesi.

### 1.1.1 Definizioni di base e processi stocastici

**Definizione 1.1** (Spazio di Probabilità). Uno *spazio di probabilità*  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  è una tripletta composta da un insieme  $\Omega$ , una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$ , e una mappa  $\mathbb{P}$  da  $\mathcal{F}$  in  $\mathbb{R}$  tali che soddisfino le seguenti condizioni.

1.  $\Omega \in \mathcal{F}, \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Se  $A_n \in \mathcal{F}$  per  $n = 1, 2, \dots$  allora  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  e  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  appartengono a  $\mathcal{F}$
3. Se  $A \in \mathcal{F}$ , allora  $A^c \in \mathcal{F}$
4.  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , e  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
5. Se  $A_n \in \mathcal{F}$  per  $n = 1, 2, \dots$  e sono disgiunti due a due (cioè  $A_n \cap A_m = \emptyset$  per  $n \neq m$ ), allora  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

La famiglia  $\mathcal{F}$  è detta  *$\sigma$ -Algebra*

**Definizione 1.2** (Variabile Aleatoria). Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità. Una mappa  $X$  da  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^d$  è una *variabile aleatoria* su  $\mathbb{R}^d$  se è  $\mathcal{F}$ -misurabile, cioè se  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  appartiene a  $\mathcal{F}$  per ogni  $B \in \mathbb{R}^d$ .

A questo punto è possibile introdurre la nozione di processo stocastico. La modellizzazione seguente è basata su questa struttura matematica.

**Definizione 1.3** (Processo Stocastico). Si dice processo stocastico la collezione  $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  tale che:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  è uno spazio di probabilità
- $T \subseteq \mathbb{R}^+$  è l'insieme dei tempi considerati
- $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  è una filtrazione, cioè una famiglia crescente di sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{F}$ . Vale dunque che  $\forall s, t \in T: s \leq t, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$
- $X_t: (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (E, \mathcal{E})$  è una famiglia di variabili aleatorie a valori nello spazio misurabile  $(E, \mathcal{E})$  adattata alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$ , cioè  $(X_t)_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{F}_t \forall t \in T$

- $\mathbb{P}$  è una probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

In seguito si farà riferimento al processo stocastico con  $\{X_t\}$ .  $\mathcal{F}_t$  è interpretata come l'informazione disponibile al tempo  $t \in T$  e la proprietà di essere crescente rappresenta l'accumularsi dell'informazione con lo scorrere del tempo. Nel caso in cui non di specifichi la filtrazione, si sottintende la filtrazione naturale generata dal processo,  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ . Se non specificato, l'insieme dei tempi  $T$  è inteso essere  $\mathbb{R}^+$ .

### 1.1.2 Martingale

Le martingale occupano un ruolo importante nella teoria finanziaria.

Le martingale sono particolari processi stocastici per i quali vale che in un certo istante temporale il valore atteso sul valore del processo in un istante futuro, condizionatamente all'informazione passata, è uguale al valore assunto nell'istante presente.

**Definizione 1.4** (Martingala). Un processo stocastico  $\{M_t : t \geq 0\}$  a valori in  $\mathbb{R}$  è una martingala se:

- $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall t > 0$
- $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \forall 0 \leq s < t$

### 1.1.3 Funzione generatrice di momenti e funzione caratteristica

Si introducono le seguenti funzioni che verranno spesso richiamate in seguito.

**Definizione 1.5** (Funzione generatrice di momenti). La *funzione generatrice di momenti* di una variabile aleatoria  $X$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  è la funzione  $M$  definita da

$$M(u) = \mathbb{E} \left[ e^{\langle u, X \rangle} \right] \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

**Definizione 1.6** (Funzione caratteristica). Sia  $X$  una variabile aleatoria su  $\mathbb{R}^d$  con distribuzione di probabilità  $\mu(dx)$ . La *funzione caratteristica* di  $X$  è indicata con  $\Phi(z)$  ed è definita come

$$\Phi(z) = \mathbb{E} \left[ e^{i\langle z, X \rangle} \right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} \mu(dx) \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$$

La funzione caratteristica ammette la seguente rappresentazione

$$\Phi(z) = e^{\Psi(z)}$$

dove  $\Psi(z)$  è detto *esponente caratteristico* di  $X$ .

*Osservazione 1.* A differenza della funzione caratteristica che è sempre ben definita, la funzione generatrice di momenti non è sempre definita: il valore atteso potrebbe non convergere per certi valori di  $u$ . Quando  $M$  è ben definita può essere legata alla funzione caratteristica  $\Phi$  tramite

$$M(u) = \Phi(-iu).$$

## 1.2 Processi stocastici additivi e di Lévy

A questo punto è possibile introdurre le nozioni di processo di Lévy e di processo additivo.

**Definizione 1.7.** Sia  $\{X_t : t \geq 0\}$  un processo stocastico su  $\mathbb{R}^d$  e si considerino le seguenti condizioni:

1.  $X_0 = 0$  *q.c.*;
2.  $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$  con  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  tale che,  $\forall \omega \in \Omega_0$ ,  $X_t(\omega)$  è cadlag (continuo a destra per  $t \geq 0$  e ha limiti sinistri per  $t > 0$ );
3. *Incrementi indipendenti:*  $\forall n > 1$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , le variabili aleatorie  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sono indipendenti;
4. *Continuità in probabilità:*  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$
5. *Incrementi stazionari:* la distribuzione di  $X_{t+s} - X_s$  non dipende da  $s$ .

Un processo che soddisfa le proprietà (1)-(5) è detto *processo di Lévy*; un processo che soddisfa le proprietà (1)-(4) è detto *processo additivo*.

Si osservi che il processo di Lévy costituisce il sottocaso di un processo additivo con la proprietà di avere gli incrementi stazionari.

### 1.2.1 Distribuzioni infinitamente divisibili

Viene introdotto ora il concetto di distribuzione infinitamente divisibile. Tale nozione verrà spesso utilizzata nella trattazione dei processi stocastici.

**Definizione 1.8** (Distribuzione Infinitamente Divisibile). Una misura di probabilità  $\mu$  su  $\mathbb{R}^d$  è *infinitamente divisibile* se, per ogni intero positivo  $n$ , esiste



una misura di probabilità  $\mu_n$  su  $\mathbb{R}^d$  tale che

$$\mu = \mu_n^n = \underbrace{\mu_n * \dots * \mu_n}_{n \text{ volte}}.$$

**Lemma 1.2.1** (Sato [1], Lemma 7.4). *Se  $\mu$  è infinitamente divisibile allora  $\Phi(z)$  non ha zeri, ovvero  $\Phi(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}^d$ .*

**Lemma 1.2.2** (Sato [1], Lemma 7.8). *Se  $\{\mu_k\}$  è una sequenza di distribuzioni infinitamente divisibili e  $\mu_k \rightarrow \mu$ , allora  $\mu$  è infinitamente divisibile.*

**Lemma 1.2.3** (Sato [1], Teorema 9.1). *Se  $\{X_t: t \geq 0\}$  è un processo additivo su  $\mathbb{R}^d$ , allora per ogni  $t$  la distribuzione di  $X_t$  è infinitamente divisibile.*

**Definizione 1.9** (Variabili Aleatorie Uguali in Distribuzione). Se due variabili aleatorie  $X, Y$  su  $\mathbb{R}^d$  sono *uguali in distribuzione*, cioè se  $P_X = P_Y$ , dove  $P_X$  e  $P_Y$  sono le distribuzioni di probabilità rispettivamente di  $X$  e  $Y$ , allora si scrive  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

**Definizione 1.10** (Processi Stocastici Uguali in Legge). Sia  $\{X_t: t > 0\}$  un processo stocastico. Per ogni sequenza fissata  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,

$$\mathbb{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n)$$

determina una misura di probabilità su  $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^n)$ . La famiglia delle misure di probabilità su tutte le scelte di  $n$  e  $t_1, \dots, t_n$  è chiamata *sistema di distribuzioni finito-dimensionali* di  $X_t$ .

Due processi stocastici  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  sono *uguali in legge*, scritto come

$$\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{Y_t\},$$

se i sistemi delle loro distribuzioni finito-dimensionali sono uguali.

## 1.2.2 La formula di Lévy-Khintchine e il teorema di Sato

Una distribuzione infinitamente divisibile risulta essere rappresentabile attraverso la sua funzione caratteristica e un set di parametri, come affermato dal teorema di Lévy-Khintchine.

**Teorema 1.2.4** (Sato [1], Teorema 8.1).

(i) *Se  $\mu$  è una distribuzione infinitamente divisibile su  $\mathbb{R}^d$ , allora*

$$\Phi(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle I_{|x| \leq 1}(x) \right) \nu(dx) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

dove  $A$  è una matrice  $d \times d$  simmetrica e definita positiva,  $\nu$  è una misura su  $\mathbb{R}^d$  tale che

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty \quad (1.4)$$

e  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ .

(ii) La rappresentazione di  $\Phi$  in (i) attraverso  $A, \nu$  e  $\gamma$  è unica.

(iii) Al contrario, se  $A$  è una matrice  $d \times d$  simmetrica e definita positiva,  $\nu$  è una misura che soddisfa le condizioni (1.4), e  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ , allora esiste una distribuzione infinitamente divisibile  $\mu$  la cui funzione caratteristica sia data da (1.3).

**Definizione 1.11** (Tripletta Caratteristica).  $(A, \nu, \gamma)$  è chiamata *tripletta caratteristica* di  $\mu$ . In particolare la misura  $\nu$  è detta misura di Lévy.

**Lemma 1.2.5** (Sato [1], Teorema 9.7).

(i) Sia  $\{X_t: t \geq 0\}$  un processo additivo su  $\mathbb{R}^d$  e, per  $0 \leq s < t < +\infty$ , sia  $\mu_{s,t}$  la distribuzione di  $X_t - X_s$ . Allora  $\mu_{s,t}$  è infinitamente divisibile e

$$\mu_{s,t} * \mu_{t,u} = \mu_{s,u}, \quad 0 \leq s < t < u < +\infty \quad (1.5)$$

$$\mu_{s,s} = \delta_0, \quad 0 \leq s < +\infty \quad (1.6)$$

$$\mu_{s,t} \rightarrow \delta_0, \quad s \uparrow t \quad (1.7)$$

$$\mu_{s,t} \rightarrow \delta_0, \quad t \downarrow s. \quad (1.8)$$

(ii) Se  $\{\mu_{s,t}: 0 \leq s < t < +\infty\}$  è un sistema di misure di probabilità su  $\mathbb{R}^d$  che soddisfa (1.5)-(1.8), allora esiste un processo additivo  $\{X_t: t \geq 0\}$  tale che, per  $0 \leq s < t < +\infty$ ,  $X_t - X_s$  abbia distribuzione  $\mu_{s,t}$ .

(iii) Se  $\{X_t\}$  e  $\{X'_t\}$  sono processi additivi su  $\mathbb{R}^d$  tali che  $\forall t \geq 0 \quad X_t \stackrel{d}{=} X'_t$ , allora  $\{X_t\}$  e  $\{X'_t\}$  sono uguali in legge.

Viene enunciato ora il teorema di Sato.

In questo teorema si specifica le proprietà che deve soddisfare la tripletta di Lévy di un processo additivo e come si può scrivere la funzione caratteristica di tale processo.

**Teorema 1.2.6** (Sato [1], Teorema 9.1-9.8; Cont-Tankov [2], Teorema 14.1).

(i) Sia il processo  $\{X_t : t \geq 0\}$  su  $\mathbb{R}^d$  additivo. Sia  $(A_t, \nu_t, \gamma_t)$  una tripletta caratteristica della distribuzione  $\mu_t = P_{X_t}$  per  $t \geq 0$ . Allora sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(I)  $A_0 = 0, \nu_0 = 0, \gamma_0 = 0$ . (Annullamento)

(II) Se  $0 \leq s < t < +\infty$ , allora  $\langle z, A_s z \rangle \leq \langle z, A_t z \rangle$  per  $z \in \mathbb{R}^d$  e  $\nu_s(B) \leq \nu_t(B)$  per  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . (Monotonia)

(III) Se  $s \rightarrow t$  in  $[0, +\infty]$ ,  $\langle z, A_s z \rangle \rightarrow \langle z, A_t z \rangle$  per  $z \in \mathbb{R}^d$ ,  $\nu_s(B) \rightarrow \nu_t(B)$  per  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  con  $B \subset \{x : |x| > \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , e  $\gamma_s \rightarrow \gamma_t$ . (Continuità)

(ii) Inversamente, sia  $(A_t, \nu_t, \gamma_t)$  una tripletta tale che soddisfi le condizioni (I)-(III). Allora esiste, unico in legge, un processo additivo  $\{X_t : t \geq 0\}$  tale che abbia  $(A_t, \nu_t, \gamma_t)$  come tripletta.

Inoltre la funzione caratteristica di  $X_t$  ha la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} \Phi_t(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle z, A_t z \rangle + i \langle \gamma_t, z \rangle \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle I_{|x| \leq 1}(x) \right) \nu_t(dx) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (1.9)$$

*Osservazione 2.* Il teorema di Sato è particolarmente semplice nel caso dei processi di Lévy. In questo caso basta sfruttare la proprietà valida per tali processi:

$$\mathbb{E} \left[ e^{i \langle z, X_t \rangle} \right] = e^{t \Psi(z)}$$

dove  $\Psi(z)$  è l'esponente caratteristico di  $X_1$ .

La tripletta risulta dunque essere pari a  $(tA, t\gamma, t\nu)$  dove  $(A, \gamma, \nu)$  è la tripletta di  $X_1$  e quindi le proprietà (I), (II) e (III) sono banalmente soddisfatte.

Nel seguito questo teorema sarà utilizzato per mostrare che il processo d'interesse in questa tesi è un processo additivo.

### 1.2.3 Subordinatori additivi Positive Tempered Stable

I subordinatori additivi Positive Tempered Stable sono processi additivi che soddisfano particolari proprietà e tali che la propria misura di Lévy abbia una particolare forma funzionale. Per descrivere questi processi spesso si fa riferimento alla nozione di esponente di Laplace.

**Definizione 1.12** (Subordinatore Additivo). Sia  $S_t$  un processo additivo con tripletta  $(0, \rho_t, b_t)$  con traiettorie quasi certamente non decrescenti e tale che soddisfi le seguenti condizioni:

$$\rho_t \text{ ha supporto in } [0, +\infty), \quad (1.10)$$

$$\int_0^{+\infty} (1 \wedge x) \rho_t(dx) < \infty. \quad (1.11)$$

Allora il processo  $S_t$  è detto *subordinatore additivo*.

**Proposizione 1.2.7** (Cont-Tankov [2], Paragrafo 4.2.2). *Sia  $S_t$  un subordinatore additivo. Allora la funzione generatrice di momenti di  $S_t$  risulta essere esprimibile nel seguente modo*

$$\mathbb{E} [e^{uS_t}] = e^{l_t(u)} \quad \forall u \leq 0$$

dove

$$l_t(u) = b_t u + \int_0^{+\infty} (e^{ux} - 1) \rho_t(dx).$$

La funzione  $l_t(u)$  è chiamata *esponente di Laplace*.

**Definizione 1.13** (Subordinatore Additivo PTS). Un subordinatore additivo  $S_t$  *Positive Tempered Stable* (PTS) è un processo additivo con traiettorie quasi certamente non decrescenti e con tripletta  $(0, \rho_t, b_t)$  tale che

$$\rho_t(x) = \frac{c_t e^{-\lambda_t x}}{x^{1+\alpha}} I_{x>0}$$

dove  $\alpha \in [0, 1)$  e  $c_t$  e  $\lambda_t$  sono due funzioni dipendenti dal tempo positive e la misura di Lévy  $\rho_t$  soddisfa le proprietà (1.10) e (1.11).

Nel caso di processi additivi PTS l'esponente di Laplace è esprimibile come segue:

$$l_t(u) = \begin{cases} -c_t \log \left( 1 - \frac{u}{\lambda_t} \right), & \alpha = 0 \\ c_t \Gamma(-\alpha) \{ (\lambda_t - u)^\alpha - \lambda_t^\alpha \}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

dove  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  è la funzione gamma di Eulero.

Per questi particolari processi si sceglie il parametro  $b_t$  nullo per ogni  $t$ . D'ora in poi si farà riferimento alla tripletta di un processo additivo PTS con  $(0, \rho_t, 0)$ .

### 1.3 Il modello di Black '76

Il *modello di Black '76*, generalizzazione del modello di Black&Scholes in cui si ipotizza un andamento log-normale del sottostante, assume che il prezzo forward di un sottostante abbia il seguente andamento esponenziale:

$$F_t(t) = F_0(t)e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}$$

dove  $\sigma$  è un parametro.

Si può scrivere tale modello anche in forma locale, ovvero:

$$\log \frac{F_t(t)}{F_0(t)} = f_t = -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t$$

In generale, il prezzo forward  $F_s(t)$  è il prezzo pagato al tempo  $t$  e stabilito al tempo  $s$ , con  $s \leq t$ , di un contratto che prevede l'acquisto in  $t$  di un sottostante. D'ora in avanti, con un lieve abuso di notazione, si indicherà  $F_t(t)$  con  $F_t$  e  $F_0(t)$  con  $F_0$ .

#### 1.3.1 Pricing

Utilizzando il modello di Black, il pricing di un'opzione europea risulta essere esprimibile in forma analitica chiusa. Considerando il caso di una call europea, il cui payoff a scadenza  $t$  è

$$Payoff(t) = (F_t - K)^+,$$

dove  $K$  è lo strike price, il valore all'istante  $t = 0$  di tale contratto è

$$C_B(F_0, K, \sigma, 0, t) = B(0, t) [F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (1.12)$$

dove  $B(0, t)$  è il discount factor,  $N(\cdot)$  è la cumulata della distribuzione normale standard e

$$d_1 = \frac{\log \frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}.$$

#### 1.3.2 Limitazioni del modello di Black '76

La semplicità del modello di Black comporta anche delle limitazioni. Di seguito si riportano i principali fatti empirici che il modello non riesce a catturare.

1. **Code grasse** La distribuzione dei rendimenti risulta avere le code della densità più spesse rispetto alla distribuzione normale.
2. **Continuità** Le traiettorie dei prezzi di mercato non risultano essere continue.
3. **Asimmetria** I grandi salti negativi dei prezzi di mercato non sono bilanciati da salti positivi di medesima rilevanza.
4. **Volatility clustering** Grandi variazioni di prezzo (in valore assoluto) tendono a essere seguite da grandi variazioni di prezzo; piccole variazioni di prezzo (in valore assoluto) tendono a essere seguite da piccole variazioni di prezzo.
5. **Smile di volatilità** Si osserva empiricamente, sulla base dei prezzi di mercato, che l'assunzione di  $\sigma$  costante è un'assunzione errata. Invertendo la formula di pricing (1.12) utilizzando i prezzi di mercato di un'opzione (call o put) è possibile ricavare il valore di  $\sigma = \sigma(K, t)$  in funzione dello strike  $K$  e dell'expiry  $t$ . Il valore  $\sigma(K, t)$  è chiamato *volatilità implicita*. Plottando tale valore a  $t$  fissato in funzione di  $K$  si nota lo *smile di volatilità*.

## 1.4 I modelli exponential Lévy

Il modello precedentemente descritto può essere visto come un caso particolare dei *modelli exponential Lévy*. Questi modelli prevedono l'utilizzo dei processi di Lévy per la descrizione del prezzo forward del sottostante. In generale si rappresenta il prezzo forward nella sua forma esponenziale come

$$F_t = F_0 e^{f_t} \quad (1.13)$$

dove  $f_t$  è un processo di Lévy.

Nel caso in cui  $X_t$  sia un moto Browniano con parametro di diffusione  $\sigma$  si ritrova il modello di Black.

Grazie all'introduzione dei salti nella dinamica del sottostante, è possibile generare distribuzioni dei rendimenti con code più grasse rispetto alla distribuzione normale del modello di Black.

I tipi di modelli più frequentemente utilizzati sono i modelli di tipo diffusivo a salti (e.g. *Merton* e *Kou*) e modelli a salto puro (e.g. *Variance Gamma* (VG))

e *Normal Inverse Gaussian* (NIG)).

Particolare attenzione sarà rivolta al secondo tipo di modelli. La costruzione di questi modelli può essere descritta attraverso una tecnica denominata *subordinazione*. In particolare vale che

$$f_t = \Theta S_t + \sigma W_{S_t} + \mu(t)$$

dove  $S_t$  è un subordinatore di Lévy. In particolare per VG e NIG sopra citati, il subordinatore  $S_t$  è un processo di Lévy avente distribuzione *Gamma* e *Inverse Gaussian*, rispettivamente, con valore atteso pari a  $t$  e varianza pari  $t\delta$ , dove  $\delta > 0$  è un parametro.

### 1.4.1 Pricing

Come nel caso del modello di Black, anche con gli exponential Lévy il pricing di opzioni europee è agevole. In questo contesto si possono utilizzare tecniche analitiche e numeriche di diffuso utilizzo in ambito finanziario, come la formula di Lewis e la *Fast Fourier Transform* (FFT), applicabili alla funzione caratteristica di un processo stocastico.

Tali tecniche verranno trattate in seguito.

### 1.4.2 Limitazioni degli exponential Lévy

I modelli di Lévy costituiscono una semplice generalizzazione del modello di Black '76, e per questo sono un'attraente scelta modellistica. Tuttavia anche questi modelli presentano delle limitazioni, in particolare in fase di calibrazione della superficie di volatilità implicita osservata sul mercato.

1. **Difficoltà di calibrazione** È stato osservato (cfr. e.g. Cont-Tankov, Cap.13.5.2) che, fissata un'expiry, mediante la calibrazione dei modelli in questa classe si riescono a riprodurre fedelmente i valori di mercato. Tuttavia la superficie di volatilità implicita che si ottiene calibrando il modello sull'intera superficie di mercato, considerando tutte le expiry disponibili, presenta errori di calibrazione spesso troppo elevati.
2. **Comportamento asintotico** Come si vedrà in seguito, quando il time to maturity tende a zero, gli exponential Lévy descrivono un comportamento della superficie di volatilità implicita di modello con una singolarità rispetto allo strike che non si riscontra nella realtà dei mercati.

## 1.5 I modelli additivi

In questa tesi si desidera estendere i modelli di Lévy, preservando da un lato alcuni tratti salienti della loro semplicità, ma dall'altro consentendo un'adeguata calibrazione della superficie di volatilità implicita di mercato. L'estensione dei modelli di Lévy sono i *modelli additivi*, in cui si rilassa l'ipotesi di stazionarietà degli incrementi del processo stocastico.

### 1.5.1 Costruzione del processo additivo

L'idea è quella di costruire il processo additivo con l'utilizzo di parametri dipendenti dal tempo e dei subordinatori additivi descritti precedentemente. Come menzionato inizialmente, il modello considerato è il modello (1.1)

$$F_t = F_0 e^{f_t}, \quad (1.14)$$

dove il processo additivo  $f_t$  è esprimibile con la (1.2), cioè

$$f_t = \Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t} + \mu(t), \quad (1.15)$$

dove  $\Theta(t)$  e  $\sigma(t)$  sono funzioni deterministiche del tempo,  $W_t$  è un moto Browniano standard e  $S_t$  è un subordinatore additivo indipendente rispetto a  $W_t$  tale che, a  $t$  fissato, sia una variabile aleatoria positiva con valore atteso pari a  $t$  e varianza pari a  $t^2\kappa(t)$ , e  $\kappa(t)$  funzione del tempo positiva. La funzione deterministica del tempo  $\mu(t)$  sarà univocamente determinata una volta imposta la condizione di neutralità rispetto al rischio del modello (cfr. Sez. 1.6).

Risulta comodo esprimere il parametro  $\Theta(t)$  come

$$\Theta(t) = - \left( \frac{1}{2} + \eta(t) \right) \sigma(t)^2. \quad (1.16)$$

Tale scrittura permette di identificare  $\eta(t)$  come la funzione che gestisce il livello di asimmetria (skewness) della superficie di volatilità implicita: nel caso in cui  $\eta(t) = 0$  si ottiene il caso simmetrico, nel caso in cui  $\eta(t) > 0$  e  $\eta(t) < 0$  si ottiene il caso di asimmetria positiva e negativa, rispettivamente.

**Proposizione 1.5.1.** *Si consideri il modello additivo (1.1) con  $f_t$  dato da (1.15). Sia  $\Theta(t)$  dato da (1.16) e sia  $\eta(t) = 0 \forall t > 0$ . Allora la superficie di volatilità implicita è simmetrica.*

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □



Per la costruzione del modello ci si concentrerà in particolare su subordinatori  $S_t$  PTS con

$$\kappa(t) = \frac{\delta}{t^\beta},$$

dove  $\delta > 0$ .

Per proseguire occorre trovare le espressioni dei parametri della misura di Lévy di  $S_t$ ; infatti, affinché il processo  $S_t$  posseda le proprietà distribuzionali sopra menzionate, occorre trovare le forme funzionali di  $c(t)$  e  $\lambda(t)$  della misura di Lévy di tale processo.

Per trovare le espressioni di  $\lambda_t$  e  $c_t$  in funzione del tempo si sfruttano le seguenti proprietà:

$$\mathbb{E}[S_t] = \frac{\partial \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial u} \Big|_{u=0}, \quad \mathbb{E}[S_t^2] = \frac{\partial^2 \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial^2 u} \Big|_{u=0}. \quad (1.17)$$

Si osservi che sapendo che  $\mathbb{E}[S_t] = t$  e  $Var[S_t] = t^2\kappa(t)$  si deduce che  $\mathbb{E}[S_t^2] = t^2 + t^2\kappa(t)$ .

L'analisi viene svolta in due casi differenti, ovvero quando  $\alpha = 0$  e quando  $\alpha \neq 0$ , considerando  $\kappa(t)$  come una generica funzione del tempo.

- $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \frac{\partial \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-c_t \log(1 - \frac{u}{\lambda_t})} \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{c_t}{\lambda_t} \frac{1}{1 - \frac{u}{\lambda_t}} e^{-c_t \log(1 - \frac{u}{\lambda_t})} \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{c_t}{\lambda_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t^2] &= \frac{\partial^2 \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial u^2} \Big|_{u=0} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} e^{-c_t \log(1 - \frac{u}{\lambda_t})} \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{c_t}{\lambda_t} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{u}{\lambda_t}} e^{-c_t \log(1 - \frac{u}{\lambda_t})} \right) \right] \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{c_t}{\lambda_t} \left( \frac{1}{\lambda_t} + \frac{c_t}{\lambda_t} \right) \end{aligned}$$

Si impone che

$$\begin{cases} \frac{c_t}{\lambda_t} = t \\ \frac{c_t}{\lambda_t} \left( \frac{1}{\lambda_t} + \frac{c_t}{\lambda_t} \right) = t^2 + t^2\kappa(t) \end{cases}$$

Dopo qualche passaggio e semplificazione:

$$\begin{cases} c_t = t\lambda_t \\ \lambda_t = \frac{1}{t\kappa(t)} \end{cases}$$

$$\implies \lambda_t = \frac{1}{t\kappa(t)}, \quad c_t = \frac{1}{\kappa(t)}$$

•  $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \left. \frac{\partial \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial u} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial}{\partial u} e^{c_t \Gamma(-\alpha) \{(\lambda_t - u)^\alpha - \lambda_t^\alpha\}} \right|_{u=0} = \\ &= -\alpha (\lambda_t - u)^{\alpha-1} c_t \Gamma(-\alpha) e^{c_t \Gamma(-\alpha) \{(\lambda_t - u)^\alpha - \lambda_t^\alpha\}} \Big|_{u=0} = \\ &= -\alpha \lambda_t^{\alpha-1} c_t \Gamma(-\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t^2] &= \left. \frac{\partial^2 \mathbb{E}[e^{uS_t}]}{\partial u^2} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} e^{c_t \Gamma(-\alpha) \{(\lambda_t - u)^\alpha - \lambda_t^\alpha\}} \right|_{u=0} = \\ &= (-\alpha c_t \Gamma(-\alpha)) \left. \frac{\partial}{\partial u} [(\lambda_t - u)^{\alpha-1} e^{c_t \Gamma(-\alpha) \{(\lambda_t - u)^\alpha - \lambda_t^\alpha\}}] \right|_{u=0} = \\ &= \alpha(\alpha - 1) c_t \Gamma(-\alpha) \lambda_t^{\alpha-2} + \alpha^2 c_t^2 \Gamma(-\alpha)^2 \lambda_t^{2(\alpha-1)} \end{aligned}$$

Si impone che

$$\begin{cases} -\alpha \lambda_t^{\alpha-1} c_t \Gamma(-\alpha) = t \\ \alpha(\alpha - 1) c_t \Gamma(-\alpha) \lambda_t^{\alpha-2} + \alpha^2 c_t^2 \Gamma(-\alpha)^2 \lambda_t^{2(\alpha-1)} = t^2 + t^2 \kappa(t) \end{cases}$$

Dopo qualche passaggio e semplificazione:

$$\begin{cases} c_t = -\frac{\lambda_t^{1-\alpha}}{\alpha \Gamma(-\alpha)} t \\ \lambda_t = \frac{1-\alpha}{t\kappa(t)} \end{cases}$$

$$\implies \lambda_t = \frac{1-\alpha}{t\kappa(t)}, \quad c_t = -\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha \Gamma(-\alpha)} \frac{t}{(t\kappa(t))^{1-\alpha}}$$

In particolare quando  $\kappa(t) = \frac{\delta}{t^\beta}$  si ottengono le seguenti espressioni per la misura di Lévy del subordinatore additivo  $S_t$ :

$$\rho_t(x) = \frac{1}{\delta t^{-\beta}} \frac{e^{-\frac{x}{\delta t^{1-\beta}}}}{x} I_{x>0} \quad \alpha = 0 \quad (1.18)$$

$$\rho_t(x) = -\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha \Gamma(-\alpha)} \frac{t}{(\delta t^{1-\beta})^{1-\alpha}} \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha)}{\delta t^{1-\beta}}}}{x^{1+\alpha}} I_{x>0} \quad \alpha \neq 0 \quad (1.19)$$

Per proseguire occorre verificare che la misura di Lévy trovata sia effettivamente propria di un processo additivo: occorre dunque che soddisfi le proprietà richieste dal teorema di Sato 1.2.6.

**Proposizione 1.5.2.** *La misura  $\rho_t(dx)$  di  $S_t$  soddisfa le proprietà richieste dal teorema di Sato 1.2.6, cioè*

(I)  $\rho_0(x) = 0 \forall x > 0$  fissato (Annullamento)

(II) Se  $s < t$ , allora  $\rho_s(x) \leq \rho_t(x) \forall x > 0$  fissato (Monotonia)

(III) Se  $s \rightarrow t$ , allora  $\rho_s(x) \rightarrow \rho_t(x) \forall x > 0$  fissato (Continuità)

$\forall \alpha \in [0, 1)$  se e solo se  $\beta \in [0, 1]$ .

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □

Di seguito viene riportato il grafico 1.1 delle misure di Lévy in funzione del tempo ad  $\alpha = 0.2$  ed  $x = 1$  fissati e al variare di  $\beta$ . Si nota chiaramente che la proprietà di monotonia viene soddisfatta solo se  $\beta \in [0, 1]$ .

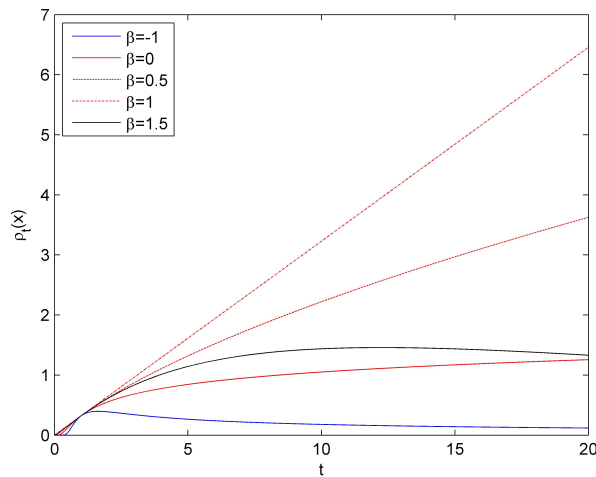


Figura 1.1:  $\rho_t(x)$  al variare di  $\beta$  e del tempo in  $x = 1$  e  $\alpha = 0.2$  fissati. Si noti che nel caso  $\beta = -1$  (linea blu) e  $\beta = 1.5$  (linea nera) la proprietà di monotonia non viene soddisfatta, mentre nei rimanenti casi  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta = 1$  (linea rossa continua, punteggiata e tratteggiata, rispettivamente) la proprietà richiesta viene soddisfatta.

### 1.5.2 La tripletta caratteristica

Per proseguire occorre trovare la tripletta caratteristica del processo  $f_t$ . La tripletta viene fornita dal seguente teorema valido per un generico subordinatore additivo.

**Teorema 1.5.3.** *Sia  $f_t = \Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t}$  dove  $S_t$  è un subordinatore additivo indipendente rispetto a  $W_t$  con tripletta  $(0, \rho_t, b_t)$ . Sia  $\lambda_t(dx)$  la densità di probabilità di  $S_t$  al tempo  $t$  e sia  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Allora il processo  $f_t$  è un processo stocastico su  $\mathbb{R}$  con tripletta  $(A_t^f, \nu_t^f, \gamma_t^f)$  tale che*

(i)

$$\mathbb{P}(f_t \in B) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\Theta(t)s + \sigma(t)W_s \in B) \lambda_t(ds) := \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \lambda_t(ds)$$

(ii)

$$A_t^f = b_t \sigma(t)^2$$

(iii)

$$\gamma_t^f = b_t \Theta(t) + \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{|x| \leq 1} x \mu_{s,t}(dx)$$

(iv)

$$\nu_t^f(B) = \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \rho_t(ds)$$

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □

Nel caso di un subordinatore additivo PTS, si ottiene la seguente proposizione.

**Proposizione 1.5.4.** *Sia  $f_t = \Theta(t)S_t + \sigma W_{S_t}$  dove  $S_t$  è un subordinatore additivo PTS indipendente rispetto a  $W_t$  con tripletta  $(0, \rho_t, 0)$  con  $\rho_t$  data da (1.18) o da (1.19), e dove  $\Theta(t) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{\eta}}{t\omega}\right) \sigma^2$ , con  $\bar{\eta}$  e  $\omega$  entrambi positivi, è una funzione crescente del tempo. Sia  $\lambda_t(dx)$  la densità di probabilità di  $S_t$  al tempo  $t$  e sia  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Allora il processo  $f_t$  è un processo stocastico additivo su  $\mathbb{R}$  con tripletta  $(A_t^f, \nu_t^f, \gamma_t^f)$  tale che*

(i)

$$\mathbb{P}(f_t \in B) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\Theta(t)s + \sigma W_s \in B) \lambda_t(ds) := \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \lambda_t(ds)$$

(ii)

$$A_t^f = 0 \quad \forall t > 0$$

(iii)

$$\gamma_t^f = \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{|x| \leq 1} x \mu_{s,t}(dx)$$

(iv)

$$\nu_t^f(B) = \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \rho_t(ds)$$

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □

*Osservazione 3.* La proposizione 1.5.4 continua a valere anche nel caso in cui  $\sigma = \sigma(t)$ , dove  $\sigma(t)$  è una funzione del tempo limitata superiormente e inferiormente.

### 1.5.3 Gli exponential Lévy come caso particolare

Come menzionato precedentemente, è possibile ottenere il modello degli exponential Lévy, ovvero il caso in cui il processo  $f_t$  sia un processo di Lévy, scegliendo opportunamente i parametri del modello additivo.

Si consideri il caso in cui i parametri  $\Theta(t)$  e  $\sigma(t)$  non dipendano dal tempo, cioè se  $\Theta(t) = \Theta$  e  $\sigma(t) = \sigma$ , e si consideri un subordinatore additivo con valore atteso  $t$  e varianza  $t\delta$ , ottenuto ponendo  $\beta = 1$  nell'espressione  $\kappa(t)$ . In tal caso il processo  $S_t$  risulta essere un subordinatore di Lévy, cioè un processo di Lévy crescente su  $\mathbb{R}^+$ .

Si parla di subordinatore PTS nel caso in cui il subordinatore additivo PTS abbia la caratteristica aggiuntiva di essere un processo di Lévy.

Si consideri un processo di Lévy  $X(t) = \Theta t + \sigma W_t$ . Subordinando  $X(t)$  con il subordinatore  $S_t$ , cioè cambiando il tempo  $t$  nel tempo  $S_t$ , avente le caratteristiche sopra enunciate, si ottiene

$$f_t = \Theta S_t + \sigma W_{S_t}.$$

Il processo  $f_t$  risulta essere un processo di Lévy come affermato dal seguente teorema.

**Teorema 1.5.5** (Cont-Tankov [2], Teorema 4.2). *Si fissi uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Sia  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processo di Lévy su  $\mathbb{R}^d$  con esponente caratteristico  $\Psi(u)$  e tripletta  $(A, \nu, \gamma)$  e sia  $(S_t)_{t \geq 0}$  un subordinatore con esponente di Laplace*

$l(u)$  e tripletta  $(0, \rho, b)$ . Allora il processo  $(Y_t)_{t \geq 0}$  definito per ogni  $\omega \in \Omega$  come  $Y(t, \omega) = X(S(t, \omega), \omega)$  è un processo di Lévy.

La sua funzione caratteristica è

$$\mathbb{E} [e^{iuY_t}] = e^{tl(\Psi(u))},$$

cioè l'esponente caratteristico di  $Y_1$  è ottenuto tramite composizione dell'esponente di Laplace di  $Z_1$  con l'esponente caratteristico di  $X_1$ . La tripletta di  $Y_1$   $(A^Y, \nu^Y, \gamma^Y)$  è data da

- $A^Y = bA$ ,
- $\nu^Y(B) = b\nu(B) + \int_0^{+\infty} p_s^X(B)\rho(ds), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,
- $\gamma^Y = b\gamma + \int_0^{+\infty} \rho(ds) \int_{|x| \leq 1} xp_s^X(dx)$ ,

dove  $p_t^X$  è la distribuzione di probabilità di  $X_t$ .

Si dice che il processo  $(Y_t)_{t \geq 0}$  è subordinato al processo  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

Nel caso in cui si utilizzi un subordinatore PTS, scegliendo il parametro  $\alpha$  della misura di Lévy di  $S_t$  pari a 0 o 0.5, ossia corrispondente a un subordinatore che abbia distribuzione *Gamma* e *Inverse Gaussian* rispettivamente, si ottengono i modelli *Variance Gamma* e *Normal Inverse Gaussian*.

*Osservazione 4.* Il teorema 1.5.5 può essere visto come caso particolare del teorema 1.5.3 nel caso in cui il processo sia di Lévy con parametri costanti.

### 1.5.4 L'assenza di arbitraggio nei modelli additivi

Al fine di fare pricing, occorre introdurre un ulteriore concetto: l'assenza di opportunità di arbitraggio.

Un arbitraggio è tipicamente una “*deterministic money making machine*”: è un portafoglio che non richiede nessun esborso iniziale e tale da offrire possibilità di guadagno. Spesso si fa riferimento ad un arbitraggio con il termine “*free lunch*”. L'interpretazione dell'esistenza di un arbitraggio è quella di un caso di *mispricing* nei prezzi di mercato. È quindi opportuno definire un modello di mercato *privo di arbitraggio*. Infatti, nella realtà di mercato possono verificarsi situazioni di *mispricing* ma, essendo tali occasioni sfruttate immediatamente dagli operatori di mercato, per la legge della domanda e dell'offerta, il prezzo si riporta a valori tali da escludere possibilità di arbitraggio.

Occorre dunque trovare delle condizioni affinché un modello additivo risulti essere privo di arbitraggio. In particolare vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.5.6** (Cont-Tankov [2], Proposizione 3.18 e Paragrafo 14.2).  
Sia  $f_t$  un processo additivo con tripletta caratteristica  $(A_t^f, \nu_t^f, \gamma_t^f)$  tale che

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu_t(dx) < +\infty \quad \forall t.$$

Allora il processo  $e^{f_t}$  è una martingala se e solo se

$$\mathbb{E}[e^{f_t}] = \Phi_t(-i) = \exp \left\{ \frac{A_t^f}{2} + \gamma_t^f + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - xI_{|x| \leq 1}) \nu_t^f(dx) \right\} = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Nel prossimo capitolo il modello additivo utilizzato per la descrizione del forward di mercato sarà il modello (1.15) con il subordinatore additivo PTS avente misura di Lévy come in (1.19) o (1.18). D'ora in avanti quando si parlerà di modello additivo si intenderà il modello additivo sopra descritto. Si vuole dunque trovare la condizione di assenza di arbitraggio per questo modello, cioè trovare una forma funzionale per  $\mu(t)$  tale da rendere il modello risk neutral.

Si consideri inizialmente  $\mu(t) = 0 \quad \forall t > 0$ .

Si scriva la funzione caratteristica di  $e^{f_t}$  calcolata in  $-i$ . Per l'indipendenza tra  $S_t$  e  $W_t$  si ha che

$$\Phi_t(-i) = \mathbb{E}[e^{f_t}] = \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Theta(t)s + \sigma(t)\sqrt{sg}} h(dg) \right) \lambda_t(ds)$$

dove

- $\lambda_t(ds)$  è la densità di probabilità di  $S_t$  al tempo  $t$  fissato,
- $W_s$  è uguale in distribuzione alla variabile aleatoria  $\sqrt{sg}$  dove  $g \sim N(0, 1)$ ,
- $h(dg)$  è la densità di probabilità di  $g$ .

Scrivendo esplicitamente la distribuzione di  $g$  si ha che

$$\begin{aligned} \Phi_t(-i) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Theta(t)s + \sigma(t)\sqrt{sg}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g^2}{2}} dg \right) \lambda_t(ds) = \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(g^2 - 2\Theta(t)s - 2\sigma(t)\sqrt{sg})} dg \right) \lambda_t(ds) = \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(g - \sigma(t)\sqrt{s})^2} dg}_{=1} \right) e^{\Theta(t)s + \frac{\sigma(t)^2 s}{2}} \lambda_t(ds) = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\Theta(t)s + \frac{\sigma(t)^2 s}{2}} \lambda_t(ds) = \int_0^{+\infty} e^{s \left( \Theta(t) + \frac{\sigma(t)^2}{2} \right)} \lambda_t(ds). \end{aligned}$$

Dato che si è assunto che  $\Theta(t) = -\left(\frac{1}{2} + \eta(t)\right) \sigma(t)^2$ , sostituendo si ottiene che

$$\Phi_t(-i) = \int_0^{+\infty} e^{-s\eta(t)\sigma(t)^2} \lambda_t(ds) = \mathcal{L}[\eta(t)]$$

dove  $\mathcal{L}[\cdot]$  è la trasformata di Laplace di  $S_t$  definita nel seguente modo:

$$\mathcal{L}[\omega] = \int_0^{+\infty} e^{-\omega s \sigma(t)^2} \lambda_t(ds). \quad (1.20)$$

Si nota quindi che  $\Phi_t(-i) = \mathcal{L}[\eta(t)]$ . Affinchè  $e^{f_t}$  sia una martingala e affinché il pricing risulti risk neutral, occorre dunque considerare il seguente  $f_t$  :

$$f_t = \Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t} - \log \mathcal{L}[\eta(t)],$$

cioè

$$\mu(t) = -\log \mathcal{L}[\eta(t)].$$

Effettuando tale modifica, la funzione caratteristica di  $f_t$  scritta in un generico punto  $z$  risulta essere

$$\begin{aligned} \Phi_t(z) &= \mathbb{E} [e^{izf_t}] = \\ &= e^{-iz \log \mathcal{L}[\eta(t)]} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(g^2 - 2iz\sqrt{sg}) + iz\Theta(t)s} dg \right) \lambda_t(ds) = \\ &= e^{-iz \log \mathcal{L}[\eta(t)]} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(g - iz\sigma(t)\sqrt{s})^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{-\frac{z^2}{2}\sigma(t)^2 s - iz\left(\frac{1}{2} + \eta(t)\right)\sigma(t)^2 s} dg \right) \lambda_t(ds) = \\ &= e^{-iz \log \mathcal{L}[\eta(t)]} \mathcal{L} \left[ \frac{z^2 + i(1 + 2\eta(t))z}{2} \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

L'espressione della funzione caratteristica sarà utilizzata nella formula di Lewis al fine di fare pricing, come spiegato nel capitolo 3.



## Capitolo 2

# Descrizione dei dati mercato

Nel presente capitolo si descrivono i dati di mercato utilizzati per calibrare il modello additivo (1.1) e ricostruire la superficie di volatilità implicita. In particolare viene spiegato come sono stati utilizzati effettivamente i dati a disposizione. Tutte le informazioni di mercato sono state prese da *Bloomberg*<sup>TM</sup>.

### 2.1 Dati di mercato

Sono stati considerati il mercato europeo *Eurex* e il mercato americano *CBOT*. Il primo è il principale mercato europeo di strumenti derivati, mentre il secondo è il principale mercato americano di strumenti derivati. Volendo scegliere le opzioni equity più liquide da utilizzare per la calibrazione del modello, gli indici considerati come sottostanti sono l'*Euro Stoxx 50* ®, per il mercato Eurex, e l'*S&P 500* ®, per il mercato CBOT, due dei più liquidi indici azionari.

L'Euro Stoxx 50 è un indice di titoli dell'eurozona volto a rappresentare le 50 maggiori società di 12 stati appartenenti all'eurozona: Austria, Belgio, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Portogallo e Spagna.

L'S&P 500 è un indice che segue un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitensi a maggiore capitalizzazione. Appartenenti a questo paniere sono le azioni di grandi aziende contrattate al NYSE, all'Amex e al Nasdaq.

Entrambi gli indici vengono utilizzati da istituzioni finanziarie come sottostanti di prodotti come l'Exchange Traded Fund (ETF), Futures e Opzioni, e prodotti strutturati.

I dati ricercati sono relativi a opzioni di tipo europeo e con gli indici Euro Stoxx 50 e S&P 500 come sottostante. I dati sono composti dalle seguenti voci:

- Prezzi di mercato (BID e ASK) di opzioni europee,
- Data di riferimento  $t_0$  e date di expiry  $t$ ,
- Prezzo spot del sottostante e strikes delle opzioni,
- Curva risk free *EONIA*  $\text{\textcircled{R}}$  (per i prodotti in EUR) e curva risk free *OIS*  $\text{\textcircled{R}}$  (per i prodotti in USD).

Le date di riferimento rappresentano l'istante di mercato in cui si hanno le informazioni. Le date di riferimento considerate sono il 30/05/2013, il 06/06/2013, il 13/06/2013 e il 28/06/2013: le prime tre sono date antecedenti la prima data di expiry 21/06/2013 delle opzioni, mentre la quarta è successiva a tale expiry. Si precisa che ad un dato istante di mercato sono state considerate tutte le opzioni sulle scadenze standard quotate sul relativo mercato, anche le meno liquide: i dati utilizzati sono una "fotografia" del mercato ad un dato istante della data di riferimento.

Come affermato prima, si hanno a disposizione i prezzi BID e ASK delle opzioni su uno dei due indici considerati.

Si ricorda che il prezzo BID di uno strumento finanziario è il prezzo a cui un *market maker* è disposto a comprare tale strumento finanziario, mentre il prezzo ASK è il prezzo a cui esso è disposto a vendere lo stesso strumento finanziario. Nella ricerca dei dati sono stati considerati il miglior prezzo ASK ed il miglior prezzo BID presenti. Si osserva che  $ASK > BID$ : in caso contrario sarebbe stato possibile un arbitraggio. Infine, con il termine *spread* si intende invece la differenza tra BID e ASK:

$$Spread = ASK - BID.$$

In generale un'opzione europea ha il seguente payoff a scadenza:

$$Payoff(t) = \omega (F_t - K)^+$$

dove  $K$  è lo strike,  $\omega = \pm 1$  a seconda che si tratti di una call ( $\omega = 1$ ) o di una put ( $\omega = -1$ ) e  $t$  è la data di expiry dell'opzione. Le opzioni hanno scadenza trimestrale (Marzo, Giugno, Settembre e Dicembre), e questa avviene al terzo venerdì del mese di expiry.

Si definiscano i seguenti insiemi di mesi:

$$M_1 = \{Marzo; Giugno; Settembre; Dicembre\}$$

$$M_2 = \{Giugno; Dicembre\}$$

L'insieme delle date di expiry è composto dalle seguenti date di expiry:

- Le date di expiry del primo anno sono il terzo venerdì dei mesi che appartengono all'insieme  $M_1$ , a distanza trimestrale tra di loro.
- Le successive date del secondo anno sono il terzo venerdì dei mesi che appartengono all'insieme  $M_2$ , a distanza semestrale tra di loro.
- A partire dal terzo anno le date di expiry corrispondono al terzo venerdì del mese di Dicembre, a distanza annuale tra loro.

Si precisa che quando ci si riferisce, per esempio, al primo anno, si intende a partire dalla data di riferimento. Lo stesso vale per gli altri due punti sopra.

Per quanto riguarda gli strikes, le opzioni sono scritte su strikes che variano da 900€ a 4.700€ con passo di 100€ per opzioni su Euro Stoxx 50, e strikes che variano da 1.125\$ a 2.075\$ con passo di 25\$ per opzioni su S&P 500.

La curva risk free utilizzata per i discount factors è la curva *EONIA*® (Euro OverNight Index Average) per le opzioni su Euro Stoxx 50, mentre è la curva *OIS*® (Overnight Indexed Swap) per le opzioni su S&P 500.

L'EONIA è il tasso di interesse medio di riferimento nelle operazioni a brevissima scadenza (overnight) svolte sul mercato interbancario europeo. Il tasso EONIA è anche utilizzato come riferimento per diversi strumenti derivati (Indici, ETF, Futures, Certificates) ed altri contratti finanziari.

L'OIS è il corrispettivo tasso di interesse medio per il mercato americano.

In generale si indica con  $r(t_0, t)$  lo zero rate applicato all'intervallo  $(t_0, t)$  e vale la seguente relazione tra il discount factor  $B(t_0, t)$  e lo zero rate  $r(t_0, t)$  :

$$B(t_0, t) = e^{-r(t_0, t)(t-t_0)}. \quad (2.1)$$

La convenzione temporale utilizzata per gli intervalli di tempo è la *Act/365*.

Tale convenzione implica che l'intervallo temporale considerato sia pari al numero effettivo di giorni nel periodo di calcolo degli interessi diviso per 365.

Le date dei valori dei discount factors disponibili spesso non coincidono con la data di expiry di un'opzione. In tal caso sarà necessario interpolare per ottenere il discount factor alla data desiderata. La tecnica di interpolazione verrà spiegata nella prossima sezione.

### 2.1.1 Interpolazione della curva di sconto

Siano  $t_j$  le date dei discount factors della curva, siano  $t_i$  le date di interesse (in questo caso le date di expiry delle opzioni) in cui è necessario trovare il valore del discount factor e sia  $t_0$  la data di riferimento.

Prima di tutto si inverte la relazione (2.1) per trovare i valori degli zero rates  $r(t_0, t_j)$  :

$$r(t_0, t_j) = -\frac{1}{t_j - t_0} \log B(t_0, t_j).$$

In seguito si procede con un'interpolazione lineare degli zero rates. Il valore  $r(t_0, t_i)$  è quindi calcolato come

$$r(t_0, t_i) = r(t_0, t_j) + \frac{r(t_0, t_{j+1}) - r(t_0, t_j)}{t_{j+1} - t_j} (t_i - t_j)$$

dove  $t_0 < t_j < t_i < t_{j+1}$ . Come menzionato prima, l'intervallo di tempo è calcolato con la convenzione temporale *Act/365*.

Si riportano in figura 2.1 e in figura 2.2 i grafici degli zero rates EONIA e OIS ottenuti nel caso di Euro Stoxx 50 e nel caso di S&P 500, rispettivamente, alla data di riferimento 30/05/2013.

Una volta ricavati i valori degli zero rate nelle date di interesse, è possibile trovare i valori dei discount factors relativi all'intervallo  $(t_0, t_i)$  :

$$B(t_0, t_i) = e^{-r(t_0, t_i)(t_i - t_0)}.$$

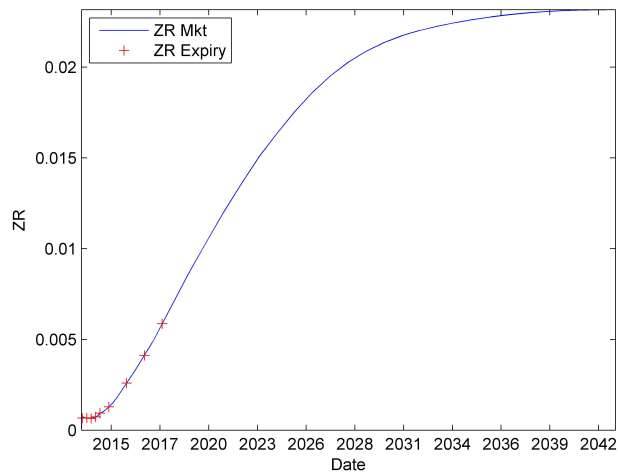


Figura 2.1: Zero Rates EONIA interpolati nelle date di expiry per Euro Stoxx 50 in data 30/05/2013

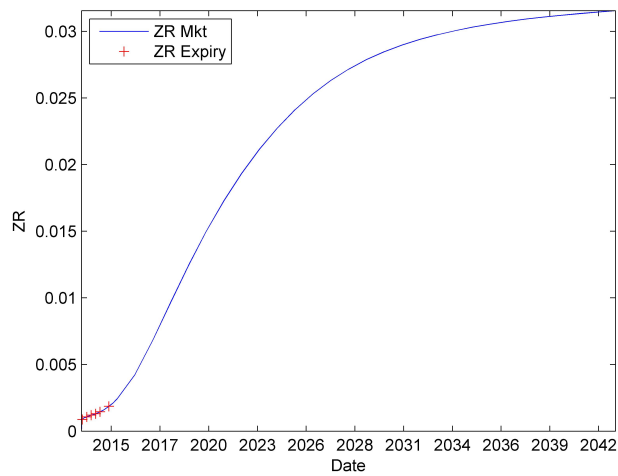


Figura 2.2: Zero Rates OIS interpolati nelle date di expiry per S&P 500 in data 30/05/2013

## 2.2 Filtro di liquidità

Come affermato in precedenza, i dati considerati sono tutte le opzioni quotate. Occorre dunque selezionare le opzioni più liquide sulla base di alcuni criteri di liquidità; non si desidera che la superficie di volatilità implicita, su cui si calibra, sia “falsata” da valori presenti sul mercato ma in realtà pochissimo liquidi.

L'insieme di tali criteri è chiamato *filtro di liquidità*.

**Definizione 2.1** (Strumento Liquido). Uno strumento finanziario è detto *liquido* se è facilmente scambiabile sul mercato. In generale un mercato garantisce liquidità se in quel mercato vi è la possibilità di liquidare la propria posizione (lunga o corta) con relativa facilità e ottenere denaro contante.

Sono state escluse le opzioni che non verificano uno dei seguenti criteri:

- Filtro sulle penny-option:  $BID > \tilde{\beta}\Delta K$
- Filtro sullo spread BID-ASK:  $\left| \frac{ASK-BID}{BID} \right| < \tilde{\alpha}$

dove  $\Delta K$  è il passo di discretizzazione degli strikes (100€ per opzioni su Euro Stoxx 50 e 25\$ per opzioni su S&P 500) e  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\alpha}$  sono valori in percentuale appartenenti all'intervallo (0, 1).

Il secondo criterio esclude anche le opzioni di cui è quotato solo il BID o l'ASK nel caso in cui  $\tilde{\alpha} < 1$ . In particolare i valori scelti sono stati  $\tilde{\beta} = 0.25$  e  $\tilde{\alpha} = 0.6$ , ovvero sono state escluse le opzioni su Euro Stoxx 50 che presentavano un BID minore di 25€, le opzioni su S&P 500 che presentavano un BID minore di 6.25\$ e opzioni che presentavano uno spread maggiore del 60% del BID.

### 2.2.1 Il prezzo forward alla data di riferimento

Una volta filtrati i prezzi delle opzioni è necessario ricavare il valore del forward price  $F_0$  alla data di riferimento.

Si ricorda la relazione *put-call parity* che lega il valore di un'opzione put e il valore di un'opzione call scritte sullo stesso sottostante avente prezzo forward  $F_0$ , con stessa scadenza  $t$  e stesso strike  $K$ :

$$C_s - P_s = B(s, T)(F_s - K), \quad (2.2)$$

dove  $s < t$ .

Per ricavare  $F_0$  si procede nel seguente modo:

- Si prende in considerazione come prezzo di un'opzione il prezzo MID, ovvero il prezzo medio tra BID e ASK;
- Fissata una data di expiry si calcolano i prezzi forward  $F_0$  per ogni opzione invertendo la put-call parity (2.2):

$$F_0 = K + \frac{C_{t_0} - P_{t_0}}{B(t_0, T)},$$

dove  $t_0$  è la data di riferimento.

Anche per i valori trovati di  $F_0$  si effettua un filtraggio:

- Se una determinata opzione call o put non è quotata si esclude la corrispondente put o call con la stessa scadenza e stesso strike;
- Per ogni scadenza  $t$  si esclude una percentuale  $\tilde{\gamma}$  degli  $F_0$  con valore più alto e una percentuale  $\tilde{\gamma}$  degli  $F_0$  con valore più basso, con il vincolo di avere almeno tre valori di  $F_0$  ad ogni scadenza.

Il valore di  $\tilde{\gamma}$  scelto è 0.4. Infine, si effettua una media degli  $F_0$  ottenuti dopo il filtraggio per ogni data di scadenza e si adotta tale media come valore per  $F_0$ . Questo corrisponde al forward sintetico sulle scadenze delle opzioni quotate.

## 2.3 La superficie di calibrazione

Infine, come ultimo passo prima della calibrazione del modello additivo, occorre preparare la superficie dei prezzi su cui calibrare. Gli strumenti scelti su cui calibrare il modello sono i prezzi delle call europee. Come sarà riportato nel prossimo capitolo, è equivalente calibrare sui prezzi delle put o sui prezzi delle call.

Si definisca la *log-moneyness* nel seguente modo:

$$k = \log \frac{K}{F_0}. \quad (2.3)$$

Sia  $t_0 = 0$  la data di riferimento. Il prezzo di una put ottenuto tramite la formula di Black in funzione della log-moneyness all'istante  $t_0$  e con scadenza  $t$  è pari a

$$P_B(F_0, k, \sigma, t_0, t) = F_0 B(t_0, t) (e^k N(-d_2) - N(-d_1)) \quad (2.4)$$

dove

- $d_1 = \frac{-k}{\sigma\sqrt{t-t_0}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t-t_0}$ ,
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t-t_0}$ .

Si fissi una data di expiry  $\hat{t}$  e si considerino i prezzi delle put out-of-the-money  $P_{B,OTM}$ , cioè i prezzi delle put con log-moneyness  $k < 0$ . Quest'ultime sono più liquide rispetto alle rispettive call in-the-money con stessa log-moneyness. Dai prezzi delle put si ricavano i valori della volatilità implicita in funzione della log-moneyness e della data di expiry  $\sigma_{IMP}(k, \hat{t})$  tramite inversione della formula

(2.4). Una volta ottenuti i valori, si ricalcolano i prezzi delle corrispondenti call in-the-money  $C_{B,ITM}$  con stessa log-moneyness e stessa expiry:

$$C_{B,ITM}(F_0, k, \sigma_{IMP}(k, \hat{t}), t_0, \hat{t}) = F_0 B(0, \hat{t}) (N(d_1) - e^k N(d_2)). \quad (2.5)$$

Infine, dati i prezzi delle call OTM e ATM con stessa expiry, si ricavano i rimanenti valori della volatilità implicita tramite inversione della formula (2.5), ottenendo la volatilità implicita di mercato in funzione della log-moneyness per una fissata data di expiry  $\hat{t}$ .

Lo stesso procedimento si ripete per le rimanenti date di expiry, ottenendo la superficie di volatilità implicita  $\sigma_{IMP}^{MKT}(k, t)$  di mercato.

Calibrare sui prezzi di mercato implica calibrare sulla superficie di volatilità.

Un modello che, una volta calibrato sui prezzi di mercato delle opzioni, non riesce a riprodurre adeguatamente i prezzi, automaticamente non riesce a riprodurre in maniera soddisfacente la superficie di volatilità.



## Capitolo 3

# Calibrazione del modello sul mercato

Una volta ottenuti e opportunamente preparati i dati di mercato, è possibile procedere con la calibrazione per ottenere i parametri del modello additivo. Prima di procedere con la descrizione del metodo di calibrazione utilizzato, è opportuno introdurre una sezione dedicata alla volatilità implicita in cui, oltre a definirla, vengono trattate le caratteristiche che presenta nel mercato equity. In seguito viene presentata la *formula di Lewis* che sarà utilizzata durante la fase di calibrazione del modello. Oltre alla suddetta formula, durante la fase di calibrazione viene utilizzato il metodo numerico della *Fast Fourier Transform* che, sfruttando la definizione di trasformata discreta di Fourier, permette di diminuire il tempo computazionale di calibrazione. Infine vengono esposti e discussi i risultati ottenuti per il modello additivo mostrando i comportamenti dei parametri rispetto al tempo.

### 3.1 La volatilità implicita

Molto spesso i prezzi delle opzioni sono rappresentati in termini di *volatilità implicita*, un parametro non osservabile direttamente. Formalmente, la definizione di volatilità implicita è quella di essere quel numero  $\sigma_{IMP}$  tale che

$$V_B(F_0, K, \sigma_{IMP}, t_0, t) = V^{MKT}(K, t_0, t) \quad (3.1)$$

dove  $V(\cdot)$  è il valore dell'opzione ottenuto tramite la formula di Black e  $V^{MKT}(\cdot)$  è il prezzo di mercato dell'opzione. Una definizione meno formale della volatilità implicita data da *R. Rebonato*, ma che riesce ad evidenziare

meglio il suo ruolo, è quella di essere “*quel numero sbagliato che, una volta messo nella formula sbagliata, permette di ottenere il valore corretto*”.

La formula di Black può dunque essere vista come uno strumento da utilizzare per tradurre i prezzi di mercato in termini di volatilità implicita.

Le volatilità implicite sono utilizzate per monitorare l’opinione del mercato a proposito della volatilità di un particolare titolo e si differenziano dalle volatilità storiche in quanto, mentre quelle storiche sono *backward looking*, quelle implicite sono *forward looking*.

Dato che la volatilità implicita tende a essere meno variabile rispetto ai prezzi di mercato, i *traders* ragionano in termini di volatilità implicita: preferiscono quotare la volatilità implicita di un’opzione piuttosto di quotare i prezzi di quest’ultima.

La volatilità implicita di un’opzione call europea è la stessa di un’opzione put Europea quando sono scritte sullo stesso sottostante, stesso strike e stessa maturity. Questo significa che lo smile di volatilità per le call europee con una determinata maturity è lo stesso di quello per le put europee con la stessa maturity. Questo permette di non fare distinzione in termini di call o put. Per dimostrare quanto appena detto, si consideri la put-call parity (2.2) per le formule di Black. Tale relazione deve valere anche per i prezzi di mercato:

$$C_s^{MKT} - P_s^{MKT} = B(s, t) (F_s - K). \quad (3.2)$$

Sottraendo l’equazione (3.2) dall’equazione (2.2) si ottiene, omettendo l’indice di dipendenza dal tempo, che

$$P - P^{MKT} = C - C^{MKT}. \quad (3.3)$$

Si supponga ora che per l’opzione put la volatilità implicita valga un determinato valore  $\hat{\sigma}_{IMP}$ . Per definizione si ha che  $P = P^{MKT}$ . Conseguentemente, dalla (3.3), si ha che  $C = C^{MKT}$ . Questo significa che, per definizione,  $\hat{\sigma}_{IMP}$  è anche la volatilità implicita della call.

*Osservazione 5.* Si osservi che oltre ad avere lo stesso smile di volatilità per opzioni europee call e put, si ha anche la stessa term structure per opzioni europee call e put.

F’in qui lo smile di volatilità è stato trattato come una relazione tra la volatilità implicita e lo strike price  $K$ . Per rendere lo smile più stabile rispetto alle

fluttuazioni di mercato, esso è spesso calcolato come relazione tra la volatilità implicita e il rapporto  $K/F_0$ .

### 3.1.1 Il mercato equity

Nel caso di opzioni sul mercato equity lo smile di volatilità presenta una particolare caratteristica. Prima del crollo della borsa di *Wall Street* del 1987, non era presente uno smile di volatilità marcato. Dopo il crollo, sia nel caso di opzioni su azioni, sia nel caso di opzioni su indici, la volatilità implicita si presentava con la generale forma di figura 3.1: la probabilità di un ribasso di un'azione è maggiore rispetto alla probabilità di un rialzo della stessa.

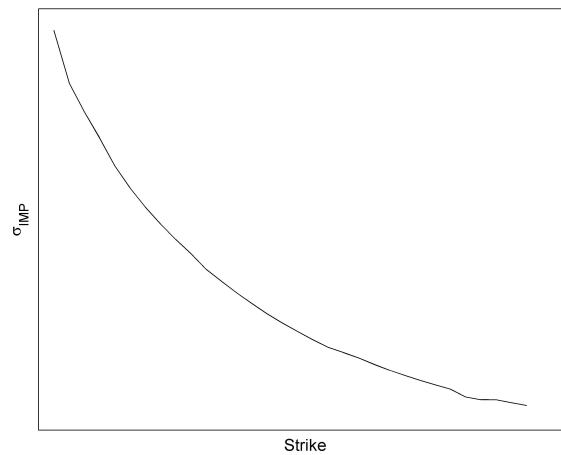


Figura 3.1: Volatility Skew Post '87

Questa particolare forma è detta *skew di volatilità*: la volatilità decresce man mano che lo strike aumenta. Di conseguenza la volatilità implicita di call *deep-in-the-money* (put *deep-out-of-the-money*) è molto più alta della volatilità implicita di call *deep-out-of-the-money* (put *deep-in-the-money*).

Una possibile spiegazione dello skew di volatilità riguarda il *leverage*. Quando l'equity di un'azienda diminuisce in valore, il leverage dell'azienda aumenta. Ciò significa che l'equity di un'azienda diventa più rischioso e la sua volatilità aumenta. Quando invece l'equity di un'azienda aumenta in valore si verifica l'esatto opposto. Ci si può dunque aspettare che la volatilità di un'azione sia una funzione decrescente del prezzo della stessa. Questo fatto è consistente con la figura 3.1.

Un'altra possibile spiegazione è la *crashophobia*: i traders considerano che possa verificarsi un altro crash simile a quello del 1987 e prezzano le opzioni conseguentemente. In pratica si ha paura che possano esserci dei grandi salti verso il basso del prezzo del sottostante. Esistono fatti empirici che supportano tale spiegazione: a un calo nell'indice *S&P 500* si accompagna solitamente un aumento di pendenza dello skew di volatilità, mentre a un rialzo dello stesso indice si accompagna solitamente un appiattimento dello skew.

## 3.2 La formula di Lewis

Nel caso di modelli exponential Lévy, è possibile sfruttare l'approccio di Lewis per ricavare il prezzo di un'opzione: il prezzo di un'opzione risulta essere pari all'integrale della trasformata di Fourier generalizzata del processo di Lévy.

Sia  $X_t$  un processo di Lévy. La sua funzione caratteristica  $\Phi(z) = \mathbb{E}[e^{izX_t}]$  è la trasformata di Fourier della sua densità di probabilità ed è possibile estenderla analiticamente a  $\mathbb{C}$ . L'estensione analitica sarà chiamata *trasformata di Fourier generalizzata* e la sua striscia di analiticità verrà indicata con  $\mathcal{S}_X$ .

**Definizione 3.1** (Funzione Integrabile Secondo Fourier). Una funzione  $f(x)$  è detta *integrabile secondo Fourier* in una striscia se esiste una coppia di numeri reali  $a$  e  $b$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  tale che la trasformata di Fourier generalizzata

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x) dx \quad (3.4)$$

esiste ed è regolare per ogni  $z = u + iv$  con  $u \in \mathbb{R}$  e  $v \in (a, b)$ .

Si indichi con  $\mathcal{S}_f$  la striscia di analiticità di una generica funzione  $f$ . Le trasformate di Fourier generalizzate sono invertite con integrazioni lungo linee parallele all'asse reale all'interno delle proprie strisce di analiticità:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} e^{-izx} \hat{f}(z) dz, \quad z \in \mathcal{S}_f, \quad (3.5)$$

dove  $v = \Im m(z)$ .

L'analiticità nelle strisce è tipicamente basata sul seguente teorema:

**Teorema 3.2.1** (di Lukacs). *Se una funzione caratteristica  $\Phi(z)$  è regolare in un intorno di  $z = 0$ , allora è regolare anche in una striscia orizzontale e può essere rappresentata in questa striscia tramite un integrale di Fourier. Questa striscia può essere l'intero piano complesso oppure ammette una o due linee di*

contorno orizzontali. I punti immaginari puri sul bordo di questa striscia (nel caso in cui non sia l'intero piano complesso) sono punti di singolarità di  $\Phi(z)$ .

*Osservazione 6.* È possibile applicare la trasformata di Fourier anche a funzioni di tipo payoff.

Sia  $x = \log F_t$ . Sia  $w(x)$  una funzione payoff e si indichi con  $\widehat{w}(z)$  la trasformata di Fourier generalizzata di  $w(x)$  :

$$\widehat{w}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} w(x) dx, \quad a \leq \Im m(z) \leq b.$$

Per semplicità si ponga  $t_0 = 0$ .

Il seguente teorema fornisce una formula per trovare il prezzo di un'opzione generica di tipo europeo.

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $V(F_0)$  il prezzo di un'opzione di tipo europeo con funzione payoff  $w(x) \geq 0$ , dove  $x = \log F_t$ . Si assuma che  $w(x)$  sia integrabile secondo Fourier in una striscia e limitata per  $|x| < +\infty$ , con trasformata  $\widehat{w}(z)$  dove  $z \in \mathcal{S}_w$ . Sia  $F_t = F_0 e^{X_t}$ , dove  $X_t$  è un processo di Lévy e  $e^{X_t}$  è una martingala. Si assuma che la funzione caratteristica  $\Phi(z)$  di  $X_t$  sia analitica, regolare nella striscia  $\mathcal{S}_X = \{z = u + iv : v \in (a, b)\}$ , dove  $a < -1$  e  $b > 0$ . Si indichi con  $\mathcal{S}_X^*$  l'insieme complesso coniugato di  $\mathcal{S}_X$ .*

Allora se  $\mathcal{S}_v = \mathcal{S}_w \cap \mathcal{S}_X^*$  è non vuoto, il valore dell'opzione è dato da

$$V(F_0) = \frac{B(0, t)}{2\pi} \int_{iv-\infty}^{iv+\infty} e^{-izy} \Phi(-z) \widehat{w}(z) dz, \quad z \in \mathcal{S}_v \quad (3.6)$$

dove  $v = \Im m(z)$  e  $y = \log F_0$ . Inoltre l'insieme  $\mathcal{S}_v$  è sempre non vuoto nel caso di una call o di una put.

*Osservazione 7.* Dato che

- $\Phi(0) = 1$  per ipotesi di normalizzazione delle funzioni caratteristiche,
- $\Phi(-i) = 1$  per ipotesi di martingalità,

è opportuno richiedere che la funzione caratteristica sia almeno calcolabile per tutti gli  $z$  compresi nella striscia  $(-1, 0)$ .

Lavorando su diverse linee di integrazione si possono ottenere forme alternative della (3.6). In particolare, nel caso di una call europea, per il teorema 3.2.2 si ha che

$$\mathcal{S}_X^* = \{u + iv : v \in (\alpha, \beta)\} \quad \text{con } \alpha < 0 \text{ e } \beta > 1,$$

e di conseguenza

$$C(F_0, k, 0, t) = -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} \int_{iv_1 - \infty}^{iv_1 + \infty} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi}, \quad v_1 \in (1, \beta) \quad (3.7)$$

con  $\tilde{k} = \log \frac{F_0}{K}$ .

Dato che  $\beta > 1$ , il precedente integrale è ben definito grazie al fatto che l'intervallo  $(1, \beta)$  è aperto.

L'integrando in (3.7) è ben definito in tutta  $\mathbb{S}_X^*$ , eccezion fatta per i poli semplici  $\xi = 0$  e  $\xi = i$ . Il polo in  $\xi = 0$  ha residuo pari a  $-iF_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi}$  e il polo in  $\xi = i$  ha residuo pari a  $iF_0 B(0, t) \frac{1}{2\pi}$ .

### 3.2.1 Variante della formula di Lewis

Ora si vuole risolvere la (3.7) su altre linee di integrazione ottenendo varianti della stessa. In particolare l'interesse è rivolto lungo la linea di integrazione  $v_2 \in (0, 1)$ ; applicando il teorema dei residui, il valore dell'opzione call è pari all'integrale lungo  $\mathbb{I}m(\xi) = v_2$  meno  $2\pi i$  volte il residuo in  $z = i$ .

Infatti, si consideri la curva

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_R \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{-R}$$

dove

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= t + iv_2 \quad t \in [-R, R], \\ \Gamma_R &= R + it \quad t \in [v_2, v_1], \\ \Gamma_2 &= -t + iv_1 \quad t \in [-R, R], \\ \Gamma_{-R} &= -R - it \quad t \in [v_2, v_1]. \end{aligned}$$

Si vuole calcolare il seguente integrale:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi}. \quad (3.8)$$

Per il teorema dei residui si ha che

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = \\ &= -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} 2\pi i \mathcal{R}es \left( e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi}, i \right) = \\ &= -F_0 B(0, t). \end{aligned}$$

Proseguendo, si spezza l'integrale su  $\Gamma$  in quattro integrali lungo le curve  $\Gamma_i$  che compongono  $\Gamma$  e poi se ne sommano i valori. Lungo  $\Gamma_1$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = \\ & = -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} \int_{iv_2 - \infty}^{iv_2 + \infty} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi}. \end{aligned}$$

Lungo  $\Gamma_2$  invece si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_2} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = \\ & = F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} \int_{iv_1 - \infty}^{iv_1 + \infty} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi}. \end{aligned}$$

Si noti che l'integrale lungo  $\Gamma_2$  è proprio pari alla (3.7) cambiata di segno.

Infine, lungo  $\Gamma_R$  e lungo  $\Gamma_{-R}$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = 0 \\ & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{-R}} -F_0 B(0, t) \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = 0. \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i termini ottenuti dall'integrazione su  $\Gamma$  e il termine derivante dal teorema dei residui e sistemando opportunamente i termini si ottiene:

$$C(F_0, k, 0, t) = F_0 B(0, t) \left( 1 - \frac{e^{-\tilde{k}}}{2\pi} \int_{iv_2 - \infty}^{iv_2 + \infty} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} \right). \quad (3.9)$$

Considerando il caso in cui  $v_2 = \frac{1}{2}$ , è possibile ottenere una forma di (3.9) più comoda che verrà utilizzata durante la calibrazione. Sia dunque  $v_2 = \frac{1}{2}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} e^{-i\xi\tilde{k}} \Phi(-\xi) \frac{d\xi}{\xi^2 - i\xi} = \\ & = \int_{-R}^R e^{-i(z + \frac{i}{2})\tilde{k}} \Phi\left(-z - \frac{i}{2}\right) \frac{dz}{(z + \frac{i}{2})^2 - i(z + \frac{i}{2})} = \\ & = e^{\frac{\tilde{k}}{2}} \int_{-R}^R \Re e \left( e^{iz\tilde{k}} \Phi\left(-z - \frac{i}{2}\right) \right) \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Facendone il limite per  $R \rightarrow +\infty$  e sostituendo nella (3.9) si ottiene:

$$C_L(F_0, k, 0, t) = F_0 B(0, t) \left[ 1 - e^{-\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{-i\xi k} \Phi \left( -\xi - \frac{i}{2} \right) \frac{1}{\xi^2 + \frac{1}{4}} \right] \quad (3.10)$$

dove  $\Phi(\cdot)$  è la funzione caratteristica del processo di Lévy  $X_t$ ,

$$\Phi(\xi) = e^{-i\xi \log \mathcal{L}[\eta]} \mathcal{L} \left[ \frac{\xi^2 + i(1+2\eta)\xi}{2} \right], \quad (3.11)$$

e  $\mathcal{L}[\cdot]$  è la trasformata di Laplace del subordinatore  $S_t$ ,

$$\mathcal{L}[\omega] = \int_0^{+\infty} e^{-\omega s \sigma^2} \lambda_t(ds), \quad (3.12)$$

con  $\lambda_t(ds)$  densità di probabilità di  $S_t$ .

*Osservazione 8.* Si noti che le espressioni (3.12) e (3.11) sono pari rispettivamente alle (1.20) e (1.21) nel caso particolare degli exponential Lévy.

In generale si indichi con  $\tilde{\omega}$  il punto di singolarità della funzione  $\Phi(\cdot)$ . Affinchè si abbia analiticità occorre che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\eta \geq \tilde{\omega}$ ,
- $\Re e \left\{ \frac{\hat{\xi}^2 + i(1+2\eta)\hat{\xi}}{2} \right\} \geq \hat{\omega}$  dove  $\hat{\xi}$  appartiene all'asse immaginario, cioè deve essere verificata la seguente condizione per un generico  $\xi \in \mathbb{C}$

$$c_1(\hat{\omega}, \eta) \leq \Im m(\xi) \leq c_2(\hat{\omega}, \eta)$$

dove

$$c_{1,2}(\hat{\omega}, \eta) = \frac{1+2\eta}{2} \left[ -1 \mp \sqrt{1 - \frac{8\hat{\omega}}{(1+2\eta)^2}} \right].$$

*Osservazione 9.* L'espressione (3.10) sarà utilizzata in seguito nella fase di calibrazione del modello additivo per ottenere il prezzo di un call europea.

### 3.2.2 I modelli VG e NIG

Nel caso in cui il modello exponential Lévy sia un Variance Gamma o un Normal Inverse Gaussian, l'espressione del logaritmo della trasformata di Laplace di  $X_t$  ha un'espressione in forma chiusa:

- $\log \mathcal{L}[\omega] = \frac{t}{\delta} [1 - \sqrt{1 + 2\delta\omega\sigma^2}]$ , NIG;
- $\log \mathcal{L}[\omega] = -\frac{t}{\delta} \log(1 + \delta\omega\sigma^2)$ , VG.



I punti di singolarità di  $\Phi(\cdot)$  nei due modelli sono:

- $\hat{\omega} = -\frac{1}{2\delta\sigma^2}$ , NIG;
- $\hat{\omega} = -\frac{1}{\delta\sigma^2}$ , VG.

### 3.3 La Fast Fourier Transform

In letteratura esistono metodi che mirano ad approssimare il calcolo di una trasformata di Fourier in modo tale da minimizzare il calcolo di quest'ultima. Uno tra questi è la *Discrete Fourier Transform*, in breve *DFT*, il quale approssima la trasformata di Fourier di una funzione con la versione discreta.

Si supponga di voler approssimare la trasformata di Fourier di una funzione  $f(x)$  con la Discrete Fourier Transform. L'integrale deve essere quindi troncato e discretizzato come segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x) dx \approx \int_{-A/2}^{A/2} e^{izx} f(x) dx \approx \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j f(x_j) e^{izx_j}, \quad (3.13)$$

dove  $x_j = -\frac{A}{2} + j \cdot dx$ ,  $dx = \frac{A}{N-1}$  è il passo di discretizzazione e  $w_j$  sono i pesi corrispondenti a una determinata regola di integrazione (per esempio, nel caso in cui si scegliesse la regola del trapezio si avrebbe che  $w_0 = w_{N-1} = \frac{1}{2}$  e tutti gli altri pesi pari a 1).

Imponendo  $z_n = \frac{2\pi n}{N\Delta}$  si nota che la somma dell'ultimo termine in (3.13) è effettivamente la definizione di Discrete Fourier Transform:

$$\hat{f}(z_n) = F_n \approx \frac{A}{N} e^{i\pi n} \sum_{j=0}^{N-1} w_j f(x_j) e^{\frac{2\pi i n j}{N}} = \frac{A}{N} e^{i\pi n} DFT(f(x_j)). \quad (3.14)$$

Per poter calcolare  $F_0, \dots, F_{N-1}$  occorrono  $O(N^2)$  operazioni. L'algoritmo di Cooley e Tukey chiamato *Fast Fourier Transform*, in breve *FFT*, sfrutta la definizione di DFT ma, sotto opportune condizioni, permette di calcolare, o invertire, la trasformata di Fourier con un costo computazionale minore rispetto a quanto si avrebbe utilizzando la DFT.

#### 3.3.1 L'algoritmo di Cooley e Tukey

Nel caso in cui  $N$  è una potenza di 2, l'algoritmo di Cooley e Tukey permette di approssimare la trasformata di Fourier con un costo computazionale pari a  $O(N \log_2 N)$ . L'algoritmo è stato implementato osservando che la DFT di lunghezza  $N$  di una funzione può essere riscritta come somma di due DFT entrambe

di lunghezza  $N/2$ . Una trasformata è formata dai punti pari dell'originale DFT, l'altra trasformata invece è formata dai rimanenti punti dispari. Indicando con  $f_j$  la funzione  $f(\cdot)$  valutata in  $x_j$  pesata per  $w_j$ , cioè  $f_j = w_j f(x_j)$ , si ha che:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i n j}{N}} = \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} e^{\frac{2\pi i n (2j)}{N}} + \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} e^{\frac{2\pi i n (2j+1)}{N}} = \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} e^{\frac{2\pi i n j}{N/2}} + W^n \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} e^{\frac{2\pi i n j}{N/2}} = \\
 &= F_n^p + W^n F_n^d
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

dove

$$W = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

$F_n^p$  indica l' $n$ -esima componente della trasformata di Fourier di lunghezza  $N/2$  formata dagli elementi pari della trasformata di  $f_j$ , mentre  $F_n^d$  è la corrispondente trasformata di lunghezza  $N/2$  formata dai componenti dispari. Si noti che nell'ultima riga di (3.15)  $n$  varia da 0 a  $N$  e si noti inoltre che le trasformate  $F_n^p$  e  $F_n^d$  sono periodiche in  $n$  di periodo  $N/2$ .

È possibile applicare la decomposizione descritta ricorsivamente. Dopo aver ridotto il calcolo di  $F_n$  al calcolo di  $F_n^p$  e di  $F_n^d$ , è possibile decomporre il calcolo di  $F_n^p$  nel calcolo delle trasformate degli elementi pari e degli elementi dispari lunghe entrambe  $N/4$ . Si indichi con  $F_n^{pd}$  e  $F_n^{pp}$  la trasformata degli elementi dispari e degli elementi pari di  $F_n^p$ , rispettivamente. La stessa procedura si applica a  $F_n^d$ .

Imponendo che  $N$  sia una potenza di 2, è possibile applicare l'algoritmo iterativamente fino ad ottenere trasformate di lunghezza unitaria, cioè, per ogni sequenza lunga  $\log_2 N$  di  $p$  e di  $d$  esiste  $j$  tale che

$$F_n^{pdddpd\cdots pdpp} = f_j \quad \text{per qualche } j.$$

Conseguentemente, essendo la DFT originale lunga  $N$ , le operazioni necessarie per calcolare la DFT sono  $O(N \log_2 N)$ .

*Osservazione 10.* Lo stesso algoritmo è applicabile nel caso in cui si volesse invertire la trasformata di Fourier. In questo caso si avrebbe che:

$$f(z_n) \approx \frac{A}{N} e^{-i\pi n} \sum_{j=0}^{N-1} w_j \hat{f}(x_j) e^{-\frac{2\pi i n j}{N}}. \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Le limitazioni dell'FFT

Al fine di applicare l'algoritmo di Cooley-Tukey, oltre ad imporre che  $N$  sia una potenza di 2, implicitamente si è fatta un'ulteriore restrizione: si è imposto che il passo di discretizzazione dello spazio di Fourier  $dz$  e il passo di discretizzazione  $dx$  soddisfino la relazione

$$dx \cdot dz = \frac{2\pi}{N}. \quad (3.17)$$

In conclusione esistono due limitazioni nel caso in cui si volesse applicare l'FFT in ambito finanziario per calcolare il prezzo di un'opzione:

- Nel caso in cui si volesse raffinare la griglia degli strikes e al tempo stesso mantenere un errore di discretizzazione basso, occorre utilizzare un gran numero di punti.
- La griglia deve essere sempre uniforme e la grandezza deve essere una potenza di 2. Dunque non è possibile incrementare la risoluzione vicino all'ATM senza farlo nelle altre regioni.

Di conseguenza, è conveniente utilizzare l'FFT nel caso in cui si debba prezzare un gran numero di opzioni con la stessa maturity.

### 3.3.3 L'applicazione alla calibrazione

Nella calibrazione considerata, dato che il prezzo di un'opzione è dato dalla formula di Lewis (3.10) che prevede l'inversione di una trasformata di Fourier, occorre applicare la (3.16).

Si è scelto di applicare l'FFT per il calcolo dei prezzi delle call con i seguenti parametri:

- $N = 2^{15}$ ;
- $dz = 0.001$ .

I rimanenti parametri, come il passo di discretizzazione  $dx$ , sono scelti di conseguenza in modo tale che rispettino le condizioni citate.

Si precisa che il parametro  $dz$  è stato scelto in modo tale che sia minore del valore minimo delle differenze di log-moneyness in cui occorre calcolare il prezzo dell'opzione.

Infine, per calcolare il prezzo delle call nei punti desiderati, si è scelto di utilizzare un'interpolazione di tipo spline.

### 3.4 Risultati della calibrazione

È possibile a questo punto procedere con la calibrazione del modello.

L'idea è quella di fissare una data di expiry e applicare la formula di Lewis per calcolare il prezzo delle call europee, opportunamente filtrate tramite un filtro di liquidità come spiegato prima, al variare della log-moneyness assumendo che il modello, a expiry fissata, sia un exponential Lévy. Rispetto all'usuale calibrazione degli exponential Lévy, in questo caso si ottiene un set di parametri del modello exponential Lévy, quindi parametri dipendenti dal tempo, differente per ogni data di expiry.

In altre parole, per ogni data di expiry  $t$ , si considera il modello exponential Lévy (1.13):

$$F_t = F_0 e^{f_t},$$

dove si è sottointesa la dipendenza dall'expiry  $t$  di  $F_t$  e  $F_0$ , con  $f_t$  processo di Lévy pari a

$$f_t = - \left( \frac{1}{2} + \eta \right) S_t + \sigma W_{S_t} - \log \mathcal{L}[\eta],$$

con  $S_t$  subordinatore di Lévy tempered stable tale che

$$\mathbb{E}[S_t] = t \quad \text{e} \quad \text{Var}[S_t] = t^2 \kappa(t)$$

dove

$$\kappa(t) = \frac{\delta}{t}.$$

*Osservazione 11.* I parametri  $\eta$ ,  $\sigma$  e  $\delta$  variano a seconda della data di expiry.

Per calcolare il set di parametri si è scelto di applicare la *least-squares calibration*. In generale si ha che

$$\{\eta, \sigma, \delta\} = \underset{\eta, \sigma, \delta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_t} w_i |C_{L,i}(k_i, t, \eta, \sigma, \delta) - C_i^{MKT}|^2 := \underset{\eta, \sigma, \delta}{\operatorname{argmin}} d(k_i, t, \eta, \sigma, \delta) \quad (3.18)$$

dove  $N_t$  è il numero di prezzi di mercato sopravvissuti al filtraggio per una data di expiry,  $k_i$  è la log-moneyness di un'opzione call,  $C_{L,i}$  è il prezzo della call ottenuto tramite la formula di Lewis (3.10) e  $w_i$  sono dei pesi di calibrazione (in questo caso si sono scelti pesi unitari).

La funzione di `MatLab` scelta per minimizzare la distanza al quadrato (3.18) è stata la funzione `fminsearch`. La funzione richiede un costo computazionale ridotto rispetto ad altre funzioni ma non permette di imporre vincoli nell'ottimizzazione.

Si è scelto di calibrare utilizzando i modelli NIG e VG avendo a disposizione formule analitiche chiuse ed essendo i modelli più noti e più ampiamente utilizzati in ambito finanziario. Per gestire l'analiticità della funzione integranda della (3.10), non potendo inserire vincoli nella funzione `fminsearch`, si è imposto che, ogni qual volta il parametro  $\eta$  non avesse rispettato i vincoli di cui si è parlato nel paragrafo 3.2.1, la funzione  $d$  sarebbe valsa  $10E + 08$ .

### 3.4.1 Prezzi e volatilità calibrati

In questa sezione si riportano i grafici dei risultati della calibrazione. Per la precisione si riportano i risultati della calibrazione per il modello NIG sia per opzioni sull'indice Euro Stoxx 50 che per opzioni sull'indice S&P 500.

In figura 3.2 e in figura 3.3 si riportano il grafico della volatilità implicita e il grafico dei prezzi, entrambi messi a confronto con la volatilità implicita di mercato e con i prezzi di mercato per opzioni con sottostante Euro Stoxx 50. Le due figure si riferiscono alla calibrazione alla data di riferimento 30/05/2013 ma con date di expiry differenti: la figura 3.2 si riferisce alla data di expiry 20/06/2014, mentre la figura 3.3 si riferisce alla data di expiry 15/12/2017.

In figura 3.4 si riporta il grafico della superficie di volatilità implicita ottenuta con modello NIG alla data di riferimento 30/05/2013.

I risultati sono riportati anche per opzioni con sottostante S&P 500. Il modello utilizzato è sempre il NIG e la data di riferimento è sempre il 30/05/2013. In figura 3.5 la data di expiry è il 20/12/2013, mentre in figura 3.6 la data di expiry è il 19/12/2014.

Infine, in figura 3.7 si riporta il grafico della superficie di volatilità implicita ottenuta con modello NIG alla data di riferimento 30/05/2013.

Si noti come, in entrambi i casi, le volatilità e i prezzi vengano fittati in

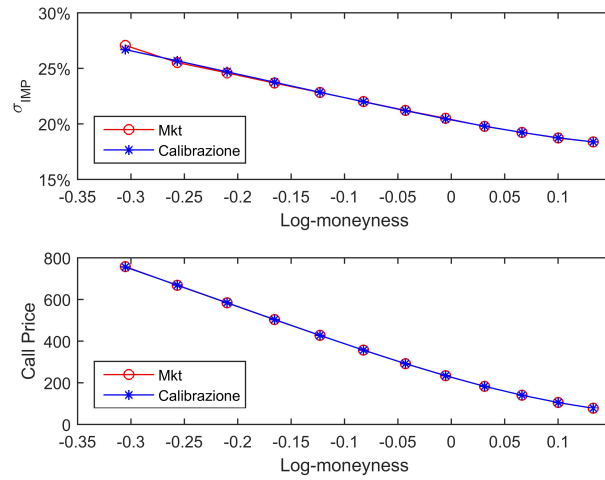


Figura 3.2: Modello NIG calibrato per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013 con expiry al 20/06/2014. Come si evince dal grafico, lo skew viene riprodotto con un errore di calibrazione molto basso.

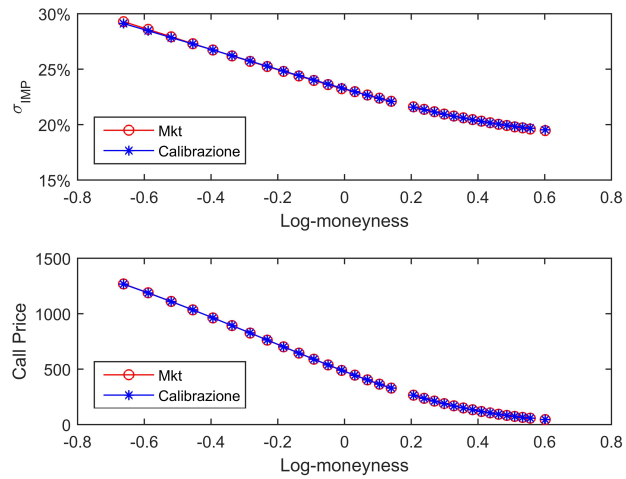


Figura 3.3: Modello NIG calibrato per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013 con expiry al 15/12/2017. Anche in questo caso, con una data di expiry più distante dalla data di riferimento, lo skew viene riprodotto con un errore di discretizzazione molto basso.

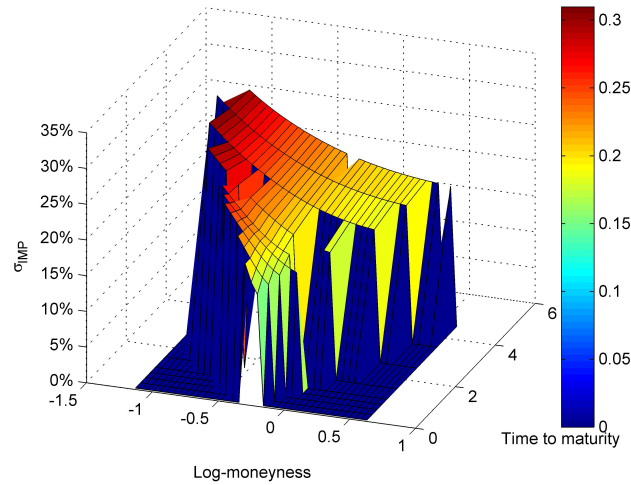


Figura 3.4: Superficie di volatilità implicita del modello NIG per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013. Una volta effettuata la calibrazione su tutte le date di expiry disponibili, è possibile unire i risultati e ottenere la superficie di volatilità implicita. La superficie di modello riproduce bene la superficie di mercato sia a time to maturity breve che a time to maturity più elevato, presentando un errore quadratico medio di  $2.3048E-06$ . Si noti come viene riprodotto il *flattening dello skew* all'aumentare del time to maturity.

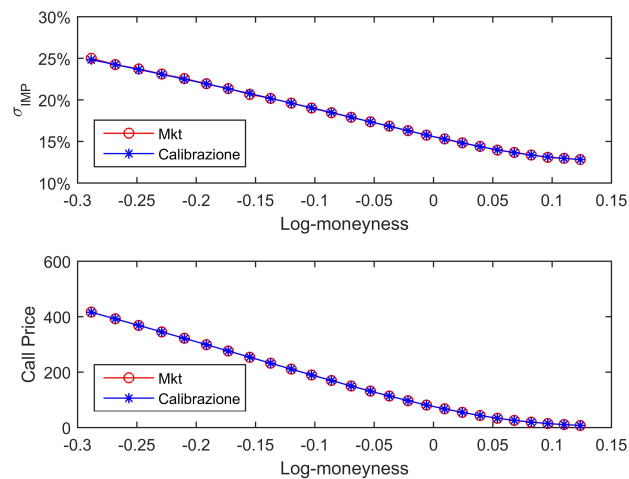


Figura 3.5: Modello NIG calibrato per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013 con expiry al 20/12/2013. Analogamente al caso di opzioni su Euro Stoxx 50, come si evince dal grafico, lo skew viene riprodotto con un errore di calibrazione molto basso.

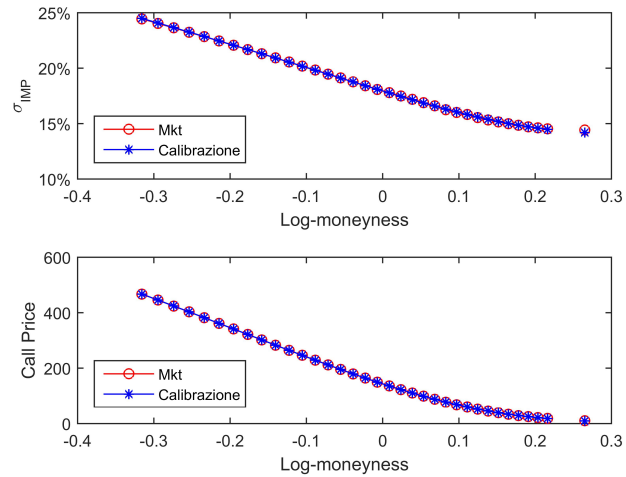


Figura 3.6: Modello NIG calibrato per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013 con expiry al 19/12/2014. Nuovamente lo skew viene riprodotto con un errore di calibrazione molto basso.

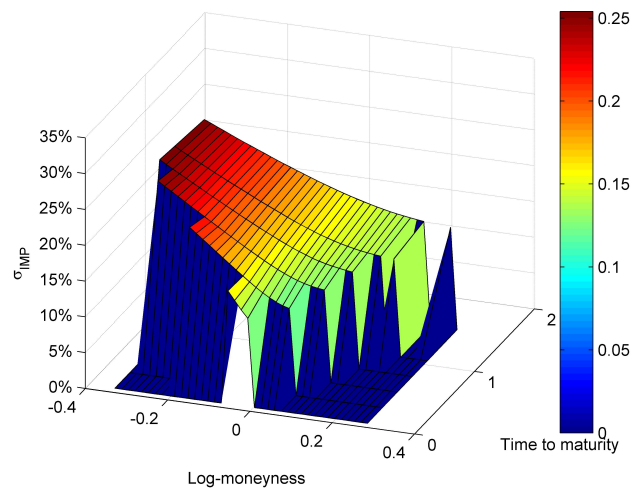


Figura 3.7: Superficie di volatilità implicita del modello NIG per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013. Come fatto nel caso di opzioni su Euro Stoxx 50, una volta effettuata la calibrazione su tutte le date di expiry disponibili, si uniscono i risultati e si ottiene la superficie di volatilità implicita. La superficie di modello riproduce bene la superficie di mercato sia a time to maturity breve che a time to maturity più elevato, presentando un errore quadratico medio di  $1.6495E-07$ . Si noti come viene riprodotto il *flattening dello skew* all'aumentare del time to maturity.



maniera ottimale e come, nelle figure 3.4 e 3.7, la volatilità riprodotta presenta il fenomeno del *flattening* dello skew all'aumentare del time to maturity, ovvero l'appiattimento dello skew di volatilità all'aumentare del time to maturity.

Si osservi che la volatilità implicita riesce ad essere ben riprodotta anche a time to maturity breve, presentando, come si evince dal mercato, uno skew molto marcato rispetto agli altri time to maturity più elevati.

*Osservazione 12.* In alcuni punti delle figure 3.4 e 3.7 non è riportato nessun valore di volatilità implicita: questi punti corrispondono a log-moneyness la cui opzione corrispondente è stata esclusa attraverso il criterio di liquidità.

Si definisca l'errore quadratico medio come

$$Err_{Mean} = \frac{\sum_{i,j} (\sigma_{IMP}(i,j) - \sigma_{IMP}^{MKT}(i,j))^2}{N}$$

dove l'indice  $i$  cicla sulla log-moneyness, l'indice  $j$  cicla sulle date di expiry, e  $N$  indica il numero totale di valori disponibile di volatilità implicita. L'errore quadratico medio commesso dal modello NIG calibrato su opzioni con sottostante Euro Stoxx 50 e su opzioni con sottostante S&P 500 è, rispettivamente,

$$Err_{Mean}^{EuroStoxx} = 2.3048E - 06, \quad Err_{Mean}^{S\&P} = 1.6495E - 07.$$

### Il modello exponential Lévy

Utilizzando gli stessi dati di mercato, è stata effettuata la calibrazione utilizzando un modello exponential Lévy. Anche in questo caso l'approccio è stato quello di utilizzare una *least-squares calibration* e si è utilizzata la medesima funzione di ricerca del minimo in **MatLab**.

Si riportano i grafici dei risultati della calibrazione ottenuti utilizzando un modello NIG exponential Lévy sia per opzioni sull'indice Euro Stoxx 50 che per opzioni sull'indice S&P 500. La data di riferimento è la stessa della calibrazione precedente, ovvero il 30/05/2013.

In figura 3.8 e in figura 3.9 si riportano il grafico della volatilità implicita e il grafico dei prezzi ottenuti calibrando il modello con opzioni sull'indice Euro Stoxx 50. Come fatto in precedenza, si riportano anche la volatilità e i prezzi di mercato. Le date di expiry sono le medesime della calibrazione del modello additivo: la figura 3.8 si riferisce alla data di expiry 20/06/2014, mentre la figura 3.9 si riferisce alla data di expiry 15/12/2017.

In figura 3.10 è riportata la superficie di volatilità implicita ottenuta con modello NIG exponential Lévy alla data di riferimento 30/05/2013.

La figura 3.11 e la figura 3.12 presentano i risultati ottenuti calibrando un modello NIG exponential Lévy utilizzando opzioni sull'indice S&P 500 alla data di riferimento 30/05/2013.

La figura 3.11 si riferisce alla data di expiry 20/12/2013, mentre la figura 3.12 si riferisce alla data di expiry 19/12/2014.

In figura 3.13 è riportata la superficie di volatilità implicita ottenuta con modello NIG exponential Lévy alla data di riferimento 30/05/2013.

A differenza dei risultati ottenuti calibrando i modelli additivi, in entrambi i casi, le volatilità vengono fittate con un errore di discretizzazione elevato, soprattutto per time to maturity brevi.

Analogamente alla calibrazione precedente si vuole dare un'indicazione sull'errore di calibrazione commesso. L'errore quadratico medio commesso dal modello NIG exponential Lévy calibrato su opzioni con sottostante Euro Stoxx 50 e su opzioni con sottostante S&P 500 è, rispettivamente,

$$Err_{Mean,Lévy}^{EuroStoxx} = 9.8013E - 05, \quad Err_{Mean,Lévy}^{S\&P} = 1.1206E - 04.$$

In entrambi i casi risulta essere maggiore rispetto all'errore quadratico commesso utilizzando i modelli additivi: per la calibrazione su opzioni su Euro Stoxx 50 è di circa due ordini di grandezza superiore, mentre nel caso della calibrazione su opzioni su S&P 500 è di circa tre ordini di grandezza superiore.

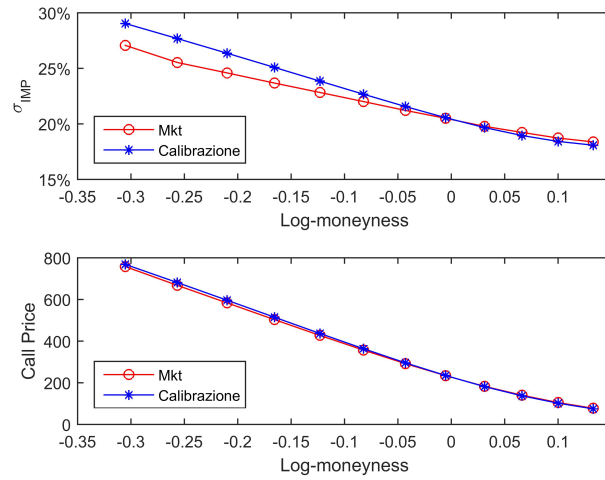


Figura 3.8: Modello NIG exponential Lévy calibrato per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013 con expiry al 20/06/2014. Come si evince dal grafico, lo skew viene riprodotto con difficoltà e l'errore di calibrazione è elevato.

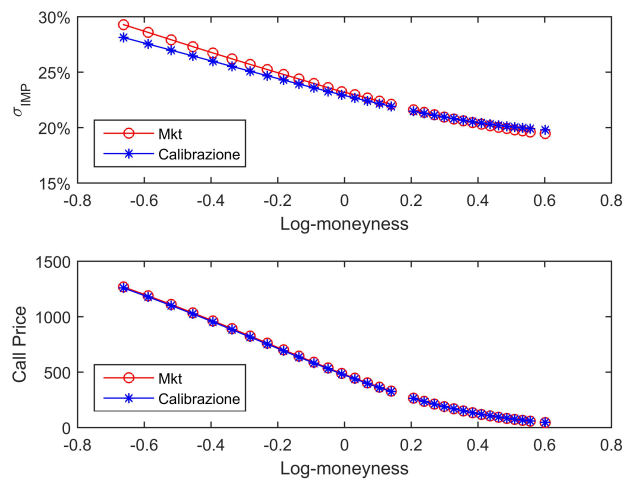


Figura 3.9: Modello NIG exponential Lévy calibrato per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013 con expiry al 15/12/2017. Anche in questo caso, con una data di expiry più distante dalla data di riferimento, lo skew viene riprodotto con un errore di discretizzazione significativo.

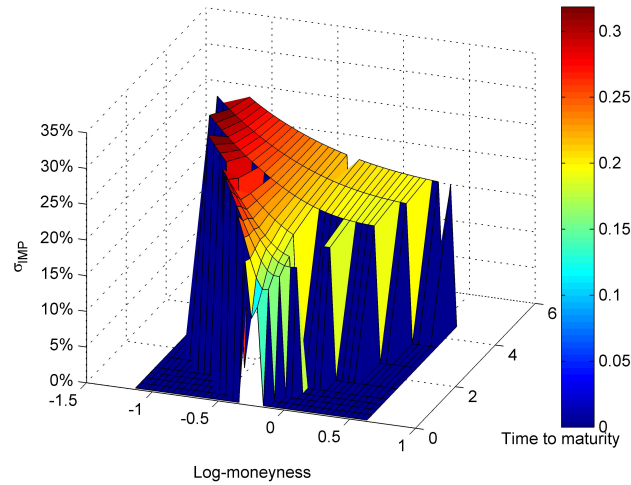


Figura 3.10: Superficie di volatilità implicita del modello NIG exponential Lévy per opzioni su Euro Stoxx 50 al 30/05/2013. Si confronti questa superficie di modello con la superficie di modello in figura 3.4: si osservi come la differenza tra le due sia significativa, in particolare per time to maturity brevi. La superficie di modello riproduce con difficoltà la superficie di mercato sia a time to maturity breve che a time to maturity più elevato, presentando un errore quadratico medio di  $9.8013E-05$ .

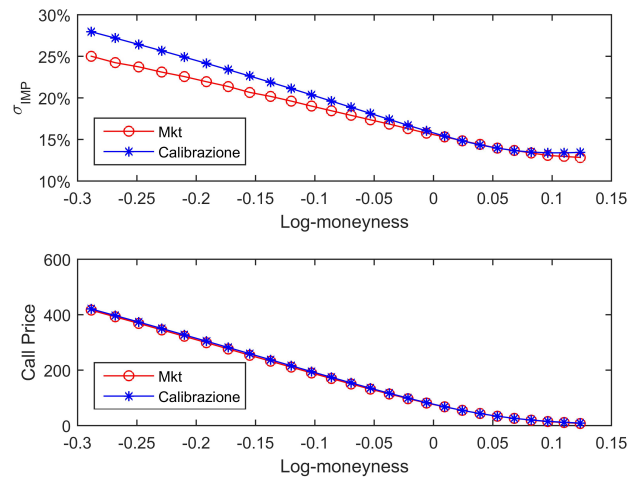


Figura 3.11: Modello NIG exponential Lévy calibrato per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013 con expiry al 20/12/2013. Analogamente al caso di opzioni su Euro Stoxx 50, come si evince dal grafico, lo skew viene riprodotto con difficoltà e l'errore di calibrazione è elevato.

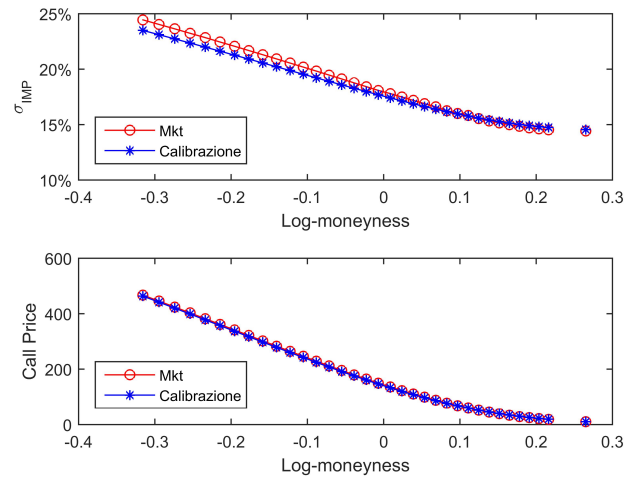


Figura 3.12: Modello NIG exponential Lévy calibrato per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013 con expiry al 19/12/2014. Nuovamente lo skew viene riprodotto con un errore di calibrazione elevato.

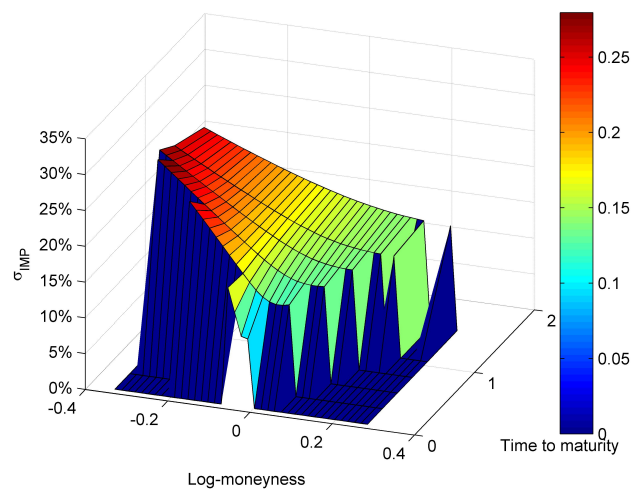


Figura 3.13: Superficie di volatilità implicita del modello NIG exponential Lévy per opzioni su S&P 500 al 30/05/2013. Come fatto nel caso di opzioni su Euro Stoxx 50, si confronti questa superficie di modello con la superficie di modello in figura 3.7: si osservi come la differenza tra le due sia significativa, in particolare per time to maturity brevi. La superficie di modello riproduce con difficoltà la superficie di mercato sia a time to maturity breve che a time to maturity più elevato, presentando un errore quadratico medio di  $1.1206E-04$ .

### 3.4.2 I parametri

Una volta terminata la calibrazione per tutte le date di expiry è stata ottenuta una serie di valori di  $\eta$ ,  $\delta$  e  $\sigma$  in funzione del time to maturity. Sia per opzioni con sottostante S&P che per opzioni con sottostante Euro Stoxx, si è visto lo stesso comportamento per i tre parametri. Anche in questo caso, per continuità con la sezione precedente, si è scelto di riportare i risultati ottenuti tramite la calibrazione del modello NIG.

Il parametro  $\eta$  presenta un andamento rispetto al tempo del seguente tipo:

$$\eta(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}},$$

dove  $t$  è il time to maturity.

L'andamento di  $\eta$ , messo a confronto con la funzione  $1/\sqrt{t}$ , è riportato nel grafico logaritmico 3.14 per opzioni su Euro Stoxx e nel grafico logaritmico 3.15 per opzioni su S&P entrambi alla data di riferimento 30/05/2013.

Il secondo parametro,  $\delta$ , presenta un andamento proporzionale rispetto al tempo:

$$\delta(t) \sim t,$$

dove  $t$  è il time to maturity.

Come fatto col parametro precedente, l'andamento di  $\delta$ , messo a confronto con la funzione  $t$ , è riportato nel grafico logaritmico 3.16 per opzioni su Euro Stoxx e nel grafico logaritmico 3.17 per opzioni su S&P entrambi alla data di riferimento 30/05/2013.

Il terzo parametro,  $\sigma$ , risulta invece legato alla volatilità implicita all'at-the-money forward, infatti il parametro presenta lo stesso andamento in funzione del time to maturity. Si è osservato che il parametro è una funzione limitata del tempo e la maggiore variazione del parametro si ha per time to maturity brevi. Può essere visto come un indice del livello della superficie di volatilità implicita: basso per i time to maturity più brevi e più elevato per time to maturity maggiori. In generale, osservando i risultati della calibrazione, si ritiene che l'ipotesi che il parametro debba essere costante è restrittiva.

In figura 3.18 e in figura 3.19 è riportato l'andamento del parametro  $\sigma(t)$  per opzioni su Euro Stoxx e su S&P, rispettivamente. Si noti che in entrambi i casi il parametro ha lo stesso andamento della volatilità implicita all'at-the-money

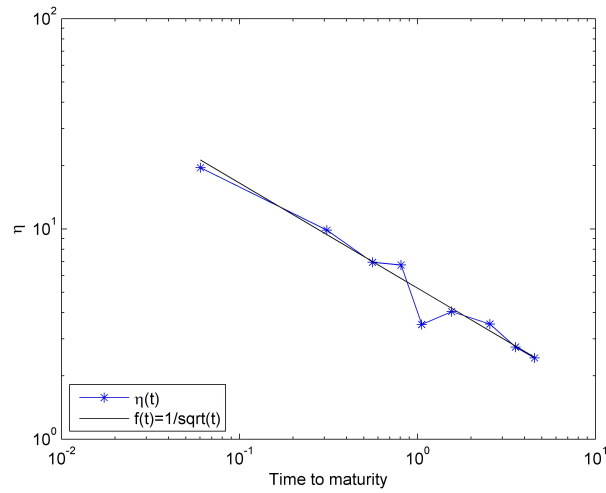


Figura 3.14:  $\eta(t)$  del modello NIG calibrato per opzioni su Euro Stoxx con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Il parametro  $\eta(t)$  (linea blu) risulta chiaramente proporzionale all'inverso della radice quadrata del time to maturity (linea nera). Lo stesso comportamento si è osservato nel caso della calibrazione del modello VG.

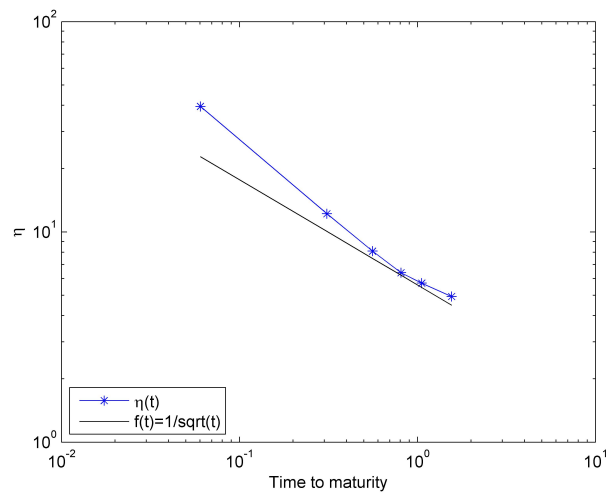


Figura 3.15:  $\eta(t)$  del modello NIG calibrato per opzioni su S&P con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Come per opzioni su Euro Stoxx, anche in questo caso il parametro  $\eta(t)$  (linea blu) risulta proporzionale all'inverso della radice quadrata del time to maturity (linea nera) e lo stesso comportamento si è osservato nel caso della calibrazione del modello VG.

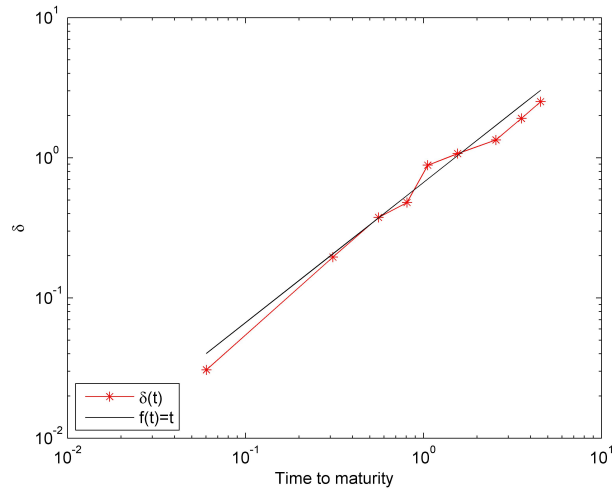


Figura 3.16:  $\delta(t)$  del modello NIG calibrato per opzioni su Eurostoxx con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Come si evince dal grafico il parametro (linea rossa) risulta proporzionale al time to maturity (linea nera). Lo stesso tipo di proporzionalità è stata riscontrata nella calibrazione del modello VG.

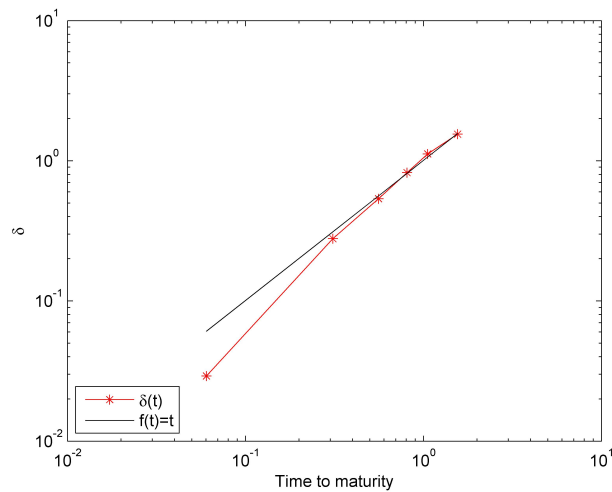


Figura 3.17:  $\delta(t)$  del modello NIG calibrato per opzioni su S&P con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Come prima, il parametro (linea rossa) risulta proporzionale al time to maturity (linea nera) e lo stesso tipo di proporzionalità è stata osservata nella calibrazione del modello VG.



forward. Per entrambi i casi, i risultati sono relativi alla calibrazione del modello NIG alla data di riferimento 30/05/2013.

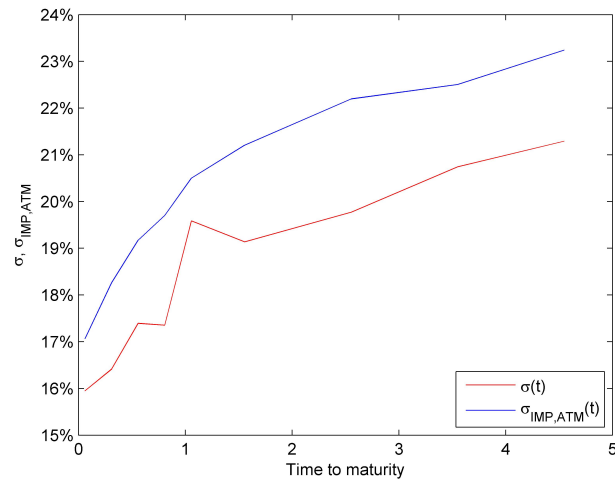


Figura 3.18: Parametro  $\sigma(t)$  per il modello NIG calibrato per opzioni su Euro Stoxx con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Si noti come il parametro  $\sigma(t)$  (linea rossa) presenti lo stesso andamento della volatilità implicita all'at-the-money forward (linea blu). Lo stesso comportamento è stato osservato nel caso della calibrazione del modello VG.

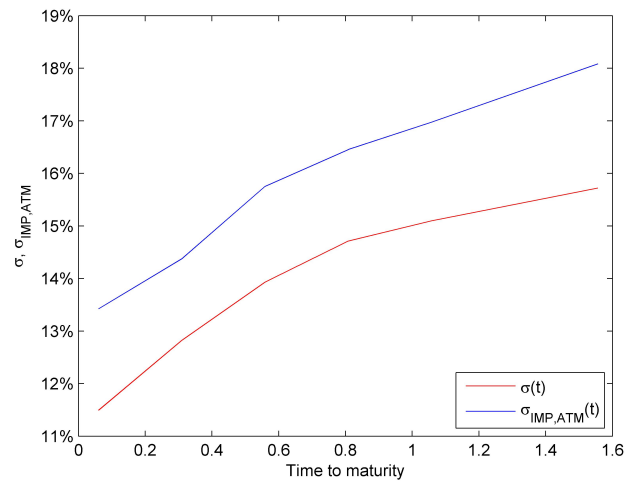


Figura 3.19: Parametro  $\sigma(t)$  per il modello NIG calibrato per opzioni su S&P con data di riferimento 30/05/2013 al variare del time to maturity. Come nel grafico precedente, si noti come il parametro  $\sigma(t)$  (linea rossa) presenti lo stesso andamento della volatilità implicita all'at-the-money forward (linea blu). Nuovamente, lo stesso comportamento è stato osservato nel caso della calibrazione del modello VG.

### 3.4.3 Il modello calibrato

Alla luce della calibrazione effettuata, della dipendenza del tempo che hanno i parametri calibrati e dei buoni risultati ottenuti, si può asserire che un modello exponential Lévy, che, per definizione, prevede la non dipendenza temporale dei parametri, non è adatto alla calibrazione con l'obiettivo di riprodurre una superficie di volatilità in maniera soddisfacente.

Riassumendo, i risultati ottenuti sono i seguenti.

- Per quanto riguarda il parametro di skewness  $\eta(t)$  si è ottenuto che

$$\eta(t) = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{t}}.$$

- Per il parametro  $\kappa(t)$ , responsabile della varianza del subordinatore, si ha che

$$\kappa(t) = \frac{\delta(t)}{t} = \frac{\bar{\delta} \cdot t}{t} = \bar{\delta}.$$

Si nota dunque che il parametro  $\kappa(t)$  è costante.

- Viene meno l'ipotesi che il parametro  $\sigma$  sia costante:

$$\sigma = \sigma(t).$$

Il parametro è legato al livello della volatilità implicita all'at-the-money forward e presenta lo stesso andamento di quest'ultima.

Aver ottenuto che il parametro di skewness assuma un comportamento inversamente proporzionale al tempo a rispecchia ciò che si vede empiricamente nei mercati. Infatti, come già accennato in precedenza, la superficie di volatilità implicita presenta il particolare fenomeno chiamato *flattening dello skew*.

In generale le ipotesi assunte negli exponential Lévy, in cui i parametri sono costanti, non sono verosimili con ciò che si vede.

Ricapitolando i risultati ottenuti, si definisce un modello per il forward che, oltre ad aver mantenuto la semplicità di trattazione e calibrazione che avevano gli exponential Lévy, riproduce in maniera soddisfacente la superficie di volatilità implicita presentando bassi errori di calibrazione, al contrario dei modelli exponential Lévy. Il modello è il seguente:

$$F_t = F_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{t}} \right) \sigma(t)^2 + \sigma(t) W_{S_t} - \log \mathcal{L} \left[ \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{t}} \right] \right\}, \quad (3.19)$$

dove  $S_t$  è un subordinatore additivo PTS tale che il suo valore atteso sia pari a  $t$  e la sua varianza pari  $t^2 \bar{\delta}$ .

Oltre alla semplicità di calibrazione e all'efficacia del modello, quest'ultimo riproduce una superficie di volatilità implicita che è *sticky delta*: se il prezzo spot varia (e quindi anche il prezzo forward), la volatilità implicita di un'opzione con una data moneyness (approssimativamente legato al delta dell'opzione) non cambia.

Si osservi che il modello (3.19) è un modello additivo: per la precisione è il modello additivo (1.1) di cui si era parlato nel capitolo 1 nel caso particolare in cui  $\beta = 0$  (parametro di  $\kappa(t)$ ).

Infine si osservi la parsimonia del modello (3.19): il modello necessita la calibrazione di pochissimi parametri per riprodurre fedelmente la superficie di volatilità implicita.

## Capitolo 4

# Il comportamento asintotico

Calibrato e definito il modello additivo (3.19), si vuole passare a mostrare il comportamento asintotico del modello, cioè il comportamento del modello quando il time to maturity tende a zero. Quando si parla di comportamento asintotico di un modello, si intende anche la capacità del modello di riprodurre adeguatamente la superficie di volatilità implicita quando il time to maturity tende a zero.

Inizialmente viene analizzato lo studio effettuato da *José E. Figueroa-Lopez* e *Martin Forde* [23] e da *Peter Tankov* [16] per quanto riguarda il comportamento asintotico dei modelli exponential Lévy, mostrando le debolezze e le lacune di tali modelli.

Infine vengono messi a confronto i risultati numerici dei comportamenti asintotici degli exponential Lévy e del modello additivo (3.19) e viene mostrato come il modello additivo non presenti le stesse lacune dei modelli exponential Lévy ma, al contrario, riproduca ciò che si vede nel mercato.

### 4.1 Il comportamento asintotico degli exponential Lévy

Si consideri il modello exponential Lévy (1.13) dove il processo di Lévy  $f_t$  ha tripletta  $(A, \nu, \gamma)$ . Si assuma che  $\int_{|x|>1} e^x \nu(dx) < +\infty$  e che il modello sia risk-neutral, cioè che

$$\gamma + \frac{A}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1 - xI_{|x|\leq 1}) \nu(dx) = 0.$$

Il seguente teorema precisa il comportamento asintotico della misura di probabilità del processo di Lévy.

**Teorema 4.1.1** (Figueroa-Lopez, Forde [23], Teorema 2.1). *Sia  $y > 0$  fissato. Allora, si ha il seguente comportamento a tempi piccoli della distribuzione di probabilità di  $f_t$  :*

$$\frac{1}{t}\mathbb{P}(f_t \geq y) = \nu[y, +\infty) + O(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Sfruttando il teorema 4.1.1 è possibile trovare il prezzo asintotico di un'opzione call out-of-the-money, come precisato dalla seguente proposizione.

**Proposizione 4.1.2** (Figueroa-Lopez, Forde [23], Proposizione 2.2). *Si assuma che*

$$(i) \int_{|x|>1} e^x \nu(dx) < +\infty,$$

$$(ii) \sup_{|x|>\epsilon} e^x \nu(dx) < +\infty,$$

per qualsiasi  $\epsilon > 0$ . Allora si ha la seguente espansione a tempi piccoli del prezzo di un'opzione call con strike  $K > F_0$ :

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}[(F_t - K)^+] = F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - e^k)^+ \nu(x) dx + O(t), \quad t \rightarrow 0$$

dove  $k = \log \frac{K}{F_0} > 0$  è la *log-moneyness*.

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □

È possibile scrivere la proposizione 4.1.2 nel caso in cui  $k < 0$ , come riportato nell'articolo di Tankov [16], Proposizione 4. In tal caso si avrebbe che

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}[(K - F_t)^+] = F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^k - e^x)^+ \nu(x) dx + O(t), \quad t \rightarrow 0$$

### 4.1.1 La volatilità implicita

Sia  $\sigma_{IMP}(t, k)$  la volatilità implicita corrispondente alla log-moneyness  $k$  e time to maturity  $t$  e si indichi con  $V(t, k)$  la *varianza implicita adimensionalizzata*, cioè

$$V(t, k) = \sigma_{IMP}(t, k)^2 t.$$

Sia

$$a_0^O(k) := \int_k^{+\infty} (e^x - e^k) \nu(dx),$$

e sia

$$a_0^I(k) := \int_{-\infty}^k (e^k - e^x) \nu(dx).$$

Come dimostrato da Carr&Wu [21], attraverso la put-call parity, il teorema della convergenza dominata, e la continuità stocastica del processo di Lévy  $f_t$  si ha che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} [(F_t - K)^+] = (F_0 - K)^+$$

e da qui si ha che  $V(t, k) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow 0$ .

Lo skew della volatilità implicita a brevi time to maturity nei modelli exponential Lévy può essere studiato comparando i prezzi asintotici di opzioni call nel modello di Black a quelli ottenuti nei modelli exponential Lévy.

Prima di proseguire, è quindi opportuno introdurre il corollario seguente.

**Corollario 4.1.3** (Forde, Jacquier, Lee [24], Corollario 3.5). *Il prezzo di Black di un'opzione call ha il seguente comportamento asintotico per  $t \rightarrow 0$ :*

$$\frac{C_B(F_0, k, \sigma, 0, t)}{F_0} = \begin{cases} (1 - e^k)^+ + \exp\left\{-\frac{k^2}{2\sigma^2 t}\right\} \left(\frac{A_B(x, \sigma)}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{3}{2}} + O(t^{\frac{5}{2}})\right), & k \neq 0 \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma^3}{24\sqrt{2\pi}} t^{\frac{3}{2}} + O(t^{\frac{5}{2}}), & k = 0 \end{cases}$$

dove

- $\sigma$  è la volatilità implicita,
- $A_B(k, \sigma) = \frac{\sigma^3}{k^2} e^{\frac{k}{\sigma}}$ , se  $k \neq 0$ .

*Dimostrazione.* Si veda l'Appendice A. □

Il seguente teorema, sfruttando il corollario 4.1.3, precisa con quale velocità rispetto al tempo la varianza implicita adimensionalizzata  $V(t, k)$  tende a zero.

**Teorema 4.1.4** (Tankov [16], Proposizione 4 e 5). *Sia  $f_t$  un processo di Lévy con misura di Lévy tale che*

- $\text{supp}\nu = \mathbb{R}$ ,
- $\int_{|x| \leq 1} |x|\nu(dx) < +\infty$ .

*Allora la volatilità implicita adimensionalizzata nei modelli  $F_t = F_0 e^{f_t}$  ha il seguente comportamento asintotico se  $k \neq 0$ :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2V(t, k) \log \frac{1}{t}}{k^2} = 1.$$

*Nel caso in cui  $k = 0$ , si ha il seguente comportamento asintotico all'ATM:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{V(t, 0)}}{t\sqrt{2\pi} \max(a_0^O(k), a_0^I(k))} = 1.$$

Dal teorema 4.1.4 si può ottenere il comportamento asintotico della volatilità implicita. Se  $t \rightarrow 0$  si ha che

- $k \neq 0$

$$\sigma_{IMP}(t, k) \sim \frac{|k|}{\sqrt{2t \log \frac{1}{t}}}; \quad (4.1)$$

- $k = 0$

$$\sigma_{IMP}(t, 0) \sim \frac{\sqrt{2\pi t}}{\max(a_0^O(k), a_0^I(k))}. \quad (4.2)$$

Si vede dunque che  $\sigma_{IMP}(t, k) \rightarrow +\infty$  se  $t \rightarrow 0$  e  $k \neq 0$ , mentre  $\sigma_{IMP}(t, 0) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow 0$ . Inoltre la volatilità implicita presenta una forma a V, e di conseguenza un punto angoloso in  $k = 0$ . Precisamente si ha il comportamento asintotico stimato mostrato in figura 4.1.

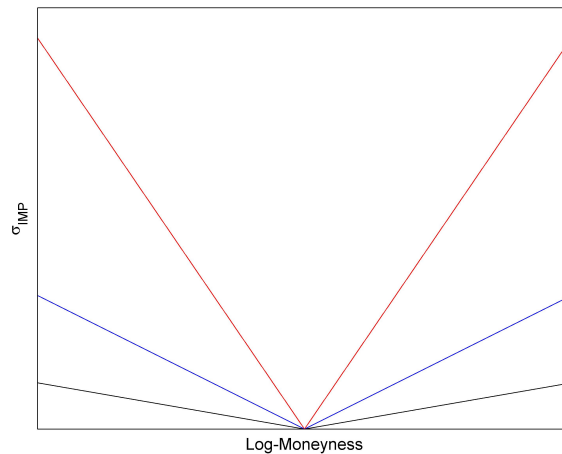


Figura 4.1: Comportamento asintotico di  $\sigma_{IMP}$  nei modelli exponential Lévy. La linea nera corrisponde al caso in cui il time to maturity è 10E-04, la linea blu quando il time to maturity è 10E-05 e la linea rossa quando il time to maturity è 10E-06. La forma a V della volatilità implicita è sempre più pronunciata man mano che il time to maturity diminuisce.

## 4.2 Simulazioni numeriche

Il comportamento della volatilità implicita mostrato in figura 4.1 non è riscontrato nella realtà dei mercati finanziari, nel senso che osservando i mercati



finanziari non si vede la formazione di nessun punto angoloso nella volatilità implicita. Questo fatto induce a pensare che i modelli exponential Lévy non siano in grado di riprodurre adeguatamente la volatilità implicita quando il time to maturity tende a zero.

Per verificare il comportamento asintotico stimato in figura 4.1, sono state effettuate delle simulazioni numeriche per ricostruire il grafico della volatilità implicita. Sono state prezzate delle opzioni call europee tramite l'usuale formula di Lewis e infine è stata ricavata la volatilità implicita. I risultati ottenuti sono riportati in figura 4.2 utilizzando il modello NIG simmetrico, cioè imponendo che  $\eta = 0$ .

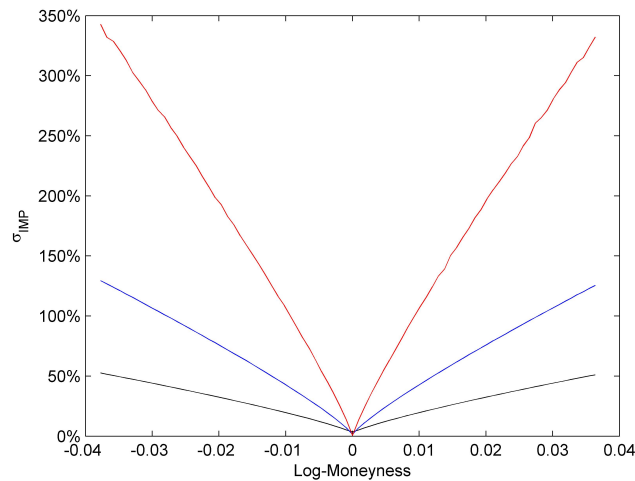


Figura 4.2: Comportamento asintotico simulato di  $\sigma_{IMP}$  nel modello NIG simmetrico. La linea nera corrisponde alla simulazione con time to maturity pari a  $10E-03$ , la linea blu alla simulazione con time to maturity pari a  $10E-04$  e la linea rossa al time to maturity  $10E-05$ . Dalle simulazioni si evince lo stesso comportamento asintotico stimato in figura 4.1. Anche in questo caso la forma a V è più pronunciata per il time to maturity più breve.

In figura 4.3 invece sono riportati i risultati ottenuti utilizzando il modello NIG asimmetrico, avendo imposto  $\eta = 5$ .

In entrambi i casi si vedono i termini dominanti (4.1) e (4.2) quando il time to maturity tende a zero.

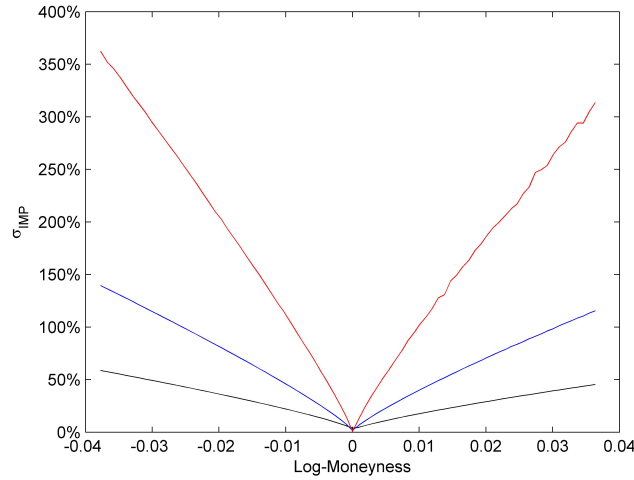


Figura 4.3: Comportamento asintotico simulato di  $\sigma_{IMP}$  nel modello NIG asimmetrico. Come nel grafico precedente, la linea nera corrisponde alla simulazione con time to maturity pari a  $10E-03$ , la linea blu alla simulazione con time to maturity pari a  $10E-04$  e la linea rossa al time to maturity  $10E-05$ . Le simulazioni, anche nel caso asimmetrico, confermano ciò che si era stimato.

#### 4.2.1 Confronto tra modello additivo ed exponential Lévy

Riassumendo i risultati presentati nel capitolo 3, il modello utilizzato per calibrare i dati di mercato è

$$F_t = F_0 \cdot \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{t}} \right) \sigma(t)^2 + \sigma(t) W_{S_t} - \log \mathcal{L} \left[ \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{t}} \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Come già visto, il modello (4.3) calibra adeguatamente la superficie di volatilità implicita, riuscendo a riprodurre ciò che si vede empiricamente nel mercato.

Come step finale, si è riprodotto numericamente il comportamento del modello (4.3) quando il time to maturity tende a zero. La riproduzione della volatilità implicita nel caso del modello additivo rispecchia ciò che effettivamente si riscontra nella realtà dei mercati: non esiste nessun punto angoloso in  $k = 0$  e la volatilità implicita non tende a zero in  $k = 0$  quando il time to maturity tende a zero.

I risultati riportati in figura 4.4 sono stati ottenuti utilizzando un modello NIG additivo simmetrico, imponendo  $\bar{\eta} = 0$ .

In figura 4.5 è riportata la volatilità implicita ottenuta utilizzando il modello additivo NIG nel caso asimmetrico, imponendo che  $\eta(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}$ .

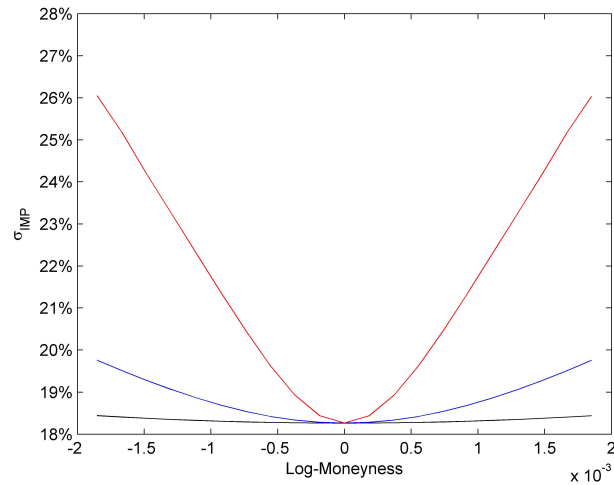


Figura 4.4: Comportamento asintotico simulato di  $\sigma_{IMP}$  nel modello additivo NIG simmetrico. Le simulazioni sono state effettuate a time to maturity pari a  $10E-03$  (linea nera), a time to maturity pari a  $10E-04$  (linea blu) e a time to maturity pari a  $10E-05$  (linea rossa). Si noti che il punto angoloso che si vedeva precedentemente nei modelli exponential Lévy non è più presente e si noti che quando la log-moneyness è zero la volatilità implicita non è zero.

Facendo variare il parametro  $\beta$  di  $\kappa(t)$  su un intervallo  $[0, 1]$  e considerando time to maturity sempre più piccoli, è possibile vedere il comportamento asintotico dei modelli additivi (1.1). Si ricorda che il caso  $\beta = 1$  corrisponde al caso degli exponential Lévy e  $\beta = 0$  corrisponde al modello (4.3).

Nelle figure 4.6, 4.7 e 4.8 sono riportati i valori della volatilità implicita al variare della log-moneyness calcolati per i modelli additivi per time to maturity di  $10E-03$ ,  $10E-04$  e  $10E-05$ , rispettivamente. Il modello utilizzato è lo stesso utilizzato in precedenza, cioè un modello NIG. Per semplicità, si è assunto l'assenza di skewness.

Si osservi come, al diminuire del time to maturity, il modello exponential Lévy presenti sempre più il comportamento descritto in precedenza. Si noti inoltre come il modello corrispondente ad un valore di  $\beta$  pari a 0.5, presenti, seppur in maniera meno accentuata, lo stesso comportamento degli exponential Lévy.

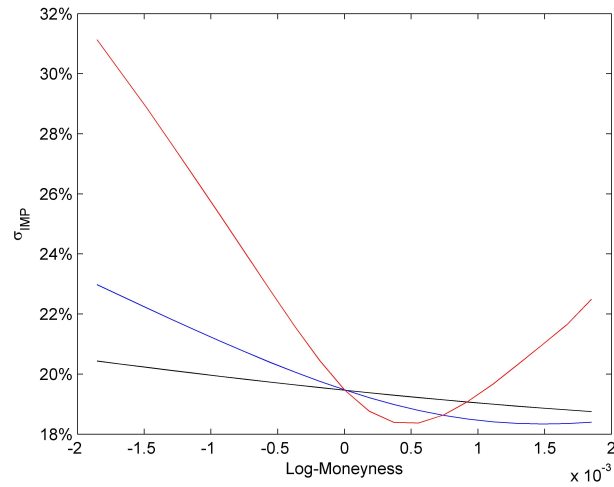


Figura 4.5: Comportamento asintotico simulato di  $\sigma_{IMP}$  nel modello additivo NIG asimmetrico. Come prima, le simulazioni sono state effettuate a time to maturity pari a  $10E-03$  (linea nera), a time to maturity pari a  $10E-04$  (linea blu) e a time to maturity pari a  $10E-05$  (linea rossa). Anche in questo caso si noti che il punto angoloso che si vedeva precedentemente nei modelli exponential Lévy non è più presente e si noti che quando la log-moneyness è zero la volatilità implicita non è zero. Si osservi l'aumentare della skewness al diminuire del time to maturity.

Se i modelli appena citati presentano la formazione di un punto angoloso, il modello additivo (4.3), corrispondente al caso  $\beta = 0$ , non accenna alla formazione del punto angoloso anche per tempi molto piccoli. Inoltre la volatilità implicita ATM forward non si annulla. Si ricorda che il valore  $\beta = 0$  è effettivamente il valore ricavato dalla calibrazione fatta sui dati di mercato.

Osservando ciò che si vede empiricamente nei mercati, si può concludere che il modello calibrato (4.3) è di fatto il modello che riesce a catturare meglio le caratteristiche asintotiche del mercato, non presentando le stesse lacune dei modelli appena descritti.

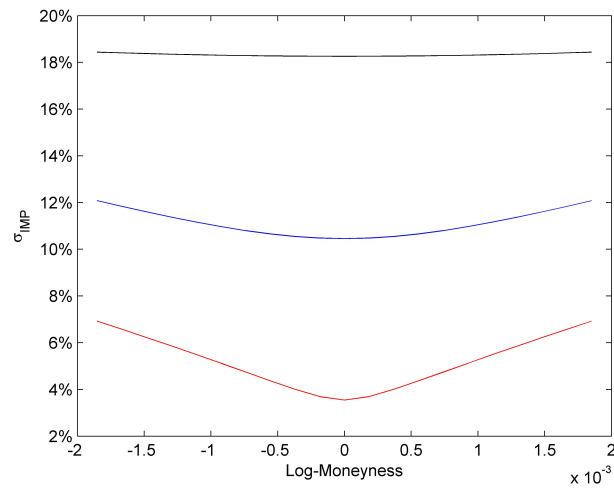


Figura 4.6:  $\sigma_{IMP}$  calcolata al variare di  $\beta$  utilizzando un modello additivo NIG simmetrico per  $t=10E-03$ . La linea rossa corrisponde al caso degli exponential Lévy, mentre la linea nera corrisponde al caso del modello additivo (4.3). La linea blu corrisponde al caso del modello additivo (1.1) in cui il parametro  $\beta$  è pari a 0.5. Il modello exponential Lévy accenna la formazione di un punto angoloso, seppur non ancora presente.

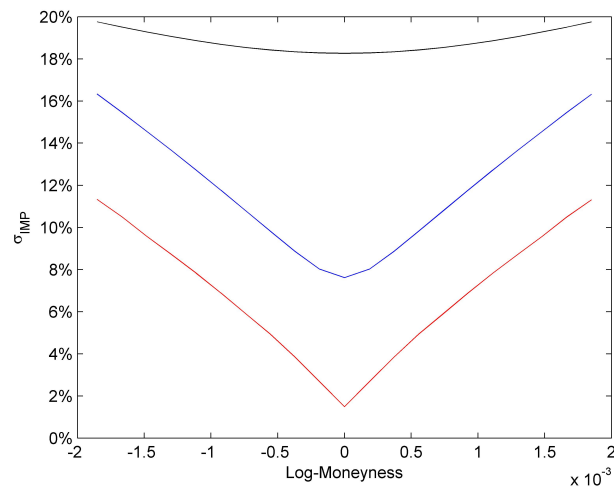


Figura 4.7:  $\sigma_{IMP}$  calcolata al variare di  $\beta$  utilizzando un modello additivo NIG simmetrico per  $t=10E-04$ . Si noti come nel caso degli exponential Lévy (linea rossa) si stia accentuando la formazione del punto angoloso. Anche nel caso in cui  $\beta = 0.5$  (linea blu) si nota un accennarsi di un punto angoloso. Nel rimanente caso si nota solamente una leggera formazione di concavità.

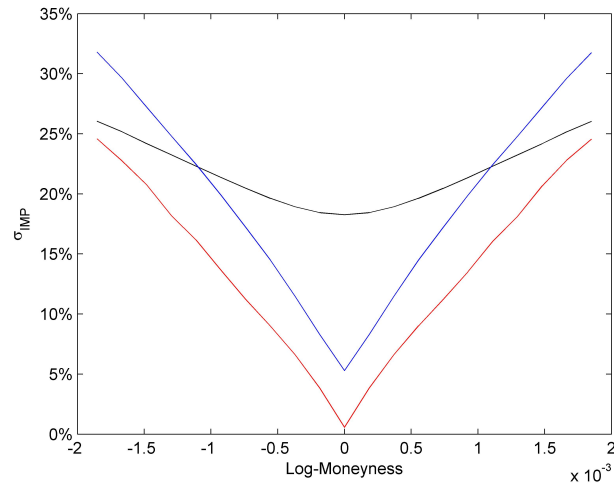


Figura 4.8:  $\sigma_{IMP}$  calcolata al variare di  $\beta$  utilizzando un modello additivo NIG simmetrico per  $t=10E-05$ . Avendo diminuito ancora di più il time to maturity, si nota definitivamente la formazione del punto angoloso con il modello exponential Lévy (linea rossa) e si nota che in questo modello la volatilità implicita è prossima allo zero a log-moneyness nulla. Il punto angoloso è venuto a formarsi anche nel caso additivo  $\beta = 0.5$ . A differenza degli exponential Lévy, la volatilità implicita non è prossima allo zero a log-moneyness nulla. Infine nel caso in cui  $\beta = 0$  (linea nera), si nota un aumento della concavità (come si osserva empiricamente nel mercato) e nessuna formazione del punto angoloso, mostrando una performance migliore rispetto agli altri due modelli.

Sono stati studiati e simulati numericamente i modelli additivi (1.1) facendo assumere al parametro  $\beta$  i valori rimanenti in  $(0,1)$ . Anche in questo caso si evince lo stesso comportamento del modello nel caso in cui  $\beta = 0.5$  facendo concludere a proposito dell'ottimalità del modello (4.3). In figura 4.9 sono riportati i risultati nel caso in cui  $\beta = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\beta = 0.6$  e  $\beta = 0.8$  a time to maturity pari a  $10E-05$  utilizzando un modello NIG additivo.

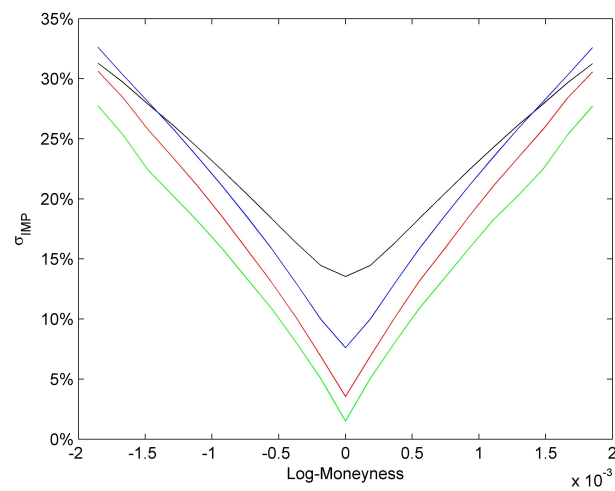


Figura 4.9:  $\sigma_{IMP}$  calcolata al variare di  $\beta$  utilizzando un modello additivo NIG simmetrico per  $t=10E-05$ . Si noti che per valori di  $\beta$  maggiori di 0.5 (linea rossa e linea verde corrispondenti al caso  $\beta = 0.6$  e  $\beta = 0.8$ , rispettivamente) il comportamento è molto simile a quello degli exponential Lévy. Per valori di  $\beta$  minori di 0.5 (linea blu e linea nera corrispondenti al caso  $\beta = 0.4$  e  $\beta = 0.2$ ), il comportamento è più simile al caso in cui  $\beta = 0$  ma entrambi presentano la formazione di un punto angoloso (nel caso in cui  $\beta = 0.2$  si osserva l'accennarsi del punto angoloso). La differenza tra quest'ultimi e gli exponential Lévy sta nel fatto che i primi presentano un punto angoloso a time to maturity più brevi rispetto ai secondi.

# Conclusioni

In questa tesi l'obiettivo è stato quello di studiare e implementare un modello equity per riprodurre le superfici di volatilità implicite osservate sul mercato. L'idea alla base era quella di trovare un modello che permettesse di ottenere risultati soddisfacenti in fase di calibrazione e che, al tempo stesso, fosse un modello *parsimonioso* nei parametri. A questo scopo è stato introdotto un semplice modello additivo.

La calibrazione del modello è stata affrontata considerando le opzioni più liquide presenti sul mercato europeo Eurex e sul mercato americano CBOT: sono state considerate le opzioni europee sul principale indice azionario europeo (Euro Stoxx 50) e sul principale indice azionario americano (S&P 500). La calibrazione è stata effettuata considerando tutti i dati relativi alle opzioni disponibili ad un dato istante della giornata. Per questo motivo, prima di effettuare la calibrazione è stato opportuno filtrare i dati per selezionare le opzioni più liquide. Tutte le informazioni di mercato sono state ottenute tramite *Bloomberg*<sup>TM</sup>.

La calibrazione del modello ha portato a risultati ottimi ottenendo una superficie di volatilità implicita di calibrazione molto soddisfacente. Inoltre la calibrazione del modello ha condotto ad un'interessante conclusione a proposito del set di parametri utilizzati nel modello: ogni parametro presenta il proprio scaling rispetto al time to maturity, anche considerando scadenze molto diverse tra loro.

Infine sono state svolte delle analisi numeriche a proposito del comportamento asintotico del modello ed è stato mostrato che il comportamento critico degli exponential Lévy, cioè la formazione del punto angoloso all'ATM nella superficie di volatilità implicita, è assente utilizzando il modello additivo introdotto.



---

In conclusione il modello additivo riesce da un lato a preservare la semplicità di trattazione teorica e numerica proprie degli exponential Lévy e dall'altro permette di ottenere risultati di calibrazione migliori. In particolar modo, si apprezza l'efficienza di questi modelli in termini di volatilità implicita: anche a time to maturity molto brevi fittano adeguatamente i dati di mercato ed escludono la possibilità di formazione di punti angolosi. Un risultato interessante è il trade off raggiunto: con pochi parametri si sono ottenuti risultati di calibrazione estremamente soddisfacenti.

# Appendice A

## Dimostrazioni

### Dimostrazione Proposizione 1.5.1.

Si consideri una call europea con expiry  $t$  e strike  $K$  e si indichi con  $C(\cdot)$  il prezzo ottenuto utilizzando il modello additivo e con  $C_B(\cdot)$  il prezzo ottenuto utilizzando il modello di Black '76.

Sia  $\eta(t) = 0 \forall t > 0$ . Utilizzando la formula di Lewis si ottiene che per i modelli additivi

$$\frac{C(\tilde{k})}{B(0, t)F_0} = 1 - e^{-\frac{\tilde{k}}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{4}\right)\right]}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi := 1 - e^{-\frac{\tilde{k}}{2}} I(\tilde{k}), \quad (\text{A.1})$$

dove  $\tilde{k} = \log \frac{F_0}{K}$ . Per comodità si evidenzia la sola dipendenza di  $C(\cdot)$  e  $C_B(\cdot)$  rispetto a  $\tilde{k}$ . Scrivendo la formula di Lewis nel caso del modello di Black '76 si ha che

$$\frac{C_B(\tilde{k})}{B(0, t)F_0} = 1 - e^{-\frac{\tilde{k}}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi} e^{-\sigma_{IMP}(\tilde{k})^2 \frac{t}{2} (\xi^2 + \frac{1}{4})}}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi := 1 - e^{-\frac{\tilde{k}}{2}} I_B(\tilde{k}). \quad (\text{A.2})$$

Dato che i prezzi coincidono, deve essere soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{4}\right)\right]}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi} e^{-\sigma_{IMP}(\tilde{k})^2 \frac{t}{2} (\xi^2 + \frac{1}{4})}}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi,$$

cioè

$$I(\tilde{k}) = I_B(\tilde{k}). \quad (\text{A.3})$$

Si consideri ora il prezzo in  $-\tilde{k}$ . Riscrivendo la (A.1):

$$\frac{C(-\tilde{k})}{B(0, t)F_0} = 1 - e^{\frac{\tilde{k}}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{k}\xi} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{4}\right)\right]}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi = 1 - e^{\frac{\tilde{k}}{2}} I(-\tilde{k}). \quad (\text{A.4})$$

Per quanto riguarda la (A.2):

$$\frac{C_B(-\tilde{k})}{B(0, t)F_0} = 1 - e^{\frac{\tilde{k}}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{k}\xi} e^{-\sigma_{IMP}(-\tilde{k})^2 \frac{t}{2} (\xi^2 + \frac{1}{4})}}{2\pi \xi^2 + \frac{1}{4}} d\xi = 1 - e^{\frac{\tilde{k}}{2}} I_B(-\tilde{k}). \quad (\text{A.5})$$

Uguagliando le due equazioni (A.4) e (A.5) si ha che

$$I(-\tilde{k}) = I_B(-\tilde{k}). \quad (\text{A.6})$$

Effettuando il cambio di variabile  $\xi' = -\xi$  nella (A.4), si ottiene

$$I(-\tilde{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi'}}{2\pi} \frac{\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(\xi'^2 + \frac{1}{4}\right)\right]}{\xi'^2 + \frac{1}{4}} d\xi' = I(\tilde{k}), \quad (\text{A.7})$$

mentre, effettuando lo stesso cambio di variabile nella (A.5), si ottiene

$$I_B(-\tilde{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tilde{k}\xi'}}{2\pi} \frac{e^{-\sigma_{IMP}(-\tilde{k})^2 \frac{1}{2}\left(\xi'^2 + \frac{1}{4}\right)}}{\xi'^2 + \frac{1}{4}} d\xi' = I_B(\tilde{k}). \quad (\text{A.8})$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti si ottiene la seguente sequenza di uguaglianze:

$$I(-\tilde{k}) = I(\tilde{k}) = I_B(\tilde{k}) = I_B(-\tilde{k}). \quad (\text{A.9})$$

Da quest'ultima si conclude che

$$\sigma_{IMP}(\tilde{k})^2 = \sigma_{IMP}(-\tilde{k})^2,$$

ed essendo la volatilità implicita positiva, si ha che

$$\sigma_{IMP}(\tilde{k}) = \sigma_{IMP}(-\tilde{k}). \quad \square$$

### Dimostrazione Proposizione 1.5.2.

La proprietà di continuità è soddisfatta essendo  $\rho_t(dx)$  composizione di funzioni continue di  $t$  a  $x$  fissato.

La proprietà di annullamento si ottiene facendo il limite per  $t \rightarrow 0$  della funzione  $\rho_t(x)$  a  $x$  fissato.

Infine la proprietà di monotonia può essere dimostrata facendo semplicemente la derivata della misura di Lévy rispetto al tempo fissando  $x$  e notando che è sempre positiva.

Le tre proprietà sono contemporaneamente soddisfatte  $\forall \alpha \in [0, 1)$  se e solo se  $\beta \in [0, 1]$ .

□

### Dimostrazione Teorema 1.5.3.

Sia  $h(x)$  una funzione continua e limitata su  $\mathbb{R}$ . Sfruttando le proprietà del valore atteso condizionato è possibile scrivere

$$\mathbb{E}[h(\Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[h(\Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t}) \mid S_t]].$$

In particolare, scegliendo  $h(x) = I_{x \in B}$  dove  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , si ottiene:

$$\mathbb{P}[f_t \in B] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[\Theta(t)s + \sigma(t)W_s \in B] \lambda_t(ds) := \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \lambda_t(ds).$$

Sfruttando la definizione di funzione caratteristica si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{izf_t}] &= \mathbb{E}\left[e^{iz(\Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t})}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iz(\Theta(t)S_t + \sigma(t)W_{S_t})} \mid S_t\right]\right] = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{iz(\Theta(t)s + \sigma(t)W_s)}\right] \lambda_t(ds) = \int_0^{+\infty} \Phi_{s,t}(z) \lambda_t(ds) = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\log \Phi_{t,s}(z)} \lambda_t(ds), \end{aligned}$$

con

$$\Phi_{s,t}(z) = \exp\left\{iz\Theta(t)s - \frac{\sigma(t)^2 s z^2}{2}\right\} = \left(\underbrace{\exp\left\{\Theta(t)iz - \frac{\sigma(t)^2 z^2}{2}\right\}}_{\phi_t(z)}\right)^s,$$

dove  $\phi_t(z)$  è la funzione caratteristica di una v.a.  $D \sim N(\Theta(t), \sigma(t)^2)$

Sostituendo, si ottiene

$$\mathbb{E}[e^{izf_t}] = \int_0^{+\infty} e^{s \log \phi_t(z)} \lambda_t(ds) = e^{l_t(\log \phi_t(z))}$$

dove  $l_t(z)$  è l'esponente di Laplace di  $S_t$ . Per definizione si può riscrivere:

$$l_t(\log \phi_t(z)) = \int_0^{+\infty} (\phi_t(z)^s - 1) \rho_t(ds) + b_t \log \phi_t(z).$$

Si definiscano  $\nu_{1,t}(B)$  e  $g(z, x)$  nel seguente modo:

$$\nu_{1,t}(B) = \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \rho_t(ds), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$g(z, x) = e^{izx} - 1 - izxI_{|x| \leq 1}.$$

Dunque, si riscrive opportunamente  $l_t(\log \phi_t(z))$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\phi_t(z)^s - 1) \rho_t(ds) &= \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1) \mu_{s,t}(dx) = \\ &= \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{\mathbb{R}} g(z, x) \mu_{s,t}(dx) + \\ &+ i \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{\mathbb{R}} zx I_{|x| \leq 1} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(z, x) \nu_{1,t}(dx) + iz \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{|x| \leq 1} \mu_{s,t}(dx). \end{aligned}$$

Riarrangiando le espressioni ottenute, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{izf_t}] &= \exp \left\{ -\frac{b_t \sigma(t)^2 z^2}{2} + iz \left( b_t \Theta(t) + \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{|x| \leq 1} x \mu_{s,t}(dx) \right) + \right. \\ &\left. + \int_0^{+\infty} (e^{izx} - 1 - izx I_{|x| \leq 1}) \int_0^{+\infty} \mu_{s,t} \rho_t(ds) dx \right\}. \end{aligned}$$

Si confronta l'espressione ottenuta sopra con l'espressione del teorema di Sato 1.2.6 e si conclude che il processo  $f_t$  ha tripletta

$$A_t^f = b_t \sigma(t)^2$$

$$\gamma_t^f = b_t \Theta(t) + \int_0^{+\infty} \rho_t(ds) \int_{|x| \leq 1} x \mu_{s,t}(dx)$$

$$\nu_t^f(B) = \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(B) \rho_t(ds) \quad \square$$

#### Dimostrazione Proposizione 1.5.4.

Per giungere alle espressioni della tripletta basta imporre  $b_t = 0 \forall t > 0$  nel teorema 1.5.3.

Affinchè  $f_t$  sia un processo additivo, la tripletta deve soddisfare le proprietà richieste dal teorema 1.2.6.

Per quanto riguarda le proprietà di continuità è sufficiente notare che la tripletta è composizione di funzioni continue.

Le condizioni di annullamento derivano direttamente facendone il limite per  $t \rightarrow 0$ .

La misura di Lévy può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\nu_t^f(x) &= \int_0^{+\infty} \mu_{s,t}(x) \rho_t(ds) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s}} e^{-\frac{x-\Theta(t)s}{2\sigma^2 s}} \frac{c_t e^{-\lambda_t s}}{s^{1+\alpha}} ds = \\
&= \frac{c_t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{\frac{-x^2 - \Theta(t)^2 s^2 + 2x\Theta(t)s}{2\sigma^2 s} - \lambda_t s\right\} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}+\alpha}} ds = \\
&= \frac{c_t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{\Theta(t)x}{\sigma^2}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{\frac{-x^2 - \Theta(t)^2 s^2 - 2\lambda_t \sigma^2 s^2}{2\sigma^2 s}\right\} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}+\alpha}} ds = \\
&= \frac{c_t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{\Theta(t)x}{\sigma^2}} \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{\Theta(t)^2 + 2\lambda_t \sigma^2}}{\sigma}\right)^2 \frac{s}{2} - \left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2s}\right\} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}+\alpha}} ds.
\end{aligned}$$

In generale vale la seguente proprietà:

$$\forall \alpha, \beta > 0 \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 s}{2} - \frac{\beta^2}{2s}\right\} s^{-(1+\nu)} ds = 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu K_\nu(\alpha\beta) \quad (\text{A.10})$$

dove  $K_\nu(\cdot)$  è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo di ordine  $\nu$ .

Sfruttando la proprietà (A.10):

$$\nu_t^f(x) = \frac{2c_t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{\Theta(t)x}{\sigma^2}} \left(\frac{\sqrt{\Theta(t)^2 + 2\lambda_t \sigma^2}}{|x|}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} K_{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{|x|\sqrt{\Theta(t)^2 + 2\lambda_t \sigma^2}}{\sigma^2}\right). \quad (\text{A.11})$$

In figura A.1 è riportato l'andamento della funzione di Bessel  $K_\nu(z)$  per  $z > 0$  al variare dell'ordine. Essa è una funzione decrescente rispetto a  $z > 0$ .

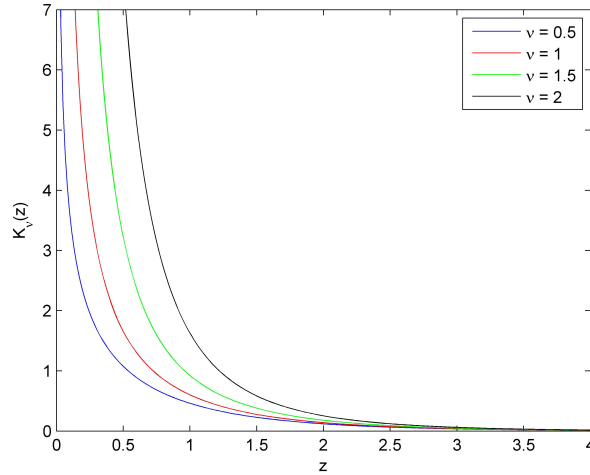


Figura A.1: Andamento della funzione di Bessel modificata del secondo tipo al variare dell'ordine.

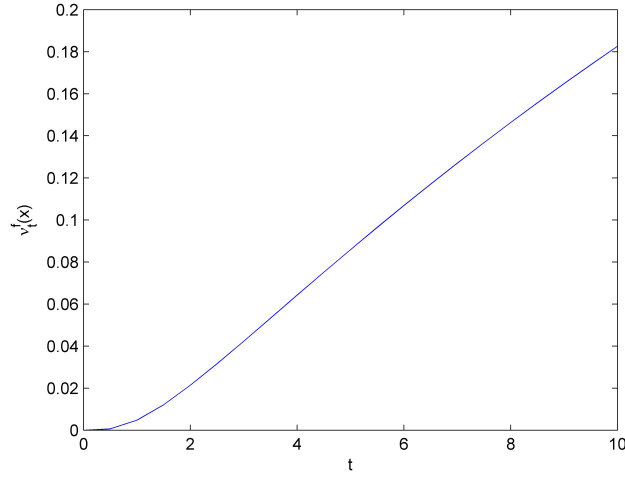


Figura A.2: Andamento della misura di Lévy  $\nu_t^f(x)$  rispetto al tempo in  $x = -1$  fissato. I parametri utilizzati sono i seguenti:  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\bar{\eta} = 1$ ,  $\delta = 1$ . Si osserva che  $\nu_s^f(x) \leq \nu_t^f(x)$  per  $s \leq t$ .

Si ricorda che

$$\lambda_t = \frac{\delta}{t^{1-\beta}}, \quad c_t = -\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \frac{t}{(\delta t^{1-\beta})^{1-\alpha}},$$

dove  $\delta > 0$ .

La funzione  $\lambda_t$  è una funzione decrescente del tempo, mentre la funzione  $c_t$  è una funzione crescente del tempo. La funzione  $z(t) := \frac{|x|\sqrt{\Theta(t)^2 + 2\lambda_t\sigma^2}}{\sigma^2}$  è dunque una funzione decrescente rispetto al tempo  $t$ . Componendo la funzione di Bessel  $K_{\alpha+\frac{1}{2}}$  con la funzione  $z(t)$  si ottiene una funzione crescente rispetto al tempo. La proprietà di monotonìa rispetto al tempo della misura di Lévy  $\nu_t^f(x)$ , a  $x$  fissato (sia positivo che negativo), è stata testata numericamente utilizzando un'ampia gamma di set di parametri.

In figura A.2 è riportato un esempio dell'andamento della misura di Lévy che si è riscontrato per gli  $x$  negativi, mentre in figura A.3 è riportato un esempio dell'andamento che si è riscontrato per gli  $x$  positivi. Gli andamenti riportati prevedono l'utilizzo di due set di parametri differenti.

Come nel caso degli exponential Lévy ad attività infinita, occorre procedere con il troncamento dei piccoli salti.

□

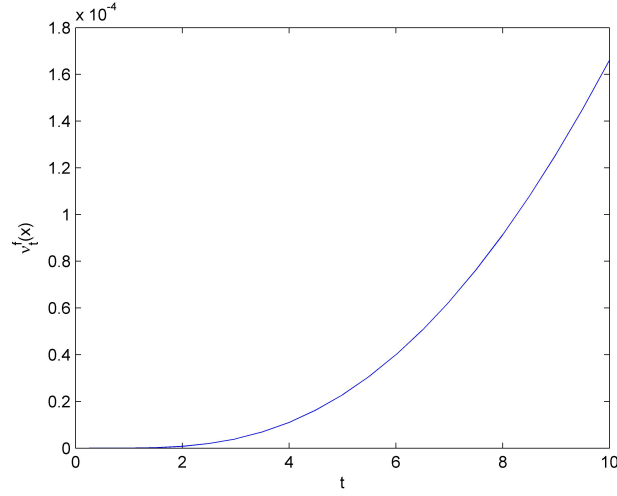


Figura A.3: Andamento della misura di Lévy  $\nu_t^f(x)$  rispetto al tempo in  $x = 2$  fissato. I parametri utilizzati sono i seguenti:  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\omega = 0.8$ ,  $\bar{\eta} = 1$ ,  $\delta = 1$ . Si osserva che  $\nu_s^f(x) \leq \nu_t^f(x)$  per  $s \leq t$ .

#### Dimostrazione Proposizione 4.1.2.

Sia  $\mathbb{P}$  la misura di probabilità risk-neutral.

Sia  $\mathcal{F} = \sigma(f_s : s \geq 0)$  e  $\mathcal{F}_t := \cap_{s>t} \sigma(f_u : u \leq s)$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(F_t - K)^+] &= \mathbb{E}[F_t I_{F_t \geq K}] - K \mathbb{P}[F_t \geq K] = \\ &= F_0 \mathbb{E}[e^{f_t} I_{F_t \geq K}] - F_0 e^k \mathbb{P}[f_t \geq k] = \\ &= F_0 \mathbb{P}^*[f_t \geq k] - F_0 \mathbb{P}[f_t \geq k] \end{aligned}$$

dove

$$\mathbb{P}^*[B] = \mathbb{E}[e^{f_t} I_B], \quad \forall t > 0, B \in \mathcal{F}_t.$$

Sotto la misura di probabilità  $\mathbb{P}^*$  il processo  $f_t$  è un processo di Lévy con tripletta  $(A, \nu^*, \gamma^*)$  dove

$$\nu^*(x) = e^x \nu(x), \quad \gamma^* = \gamma + \int_{|x| \leq 1} x(e^x - 1) \nu(x) dx + A,$$

grazie al teorema 33.1 in Sato [1].



Infine, utilizzando il teorema 4.1.1 si ha che per  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} \mathbb{E} [(F_t - K)^+] &= \frac{F_0}{t} \mathbb{P}^* [f_t \geq k] - \frac{F_0}{t} e^k \mathbb{P} [f_t \geq k] + O(t) = \\
 &= F_0 \nu^*[k, +\infty) - F_0 \nu[k, +\infty) + O(t) = \\
 &= F_0 \int_k^{+\infty} \nu^*(x) dx - F_0 \int_k^{+\infty} \nu(x) dx + O(t) = \\
 &= F_0 \int_k^{+\infty} (e^x - e^k) \nu(x) dx + O(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

### Dimostrazione Corollario 4.1.3.

Sia

$$d_{\pm} = \frac{-k \pm \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}}$$

e sia  $k > 0$ . Si noti che  $d_{\pm} \rightarrow -\infty$  se  $t \rightarrow 0$ .

Sia

$$N(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

la cumulata della normale standard.

Per  $z \rightarrow +\infty$  si ha che

$$\begin{aligned}
 1 - N(z) &= 1 - \int_{-\infty}^z \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.
 \end{aligned}$$

Facendo il cambio di variabili  $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$ , si ha che

$$\int_z^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

e sfruttando l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{t} d(e^{-t^2}) = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{e^{-t^2}}{t} \Big|_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{t^3} d(e^{-t^2}) = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-t^2}}{t^3} \Big|_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} + \frac{3}{4} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z\sqrt{2}} - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^3\sqrt{2}} - \frac{3}{8} \int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{t^5} d(e^{-t^2}) = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \right).
\end{aligned}$$

Dunque si ha che

$$1 - N(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (z^{-1} - z^{-3} + O(z^{-5})) \quad z \rightarrow +\infty.$$

Si definisca  $F(z) = 1 - N(z)$ . Sostituendo  $F(z)$  nella formula di Black:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(F_t - K)^+] &= F_0 N(d_+) - F_0 e^k N(d_-) = \\
&= F_0 (1 - N(-d_+) - e^k + e^k N(d_-)) = \\
&= F_0 \left[ \frac{e^{-\frac{d_+^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (-d_+^{-1} + d_+^{-3} + O(d_+^{-5})) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\frac{d_-^2}{2} + k}}{\sqrt{2\pi}} (-d_-^{-1} + d_-^{-3} + O(d_-^{-5})) \right]
\end{aligned}$$

Dato che

$$-\frac{d_-^2}{2} + k = -\frac{d_+^2}{2}$$

si può scrivere che

$$\mathbb{E}[(F_t - K)^+] = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_+^2}{2}} \left( -\frac{1}{d_+} + \frac{1}{d_-} + \frac{1}{d_+^3} - \frac{1}{d_-^3} + O\left(\frac{1}{d_+^5}\right) \right). \quad (\text{A.12})$$

Si osservi che

$$e^{-\frac{d_+^2}{2}} = \exp \left\{ -\frac{k^2}{2\sigma^2 t} + \frac{k}{2} - \frac{\sigma^2 t}{8} \right\} \sim e^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2 t}} (1 + o(t)) \quad t \rightarrow 0.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_-} - \frac{1}{d_+} &= \frac{\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}}{k^2 - \frac{\sigma^4 t^2}{4}} \sim \frac{\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}}{k^2} + O(t^{\frac{7}{2}}) \quad t \rightarrow 0, \\ \frac{1}{d_+^3} - \frac{1}{d_-^3} &= O(t^{\frac{5}{2}}) \quad t \rightarrow 0, \\ O\left(\frac{1}{d_+^5}\right) &\sim O(t^{\frac{5}{2}}) \quad t \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (A.12) si ottiene la tesi.

Nel caso in cui  $k < 0$  il procedimento è identico a patto che si badi al fatto che se  $t \rightarrow 0$

$$d_{\pm} \rightarrow +\infty.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(F_t - K)^+] &= F_0 N(d_+) - F_0 e^k N(d_-) = \\ &= F_0 (1 - F(d_+) - e^k + e^k F(d_-)) = \\ &= F_0 (1 - e^k) + F_0 (-F(d_+) + e^k F(d_-)).\end{aligned}$$

Di conseguenza compare il termine  $(1 - e^k)$  che è positivo solo se  $k < 0$ .

Sia ora  $k = 0$ . In questo caso si ha che se  $t \rightarrow 0$

$$d_{\pm} \rightarrow 0.$$

Si noti che

$$N(z) = \frac{1}{2} + \int_0^z \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad z \rightarrow 0.$$

Facendo come in precedenza il cambio di variabile  $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$ , si ottiene

$$\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt &= \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} (1 - t^2 + O(t^4)) dt = \\ &= \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{z^3}{6\sqrt{2}} + O(z^5).\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione di  $N(z)$  si giunge a

$$N(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( z - \frac{1}{6} z^3 + O(z^5) \right).$$

---

Sostituendo nella formula di Black si giunge alla tesi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(F_t - K)^+] &= F_0 N(d_+) - F_0 N(d_-) = \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ d_+ - d_- - \frac{1}{6}(d_+^3 - d_-^3) + O(d_+^5) \right] = \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sigma t^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma^3}{24} t^{\frac{3}{2}} + O(t^{\frac{5}{2}}) \right]. \quad \square\end{aligned}$$

# Appendice B

## Notazione

Nome	Descrizione
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Spazio di probabilità
$X$	Variabile aleatoria
$X_t$	Processo stocastico
$\Phi(\cdot)$	Funzione caratteristica
$\Psi(\cdot)$	Esponente caratteristico
$(A, \nu, \gamma)$	Tripletta caratteristica
$\nu(\cdot)$	Misura di Lévy
$S_t$	Subordinatore additivo
$(0, \rho_t, b_t)$	Tripletta caratteristica del subordinatore additivo
$\lambda_t(\cdot)$	Distribuzione di probabilità del subordinatore additivo
$l_t(\cdot)$	Esponente di Laplace del subordinatore additivo
$(0, \rho_t, 0)$	Tripletta caratteristica del subordinatore additivo PTS
$\mathcal{L}[\cdot]$	Trasformata di Laplace del subordinatore additivo PTS
$\beta$	Parametro di $\kappa(t)$
$\lambda_t, c_t, \alpha$	Parametri di $\rho_t$
$f_t$	Processo stocastico
$\Theta(t), \sigma(t), \mu(t)$	Parametri del processo $f_t$
$\eta(t)$	Parametro di skewness
$\kappa(t)$	Parametro di vol of vol
$(A_t^f, \nu_t^f, \gamma_t^f)$	Tripletta caratteristica di $f_t$
$F_0$	Forward price all'istante iniziale
$F_t$	Forward price alla scadenza t
$B(\cdot, \cdot)$	Discount factor
$r(\cdot, \cdot)$	Zero rate
$k$	Log-moneyness di un'opzione
$V_B(\cdot)$	Valore di un'opzione europea calcolato con la formula di Black
$V_L(\cdot)$	Valore di un'opzione europea calcolato con la formula di Lewis
$\sigma_{IMP}(\cdot)$	Volatilità implicita
$V(\cdot)$	Varianza implicita adimensionalizzata

# Bibliografia

- [1] Ken-Iti Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] Rama Cont e Peter Tankov, *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
- [3] John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2011.
- [4] Tomas Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 2009.
- [5] Jean Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press, 1998.
- [6] F.E. Benth, J.S. Benth e S. Koekebakker, *Stochastic Modelling of Electricity and Related Markets*, World Scientific Press, 2008.
- [7] Jim Gatheral, *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [8] R. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Springer, 2009.
- [9] W.H. Press et al., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 2007.
- [10] Paolo Baldi, *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni*, Pitagora Editrice, 2000.
- [11] D.B. Madan, P.P. Carr e E.C. Chang, *The Variance Gamma Process and Option Pricing*, European Finance Review, vol. 2, pp. 79-105, 1998.
- [12] D.B. Madan e P.P. Carr, *Option Valuation Using The Fast Fourier Transform*, Journal of Computational Finance, vol. 2, pp. 61-73, 1999.
- [13] A.L. Lewis, *A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and Other Exponential Lévy Processes*, www.optioncity.net, Preprint September 2001.

- [14] K. Gao e R. Lee, *Asymptotics of Implied Volatility to Arbitrary Order*, [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net), Preprint February 2001.
- [15] O.E. Barndorff-Nielsen e N. Shephard, *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics*, Journal of Royal Statistical Society: Series B, vol. 63 (2), pp. 167-241, 2001.
- [16] P. Tankov, *Pricing and Hedging in Exponential Lévy Models: Review of Recent Results*, Paris-Princeton Lecture Notes in Mathematical Finance, Springer, 2010.
- [17] R.W. Lee, *The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes*, Mathematical Finance, vol. 14 (3), pp. 469-480, July 2004.
- [18] M.L. Galloway, *Option Pricing with Selfsimilar Additive Processes*, Electronic Theses, Treatises and Dissertations, Paper 4372, 2006.
- [19] M.L. Galloway e C.A. Nolder, *Subordination, Self-Similarity, and Option Pricing*, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, vol. 2008, October 2008.
- [20] M. Roper, *Implied Volatility: Small Time-to-Expiry Asymptotics in Exponential Lévy Models*, Thesis, University of New South Wales, 2009.
- [21] P. Carr e L. Wu, *What Type of Process Underlies Options? A Simple Robust Test*, The Journal Of Finance, vol. 58 (6), pp. 2581-2609, December 2003.
- [22] J.E. Figueroa-Lopez e C. Houdré, *Small-Time Expansion for the Transition Distribution of Lévy Processes*, Stochastic Processes and Their Applications, vol. 119 (11), pp. 3862-3889, 2009.
- [23] J.E. Figueroa-Lopez e M. Forde, *The Small-Maturity Smile for Exponential Lévy Model*, SIAM Journal on Financial Mathematics, vol.3 (1), pp. 33-65, 2012.
- [24] M. Forde, A. Jacquier e R. Lee, *The Small-Time Smile and Term Structure of Implied Volatility Under Heston Model*, SIAM Journal on Financial Mathematics, vol. 3 (1), pp. 690-708, 2012.