

# **POLITECNICO DI MILANO**

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione  
Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA MATEMATICA  
Scienze Computazionali per l'Ingegneria



## **UN SOLUTORE AD ALTO ORDINE PER LA FLUIDODINAMICA INCOMPRESSIBILE**

Relatore: Prof. Nicola Parolini

Co-relatore: Dott. Ilario Mazzieri

Candidato: Giorgio Pennesi

Matricola: 798997

---

Anno Accademico 2014-2015

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Metodi di Proiezione</b>	<b>10</b>
1.1 Equazioni di Navier-Stokes per Fluidi Incomprimibili . . . . .	10
1.2 Metodi Pressure-Correction . . . . .	14
1.2.1 Il metodo di Chorin-Teman . . . . .	16
1.2.2 Pressure-Correction in forma standard . . . . .	17
1.2.3 Pressure-Correction, Forma Rotazionale . . . . .	19
1.2.3.1 Primo Sotto-Problema . . . . .	20
1.2.3.2 Secondo Sotto-Problema . . . . .	21
1.2.4 Inizializzazione . . . . .	24
1.2.5 Trattamento del Termine Non Lineare . . . . .	24
1.2.5.1 Estrapolazione del secondo ordine . . . . .	25
1.2.5.2 Metodo di Taylor-Galerkin . . . . .	25
1.2.6 Condizioni di Sforzo Normale Assegnato . . . . .	27
1.3 Formulazione Variazionale . . . . .	28
1.3.1 Buona Posizione dei sotto-problemi . . . . .	32
<b>2 Discretizzazione Spaziale</b>	<b>34</b>
2.1 Elementi Spettrali continui . . . . .	34
2.1.1 Buona Posizione dei Sotto-Problemi . . . . .	37
2.1.2 Vincolo Incomprimibilità Discreto . . . . .	37
2.1.3 Condizione LBB . . . . .	39
2.1.4 Formulazione CG-SEM . . . . .	42
2.2 Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo . . . . .	43
2.2.1 Problema di Diffusione-Reazione . . . . .	47

---

2.2.2	Vincolo Incomprimibilità e Passo di Proiezione . . . . .	52
2.2.3	Termine Non-Lineare . . . . .	53
2.2.4	Formulazione DG-SEM . . . . .	53
2.3	Formulazione Algebrica . . . . .	55
2.3.1	Matrici di Massa . . . . .	58
2.3.2	Matrici di Stiffness . . . . .	58
2.3.3	Matrice di Divergenza . . . . .	60
2.3.4	Matrice Termine Non-Lineare . . . . .	60
2.3.5	Matrici di Salto . . . . .	61
2.3.6	Formulazione . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Implementazione in SPEED</b>	<b>65</b>
3.1	Prodotti di Stiffness . . . . .	68
3.2	Matrici di Salto . . . . .	73
3.3	Condizioni al Bordo . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Test Numerici</b>	<b>80</b>
4.1	Problemi di diffusione-reazione . . . . .	80
4.1.1	Convergenza in $h$ . . . . .	82
4.1.2	Convergenza in $N$ . . . . .	84
4.2	Problema di Navier-Stokes . . . . .	85
4.2.1	Convergenza rispetto a $\Delta t$ . . . . .	86
4.2.1.1	Spazi non compatibili CG-SEM . . . . .	86
4.2.1.2	Spazi compatibili CG-SEM . . . . .	89
4.2.1.3	Spazi compatibili DG-SEM . . . . .	90
4.2.2	Convergenza spaziale . . . . .	92
4.2.2.1	Convergenza in $h$ . . . . .	93
4.2.2.2	Convergenza in $N$ . . . . .	95
4.3	Scalabilità del codice . . . . .	96
4.4	Flusso intorno ad un cilindro . . . . .	99
4.4.1	Caso stazionario . . . . .	101
4.4.2	Caso non stazionario . . . . .	104
	<b>Conclusioni</b>	<b>109</b>

Bibliografia

111

# Introduzione

La Meccanica dei Continui è una branca della matematica classica che studia il comportamento e il moto di corpi continui, ovvero sistemi fisici macroscopici nei casi in cui la dimensione dei fenomeni osservati non venga influenzata dalla struttura molecolare della materia: in questo senso, i punti materiali di un corpo continuo, visti come il più piccolo elemento di materia le cui proprietà macroscopiche non sono influenzate dalle singole molecole, possono essere identificati come punti geometrici di una regione dello spazio fisico, dotati di massa e per i quali è definita una *funzione densità di massa* che ne possa rappresentare la misura. La descrizione di tali fenomeni è quindi realizzata introducendo dei modelli matematici, rappresentati in generale da sistemi di *Equazioni alle Derivate Parziali*.

Uno dei classici problemi della fisica dei continui e dell'ingegneria, è la descrizione di fenomeni legati a fluidi (liquidi o gas) in movimento, mediante la caratterizzazione di proprietà macroscopiche come ad esempio la densità, la velocità, la pressione e la temperatura, in funzione dello spazio e del tempo: tali fenomeni vengono formalmente descritti attraverso un sistema di leggi di conservazione noto con il nome di *Equazioni di Navier-Stokes*, dal nome dei matematici che le hanno formulate, che come vedremo più dettagliatamente nel primo capitolo, nel caso di fluidi *incomprimibili* possono essere scritte nella forma

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

dove  $(\mathbf{u}, p)$  sono le incognite del problema e rappresentano rispettivamente la velocità e la pressione, e che risultano sufficienti a definire uno stato del fluido nel caso in cui quest'ultimo risulti essere appunto di natura incompressibile. Purtroppo la complessità di tali equazioni non ne permette in generale una risoluzione analitica,

salvo casi molto semplici e di poco interesse pratico, e l'esistenza di soluzioni in casi generali risulta essere un problema tutt'ora senza risposta. Tali problematiche, in relazione alla necessità sempre maggiore di descrivere questo tipo di fenomeni, ha portato alla nascita di una sottobranchia della meccanica dei fluidi, nota con il nome di *Computational Fluid Dynamic* (CFD), il cui obiettivo è la risoluzione dei problemi di fluidodinamica mediante simulazioni numeriche al calcolatore, attraverso tecniche numeriche che permettono di determinare soluzioni approssimate alle equazioni di Navier-Stokes, riducendo queste ultime alla risoluzione di sistemi di equazioni algebriche. La discretizzazione delle Equazioni di Navier-Stokes ha finora visto l'utilizzo di molteplici metodi di risoluzione, ciascuno con le peculiarità e campi di applicazione preferiti, e tra i più importanti di essi citiamo (rimandiamo per dettagli a [44], [5], [23], [43], [42], [39]):

- per la discretizzazione temporale:
  - metodi alle differenze finite, attraverso metodi espliciti, impliciti o semi-impliciti (problemi di punto-sella);
  - metodi alle caratteristiche (o Lagrangiani);
  - metodi a passi frazionari;
  - metodi di fattorizzazione algebrica;
- per la discretizzazione spaziale:
  - metodo delle differenze finite (FDM);
  - metodo degli Elementi Finiti (FEM);
  - metodo dei Volumi Finiti (FVM);
  - metodi Spettrali (SM) e Metodi degli Elementi Spettrali (SEM);

In questo lavoro ci concentreremo su una discretizzazione del dominio temporale realizzata utilizzando un particolare metodo a passi frazionari che rientra nella categoria dei *metodi di proiezione*, mentre dal punto di vista spaziale utilizzeremo un metodo di discretizzazione ottenuto sulla base degli elementi spettrali: l'obiettivo è la realizzazione di un solutore ad alto ordine per la simulazione numerica delle equazioni di Navier-Stokes su domini in 3 dimensioni.

La maggiore difficoltà che si riscontra nella risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes, è rappresentata dal fatto che la velocità e la pressione risultano accoppiate dal vincolo di incomprimibilità. I metodi di proiezione sono stati

introdotti per la prima volta alla fine del 1960 grazie ai lavori di Chorin e Temam ([11], [52]), con l'obiettivo di superare questa difficoltà ed ottenere un metodo di più facile risoluzione: il vantaggio rispetto ad approcci più tradizionali è rappresentato dal fatto che, ad ogni passo temporale, ci si riconduce alla risoluzione di 2 problemi disaccoppiati per la velocità e la pressione, ottenendo quindi un algoritmo più efficiente su problemi di larga scala. Tuttavia, poiché nell'equazione (0.0.1) non compare un termine di derivata temporale per la pressione, le equazioni di Navier-Stokes non risultano essere un problema di tipo Cauchy-Kovalevskaya, e di conseguenza la metodologia classica per definire i metodi a passi frazionari ([59], [18]) non risulta applicabile in modo diretto: di conseguenza, la definizione e l'analisi di metodi di proiezione di alto ordine in tempo (in generale maggiore di 1) non risulta affatto banale, e ha generato una vasta gamma di studi teorici negli ultimi 40 anni, con l'obiettivo di determinare il metodo di proiezione che fosse il miglior compromesso tra accuratezza della soluzione e complessità. Tra i risultati più innovativi pubblicati a cavallo della fine del 1900 e i primi anni 2000, ricordiamo i lavori di Guermond e Shen [24], [26] e [25], ai quali spesso faremo riferimento, soprattutto nel capitolo 1, per i risultati teorici che verranno presentati. Infine, si è deciso di trattare il termine non lineare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  in modo completamente esplicito: la conseguenza principale di questa scelta è la comparsa di una condizione *CFL* che limita la scelta del passo temporale di approssimazione.

Per quel che riguarda la discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes da un punto di vista spaziale, come anticipato nelle righe introduttive, utilizzeremo una generalizzazione del Metodo degli Elementi Spettrali. Il motivo di questa scelta è strettamente legato alla fase implementativa del codice sviluppato in questo lavoro, che utilizza le strutture e le funzioni di un codice pre-esistente, dal nome *SPEED* ([37], [22], [35]). L'acronimo *SPEED* sta per SPectral Element in Elastodynamics with Discontinuous Galerkin, e si tratta di un progetto sviluppato tra il 2010 e il 2013, grazie a una collaborazione del MOX (Laboratory for MOdeling and Scientific Computing) e il DICA (Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale) del Politecnico di Milano: *SPEED* è un codice di alto ordine che nasce con l'obiettivo di simulare la propagazione di onde sismiche tridimensionali su mezzi complessi, consentendo di valutare in modo molto accurato la propagazione dell'onda alle diverse



scaie che tipicamente la caratterizzano, ovvero dall'analisi dell'effetto dell'onda su un singolo punto d'interesse, alla sua caratterizzazione su di una regione molto vasta, per la descrizione degli effetti che l'onda sismica causa sulle strutture solide. Ciò che maggiormente ci interessa del codice *SPEED* per la realizzazione di questo lavoro, sono le seguenti caratteristiche principali:

- *SPEED* è un codice scritto in linguaggio *Fortran 90*;
- si tratta di un codice altamente scalabile su problemi fortemente complessi, e la sua struttura parallela è pensata affinché possa essere utilizzato su piattaforme di calcolo dalle alte prestazioni;
- la risoluzione numerica è realizzata utilizzando il Metodo agli Elementi Spettrali con approccio Galerkin Discontinuo, e gli spazi discreti in cui è ambientato il problema sono definiti a partire da una partizione in macro-regioni *non-conformi* del dominio di calcolo;
- l'approccio altamente scalabile che lo caratterizza, si manifesta soprattutto a livello delle sotto-griglie di partizione del dominio, che sono generate all'interno di ciascuna macro-regione in modo indipendente, con granularità possibilmente variabile e diversi gradi spettrali di approssimazione;
- la partizione e il carico di lavoro legato al dominio computazionale, sono realizzati utilizzando la libreria METIS, mentre per la parallelizzazione si utilizzano le funzioni della libreria MPI;

I Metodi agli Elementi Spettrali, che d'ora in poi indicheremo con CG-SEM per enfatizzare l'approccio Galerkin continuo, sono stati originariamente introdotti proprio per le simulazioni di fluidodinamica [41], [57], [38], e possono essere considerati come una generalizzazione del metodo agli Elementi Finiti. Per gli obiettivi di questo lavoro, considereremo metodi CG-SEM che si basano sulla definizione di interpolanti di tipo Lagrangiano di alto ordine, associati a nodi di quadratura di Gauss-Legendre-Lobatto. Ciò che maggiormente caratterizza tali metodi di discretizzazione, è la possibilità di combinare la flessibilità tipica del metodo degli Elementi Finiti, e l'accuratezza che caratterizza i Metodi Spettrali. Inoltre, la struttura di tali metodi permette un'alto livello di parallelizzazione in fase di implementazione, e sono formulati in modo da essere utilizzati da piattaforme di calcolo dalle notevoli risorse. L'aspetto negativo dei Metodi agli elementi Spettrali, è nascosto nel fatto che usualmente vengono implementati utilizzando lo stesso grado di approssimazione

polinomiale su tutto il dominio: in una vasta gamma di applicazioni reali, questo può portare ad un irragionevole ed esagerato costo computazionale di risoluzione, in particolare quando la natura del problema richiede un'alta accuratezza locale, l'elevato ordine di approssimazione deve essere utilizzato anche nelle zone del dominio dove una soluzione numerica accurata potrebbe essere determinata utilizzando un grado di approssimazione più basso. Prendiamo ad esempio il flusso intorno ad un cilindro all'interno di un canale: le irregolarità legate alle zone vicine al cilindro richiedono un ordine di approssimazione elevato per la caratterizzazione della soluzione, ma lo stesso grado dovrà essere utilizzato anche nelle zone lontane dal cilindro, in cui ci si aspetta una soluzione più regolare. Il metodo degli Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo (DG-SEM) ([13], [30], [48], [12]), è pensato proprio per superare questa pecca dei metodi CG-SEM, poichè permette di suddividere il dominio di calcolo in diverse macro-regioni, che oltre ad essere caratterizzate da una diversa dimensione degli elementi con cui vengono partizionate, presentano una non-conformità anche dal punto di vista del grado polinomiale di approssimazione, permettendo quindi di risparmiare in termini di costo computazionale, senza perdere l'accuratezza desiderata.

## Struttura della tesi

Questa tesi si sviluppa in 4 capitoli, così organizzati:

CAPITOLO 1: viene introdotta una breve descrizione riguardante la derivazione delle Equazioni di Navier-Stokes, al fine di fissare il significato fisico delle variabili considerate. Successivamente introduciamo i metodi di proiezione della tipologia Pressure-Correction, utilizzati per la discretizzazione della derivata spaziale. Dopo aver discusso la metodologia utilizzata per il trattamento del termine non lineare, introduciamo la formulazione variazionale del metodo proposto, fornendo dei risultati di buona posizione che caratterizzano i sotto-problemi da risolvere ad ogni iterazione temporale.

CAPITOLO 2: si discute la discretizzazione spaziale dei sotto-problemi introdotti nel capitolo 1. Per semplicità di trattazione si considera prima un

approccio Galerkin Continuo, discutendo in modo particolare il ruolo della condizione “inf-sup” nel metodo proposto. Successivamente si introduce la versione generale del metodo DG-SEM, con particolare attenzione rivolta al modo in cui viene imposto il vincolo di incomprimibilità negli spazi discreti discontinui. Il capitolo si conclude con la formulazione matriciale del metodo DG-SEM.

CAPITOLO 3: si discutono i principali aspetti implementativi del codice realizzato, mettendo in luce i forti legami con il codice *SPEED*, soprattutto per quel che riguarda l’integrazione numerica dei termini legati alle interfacce di discontinuità sui bordi delle regioni non conformi. Viene descritto inoltre l’algoritmo Matrix-Free implementato per effettuare i prodotti matrice-vettore legati alla componente di Stiffness nei sottoproblemi dei passi temporali, e la metodologia con cui vengono trattate le condizioni al brodo del problema.

CAPITOLO 4: vengono presentati i risultati numerici ottenuti nella fase di validazione del codice. La verifica degli ordini di convergenza spaziale è realizzata in un primo momento considerando un problema di diffusione-reazione, e successivamente viene effettuata l’analisi di convergenza del metodo per l’equazione di Navier-Stokes. L’analisi di convergenza rispetto ad un raffinamento temporale mette in luce alcuni aspetti, discussi nel capitolo 2, legati alla condizione “inf-sup” per gli spazi discreti. Vengono inoltre presentati dei risultati di scalabilità del codice, la cui analisi è effettuata attraverso lo studio di problemi caratterizzati da diversi gradi di libertà. Nella sezione finale, si discutono i risultati numerici ottenuti per la simulazione del flusso intorno ad un cilindro a sezione quadrata all’interno di un canale.

# Capitolo 1

## Metodi di Proiezione

In questo capitolo presentiamo innanzi tutto una breve derivazione delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi Incomprimibili: ovviamente questa trattazione non deve essere considerata come esaustiva, ma ha il semplice obiettivo di fissare il significato fisico delle variabili considerate in questo lavoro. Successivamente, definiremo le principali caratteristiche dello schema numerico che è stato utilizzato per la discretizzazione della derivata temporale, fornendo le ragioni delle scelte fatte, e i principali risultati in termini di convergenza (rispetto al raffinamento del passo temporale). Infine, forniamo la formulazione variazionale del problema semi-discreto.

### 1.1 Equazioni di Navier-Stokes per Fluidi Incomprimibili

In Fisica, le equazioni di Navier-Stokes, che prendono il nome da Claude-Louis Navier (10 Febbraio 1785 - 21 Agosto 1836) e George Gabriel Stokes (13 Agosto 1819 - 1 Febbraio 1903), sono equazioni di bilancio che descrivono il moto di sostanze fluide viscoso.

Il moto di elementi continui è governato dai principi della termodinamica e della meccanica classica per la conservazione della massa, del momento e dell'energia. L'applicazione di questi principi in uno spazio di riferimento Galileiano, conduce al seguente sistema di equazioni, scritte in forma integrale, rispettivamente per la massa, il momento e l'energia:

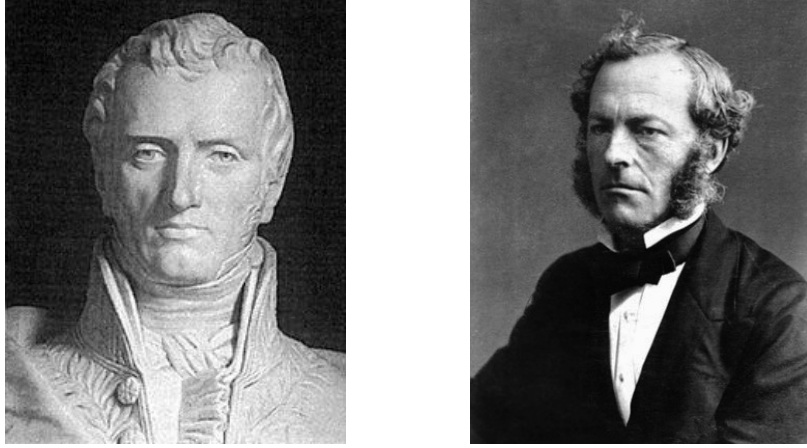


Figura 1.1: Claude-Louis Navier (sinistra) e George Gabriel Stokes (destra)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\int_V \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial V} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \rho \mathbf{u} - \sigma \mathbf{n}) d\Gamma = \int_V \rho \mathbf{f}^v d\Omega \quad (1.1.2)$$

$$\int_V \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial V} (\rho e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} + \mathbf{q}) d\Gamma = \int_V \rho \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (1.1.3)$$

dove stiamo considerando un fluido che occupa una regione limitata  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , caratterizzata dal campo di velocità  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  rappresenta la velocità Euleriana del fluido, ovvero la velocità istantanea della particella materiale che si trova nel punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ .  $V$  è un volume arbitrario occupato dal fluido, e le equazioni integrali (1.1.1)-(1.1.3) valgono per ogni  $V \subset \Omega$ .  $\mathbf{f}^v$  rappresenta la risultante delle forze esterne per unità di massa, mentre  $\rho$ ,  $\sigma$  e  $\mathbf{q}$  sono rispettivamente la densità, il tensore degli sforzi e il vettore del flusso di calore. La quantità  $e$  rappresenta l'energia specifica totale, e vale  $e = e_i + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ , dove  $e_i$  è l'energia interna specifica. L'equazione (1.1.3) è valida a patto di assumere che non vi siano sorgenti o pozzi di energia in  $V$ . Se le proprietà del fluido sono continue e sufficientemente differenziabili in spazio e tempo, allora le leggi (1.1.1)-(1.1.3) possono essere trasformate in un sistema di equazioni alle derivate parziali, attraverso il teorema della divergenza:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \nabla \cdot \sigma) = \rho \mathbf{f}^v \quad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} - \sigma \mathbf{u} + \mathbf{q}) = \rho \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{u} \quad (1.1.6)$$

Queste sono le equazioni di Navier-Stokes in forma *conservativa* (o di *divergenza*); tutte le proprietà caratteristiche del fluido ( $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $e$ , ecc..) sono considerate come funzioni di spazio e tempo nel sistema di riferimento. Per motivi di convenienza da un punto di vista dell'implementazione numerica, considereremo, nel resto di questo lavoro, l'equivalente forma *non-conservativa*, ovvero:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0 \quad (1.1.7)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \sigma = \rho \mathbf{f}^v \quad (1.1.8)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} - \sigma \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{u} \quad (1.1.9)$$

Dove  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  è l'operatore derivata materiale.

Al fine di ottenere un sistema chiuso, bisogna aggiungere opportune relazioni costitutive per il tensore degli sforzi  $\sigma$  e per il vettore del flusso di calore  $\mathbf{q}$ . In questo lavoro ci concentreremo sul caso di fluidi Newtoniani, che sono, per definizione, fluidi il cui tensore degli sforzi è esprimibile come funzione lineare del gradiente di velocità. Da ciò, la risultante legge di Newton per  $\sigma$  è:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad (1.1.10)$$

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

Dove  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)$ ,  $p$  rappresenta la pressione del fluido,  $\tau$  il tensore degli sforzi viscosi, mentre  $\lambda$  e  $\mu$  sono due coefficienti di viscosità. Inoltre, assumiamo che il fluido obbedisce alla legge di Fourier per la conduzione del calore:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (1.1.11)$$

Dove  $T$  è la temperatura assoluta, mentre  $k$  il coefficiente di conducibilità termica. Infine, le variabili di stato  $\rho, e, T, p$  sono connesse tramite relazioni di tipo termodinamico. Per maggiori dettagli e una derivazione completa della equazioni di Navier-Stokes, è possibile consultare [21] o [4].

In questo lavoro, considereremo soltanto fluidi omogenei ed incompressibili, che sono caratterizzati dalle seguenti condizioni:

$$\rho = \text{Constant} \quad (1.1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1.13)$$

Questi vincoli, e la legge costitutiva (1.1.10), se introdotti nell'equazione di continuità e del momento (1.1.4) – (1.1.5), permettono di ridurre le medesime nella seguente forma:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f}^v \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Nel caso di fluidi omogenei e incompressibili, il campo di velocità e quello di pressione sono sufficienti a fissare in modo univoco lo stato del sistema; di conseguenza potremo concentrarci sullo studio di (1.1.14) senza considerare l'equazione dell'energia. Inoltre, nell'equazione precedente, la pressione non rappresenta una variabile termodinamica, poiché non vi è nessuna equazione di stato per fluidi incompressibili: essa è una variabile implicita che “si aggiusta” istantaneamente in modo che la velocità rimanga a divergenza nulla.

Dividiamo per  $\rho$  l'equazione del momento in (1.1.14), e rinominiamo la variabile della pressione come  $\frac{p}{\rho}$  continuando ad indicarla con lo stesso simbolo  $p$ ; introduciamo inoltre la viscosità cinematica  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Il sistema di equazioni precedente, assume quindi la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1.15)$$

A questo punto, al fine di ottenere un problema ben posto, aggiungiamo delle opportune condizioni al bordo:

- poiché le (1.1.15) sono equazioni evolutive, e compare una derivata temporale per la velocità ma non per la pressione, è sufficiente fornire una condizione iniziale solo per il campo di velocità;
- poiché consideriamo  $\Omega$  dominio limitato, dobbiamo fornire delle condizioni su  $\partial\Omega$ : consideriamo inizialmente il caso di condizioni essenziali sull'intero bordo del dominio, mentre casi più generici verranno discussi nella sezione 1.2.6.

Quindi, il nostro obiettivo è quello di sviluppare un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del seguente problema:

Siano date  $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\mathbf{g} : \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ , si cerca  $(\mathbf{u}, p)$  tali che:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}^v, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{array} \right. \quad (1.1.16)$$

**Osservazione 1.1.1.** È importante osservare che in problemi con condizioni essenziali su tutto  $\partial\Omega$ , il dato al bordo  $\mathbf{g}$  deve essere consistente con il principio di conservazione della massa:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0$$

**Osservazione 1.1.2.** Solitamente, nel caso di fluidi caratterizzati da viscosità costante, si sfrutta l'equazione di continuità per scrivere il termine  $2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  come  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ , poiché quest'ultima forma risulta essere vantaggiosa da un punto di vista computazionale. In questo lavoro si è invece deciso di mantenere la forma originale.

## 1.2 Metodi Pressure-Correction

La soluzione delle equazioni di Navier-Stokes non-stazionarie per fluidi incomprimibili rappresenta tuttora una grande sfida nel campo della fluidodinamica computazionale (CFD). Esistono ad oggi numerosi metodi per risolvere le equazioni di Navier-stokes, ma per problemi evolutivi uno degli approcci più efficaci è rappresentato dalla classe dei metodi di proiezione. Inoltre, questi approcci, risultano essere vantaggiosi per lo sviluppo di un codice che nasce come estensione di SPEED (come anticipato dell'introduzione): per questi motivi, abbiamo deciso di percorrere



questa strada nel presente lavoro.

I metodi di proiezione sono dei particolari metodi a passi frazionari, caratterizzati dall'obiettivo di discretizzare la derivata temporale della velocità in modo da separare il vincolo di incomprimibilità dall'equazione del momento. In generale quindi, ad ogni passo temporale, ci si riconduce alla risoluzione di diversi sottoproblemi risolti consecutivamente, ed in cui la soluzione di ciascuno di essi viene utilizzata per costruire il termine forzante del problema successivo.

Ad oggi sono state sviluppate tre tipologie di metodi di proiezione:

1. Pressure-Correction;
2. Velocity-Correction;
3. Consistent Splitting;

Per motivi di carattere numerico, noi ci concentreremo su metodi Pressure-Correction, rimandando a [14], [28], e [24], per dettagli riguardanti gli altri due approcci. L'operazione di splitting del vincolo di incomprimibilità è, in ciascuno dei metodi sopra elencati, conseguenza del seguente risultato fondamentale:

**Teorema 1.2.1** (Decomposizione di Helmholtz). *Sia  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  semplicemente connesso, allora qualunque funzione  $\tilde{\mathbf{u}} \in [L^2(\Omega)]^d$  può essere decomposta in modo unico come  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\phi$ , con  $\phi \in H^1(\Omega)$  e  $\mathbf{u} \in H_{div} = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$*

Come vedremo nel dettaglio nelle prossime sezioni, ad ogni passo temporale si cerca  $\tilde{\mathbf{u}}$  come soluzione di un problema di diffusione-reazione, al fine di descrivere gli effetti dovuti alla conservazione del momento, successivamente si costruisce  $\phi$  come soluzione di un problema di Poisson, al fine di proiettare  $\tilde{\mathbf{u}}$  nello spazio delle funzioni a divergenza nulla e determinare la velocità solenoidale  $\mathbf{u}$ . È chiaro quindi come il vantaggio principale fornito dai metodi di proiezione rispetto ad altri approcci è il fatto che la risoluzione dei sotto-problemi risulta più semplice di quella per il problema originale: quello che si paga è la comparsa di un errore di splitting che limita la convergenza del metodo rispetto a un raffinamento del passo temporale.

Poiché il termine non-lineare non influenza l'ordine di convergenza dell'errore di splitting, ci concentreremo inizialmente sulla descrizione dei metodi di proiezione per l'approssimazione del problema di Stokes evolutivo, e solo successivamente nella sezione 1.2.5, mostreremo i dettagli della trattazione esplicita del termine non lineare

(e conseguenzialmente della condizione CFL indotta). Concentriamoci quindi sul seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}^v, & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, & \text{in } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (1.2.1)$$

### 1.2.1 Il metodo di Chorin-Temam

Il primo metodo di proiezione fu originariamente proposto da A. Chorin e R. Temam [11, 52]; si tratta di un metodo di tipo Pressure-Correction che si presenta nella seguente forma: consideriamo una partizione dell'intervallo  $(0, T]$  in  $(N_{time} + 1)$  istanti temporali equidistanti tali che  $t^0 = 0, t^1 = \Delta t, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t^{N_{time}} = N_{time}\Delta t = T$ , dove  $\Delta t = \frac{T}{N_{time}}$ , e poniamo  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ ; allora per ogni  $n \geq 0$ , calcoliamo tre funzioni  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  risolvendo:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) = \mathbf{f}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (1.2.2a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (1.2.2b)$$

Al generico passo temporale  $t^{n+1}$ , il primo sotto-passo è un problema di diffusione-reazione, mentre il secondo sotto-passo può essere riscritto come un problema di Poisson: prendendo la divergenza della prima equazione di (1.2.2b), ed usando il vincolo di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$  abbiamo:

$$-\nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \right) = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$$

Quindi (1.2.2b) può essere riscritto come segue:

$$\begin{cases} -\nabla^2 p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \end{cases} \quad (1.2.3a)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (1.2.3b)$$

Si ha che (1.2.2a) tiene conto degli effetti viscosi, mentre (1.2.2b) del vincolo di incomprimibilità. Il secondo problema viene usualmente definito come “passo di proiezione”, poiché realizza l’identità  $\mathbf{u}^{n+1} = P_{V_{div}} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ , dove  $V_{div} = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$ , mentre  $P_{V_{div}} : [H^1(\Omega)]^3 \rightarrow V_{div}$  è l’operatore lineare di proiezioni da  $[H^1(\Omega)]^3$  a  $V_{div}$ .

La condizione  $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$  è una condizione di Neumann artificiale che induce uno strato limite numerico che non permette allo schema di essere pienamente del primo ordine rispetto alla velocità misurata in norma  $H^1$  o alla pressione nella norma  $L^2$ , infatti può essere mostrato il seguente risultato:

**Teorema 1.2.2.** *Assumendo che  $(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{p})$ , soluzione del problema (1.2.1), sia sufficientemente regolare, allora la soluzione  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^n, p^n), \forall n \geq 1$ , di (1.2.2a) - (1.2.3) soddisfa le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \mathbf{u}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} &\leq c(\mathbf{u}, p, T) \Delta t \\ \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \max_n \|\mathbf{p}(t^n) - p^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq c(\mathbf{u}, p, T) \Delta t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Per la dimostrazione del risultato precedente si può consultare [43], [47], [26]. La prima stima vale se  $\Omega$  possiede la proprietà della  $H^2$ -regolarità ellittica, mentre la seconda vale se  $\Omega$  è un dominio Lipschitziano.

**Osservazione 1.2.1.** *Diciamo che  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  possiede la della  $H^2$ -regolarità ellittica se, per ogni  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]$ , la soluzione del problema di Stokes stazionario con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, appartiene allo spazio  $[H^2(\Omega)]^d \times H^1(\Omega)$ .*

## 1.2.2 Pressure-Correction in forma standard

Il metodo di Chorin-Temam non è consistente con problemi stazionari, a causa del fatto che in (1.2.2a) manca un termine che descriva il gradiente di pressione. La prima correzione a questo problema è stata proposta da Goda in [19], aggiungendo in (1.2.2a) il valore del gradiente di pressione del passo temporale precedente, e correggendo di conseguenza il passo di proiezione, riuscendo ad ottenere dei risultati migliori anche in termini di accuratezza. Questa procedura è stata resa popolare da Van Kan, che propose in [54] un metodo pressure-correction di tipo incrementale

e del secondo ordine. Usando la Backward Difference Formula di ordine 2 (BDF2) per approssimare la derivata temporale, lo schema si presenta nella seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}(3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) - \nabla \cdot (2\nu\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Dove, tramite considerazioni analoghe a quelle viste nella sezione precedente, possiamo riscrivere il secondo sottoproblema come:

$$\begin{cases} -\nabla^2(p^{n+1} - p^n) = -\frac{3}{2\Delta t}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \frac{\partial(p^{n+1} - p^n)}{\partial\mathbf{n}} = 0 \end{cases} \quad (1.2.6a)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla(p^{n+1} - p^n) \quad (1.2.6b)$$

Il secondo problema è ancora un passo di proiezione poiché equivale a  $\mathbf{u}^{n+1} = P_{V_{div}}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ . D'ora in poi ci riferiremo a questo algoritmo come Pressure-Correction in forma standard. Osserviamo che non è sufficiente porre  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ : l'algoritmo necessita anche dei valori  $(\tilde{\mathbf{u}}^1, \mathbf{u}^1, p^1)$  in fase di inizializzazione; a tal proposito, faremo in generale la seguente ipotesi:

**Ipotesi 1.2.1.**  $(\tilde{\mathbf{u}}^1, \mathbf{u}^1, p^1)$  sono fissati in modo che valgano le seguenti stime:

$$\begin{cases} \|\underline{\mathbf{u}}(\Delta t) - \tilde{\mathbf{u}}^1\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C\Delta t^2 \\ \|\underline{\mathbf{u}}(\Delta t) - \tilde{\mathbf{u}}^1\|_{[H^1(\Omega)]^3} \leq C\Delta t^{\frac{3}{2}} \\ \|\underline{\mathbf{p}}(\Delta t) - p^1\|_{H^1(\Omega)} \leq C\Delta t \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Dove  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}})$  è la soluzione del problema (1.2.1).

Vale il seguente risultato di accuratezza:

**Teorema 1.2.3.** *Assumendo che  $(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{p})$ , soluzione del problema (1.2.1), sia sufficientemente regolare, e supponendo che valga l'ipotesi (1.2.1), allora la soluzione  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^n, p^n)$ ,  $\forall n \geq 0$  di (1.2.4)-(1.2.6) soddisfa le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \mathbf{u}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} &\leq c(\mathbf{u}, p, T)\Delta t^2 \\ \max_n \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \max_n \|\mathbf{p}(t^n) - p^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq c(\mathbf{u}, p, T)\Delta t \end{aligned}$$

Questo risultato è stato dimostrato in [55] per il problema del canale con condizioni al bordo periodiche, in [50] utilizzando il metodo di Crank-Nicolson in luogo della BDF2, e in [20] con la BDF2 ma per il problema completamente discretizzato. Analogamente al metodo di Chorin-Temam, la prima stima è valida se  $\Omega$  ha la proprietà della  $H^2$ -regolarità ellittica mentre la seconda vale se  $\Omega$  è Lipschitziano.

**Osservazione 1.2.2.** *Nonostante questo schema possieda un'accuratezza di ordine 2 nella velocità misurata in norma  $L^2$ , esso è affetto da uno strato limite che limita l'accuratezza della norma  $H^1$  della velocità, e della norma  $L^2$  della pressione. Possiamo osservare che  $\nabla(p^{n+1} - p^n) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$  implica:*

$$\nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p^n \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \dots = \nabla p^0 \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$$

*Quest'ultima è una condizione di Neumann artificiale che induce inevitabilmente uno strato limite numerico che sicuramente risulta essere una delle cause dell'errore di splitting.*

### 1.2.3 Pressure-Correction, Forma Rotazionale

Per superare le difficoltà causate dalla condizione di Neumann artificiale in (1.2.6), Timmermans, Mineev and Van De Vosse proposero, in [32], di modificare leggermente il passo di proiezione dell'algoritmo precedente, con l'obiettivo di migliorare l'ordine del metodo. Qui presentiamo nel dettaglio da dove nasce l'idea del metodo, mettendo in evidenza i motivi per cui risulterà migliore di (1.2.4)-(1.2.6).

Consideriamo il problema di Stokes (1.2.1), e decidiamo di discretizzare la derivata temporale usando la BDF2 implicita: quello che vogliamo è quindi approssimare  $(\mathbf{u}, p)$ , soluzione del problema (1.2.1) al generico istante temporale  $t^{n+1}$ , con una coppia  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tale che:

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1})) = \mathbf{f}^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Il metodo Pressure-Correction in forma Rotazionale consiste in una procedura del tipo *predittore-correttore* tra il campo di velocità e quello di pressione, realizzando uno splitting dell'equazione (1.2.8) in due sottoproblemi di più facile risoluzione: il primo è realizzato con lo scopo di calcolare il predittore del campo di velocità, mentre il secondo è per caratterizzare il correttore della pressione.

### 1.2.3.1 Primo Sotto-Problema

Possiamo caratterizzarlo come segue:

- indichiamo con  $p^{*,n+1} = f(p^n, p^{n-1}, p^{n-2}, \dots)$  il predittore del valore della pressione all'istante  $t^{n+1}$ , ovvero il predittore di  $p^{n+1}$ ; in particolare possiamo scegliere estrapolazioni di diverso ordine rispetto al passo temporale  $\Delta t$ , ma noi considereremo solo quelle di primo e secondo ordine, avremo cioè:

$$p^{*,n+1} = \begin{cases} p^n & \text{ordine 1: } p^{*,n+1} = p^{n+1} + O(\Delta t) \\ 2p^n - p^{n-1} & \text{ordine 2: } p^{*,n+1} = p^{n+1} + O(\Delta t^2) \end{cases} \quad (1.2.9)$$

- sia quindi  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  il predittore del campo di velocità  $\mathbf{u}^{n+1}$ , che possiamo determinare in modo da risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla p^{*,n+1} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) = \mathbf{f}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

**Osservazione 1.2.3.** *In questo problema, il predittore di pressione  $p^{*,n+1}$  è un termine esplicito, così il predittore  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  non sarà in generale a divergenza nulla.*

**Osservazione 1.2.4.** *La condizione al bordo  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega}$ , da un lato ci dice che il problema (1.2.10) differisce da (1.2.8) solo per il predittore  $p^{*,n+1}$ , nel senso che se fosse  $p^{*,n+1} = p^{n+1}$  allora avremmo  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1}$ ; dall'altro permette una scelta vantaggiosa delle condizioni al bordo per il problema di correzione che stiamo per definire.*

### 1.2.3.2 Secondo Sotto-Problema

L'equazione di correzione, e quindi i correttori di pressione e velocità, si ricavano imponendo che soddisfino l'equazione del momento e il vincolo di incomprimibilità del problema originale (1.2.8), possiamo quindi indicarli con  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tali che:

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1})) = \mathbf{f}^{n+1} \quad (1.2.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (1.2.11b)$$

L'espressione che permette quindi di legare i predittori ai valori corretti di velocità e pressione si ricava sottraendo l'equazione del momento in (1.2.10) alla (1.2.11a), ottenendo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1})) - \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) = \\ - \nabla p^{n+1} + \nabla p^{*,n+1} + \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1})) = \nabla(p^{*,n+1} - p^{n+1}) \quad (1.2.12)$$

**Osservazione 1.2.5.** Per un generico campo vettoriale  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , nell'ipotesi che  $\nu$  sia costante, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\nu \frac{(\nabla \mathbf{v})_i + (\nabla \mathbf{v})_i^T}{2} \right)_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \nu \nabla^2 v_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

quindi vale:

$$\nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \nu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.2.14)$$

utilizzando quindi (1.2.14) nella (1.2.12) in cui  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}$  abbiamo:

$$\frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nu \nabla^2(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}) + \nu \nabla(\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1})) = \nabla(p^{*,n+1} - p^{n+1}) \quad (1.2.15)$$

portando a destra il termine  $\nu \nabla(\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}))$ , e ricordando la (1.2.11b), si ha:

$$\frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nu \nabla^2(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}) = \nabla(p^{*,n+1} - p^{n+1} - \nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (1.2.16)$$

**Osservazione 1.2.6.** Per un generico campo vettoriale  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  valgono le seguenti relazioni:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.2.17)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2.18)$$

utilizzando la (1.2.17) nella (1.2.16) e ancora utilizzando la (1.2.11b) abbiamo:

$$\frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \nu \nabla \times (\nabla \times (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1})) + \nu \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = \nabla(p^{*,n+1} - p^{n+1} - \nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (1.2.19)$$

Portando quindi a destra il termine  $\nu \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})$ , prendendo la divergenza dell'intera equazione e ricordando l'identità (1.2.18) otteniamo:

$$-\nabla^2(p^{n+1} - p^{*,n+1} + 2\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = -\frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (1.2.20)$$

indicando  $\phi^{n+1} = p^{n+1} - p^{*,n+1} + 2\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ , il problema (1.2.20) è un problema di Poisson in  $\phi^{n+1}$  che dobbiamo chiudere con delle condizioni al bordo opportune; delle condizioni consistenti con il principio di conservazione della massa possono essere determinate direttamente dall'equazione (1.2.20), ovvero

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{n+1} dV = \int_{\Omega} \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} dV \quad (1.2.21)$$

o analogamente, applicando il teorema della divergenza ad ambo i membri:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{3}{2\Delta t} \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (1.2.22)$$



da cui la scelta consistente

$$\left. \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0 \quad (1.2.23)$$

In definitiva, combinando (1.2.21) e (1.2.23), le quantità  $\mathbf{u}^{n+1}$  e  $p^{n+1}$  possono essere così determinate:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi^{n+1} = -\frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \left. \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.2.24)$$

$$p^{n+1} = \phi^{n+1} + p^{*,n+1} - 2\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (1.2.25)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{2}{3\Delta t} \nabla \phi^{n+1} \quad (1.2.26)$$

Le migliori proprietà del metodo appena descritto, rispetto al Pressure-Correction in forma standard, sono riassunte nel seguente risultato:

**Teorema 1.2.4.** *Assumendo che  $(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{p})$ , soluzione di (1.2.1), sia sufficientemente regolare, e supponendo che valga l'ipotesi (1.2.1) per i dati iniziali, allora la soluzione  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^n, p^n)$ ,  $\forall n \geq 0$  di (1.2.10)-(1.2.24)-(1.2.25)-(1.2.26) soddisfa le seguenti stime:*

$$\left( \sum_{n=0}^{N_{time}} \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \mathbf{u}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3}^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=0}^{N_{time}} \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[L^2(\Omega)]^3}^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(\mathbf{u}, p, T) \Delta t^2$$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=0}^{N_{time}} \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=0}^{N_{time}} \|\underline{\mathbf{u}}(t^n) - \mathbf{u}^n\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & \quad + \left( \sum_{n=0}^{N_{time}} \|\mathbf{p}(t^n) - p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(\mathbf{u}, p, T) \Delta t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Come nei casi precedenti, la prima è valida se  $\Omega$  ha la proprietà della  $H^2$ -regolarità ellittica mentre la seconda vale se  $\Omega$  è Lipschitziano. Per dettagli è possibile consultare [26].

### 1.2.4 Inizializzazione

Come mostrato in [26], l'ipotesi (1.2.1) risulta verificata se, ad esempio,  $(\tilde{\mathbf{u}}^1, \mathbf{u}^1, p^1)$  vengono calcolate nel seguente modo: dato  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(0)$ ,  $p^0 = p(0)$  è calcolata tramite l'equazione del momento di (1.2.1) valutata in  $t = t_0$ , usando il valore  $\mathbf{u}^0$ , e prendendo la divergenza dell'equazione risultante in modo da ottenere un problema di Poisson con incognita  $p(0)$ :

$$\begin{cases} -\nabla^2 p(0) = \nabla \cdot (\nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) + \mathbf{f}(0)) \\ \frac{\partial p(0)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = (\mathbf{f}(0) + \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega} \end{cases} \quad (1.2.27a)$$

Infine, i valori  $\tilde{\mathbf{u}}^1$  e  $\mathbf{u}^1$  possono essere calcolati risolvendo un Pressure-Correction in forma standard, usando Eulero Implicito per la discretizzazione della derivata temporale, e un'estrapolazione del primo ordine per la pressione:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^1 - \mathbf{u}^0) - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^1)) = \mathbf{f}^1 \\ \tilde{\mathbf{u}}^1 \Big|_{\partial \Omega} = \mathbf{g}^1 \Big|_{\partial \Omega} \end{cases} \quad (1.2.27b)$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi^1 = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^1 \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.2.27c)$$

$$p^1 = \phi^1 + p^0 - 2\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^1 \quad (1.2.27d)$$

### 1.2.5 Trattamento del Termine Non Lineare

Per il trattamento del termine non lineare si è deciso di utilizzare un approccio completamente esplicito: in questo modo ad ogni passo temporale ci si riconduce alla risoluzione di uno Stokes generalizzato, e si possono sfruttare quindi le stesse strutture numeriche per la risoluzione dei sistemi lineari associati a ciascun passo del metodo Pressure-Correction che abbiamo appena definito. In particolare sono stati implementati due tipi di approcci, che permettono entrambi di mantenere inalterato l'ordine di convergenza previsto dal teorema 1.2.4.

### 1.2.5.1 Estrapolazione del secondo ordine

Il primo approccio che è stato considerato, consiste nell'aggiunta di un termine di estrapolazione di ordine 2 per il termine non lineare, che interviene come forzante aggiuntivo nel passo di diffusione-reazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \\ \quad + \nabla p^{*,n+1} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) + 2(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n-1} = \mathbf{f}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}|_{\partial\Omega}, \end{array} \right. \quad (1.2.28)$$

la risoluzione di un passo temporale del metodo risulta quindi del tutto analoga a quella per il problema di Stokes, descritto nelle sezioni precedenti.

### 1.2.5.2 Metodo di Taylor-Galerkin

L'altro approccio implementato risulta leggermente più accurato del precedente, essendo uno schema del terzo ordine in tempo, e consiste nell'aggiunta di un problema iperbolico da anteporre al problema (1.2.10) ad ogni passo temporale, con lo scopo di valutare delle quantità in grado di descrivere l'evoluzione e la presenza del termine non lineare all'interno dell'equazione. Analizziamo brevemente l'idea che vi sta alla base, rimandando per dettagli a [32], [58]. Consideriamo l'equazione del momento nel caso Navier Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \nabla p + \mathbf{f} \quad (1.2.29)$$

e indichiamo con  $\mathfrak{C} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ . A questo operatore è possibile associare un fattore integrante  $Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t)}$  dipendente dal tempo  $t$ , e con  $t^*$  fissato arbitrariamente, che permette di riscrivere l'equazione (1.2.29) nel seguente modo equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t)} \mathbf{u}\} = Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t)} [-\nabla p + \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}^{\mathbf{v}}], \quad (1.2.30a)$$

$$\frac{d}{dt} Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t)} = -Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t)} \mathfrak{C}; \quad Q_{\mathfrak{C}}^{(t^*,t^*)} = \underline{I} \quad (1.2.30b)$$

**Osservazione 1.2.7.** *Infatti se si espande la derivata temporale in (1.2.30a), sfruttando la (1.2.30b) si ottiene (1.2.29).*

Discretizziamo allora con la BDF2 la (1.2.30a) scegliendo il fattore integrante  $Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t)}$ ; al generico passo temporale  $n$  cerchiamo  $\mathbf{u}^{n+1}$  tale che:

$$\begin{aligned} \frac{3Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n+1})}\mathbf{u}^{n+1} - 4Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^n)}\mathbf{u}^n + Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n-1})}\mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} = \\ = Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n+1})} \left[ -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1})) + \mathbf{f}^{n+1} \right], \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

utilizzando il fatto che  $Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n+1})} = \underline{I}$ , la precedente equazione, ad ogni passo temporale, equivale quindi ad un problema di diffusione trasporto in cui però manca ancora da valutare i termini espliciti  $Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^n)}\mathbf{u}^n$  e  $Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n-1})}\mathbf{u}^{n-1}$ ; per fare ciò sfruttiamo l'equazione (1.2.30b), discretizzata utilizzando un metodo di Taylor-Galerkin a 3 passi:

Per  $i = 1, 2$ , poniamo  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^{n+1-i}$ ; sia  $j \in \mathbb{N}$  e  $\Delta s = \frac{\Delta t}{j}$ , per  $m = 0, \dots, i(j-1)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{m+\frac{1}{3}} = \mathbf{v}^m - \frac{\Delta s}{3}(\mathbf{v}^m \cdot \nabla)\mathbf{v}^m \\ \mathbf{v}^{m+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^m - \frac{\Delta s}{2}(\mathbf{v}^{m+\frac{1}{3}} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{m+\frac{1}{3}} \\ \mathbf{v}^{m+1} = \mathbf{v}^m - \Delta s(\mathbf{v}^{m+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{m+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.2.32)$$

quindi poniamo  $Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n+1-i})}\mathbf{u}^{n+1-i} = \mathbf{v}^{ij}$ .

In tal senso, la risoluzione del problema di Navier Stokes tramite il metodo Pressure Correction in forma rotazionale, può essere relizzata nel seguente modo al generico passo temporale  $n \geq 1$ :

- risolviamo i due problemi (1.2.32), che permettono di determinare due quantità  $\hat{\mathbf{u}}^n = Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^n)}\mathbf{u}^n$ , e  $\hat{\mathbf{u}}^{n-1} = Q_{\mathbf{e}}^{(t^{n+1}, t^{n-1})}\mathbf{u}^{n-1}$ ;
- cerchiamo  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  tale da risolvere (1.2.10) con  $(\hat{\mathbf{u}}^n, \hat{\mathbf{u}}^{n-1})$  in luogo di  $(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1})$ ;
- risolviamo il passo di proiezione (1.2.24) utizzando  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  e valutiamo  $\mathbf{u}^{n+1}$  e  $p^{n+1}$ , esattamente come nel caso Stokes;

**Osservazione 1.2.8.** *Il termine non lineare è trattato in modo completamente esplicito, così come è esplicito anche il termine di pressione utilizzato nel primo sotto-problema. La conseguenza principale di questa scelta, è la presenza di una condizione di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) che impone di scegliere il passo tem-*

porale in modo da risultare più piccolo di una certa quantità dipendente da variabili di discretizzazione spaziale, che esplicheremo quindi nel capitolo successivo.

**Osservazione 1.2.9.** *Poiché il metodo di proiezione utilizzato in questo lavoro è ricavato a partire da una discretizzazione in tempo tramite BDF2 (del secondo ordine), i 2 modi per trattare il termine non lineare appena descritti non incidono sull'ordine di accuratezza del metodo, e possono essere utilizzati entrambi senza limitare le stime di accuratezza precedentemente descritte. Se si utilizzassero ad esempio metodi di proiezione con ordine maggiore, il termine non lineare deve necessariamente essere trattato utilizzando il metodo di Taylor-Galerkin. Nella trattazione che segue presenteremo l'algoritmo utilizzando il metodo di Taylor-Galerkin, specificando, quando necessario, un eventuale utilizzo dell'estrapolazione (1.2.28).*

### 1.2.6 Condizioni di Sforzo Normale Assegnato

L'analisi di problemi di Navier-Stokes con condizioni al bordo essenziali sull'intera frontiera  $\partial\Omega$  è molto utile da un punto di vista accademico, soprattutto per la possibilità di costruire agevolmente dei casi test tramite cui validare il codice, ma non è esaustiva rispetto a molte applicazioni reali. In casi molto comuni come problemi a superficie libera o flussi all'interno di un canale, è necessario fornire anche condizioni al bordo di tipo naturale. In questa sezione illustreremo quindi come introdurre questo tipo di condizioni nel metodo di proiezione introdotto nelle sezioni precedenti. Consideriamo quindi una partizione del bordo  $\partial\Omega$  in due insiemi non vuoti e disgiunti  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ , tali che  $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \partial\Omega$ , e consideriamo il problema di Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}^v & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{g} & \Gamma_D \times (0, T] \\ [p\mathbf{n} - 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{n}]|_{\Gamma_N} = \mathbf{d} & \Gamma_N \times (0, T] \end{cases} \quad (1.2.33)$$

Con  $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{g} : \Gamma_D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{d} : \Gamma_N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Con la stessa notazione introdotta nelle sezioni precedenti, il metodo di proiezione Pressure-Correction rotazionale per la discretizzazione temporale dell'equazione (1.2.33), può

essere scritto nel seguente modo: siano  $\mathbf{u}^0, p^0, \mathbf{u}^1, \tilde{\mathbf{u}}^1, p^1$  funzioni sufficientemente regolari, per ogni  $n \geq 1$  cerchiamo  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tali che

$$\begin{cases} \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla p^{*,n+1} - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})) = \mathbf{f}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\Gamma_D} = \mathbf{g}^{n+1} \\ [p^{*,n+1}\mathbf{n} - 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\mathbf{n}]|_{\Gamma_N} = \mathbf{d}^{n+1} \end{cases} \quad (1.2.34)$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi^{n+1} = -\frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_D} = 0 \\ \phi^{n+1}|_{\Gamma_N} = 0 \end{cases} \quad (1.2.35)$$

$$p^{n+1} = \phi^{n+1} + p^{*,n+1} - 2\nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (1.2.36)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{2}{3\Delta t} \nabla \phi^{n+1} \quad (1.2.37)$$

**Osservazione 1.2.10.** *La condizione naturale su  $\Gamma_N$  si riflette in una condizione di tipo essenziale sullo stesso bordo per il problema di Poisson.*

Per ulteriori approfondimenti e per le stime di convergenza, è possibile consultare [28] e [27].

## 1.3 Formulazione Variazionale

Nelle sezioni precedenti di questo capitolo, abbiamo introdotto il metodo implementato nel codice per la discretizzazione della derivata temporale delle equazioni di Navier-Stokes. Nel prossimo capitolo descriveremo invece le caratteristiche del metodo numerico adottato per discretizzare l'equazione da un punto di vista spaziale. Prima di fare ciò, è utile fornire la formulazione variazionale dei problemi che abbiamo introdotto: questo permette di introdurre in modo naturale gli approcci di tipo Galerkin Continuo e Galerkin Discontinuo utilizzati da questo codice, e inoltre, permette di comprendere al meglio quali sono le caratteristiche che li differenziano. Andiamo quindi a definire innanzi tutto le formulazioni deboli di ciascuno dei sottoproblemi considerati, e successivamente, definiamo gli spazi in cui ambientarle in

modo da ottenere la buona posizione del problema.

Consideriamo quindi due funzioni test sufficientemente regolari  $\mathbf{v}$  e  $q$ , che rappresentano rispettivamente una variazione ammissibile di velocità, e una variazione ammissibile della pressione:

- Consideriamo il problema relativo al termine non-lineare: moltiplichiamo scalarmente in  $L^2(\Omega)$  ciascuna delle equazioni di (1.2.32) per una funzione test  $\mathbf{v}$ , otteniamo che la prima equazione del metodo a tre passi, può essere scritta come:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v} - \frac{\Delta s}{3} \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{u}}^m \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v}$$

e in modo analogo anche le altre due equazioni. Definiamo allora la forma trilineare

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Per dar senso agli integrali che compaiono in queste equazioni, è sufficiente ambientare il problema in uno spazio  $V \subset [H^1(\Omega)]^3$ .

- Procediamo in modo analogo anche per il passo di diffusione-reazione, ed integriamo per parti il termine di diffusione utilizzando la formula di Green; al generico passo temporale  $n$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \\ = \int_{\Omega} \left( \mathbf{f}^{n+1} + \frac{4}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{n-1} \right) \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla p^n \cdot \mathbf{v}; \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

E definiamo le due forme bilineari

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q$$

Anche qui, per dar senso agli integrali è sufficiente ambientare in  $V \subset [H^1(\Omega)]^3$ ; per quanto riguarda la forma bilineare  $\mathcal{B}$ , è sufficiente considerare  $q \in Q \subset L^2(\Omega)$ .

**Osservazione 1.3.1.** *Risulta utile in questo ambito introdurre una funzione di rilevamento del dato al bordo: facendo l'ipotesi  $\mathbf{g}(t) \in [H^{\frac{1}{2}}(\Omega)]^3 \forall t \in (0, T]$ , ad ogni passo temporale indichiamo il rilevamento con  $\mathbf{R} \in [H^1(\Omega)]^3 : \mathbf{R}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}(t^{n+1})$ . Risulterà quindi  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{R}$  dove  $\mathbf{u}^* \in [H^1(\Omega)]^3$  e  $\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = 0$*

**Osservazione 1.3.2.** *Integrando per parti la forma bilineare  $\mathcal{B}$ , osserviamo che può essere scritta in modo equivalente come*

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}q = \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v}$$

dove l'ultima uguaglianza è valida solo se restringiamo a  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$

- Moltiplicando l'equazione (1.2.24) per una funzione test  $q$ , e integrando per parti il termine diffusivo, otteniamo:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla q - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} q = -\frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q;$$

in cui l'integrale su  $\partial\Omega$  risulta completamente nullo data la natura delle condizioni al bordo; definiamo la forma bilineare associata a questo problema come

$$\mathcal{A}^p(p, q) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q$$

anche qui è sufficiente ambientare in uno spazio  $\tilde{Q} \subset H^1(\Omega)$ ;

- procedendo in modo analogo definiamo anche le due equazioni integrali per determinare la velocità e la pressione:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} - \frac{2}{3\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \phi^{n+1} \cdot \mathbf{v}; \\ \int_{\Omega} p^{n+1} q &= \int_{\Omega} (p^n + \phi^{n+1}) q - 2\nu \int_{\Omega} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) q; \end{aligned}$$

Ponendo  $V = [H^1(\Omega)]^3$  e  $Q = L^2(\Omega)$ , la buona posizione di ciascun sottoproblema, può allora essere garantita introducendo i seguenti spazi funzionali:

$$V_0 = \left\{ \mathbf{v} \in V : \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \right\}; \quad \tilde{Q} = \left\{ q \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0 \right\};$$

$$Q_0 = \left\{ q \in Q : \int_{\Omega} q = 0 \right\}$$

Ad ogni passo  $n \geq 1$  cerchiamo quindi  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in V \times V \times Q_0$  tali che:

- per  $i = 1, 2$  poniamo  $\hat{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}^{n+1-i}$ , e risolviamo per  $m = 0, \dots, (i-1)$

$$\hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{3}} \in V : \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v} - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{u}}^m, \hat{\mathbf{u}}^m, \mathbf{v})$$



$$\hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{2}} \in V : \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v} - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{3}}, \hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{3}}, \mathbf{v})$$

$$\hat{\mathbf{u}}^{m+1} \in V : \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^{m+1} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v} - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{u}}^{m+\frac{1}{2}}, \mathbf{v})$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ ;

- cerchiamo quindi  $\mathbf{u}^* \in V_0$  tale che,  $\forall \mathbf{v} \in V_0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} + \mathcal{A}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = \\ & = \int_{\Omega} \left( \mathbf{f}^{n+1} + \frac{4}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{n-1} \right) \cdot \mathbf{v} - \mathcal{B}(\mathbf{v}, p^{*,n+1}) - \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{A}(\mathbf{R}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

e poniamo  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{R}$

- cerchiamo  $\phi^{n+1} \in H^1(\Omega)$  tale che

$$\mathcal{A}^p(\phi^{n+1}, q) = \frac{3}{2\Delta t} \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, q), \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (1.3.3)$$

- Infine  $\mathbf{u}^{n+1} \in V, p^{n+1} \in Q_0$  tali che:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} - \frac{2}{3\Delta t} \mathcal{B}(\mathbf{v}, \phi^{n+1}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

$$\int_{\Omega} p^{n+1} q = \int_{\Omega} (p^n + \phi^{n+1}) q + 2\nu \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, q) \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

**Osservazione 1.3.3.** *La scelta di lavorare su spazi fatti di funzioni a media nulla per le variabili di pressione, è conseguenza della condizione di Dirichlet su tutto il bordo del dominio, che rende la pressione definita a meno di una costante additiva. Tale costante è quindi convenzionalmente fissata imponendo che la pressione sia a media nulla.*

Concentriamoci quindi sulla buona posizione della formulazione appena introdotta, analizzando ciascuno dei sotto-problemi che definiscono un'iterazione temporale del metodo.

### 1.3.1 Buona Posizione dei sotto-problemi

Si può dimostrare che le forme  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  introdotte soddisfano le seguenti proprietà:

1. la forma bilineare  $\mathcal{A} : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  è

- continua:  $\exists C_1 > 0 : \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0;$
- coerciva:  $\exists \alpha > 0 : \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in V_0;$

2. La forma bilineare  $\mathcal{B} : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$

- è continua:  $\exists C_2 > 0 : \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall q \in Q;$
- soddisfa la condizione Ladyzhenskata [33] - Babushka [7] - Brezzi [9] (LBB) o *condizione inf-sup*, che possiamo esprimere come:

$$\exists \beta > 0 : \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{\mathcal{B}(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q} > \beta; \quad (1.3.4)$$

3. la forma trilineare  $\mathcal{C} : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è

- continua rispetto ai 3 argomenti:  $\exists C_3 > 0 : \mathcal{C}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C_3 \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;$
- emisimmetrica: nel caso di problema con condizioni di Dirichlet Omogenee,

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{u} \in V, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0; \quad (1.3.5)$$

Note queste proprietà, concentriamoci sui sotto-problemi che caratterizzano il metodo descritto: innanzi tutto è utile osservare che il problema legato al termine non lineare e i due problemi che permettono di caratterizzare  $\mathbf{u}^{n+1}$  e  $p^{n+1}$ , sono delle proiezioni di funzioni sugli spazi che li caratterizzano; il problema (1.3.2) è un problema di diffusione-reazione ambientato in  $V_0$  per il quale vale il seguente e importante risultato (per la dimostrazione è possibile consultare [49]):

**Teorema 1.3.1** (Lemma di Lax-Milgram). *Sia  $V$  uno spazio di Hilbert, e  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare tale che:*

- $|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad C > 0;$
- $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \quad \alpha > 0;$

*Sia inoltre  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare su  $V$ . Allora  $\exists!$   $u \in V$  tale che*

$$a(u, v) = Lv \quad \forall v \in V$$

e vale la stima di stabilità

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|$$

In modo particolare, se indichiamo con

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( \mathbf{f}^{n+1} + \frac{4}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{n-1} \right) \cdot \mathbf{v} - \mathcal{B}(\mathbf{v}, p^{*,n+1}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0$$

allora la forma bilineare  $a : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  e il funzionale  $L : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , soddisfano le ipotesi del *Lemma di Lax-Milgram*, e quindi il problema

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{R}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0$$

ammette un'unica soluzione che soddisfa la stima di stabilità del lemma precedente. Per quel che riguarda invece il problema (1.3.3), si tratta di un problema di Poisson con condizioni al bordo di Neumann: la soluzione debole è unica a meno di una costante additiva, in aggiunta di una condizione di compatibilità sui dati: indicando con  $f$  il termine forzante e con  $g_N$  il dato al bordo, la condizione si esprime come

$$\int_{\Omega} f = - \int_{\partial\Omega} g_N$$

Possiamo fissare la costante imponendo che sia  $\phi^{n+1} \in \tilde{Q}_0$ , ovvero il sottospazio di  $\tilde{Q}$  delle funzioni a media nulla, inoltre la condizione di compatibilità risulta verificata applicando il teorema della divergenza al forzante del problema, e ricordando l'osservazione 1.1.1. La buona posizione di ciascun sotto-problema permette allora di concludere che, ad ogni passo temporale, è possibile determinare univocamente  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in V \times V \times Q_0$ .

**Osservazione 1.3.4.** *Nel capitolo successivo discuteremo il ruolo rivestito delle proprietà (1.3.4) e (1.3.5) nella formulazione completamente discreta.*

Nel capitolo seguente, il nostro obiettivo sarà innanzi tutto quello di definire spazi discreti opportuni su cui ambientare il problema, e successivamente, modificare le forme bilineari e quella trilineare introdotte, al fine di ottenere delle versioni delle medesime in grado di soddisfare, sugli spazi discreti, le proprietà che abbiamo elencato in quest'ultima sezione.

# Capitolo 2

## Discretizzazione Spaziale

Nel precedente capitolo, abbiamo analizzato le modalità con cui viene effettuata la discretizzazione del problema rispetto al tempo. Analizzeremo ora la metodologia utilizzata in questo lavoro, analoga a quella utilizzata in *SPEED*, per ottenere una formulazione completamente discreta: l'obiettivo sarà quindi quello di impostare il problema che permette di determinare un'approssimazione spaziale di  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^n, p^n)$ ,  $\forall n \geq 0$ , soluzione semi-discreta del metodo Pressure-Correction rotazionale in forma variazionale introdotto alla fine del capitolo precedente.

Per fare ciò, dobbiamo innanzi tutto introdurre degli spazi di dimensione finita che siano delle approssimazioni opportune di  $[H^1(\Omega)]^3, V_0, \tilde{Q}_0, Q_0$ , e successivamente, dovremo modificare (eventualmente) le forme  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  per avere proprietà di buona posizione su tali spazi. Nel caso più generale, il codice sviluppato in questo lavoro, utilizza un metodo agli Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo (DG-SEM), in cui gli spazi discreti sono polinomiali a tratti e costruiti sulla base di partizioni non conformi del dominio  $\Omega$ . Per semplicità di trattazione però, sarà utile analizzare anche il caso più semplice con Galerkin Continuo.

### 2.1 Elementi Spettrali continui

Consideriamo il dominio  $\Omega$ , ed introduciamo su di esso una partizione conforme  $\mathcal{T}_h$  fatta da esaedri  $\Omega^1, \dots, \Omega^J$ , ciascuno caratterizzato da diametro  $h^j$  ed in cui indichiamo  $h = \max_j h^j$ , e tali per cui  $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Omega}^j$ . La partizione è conforme, nel senso che l'intersezione  $\bar{\Omega}^i \cap \bar{\Omega}^j$  potrà essere l'insieme vuoto, o un punto, o una

faccia condivisa da entrambi i domini, per ogni  $i \neq j$ ; inoltre  $\mathcal{T}_h$  deve preservare la decomposizione del bordo nel caso di sforzo normale assegnato (1.2.6), vale a dire che, indicando una generica faccia di un esaedro con  $\gamma = \partial\Omega^j \cap \partial\Omega$ , allora nel caso in cui sia  $\gamma \neq \emptyset$ , potrà essere o  $\gamma \subset \Gamma_D, \gamma \cap \Gamma_N = \emptyset$ , oppure  $\gamma \subset \Gamma_N, \gamma \cap \Gamma_D = \emptyset$ . Sia  $\hat{\Omega} = (-1, 1)^3$  l'esaedro (o elemento) di riferimento, e supponiamo che esistano delle mappe invertibili  $\mathbf{F}^j : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega^j$ ,  $\forall j = 1, \dots, J$  con Jacobiano a determinante positivo  $|\mathbf{J}^j|$ , allora per qualsiasi funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avremo che:

$$\int_{\Omega} f = \sum_{j=1}^J \int_{\Omega^j} f = \sum_{j=1}^J \int_{\hat{\Omega}} (f \circ \mathbf{F}^j) |\mathbf{J}^j| \quad (2.1.1)$$

Abbiamo appena definito il primo livello di discretizzazione del dominio: il secondo livello sarà rappresentato dalla definizione dei nodi di Gauss-Legendre-Lobatto (GLL) all'interno di ogni esaedro  $\Omega^j$ . Sia  $\mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$  lo spazio delle funzioni definite su  $\hat{\Omega}$  caratterizzate da grado polinomiale minore o uguale ad  $N$  in ciascuna delle proprie coordinate, e sia

$$\mathbb{Q}_N(\Omega^j) = \{v = \hat{v} \circ (\mathbf{F}^j)^{-1} : \hat{v} \in \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})\}$$

Definiamo allora lo spazio funzionale

$$X_h^N(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\Omega) : v|_{\Omega^j} \in \mathbb{Q}_N(\Omega^j) \quad \forall j = 1, \dots, J\}$$

Il metodo CG-SEM prevede quindi di ambientare i problemi introdotti nella sezione 1.3, sui seguenti spazi funzionali:

$$V^{CG} = [X_h^{N_v}(\Omega)]^3, \quad Q^{CG} = X_h^{N_p}(\Omega)$$

$$V_0^{CG} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad Q_0^{CG} = \left\{q \in X_h^{N_p}(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\right\}$$

**Osservazione 2.1.1.** *In generale potremo avere  $N_v \neq N_p$ .*

A questo punto, al fine di costruire una base nodale per  $V_0^{CG}$  e  $Q_0^{CG}$ , introduciamo due insiemi di nodi di interpolazione  $\{\mathbf{p}_i^v\}_{i=1}^{N_{\text{odi}_v}}$  e  $\{\mathbf{p}_i^p\}_{i=1}^{N_{\text{odi}_p}}$  (che coincidono soltanto nel caso in cui  $N_v = N_p$ ), e di gradi di libertà corrispondenti che permettano di identificare in modo univoco le funzioni polinomiali a tratti degli spazi introdotti. Nell'approssimazione ad elementi spettrali, come già anticipato, saranno scelti i nodi GLL, e su tali nodi andremo a definire una base lagrangiana: consideriamo il caso

della velocità, e definiamo  $\{\hat{x}_j\}_{j=0}^{N_v}$  sull'intervallo di riferimento monodimensionale  $(-1, 1)$  come zeri di  $(1 - x^2)L_{N_v}(x)$  dove  $L_{N_v}$  è il polinomio di Legendre di grado  $N_v$ , e siano inoltre

$$\alpha_j = \frac{2}{N_v(N_v + 1)L_{N_v}(\hat{x}_j)},$$

$$\hat{\phi}_j(\hat{x}) = -\frac{(1 - x^2)L'_{N_v}(\hat{x})}{N_v(N_v + 1)L_{N_v}(\hat{x}_j)(\hat{x} - \hat{x}_j)},$$

rispettivamente pesi e funzioni di base per  $\mathbb{Q}_{N_v}(\hat{\Omega})$  associate ai nodi. In particolare osserviamo che la base scelta è Lagrangiana, vale a dire  $\hat{\phi}_j(\hat{x}_i) = \delta_{ij}$ . Costruiamo quindi nodi e funzioni di base su  $(-1, 1)^3$  nel seguente modo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{(i,j,k)} = (\hat{x}_i, \hat{x}_j, \hat{x}_k), \quad i, j, k = 0, \dots, N_v$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{(i,j,k)} = \alpha_i \alpha_j \alpha_k \quad i, j, k = 0, \dots, N_v$$

$$\hat{\varphi}_{(i,j,k)}(x, y, z) = \hat{\phi}_i(x) \hat{\phi}_j(y) \hat{\phi}_k(z) \quad i, j, k = 0, \dots, N_v$$

Ed effettuiamo una nuova ed opportuna enumerazione per nodi, pesi e funzioni di base, in modo da utilizzare un solo indice  $I = 1, \dots, (N_v + 1)^3$  per identificarli, in luogo della terna  $(i, j, k)$ : ad esempio  $I = i + (N_v + 1)j + (N_v + 1)^2k$ ,  $i, j, k = 0, \dots, N_v$ . Tramite la mappa  $\mathbf{F}^j$  è quindi possibile definire l'insieme di nodi  $\{\mathbf{p}_I^v\}_{I=1}^{(N_v+1)^3}$  su tutto  $\Omega^j$ . Ripetendo lo stesso procedimento per ogni  $\Omega^j, j = 1, \dots, J$  si ottiene l'insieme dei nodi totali  $\{\mathbf{p}_i^v\}_{i=1}^{N_{\text{odi}}^v}$ , enumerati in modo opportuno.

In modo del tutto analogo si definiscono nodi (e pesi) e funzioni di base per lo spazio polinomiale della pressione, che indicheremo rispettivamente con  $\{\mathbf{p}_i^p\}_{i=1}^{N_{\text{odi}}^p}$ ,  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_{\text{odi}}^p}$ . Avremo quindi 3 gradi di libertà per ogni nodo  $\mathbf{p}_i^v$ , che rappresentano le 3 direzioni del vettore velocità, e 1 grado di libertà per ogni nodo  $\mathbf{p}_i^p$ , che rappresenta il valore scalare della pressione.

Per quanto riguarda le funzioni di base, esse vengono costruite a partire da quelle appena definite sull'elemento di riferimento, e sfruttando le mappe  $\mathbf{F}^j$ ; le vedremo in dettaglio nella sezione 2.3.

**Osservazione 2.1.2 (CFL).** *Come abbiamo anticipato nella sezione 1.2.5, il termine non lineare e il termine di pressione che compare nell'equazione del momento,*

sono stati trattati in modo esplicito: per la stabilità del metodo è allora necessario scegliere un passo temporale tale da soddisfare la condizione CFL:

$$\Delta t \leq C_{cfl} \frac{h}{U_{max} N^2}$$

dove  $C_{cfl} > 0$ ,  $h = \max_j h^j$  e  $N = \max(N_v, N_p)$ . Per dettagli e per la dimostrazione di questo risultato, è possibile consultare [17].

**Osservazione 2.1.3.** Nel metodo agli elementi spettrali, i nodi di interpolazione sono usati anche come nodi di quadratura:

$$\int_{\hat{\Omega}} (f \circ \mathbf{F}^j) |\mathbf{J}^j| \simeq \sum_{I=1}^{(N_v+1)^3} (f \circ \mathbf{F}^j)(\hat{\mathbf{x}}_I) |\mathbf{J}^j|(\hat{\mathbf{x}}_I) \hat{\mathbf{w}}_I \quad (2.1.2)$$

Che risulta essere esatta nel caso in cui  $(f \circ \mathbf{F}^j) |\mathbf{J}^j| \in \mathbb{Q}_{2N_v-1}(\hat{\Omega})$ .

Prima di introdurre la formulazione del problema con CG-SEM, analizziamo le proprietà di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  sugli spazi funzionali introdotti.

### 2.1.1 Buona Posizione dei Sotto-Problemi

Le forme bilineari  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e la forma trilineare  $\mathcal{C}$  introdotte in 1.3, risultano continue anche negli spazi funzionali discreti introdotti, inoltre  $\mathcal{A}$  mantiene la coercività: grazie a queste proprietà, come abbiamo visto per la formulazione debole nel capitolo precedente, abbiamo un'unica soluzione ad ogni iterazione temporale CG-SEM. Il fatto che  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  mantengano le proprietà citate è conseguenza dell'ambientazione del problema su spazi funzionali discreti tali per cui:

$$V^{CG} \subset V \quad Q_0^{CG} \subset \tilde{Q}_0 \quad (2.1.3)$$

### 2.1.2 Vincolo Incomprimibilità Discreto

Nel capitolo precedente, abbiamo visto che il vincolo di incomprimibilità si esprime attraverso la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ : per i metodi di proiezione utilizzati e per il problema debole continuo introdotto in (1.3), abbiamo visto che, grazie a tale vincolo, il passo di proiezione può essere scritto come un problema di Poisson.

Decidendo ora di lavorare su spazi discreti, non siamo più in grado di imporre la validità del vincolo in senso forte, ma soltanto in senso debole discreto:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in X_h^{N_p}(\Omega)$$

Questa diversità non influenza però la forma del passo di proiezione, infatti grazie alla scelta di spazi funzionali per i quali vale la (2.1.3), esso si presenta nella stessa forma di quella vista in 1.3. Ciò che viene influenzato, come conseguenza di questa osservazione, è la proprietà di emisimmetria per la forma trilineare  $\mathcal{C}$ , che non risulta più essere verificata. Se infatti consideriamo un problema con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee per il campo di velocità, abbiamo che:

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial(w_j v_i)}{\partial x_j} + \int_{\partial\Omega} u_i v_i w_j n_j = \quad (2.1.4)$$

$$= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \quad (2.1.5)$$

$$= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (2.1.6)$$

Quindi

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) |\mathbf{u}|^2$$

Nell'ambito della formulazione variazionale del problema di Navier-Stokes, la forma  $\mathcal{C}$  risulta essere emisimmetrica, poiché il primo argomento rappresenta il campo di velocità del fluido e soddisfa quindi il vincolo di incomprimibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ ). Al contrario, in  $V_0^{CG}$ , non è in generale possibile assumere  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ , di conseguenza il termine di destra della precedente uguaglianza è in generale non nullo; la proprietà di emisimmetria non viene però perduta se si utilizza la seguente forma trilineare modificata, introdotta per la prima volta da A.R. Temam in [51]:

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (2.1.7)$$

La proprietà di emisimmetria è importante nel caso in cui il termine non lineare venga trattato in modo non esplicito, poiché permette di recuperare una stima di stabilità sulla soluzione del metodo: quindi, in casi di questo tipo, la formulazione CG-SEM associata al metodo dovrebbe essere formulata utilizzando  $\tilde{\mathcal{C}}$  in luogo di  $\mathcal{C}$ . Nel nostro caso però, essendo il termine non lineare trattato in modo completamente esplicito, la stima di stabilità per la soluzione del metodo può essere



ottenuta chiedendo semplicemente la continuità della forma trilineare associata al termine convettivo: per queste ragioni, nel nostro metodo è possibile continuare ad utilizzare  $\mathcal{C}$ .

### 2.1.3 Condizione LBB

Discutiamo in questa sezione il ruolo rivestito dalla condizione *LBB*, o *inf-sup* (1.3.4), nell'ambito dei metodi di proiezione, in relazione agli spazi discreti introdotti.

Quando si risolve il problema di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili facendo capo ad una formulazione debole in cui l'equazione del momento e il vincolo di incomprimibilità risultano *accoppiati*, la validità di questa condizione risulta necessaria per ottenere un problema ben posto: consideriamo ad esempio un problema di Stokes con condizioni di Dirichlet omogenee, il problema *accoppiato* semi-discretizzato in tempo (BDF2), prevede di cercare  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in V_0 \times Q_0$  tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{A}(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + \mathcal{B}(p^{n+1}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}^{n+1}, q) = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Si può dimostrare che, se gli spazi  $V, Q$  non soddisfano la condizione (1.3.4), allora esistono dei “modi spuri di pressione” che non permettono di ottenere un'unica soluzione per il problema (2.1.8) (per dettagli [44]). In modo particolare, questa proprietà nasce dal fatto che il termine di pressione che compare nell'equazione del momento, risulta essere implicito, e funge da *moltiplicatore di Lagrange* per imporre il vincolo di incomprimibilità sulla velocità. Utilizzando il metodo di Galerkin sul problema precedente per formulare il metodo CG-SEM, la necessità di soddisfare la proprietà (1.3.4) si riflette nella scelta di uno spazio di velocità più “ricco” rispetto a quello per la pressione, ovvero definendo  $V^{CG}$  con un grado polinomiale di approssimazione  $N^v$  più elevato rispetto a quello che si utilizza per  $Q^{CG}$ . Come mostrato ad esempio in [53], nel caso di elementi spettrali, e in relazione alla notazione introdotta, (1.3.4) risulta soddisfatta se scegliamo

$$N_p = N_v - 2 \quad (2.1.9)$$

**Osservazione 2.1.4.** *Esistono comunque delle strade alternative: ad esempio, è possibile ottenere un problema ben posto, anche utilizzando spazi polinomiali che non sono “inf-sup compatibili”, a patto di stabilizzare il problema (2.1.8) aggiungendo all’equazione di continuità un termine bilineare del tipo  $\mathcal{S}_h : Q^{CG} \times Q^{CG} \rightarrow \mathbb{R}$ , definito in modo opportuno.*

La questione risulta diversa nel caso in cui il problema venga discretizzato utilizzando un metodo di proiezione; consideriamo ad esempio il metodo Pressure-Correction rotazionale introdotto nel precedente capitolo: il vincolo di incomprimibilità risulta disaccoppiato dall’equazione del momento, in cui infatti il termine di pressione compare solo in modo esplicito, e perde il ruolo di *moltiplicatore di Lagrange* per imporre il vincolo di incomprimibilità sulla velocità. Come abbiamo visto alla fine del precedente capitolo, la buona posizione dell’equazione del momento (ovvero del problema di diffusione-reazione) e del passo di proiezione (Poisson), possono essere garantite chiedendo la semplice continuità di  $\mathcal{B}$ , e senza la necessità quindi di utilizzare spazi “inf-sup compatibili”. Come è stato mostrato da E. Ferrer in [15] o come si può vedere in [28], [47], questo fatto può essere giustificato osservando che i metodi di proiezione non incrementali (come ad esempio Chorin-Temam 1.2.1) possono essere riscritti come *problemi accoppiati*, caratterizzati però dalla presenza di un termine di stabilizzazione come descritto nell’osservazione 2.1.4: consideriamo per semplicità il problema *accoppiato* di Stokes stazionario

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{p} - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, & \text{in } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Che può essere scritto in forma astratta con un operatore di tipo “punto-sella”:

$$\begin{bmatrix} -\nabla \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon})(\cdot) & \frac{1}{\nu} \nabla(\cdot) \\ \nu \nabla \cdot (\cdot) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Il metodo di Chorin-Temam, essendo  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n = \mathbf{u}, p^{n+1} = p^n = p \quad \forall n$ , si presenta, in questo caso, nella seguente forma :

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \nabla \cdot (2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) &= \mathbf{f} \\
 -\nabla^2 p &= -\frac{3}{2\Delta t}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
 \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2\Delta t}{3}\nabla p
 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

che può essere riscritto come nel seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} -\nabla \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}) & \frac{1}{\nu}\nabla \\ \nu\nabla \cdot & -\frac{2\nu\Delta t}{3}\nabla^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.13}$$

Indebolendo il sistema ottenuto, osserviamo che il metodo di proiezione è stato riscritto un come *problema accoppiato* in cui compare una stabilizzazione della seguente forma:

$$\mathcal{S}_h(p_h, q_h) = \frac{2\nu\Delta t}{3} \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla q_h dV \quad \forall p_h, q_h \in Q^{CG} \tag{2.1.14}$$

Questo fatto è vero indipendentemente dalla scelta degli spazi in cui ambientare il problema. La forma stabilizzante è dunque tanto più efficace, quanto maggiore è il valore della costante  $\nu\Delta t$ , che gioca quindi un ruolo fondamentale nel caso in cui gli spazi di approssimazione non sono “inf-sup compatibili”: concentrandoci soltanto sul ruolo di  $\Delta t$ , la conseguenza pratica di questo fatto è che se  $\Delta t$  “non è troppo piccolo”, il metodo risulta stabile e non compaiono modi spuri di pressione. In definitiva, come mostrato ancora in [15] e [16], la stabilità si ha qualora risulti soddisfatta la seguente condizione:

$$\Delta t_s = C_s \left( \frac{1}{\nu} \min(h^2, N^{-3}) \right) \leq \Delta t, \quad C_s > 0 \tag{2.1.15}$$

**Osservazione 2.1.5.** È mostrato in [29], che quando  $\Delta t$  viola la condizione precedente e si utilizzano spazi non-compatibili, si osserva la comparsa di modi spuri di pressione. Torneremo su questo argomento nell’ultimo capitolo.

**Osservazione 2.1.6 (CFL).** La presenza di un limite inferiore per la scelta di  $\Delta t$  potrebbe apparentemente dar luogo a contraddizioni in relazione alla presenza di un limite superiore dovuto alla condizione CFL. In realtà, come mostrato in [15], i due limiti risultano compatibili quando si effettuano simulazioni di alto ordine, ovvero

per  $h \rightarrow 0$  e soprattutto  $N \rightarrow \infty$  si ha che  $O(\frac{hN^{-2}}{U_{max}} - \frac{1}{\nu} \min(h^2, N^{-3})) > 0$ . Quindi a patto di verificare che sia  $\Delta t_{CFL} > \Delta t_s$ , il metodo implementato con  $N_p = N_v \geq 3$  risulta stabile scegliendo  $\Delta t$  nel range

$$C_s \left( \frac{1}{\nu} \min(h^2, N^{-3}) \right) \leq \Delta t \leq C_{cfl} \frac{h}{U_{max} N^2} \quad (2.1.16)$$

**Osservazione 2.1.7.** *Nel caso in cui si utilizzassero, anche per i metodi di proiezione, spazi che soddisfano la condizione inf-sup, i modi spuri non si osservano mai, anche scegliendo un passo temporale  $\Delta t$  che viola la condizione (2.1.15).*

Come conseguenza dell'ultima osservazione, al fine di valutare l'ordine di convergenza del metodo rispetto ad un raffinamento del passo temporale ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), d'ora in poi consideriamo esclusivamente spazi velocità e pressione "inf-sup compatibili", effettuando sempre la scelta  $N^p = N^v - 2$ .

#### 2.1.4 Formulazione CG-SEM

La formulazione CG-SEM risulta quindi la seguente: siano

$$V^{CG} = [X_h^N(\Omega)]^3, \quad V_0^{CG} = \{\mathbf{v}_h \in V^{CG} : \mathbf{v}_h|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}, \quad Q_0^{CG} = \left\{ q_h \in X_h^{N-2}(\Omega) : \int_{\Omega} q_h = 0 \right\}$$

Per ogni  $n \geq 1$ , cerchiamo  $(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V^{CG} \times V^{CG} \times Q_0^{CG}$  tale che:

- per  $i = 1, 2$  poniamo  $\bar{\mathbf{u}}_h^0 = \mathbf{u}_h^{n+1-i}$ , sia  $j \in \mathbb{N}$  e  $\Delta s = \frac{\Delta t}{j}$ , per  $m = 0, \dots, i(j-1)$  risolviamo:

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{3}} \in V^{CG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^m \cdot \mathbf{v}_h - \frac{\Delta s}{3} \tilde{\mathcal{C}}(\bar{\mathbf{u}}_h^m, \bar{\mathbf{u}}_h^m, \mathbf{v}_h)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{2}} \in V^{CG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^m \cdot \mathbf{v}_h - \frac{\Delta s}{2} \tilde{\mathcal{C}}(\bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{3}}, \bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{3}}, \mathbf{v}_h)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{m+1} \in V^{CG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^{m+1} \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_h^m \cdot \mathbf{v}_h - \Delta s \tilde{\mathcal{C}}(\bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{u}}_h^{m+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h)$$

$\forall \mathbf{v}_h \in V^{CG}$ ; poniamo quindi  $\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1-i} = \bar{\mathbf{u}}_h^i$

- cerchiamo  $\mathbf{u}_h \in V_0^{CG}$  tale che,  $\forall \mathbf{v}_h \in V_0^{CG}$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \\ & = \int_{\Omega} \left( \mathbf{f}^{n+1} + \frac{4}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}_h^n - \frac{2}{2\Delta t} \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1} \right) \cdot \mathbf{v}_h - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h^{*,n+1}) - \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{R}_h \cdot \mathbf{v}_h - \mathcal{A}(\mathbf{R}_h, \mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

e poniamo  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h + \mathbf{R}_h$

- cerchiamo  $\phi_h^{n+1} \in Q_0^{CG}$  tale che

$$\mathcal{A}^p(\phi_h^{n+1}, q_h) = \frac{3}{2\Delta t} \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q), \quad \forall q_h \in Q^{CG} \quad (2.1.18)$$

- Infine  $\mathbf{u}_h^{n+1} \in V^{CG}$ ,  $p_h^{n+1} \in Q_0^{CG}$  tali che:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h - \frac{2}{3\Delta t} \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, \phi_h^{n+1}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V^{CG}$$

$$\int_{\Omega} p_h^{n+1} q_h = \int_{\Omega} (p_h^n + \phi_h^{n+1}) q + 2\nu \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h) \quad \forall q_h \in Q^{CG}$$

**Osservazione 2.1.8.** *La funzione  $\mathbf{R}_h \in V^{CG}$  presente nell'equazione (2.1.17) rappresenta il rilevamento dei dati al bordo, in realzione ad un'imposizione forte del dato di Dirichlet. Specificheremo nel prossimo capitolo le modalità con cui è stata implementata nel codice.*

## 2.2 Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo

In questo paragrafo, illustreremo gli aspetti principali che caratterizzano il metodo non conforme degli Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo (DG-SEM). L'utilizzo di griglie non conformi offre numerosi vantaggi rispetto al caso conforme, come ad esempio la flessibilità e la possibilità di trattare geometrie complesse, mantenendo l'alta accuratezza tipica dei metodi spettrali per soluzioni localmente regolari. In secondo luogo tali griglie permettono di garantire flessibilità geometrica e polinomiale, con la possibilità di effettuare simulazioni utilizzando ad esempio blocchi di griglie meno fitte e con basso grado polinomiale in zone del dominio dove ci si aspetta una soluzione regolare, e di infittire ed alzare l'ordine laddove ci si aspetta che la soluzione sia irregolare. Inoltre, da un punto di vista implementativo, il DG-SEM è particolarmente adatto ad una implementazione di tipo parallelo.

Introduciamo quindi la partizione del dominio che permette di definire il metodo: suddividiamo  $\Omega$  in  $K$  macro-elementi  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  poligonali e non sovrapposti, di diametro  $H_k$  e con bordo  $\partial\Omega_k$  sufficientemente regolare, tali che  $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$ , e

$\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \forall k \neq l$ ; definiamo inoltre lo *scheletro* di questa (macro) decomposizione come

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{k=1}^K \partial\Omega_k \setminus \Omega \quad (2.2.1)$$

Questa macro partizione introdotta può essere in generale non-conforme, ovvero l'intersezione  $\gamma = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l$  tra due elementi adiacenti, può essere una parte di una faccia di  $\Omega_k$  o di  $\Omega_l$ .

**Osservazione 2.2.1.** *L'idea alla base del metodo DG-SEM è quella di risolvere, ad ogni passo temporale, ciascun problema (1.2.10)-(1.2.24) in ogni  $\Omega_k$ , introducendo delle condizioni di trasmissione (o termini di flusso) sulle interfacce  $\partial\Omega_k \cap \Gamma_{int}$  in modo che la soluzione locale trovata sia la restrizione ad  $\Omega_k$  dal problema globale.*

A questo punto procediamo in modo analogo a quanto visto per il caso CG-SEM: introduciamo in ogni  $\Omega_k$  una partizione conforme  $\mathcal{T}_{h_k}$  di esaedri  $\Omega_k^j$   $j = 1, \dots, J_k$  con dimensione caratteristica  $h_k = \max_j h_k^j$  con  $h_k^j = \text{diam}(\Omega_k^j)$ , e tale per cui  $\bar{\Omega}_k = \bigcup_{j=1}^{J_k} \bar{\Omega}_k^j$ . La partizione globale  $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{T}_{h_k}$  deve preservare la decomposizione di  $\partial\Omega$  nel caso vi siano anche condizioni di sforzo normale assegnato.

Ancora, analogamente al caso CG-SEM, assumiamo che esistano delle mappe invertibili  $\mathbf{F}_k^j : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k^j$ , con Jacobiano a determinante positivo  $|\mathbf{J}_k^j|$ ; in questo caso, per una generica funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avremo:

$$\int_{\Omega_k} f = \sum_{\Omega_k^j \in \mathcal{T}_{h_k}} \int_{\Omega_k^j} f = \sum_{j=1}^{J_k} \int_{\hat{\Omega}} (f \circ \mathbf{F}_k^j) |\mathbf{J}_k^j| \quad (2.2.2)$$

**Osservazione 2.2.2.** *Lo scheletro interno  $\Gamma_{int}$  può essere ridefinito in parti elementari  $\gamma_j = \Omega_{k_1}^{m_1} \cap \Omega_{k_2}^{m_2}$  per qualche  $(k_1, m_1), (k_2, m_2)$ , che possono essere opportunamente enumerate in modo tale che, detto  $M$  il numero totale di interfacce di discontinuità elementari, allora*

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{j=1}^M \gamma_j$$

Con un abuso di notazione, ci riferiremo nel seguito a  $\Gamma_{int}$  come un insieme del tipo  $\Gamma_{int} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_M\}$ , in modo tale che, scrivendo  $\gamma \in \Gamma_{int}$ , intenderemo una delle interfacce elementari precedentemente introdotte.

**Osservazione 2.2.3.** *La flessibilità a livello di approssimazione polinomiale è legata al fatto che possono essere scelti diversi gradi polinomiali per velocità e pressione,  $N_k^v$  e  $N_k^p$ , per ogni dominio  $\Omega_k$*

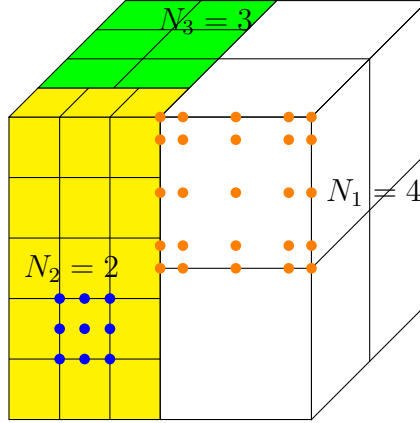


Figura 2.1: Esempio di partizione del dominio  $(-2, 2)^3$  in 3 macro-regioni non conformi, e in ciascuna di esse è definita una partizione conforme.

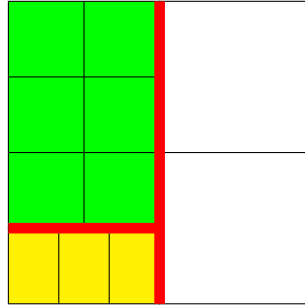


Figura 2.2: Vista dall'alto: il bordo rosso rappresenta  $\Gamma_{int}$

Possiamo quindi definire gli spazi funzionali discreti dove ambientare i problemi introdotti in 1.3: indichiamo con  $\delta^v = \{\mathbf{H}, \mathbf{h}, \mathbf{N}^v\}$ , con  $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_K)$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_K)$  e  $\mathbf{N}^v = (N_1^v, \dots, N_K^v)$ , e definiamo analogamente anche  $\mathbf{N}^p$  e  $\delta^p$ . Sia

$$\mathbb{Q}_N(\Omega_k^j) = \{v = \hat{v} \circ (\mathbf{F}_k^j)^{-1} : \hat{v} \in \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})\}$$

Definiamo allora lo spazio funzionale

$$X_{\delta^v}(\Omega_k) = \{v \in C^0(\Omega_k) : v|_{\Omega_k^j} \in \mathbb{Q}_{N_k^v}(\Omega_k^j) \quad \forall j = 1, \dots, J_k\}$$

ed in modo analogo definiamo  $X_{\delta^p}$ . Possiamo infine definire gli spazi funzionali:

$$V^{DG} = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \mathbf{v}|_{\Omega_k} \in [X_{\delta^p}(\Omega_k)]^3 \quad \forall k = 1, \dots, K\}$$

$$Q^{DG} = \{q \in L^2(\Omega) : q|_{\Omega_k} \in X_{\delta^p}(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, K\}$$

Ed in modo analogo a prima, definiamo  $V_0^{DG}$  e  $Q_0^{DG}$ .

**Osservazione 2.2.4.** *Anche per quel che riguarda la scelta dei nodi e delle funzioni di base, il procedimento è del tutto analogo a quello definito per il caso continuo: l'unica differenza è rappresentata dalla presenza di funzioni di base discontinue, che saranno in particolare tutte quelle associate a nodi che si trovano sulle interfacce di discontinuità.*

La differenza fondamentale con il metodo CG-SEM è rappresentata dal fatto che

$$V_0^{DG} \not\subset V_0 \quad Q_0^{DG} \not\subset \tilde{Q}_0 \quad (2.2.3)$$

Questi ultimi infatti fanno parte della categoria dei *Broken Polynomial Spaces*, e rappresentano delle discretizzazioni dei cosiddetti *Broken Sobolev Spaces*, ovvero spazi funzionali di Sobolev generalizzati, la cui definizione è dipendente dalla forma della mesh:

$$W^{m,p}(\mathcal{T}) = \{v \in L^p(\Omega) : v|_{\Omega_k} \in W^{m,p}(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, K\}$$

Per  $m \geq 1$  si definisce il *broken gradient*  $\nabla_h : W^{m,p}(\mathcal{T}) \rightarrow [L^p(\Omega)]^3$  come  $(\nabla_h v)|_{\Omega_k} = \nabla(v|_{\Omega_k}) \quad \forall k = 1, \dots, K$ . Il legame con gli spazi di Sobolev classici può essere sintetizzato nei seguenti risultati:

**Lemma 2.2.1.** *Sia  $m \geq 0$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Avremo che  $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\mathcal{T})$ . Inoltre  $\nabla_h v = \nabla v \quad \forall v \in [W^{1,p}(\Omega)]$*

Sia  $[[\cdot]]$  il salto di una quantità attraverso una data interfaccia di discontinuità  $\gamma \in \Gamma_{int}$ .

**Lemma 2.2.2.** *sia  $1 \leq p \leq \infty$ , e  $v \in W^{1,p}(\mathcal{T})$ . Allora  $v \in W^{1,p}(\Omega)$  se e solo se:*

$$[[v]] = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_{int} \quad (2.2.4)$$



Inoltre, detto  $H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\tau \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \cdot \tau \in L^2(\Omega)\}$ , e  $H(\operatorname{div}; \mathcal{T})$  la sua versione *broken*, in cui la divergenza è definita in modo analogo al *broken gradient*, vale anche:

**Lemma 2.2.3.** *una funzione  $\tau \in H(\operatorname{div}; \mathcal{T}) \cap [W^{1,1}(\mathcal{T})]$  appartiene a  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  se e solo se*

$$[[\tau]] = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_{int} \quad (2.2.5)$$

La conseguenza principale di (2.2.3) è la necessità di ridefinire le forme  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{C}}$  in modo opportuno, al fine di avere da un lato la buona posizione dei sotto-problemi del metodo ambientati sui nuovi spazi introdotti, dall'altro vogliamo comunque che la formulazione mantenga una proprietà di *forte consistenza* in relazione alla soluzione del problema variazionale. Tali proprietà verranno soddisfatte sfruttando delle condizioni di trasmissione valide per la soluzione della formulazione variazionale 1.3, in particolare sfruttando i lemmi precedenti, avremo che per  $\tilde{\mathbf{u}}^k \in [H^1(\Omega)]^3$  e  $\phi^k \in H^1(\Omega)$  soluzioni di (1.3.2) e (1.3.3), valgono:

$$[[\tilde{\mathbf{u}}^n]] = 0 \quad [[\phi^n]] = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_{int}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.2.6)$$

Inoltre, assumendo l'ulteriore ipotesi di regolarità  $\tilde{\mathbf{u}}^k \in [H^2(\Omega)]^3$  e  $\phi^k \in H^2(\Omega)$ , si ha

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^n)]] = 0 \quad [[\nabla \phi^n]] = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_{int}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.2.7)$$

**Osservazione 2.2.5.** *Per i dettagli e le dimostrazioni dei lemmi precedenti, rimandiamo a D. A. Di Pietro, e A. Ern [12], cap. 1.*

Cerchiamo quindi di capire come cambia la formulazione dei sottoproblemi del metodo Pressure-Correction Rotational.

### 2.2.1 Problema di Diffusione-Reazione

In questa sezione analizziamo come cambiano le forme bilineari  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_p$ , seguendo un'analisi che vale in generale quando si utilizza un approccio di tipo Galerkin Discontinuo, e per i cui dettagli rimandiamo a [12] e [48].

Come anticipato nel paragrafo precedente, vogliamo determinare una formulazione che permetta di risolvere il problema di diffusione-reazione in velocità, e il problema di Poisson, in ogni macro-dominio  $\Omega_k$ , in modo che la soluzione di ciascuno di essi,

risulti la restrizione ad  $\Omega_k$  della soluzione globale: a tal proposito, è utile riscrivere i problemi (1.3.2) e (1.3.3) in una forma equivalente, che sia adatta agli scopi citati. Consideriamo ad esempio il problema diffusione-reazione in velocità, scriviamo l'equazione (1.2.10) su  $\Omega_k$ , moltiplichiamo per una funzione test e integriamo per parti il termine diffusivo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega_k} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV - \int_{\partial\Omega_k} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \\ = \int_{\Omega_k} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega_k} \nabla p^{*,n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega_k} (4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Se definiamo per ogni  $k = 1, \dots, K$  le seguenti forme, lineari rispetto a ciascuno dei propri argomenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Omega_k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_k} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV \\ \mathcal{J}_{\partial\Omega_k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= - \int_{\partial\Omega_k} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\Omega_k}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_k} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega_k} \nabla p^{*,n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega_k} (4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \mathbf{v} dV$$

Il problema (1.3.2) è allora equivalente a cercare una  $K$ -upla di funzioni  $(\tilde{\mathbf{u}}_1^{n+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_K^{n+1}) \in [H^1(\mathcal{T})]^3$ , una per ogni  $\Omega_k$ , tali che  $\tilde{\mathbf{u}}_k^{n+1}|_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} = \mathbf{g}(t^{n+1})|_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega}$ , e tali da soddisfare le condizioni di trasmissione (2.2.6) e (2.2.7), tale che,  $\forall (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K) \in [H^1(\mathcal{T})]^3$ :

$$\sum_{k=1}^K \left( \int_{\Omega_k} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}_k^{n+1} \cdot \mathbf{v}_k dV + \mathcal{A}_{\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}_k^{n+1}, \mathbf{v}_k) + \mathcal{J}_{\partial\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}_k^{n+1}, \mathbf{v}_k) \right) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_{\Omega_k}(\mathbf{v}_k) \quad (2.2.9)$$

**Osservazione 2.2.6.** *la soluzione globale ad ogni passo del metodo è quindi definita come  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\Omega_k} = \tilde{\mathbf{u}}_k^{n+1}$*

Ciò che manca alla formulazione precedente, è il trattamento dei termini alle interfacce  $\partial\Omega_k$ , che richiede l'imposizione di opportune condizioni di trasmissione (2.2.6), (2.2.7). Prima di entrare nel dettaglio, è utile ridefinire gli operatori di salto che agiscono sulle  $\gamma_j$  nel seguente modo:

**Definizione 2.2.1.** sia  $\gamma_j = \Omega_{k_1}^{m_1} \cap \Omega_{k_2}^{m_2} \neq \emptyset$  e siano  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  i versori normali uscenti rispettivamente da  $\Omega_{k_1}^{m_1}$  e  $\Omega_{k_2}^{m_2}$ , definiamo:

- Per  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ed indicando  $q_i = q|_{\Omega_{k_i}^{m_i}}$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\llbracket q \rrbracket = q_1 \mathbf{n}_1 + q_2 \mathbf{n}_2;$$

$$\{q\} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2);$$

- Per  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ed indicando  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}|_{\Omega_{k_i}^{m_i}}$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{n}_2, \text{ con } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$$

$$\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

- Per  $\underline{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  ed indicando  $\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}|_{\Omega_{k_i}^{m_i}}$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\llbracket \underline{\sigma} \rrbracket = \underline{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 + \underline{\sigma}_2 \mathbf{n}_2$$

$$\{\underline{\sigma}\} = \frac{1}{2}(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2)$$

Utilizziamo queste definizioni per riscrivere in modo opportuno i termini legati alle forme  $\mathcal{J}_{\partial\Omega_k}$ . Ricordando l'osservazione 2.2.6, tramite alcuni passaggi algebrici (vedi [48] o [44]) è possibile scrivere l'uguaglianza:

$$\mathcal{J}_{\partial\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\sigma - \int_{\gamma} 2\{\mathbf{v}\} : \llbracket \nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \rrbracket d\sigma \right)$$

Imponendo *fortemente* la validità della condizione di trasmissione (2.2.7) per  $\tilde{\mathbf{u}}^n$ , possiamo eliminare il secondo termine nel membro di destra della precedente uguaglianza. L'equazione (2.2.9) può essere scritta quindi nel seguente modo equivalente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \left( \int_{\Omega_k} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{A}_{\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) \right) + \\ + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\sigma \right) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_{\Omega_k}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Con  $\mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{T})]^3$ , e dove indichiamo con  $\gamma \in \Gamma_D$  anche le facce  $\partial\Omega_k^j \cap \partial\Omega$ , utilizzando lo stesso abuso di notazione descritto nell'osservazione 2.2.2. Su di esse inoltre, definiamo gli operatori di salto come  $[[\mathbf{v}]] = \mathbf{v}|_{\Gamma_D}$  e  $\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\Gamma_D}$ . A questo punto, imponiamo *debolmente* la condizione di trasmissione (2.2.6) per  $\tilde{\mathbf{u}}^n$ , introducendo dei termini aggiuntivi come segue, senza perdere la forte consistenza del metodo:

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^K \left( \int_{\Omega_k} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \mathcal{A}_{\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) \right) + \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\} : [[\mathbf{v}]] d\sigma \right) \\ & \quad + \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} : [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] d\sigma + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] : [[\mathbf{v}]] d\sigma \right) \\ & \quad \pm \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} : [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] d\sigma + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] : [[\mathbf{v}]] d\sigma \right) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_{\Omega_k}(\mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

dove  $\eta > 0$  è una costante opportuna la cui utilità verrà discussa a breve. Possiamo quindi scrivere la precedente in forma più compatta come:

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^K \left( \int_{\Omega_k} \frac{3}{2\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dV + \mathcal{A}_{\Omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) \right) + \\ & + \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\} : [[\mathbf{v}]] d\sigma - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} : [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] d\sigma + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} [[\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]] : [[\mathbf{v}]] d\sigma \right) = \\ & = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_{\Omega_k}(\mathbf{v}) + \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \left( - \int_{\gamma} 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{g}^{n+1} d\sigma + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} \mathbf{g}^{n+1} : \mathbf{v} d\sigma \right) \end{aligned}$$

L'equazione precedente è adatta al caso in cui si decida di imporre le condizioni di Dirichlet *debolmente*. Per continuità con il caso CG-SEM, decidiamo di imporre le condizioni di Dirichlet *fortemente* anche per il DG-SEM. Di conseguenza, quando utilizziamo il metodo DG-SEM, la forma bilineare  $\mathcal{A}$  verrà sostituita dalla seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{DG}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & = \sum_{k=1}^K \left( \int_{\Omega_k} 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right) \\ & \quad + \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\} : [[\mathbf{v}]] - \int_{\gamma} 2\{\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} : [[\mathbf{u}]] + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} [[\mathbf{u}]] : [[\mathbf{v}]] \right) \end{aligned}$$

**Osservazione 2.2.7.** Avendo deciso di imporre le condizioni di Dirichlet fortemente, nella forma bilineare non compaiono gli integrali su  $\gamma \in \Gamma_D$  poichè lavoriamo in  $V_0^{DG}$  (o in generale in  $V_{\Gamma_D}^{DG} = \{\mathbf{v}_\delta \in V^{DG} : \mathbf{v}_\delta|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$ ). Per motivi analoghi non compaiono neanche gli integrali su  $\gamma \in \Gamma_D$  del termine forzante.

**Osservazione 2.2.8.** Riguardo i termini aggiunti è utile precisare che:

- i termini del tipo  $\int_\gamma 2\{\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\} : \llbracket \mathbf{u} \rrbracket d\sigma$  permettono di mantenere la simmetria della forma bilineare (caratteristica assente nella formulazione (2.2.9)), ciò è di notevole importanza da un punto di vista implementativo, poichè, grazie a questa scelta, sarà possibile associare al problema un sistema lineare caratterizzato da una matrice Simmetrica e Definita Positiva (SDP);
- i termini del tipo  $\eta_\gamma \int_\gamma \llbracket \mathbf{u} \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\sigma$  permettono invece di ottenere una forma bilineare coerciva sullo spazio discreto  $V^{DG}$  (consultare [12], [40], [56]). La coercività dipende dalla scelta di  $\eta_\gamma$ , e quando il problema è ambientato nello spazio discreto  $V^{DG}$ , essa sarà in generale scelta come in SPEED [35]:

$$\eta_\gamma = C \frac{N_\gamma^2}{h_\gamma} \quad (2.2.11)$$

con  $N_\gamma = \max(N_{k_1}, N_{k_2})$ ,  $h_\gamma = \min(h_{k_1}^{d-1}, h_{k_2}^{d-1})$ , mentre  $C \sim O(10)$ , scelta che garantisce la coercività discreta della forma bilineare.

La forma bilineare introdotta  $\mathcal{A}^{DG} : V_0^{DG} \times V_0^{DG} \rightarrow \mathbb{R}$  risulta essere continua, coerciva, ed inoltre si ha la forte consistenza nel senso che se  $\{\tilde{\mathbf{u}}^n\}_{n \geq 1}$  è la soluzione della formulazione variazionale del capitolo precedente, allora  $\mathcal{A}^{DG}(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0^{DG}$ .

In modo del tutto analogo, si può definire la forma bilineare da utilizzare per il problema di Poisson con DG-SEM come:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{p,DG}(p, q) &= \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \nabla p \cdot \nabla q \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \left( - \int_\gamma \{\nabla p\} \cdot \llbracket q \rrbracket - \int_\gamma \{\nabla q\} \cdot \llbracket p \rrbracket + \eta_\gamma^p \int_\gamma \llbracket p \rrbracket : \llbracket q \rrbracket \right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Dove  $\eta_\gamma^p$  è scelta con lo stesso principio del caso precedente.

### 2.2.2 Vincolo Incomprimibilità e Passo di Proiezione

La forma bilineare  $\mathcal{B}$  introdotta precedentemente, non soddisfa le proprietà di buona posizione quando lavoriamo con sottospazi di  $[H^1(\mathcal{T})]^3$ : in modo particolare viene meno l'*inf-sup* stabilità (1.3.4), qualunque sia la scelta di gradi polinomiali di approssimazione per velocità e pressione che si vanno ad utilizzare. Il motivo sta nel fatto che la  $\mathcal{B}$  non tiene conto dei termini di salto sulle interfacce di discontinuità (si veda [53], [48], [12]). La forma bilineare  $\mathcal{B}$  deve essere sostituita dalla seguente:

$$\mathcal{B}^{DG}(\mathbf{v}, q) = \sum_{k=1}^K \left( - \int_{\Omega_k} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q \right) + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \int_{\gamma} \mathbf{n}_{\gamma} \cdot [\mathbf{v}] \{q\} \quad (2.2.13)$$

In cui è stato utilizzato il classico operatore di salto, definito su ogni  $\gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$  come  $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}|_{\Omega_1} - \mathbf{v}|_{\Omega_2}$  se il versore normale di riferimento è quello uscente da  $\Omega_1$ . Tramite questa scelta la forma bilineare soddisfa le proprietà di buona posizione.

**Osservazione 2.2.9.** *La forma bilineare  $\mathcal{B}^{DG}$  può essere vista come una divergenza discreta sullo spazio  $V^{DG}$ , e da essa possiamo derivare anche una versione del gradiente discreto, integrando per parti:*

$$\mathcal{B}^{*,DG}(\mathbf{v}, q) = \sum_{k=1}^K \left( \int_{\Omega_k} \mathbf{v} \cdot \nabla q \right) + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \int_{\gamma} \mathbf{n}_{\gamma} \cdot \{\mathbf{v}\} [q] \quad (2.2.14)$$

*Dove abbiamo utilizzato l'apice \* per diversificarla dalla (2.2.13), ma risultano in realtà equivalenti.*

La conseguenza principale dell'introduzione di (2.2.13), è il fatto che il vincolo di incomprimibilità discreto sullo spazio  $V^{DG}$  si esprimerà come:  $\forall n \geq 0$

$$\mathcal{B}^{DG}(\mathbf{u}^n, q) = 0 \quad \forall q \in Q^{DG} \quad (2.2.15)$$

Questa è la condizione da imporre per scrivere il passo di proiezione nella forma di un problema di Poisson, e ciò influenza inevitabilmente la forma del suo termine forzante, in cui utilizzeremo  $\mathcal{B}^{DG}(\tilde{\mathbf{u}}^n, q)$  in luogo di  $\mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}^n, q)$ . Rimandiamo a [12] e [8] per i dettagli.

### 2.2.3 Termine Non-Lineare

Anche per il metodo DG-SEM, la forma trilineare associata al termine non lineare subisce delle modifiche legate alla proprietà di emisimmetria. Abbiamo già notato come la forma  $\mathcal{C}$  perdesse l'emisimmetria nel caso CG-SEM, e abbiamo di conseguenza introdotto la forma trilineare  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Purtroppo però, quest'ultima non è adatta al caso DG-SEM: infatti, seguendo una procedura simile a quella vista per il termine di diffusione, integrando per parti su  $\Omega_k$ , e sommando su  $k = 1, \dots, K$  otteniamo, per ogni  $\mathbf{w}, \mathbf{u} \in V_0^{DG}$

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \int_{\gamma} [\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \int_{\gamma} \{\mathbf{w}\} \cdot \mathbf{n}_{\gamma} [\mathbf{v}] \cdot \{\mathbf{v}\} \quad (2.2.16)$$

In modo particolare si osserva che il termine di destra non si annulla. Per lavorare quindi con una forma trilineare emisimmetrica su  $V_0^{DG}$ , è necessario sostituire la precedente con

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{DG}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \\ & - \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \int_{\gamma} \{\mathbf{w}\} \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \{\mathbf{v}\} - \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \int_{\gamma} \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} \end{aligned}$$

la quale soddisfa le proprietà di continuità e emisimmetria richieste. La precedente forma trilineare compare nella formulazione modificata di Lesaint-Raviart per metodi DG, per i cui dettagli è possibile consultare [12], o [48].

**Osservazione 2.2.10.** *Come è stato osservato alla fine della sezione 2.1.2, per il metodo formulato in questo lavoro è possibile ottenere una stima di stabilità senza necessariamente lavorare con una forma trilineare emisimmetrica, ovvero continuando ad utilizzare  $\mathcal{C}$ : discuteremo più dettagliatamente questa possibilità nel paragrafo 2.3.4*

### 2.2.4 Formulazione DG-SEM

Possiamo quindi definire la formulazione variazionale del metodo Pressure-Correction rotazionale attraverso il metodo agli Elementi Spettrali con Galerkin Discontinuo: noti e i valori iniziali  $\mathbf{u}^0, p^0$ , e i valori  $(\tilde{\mathbf{u}}_{\delta}^1, \mathbf{u}_{\delta}^1, p_{\delta}^1) \in V^{DG} \times V^{DG} \times Q_0^{DG}$ , cerchiamo per ogni  $n \geq 1$  delle funzioni  $(\tilde{\mathbf{u}}_{\delta}^{n+1}, \mathbf{u}_{\delta}^{n+1}, p_{\delta}^{n+1}) \in V^{DG} \times V^{DG} \times Q_0^{DG}$  tali che:

- per  $i = 1, 2$  poniamo  $\bar{\mathbf{u}}_\delta^0 = \mathbf{u}_\delta^{n+1-i}$ , sia  $j \in \mathbb{N}$  e  $\Delta s = \frac{\Delta t}{j}$ , per  $m = 0, \dots, i(j-1)$  risolviamo:

$$\bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{3}} \in V^{DG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{v}_\delta = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^m \cdot \mathbf{v}_\delta - \frac{\Delta s}{3} \mathcal{C}^{DG}(\bar{\mathbf{u}}_\delta^m, \bar{\mathbf{u}}_\delta^m, \mathbf{v}_\delta)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{2}} \in V^{DG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v}_\delta = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^m \cdot \mathbf{v}_\delta - \frac{\Delta s}{2} \mathcal{C}^{DG}(\bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{3}}, \bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{3}}, \mathbf{v}_\delta)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+1} \in V^{DG} : \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+1} \cdot \mathbf{v}_\delta = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_\delta^m \cdot \mathbf{v}_\delta - \Delta s \mathcal{C}^{DG}(\bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{u}}_\delta^{m+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_\delta)$$

$\forall \mathbf{v}_\delta \in V^{DG}$ ; poniamo quindi  $\hat{\mathbf{u}}_\delta^{n+1-i} = \bar{\mathbf{u}}_\delta^i$

- cerchiamo  $\mathbf{u}_\delta \in V_0^{DG}$  tale che

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{v}_\delta + \mathcal{A}^{DG}(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta) = \\ & = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_k(\mathbf{v}_\delta) - \mathcal{B}^{*,DG}(\mathbf{v}_\delta, p_\delta^{*,n+1}) - \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{R}_\delta \cdot \mathbf{v} - \mathcal{A}^{DG}(\mathbf{R}_\delta, \mathbf{v}_\delta), \quad \forall \mathbf{v}_\delta \in V_0^{DG} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

e poniamo  $\tilde{\mathbf{u}}_\delta^{n+1} = \mathbf{u}_\delta + \mathbf{R}_\delta$

- cerchiamo  $\phi_\delta^{n+1} \in Q_0^{DG}$  tale che

$$\mathcal{A}^{p,DG}(\phi_\delta^{n+1}, q_\delta) = \frac{3}{2\Delta t} \mathcal{B}^{DG}(\tilde{\mathbf{u}}_\delta^{n+1}, q_\delta), \quad \forall q_\delta \in Q^{DG} \quad (2.2.18)$$

- Infine  $\mathbf{u}_\delta^{n+1} \in V^{DG}$ ,  $p_\delta^{n+1} \in Q_0^{DG}$  tali che:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\delta = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_\delta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\delta - \frac{2}{3\Delta t} \mathcal{B}^{*,DG}(\mathbf{v}_\delta, \phi_\delta^{n+1}) \quad \forall \mathbf{v}_\delta \in V^{DG} \quad (2.2.19)$$

$$\int_{\Omega} p_\delta^{n+1} q_\delta = \int_{\Omega} (p_\delta^n + \phi_\delta^{n+1}) q + 2\nu \mathcal{B}^{DG}(\tilde{\mathbf{u}}_\delta^{n+1}, q_\delta) \quad \forall q_\delta \in Q^{DG} \quad (2.2.20)$$

**Osservazione 2.2.11.** *La forma  $\mathcal{B}^{*,DG}$  è stata introdotta per evidenziare il significato dei termini, ma in fase di implementazione utilizzeremo sempre e soltanto  $\mathcal{B}^{DG}$ .*



## 2.3 Formulazione Algebrica

Descriviamo ora come ricavare la formulazione algebrica corrispondente alla formulazione discreta appena introdotta, provvedendo a definire la forma delle matrici associate a ciascuna delle forme bilineari e trilineari introdotte. Osserviamo inoltre che la formulazione CG-SEM può essere ottenuta come caso semplificato della DG-SEM, in cui si ha un solo elemento nella macro-partizione non conforme (che coincide quindi con  $\Omega$ ) e non si hanno termini di salto. Prima di entrare nel dettaglio, è necessario però definire le funzioni di base, per gli spazi  $V^{DG}$  e  $Q^{DG}$ , utilizzate dal metodo. Supporremo per semplicità che il dato al bordo di Dirichlet sia  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . Consideriamo  $V^{DG}$ , e ricordiamo la forma delle funzioni di base  $\hat{\varphi}_i$  definite sull'intervallo di riferimento  $\hat{\Omega}$ , introdotte nella sezione (2.1). Una base lagrangiana di funzioni continue per  $X_h^{N_k}(\Omega_k)$  può essere ottenuta mappando le  $\{\hat{\varphi}_I\}_{I=1}^{(N_k^v+1)^3}$  definite prima, tramite le  $\mathbf{F}_k^j$ : al nodo  $\mathbf{p}_i^v \in \Omega_k^j$ , tale per cui  $\mathbf{p}_i^v = \mathbf{F}_k^j(\hat{\mathbf{x}}_I)$ , associamo la funzione di base lagrangiana  $\Psi_i(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_I((\mathbf{F}_k^j)^{-1}(\mathbf{x}))$ , con supporto su  $\Omega_k^j$  e che possiamo estendere su tutto il dominio  $\Omega$  imponendo che sia nulla sugli altri esaedri.

**Osservazione 2.3.1.** *Se  $\mathbf{p}_i^v \in \partial\Omega_k^{j_1} \cap \partial\Omega_k^{j_2}$ , la funzione di base  $\Psi_i$  ad esso associata avrà supporto su  $\Omega_k^{j_1} \cup \Omega_k^{j_2}$ , e  $\Psi_i|_{\Omega_k^{j_1}} = \hat{\varphi}_{I_1} \circ (\mathbf{F}_k^{j_1})^{-1}$ , mentre  $\Psi_i|_{\Omega_k^{j_2}} = \hat{\varphi}_{I_2} \circ (\mathbf{F}_k^{j_2})^{-1}$ , come è possibile vedere in [44].*

In questo modo, è quindi possibile definire la base  $\{\Psi_i\}_{i=1}^{N_{\text{nodi}}^v}$  per  $X_h^{N_k}(\Omega_k)$ , dove  $N_{\text{nodi}}^v = J_k(N_k^v + 1)^3 - N_{\text{face},k}(N_k^v + 1)^2$  e  $N_{\text{face},k}$  è il numero di facce su cui vige un vincolo di continuità, e su cui ci sono i “nodi da non considerare”, nel senso specificato nella seguente osservazione.

**Osservazione 2.3.2.** *Essendo concentrati su un problema con condizione di Dirichlet per la velocità sull'intero  $\partial\Omega$ , per ogni faccia  $\gamma$  del generico esaedro  $\partial\Omega_k^j$  si possono avere 3 casi:*

1.  $\gamma \in \Gamma_D = \partial\Omega$ , e sui nodi di tale faccia si deve imporre il vincolo di Dirichlet;
2.  $\gamma$  è di una faccia sulla quale vige un vincolo di continuità;
3.  $\gamma \in \Gamma_{\text{int}}$ , e sarà un'interfaccia di discontinuità;

Quindi se stiamo definendo una base per  $V^{DG}$ ,  $N_{\text{face},k}^v$  sarà il numero di facce della tipologia 2, se invece si tratta di  $V_0^{DG}$  (è questo il caso in esame), allora avremo anche facce della tipologia 1, poiché in tal caso eliminiamo dal sistema i gradi di libertà associati ai nodi di bordo.

Grazie a come sono definite le funzioni  $\hat{\varphi}_i$ , abbiamo  $\Psi_i(\mathbf{p}_j^v) = \delta_{i,j}$ , dove  $\{\mathbf{p}_i^v\}_{i=1}^{Nnodi_k^v}$  sono i nodi su  $\Omega_k$ . Ciascuna funzione di base  $\Psi_i$  ha supporto che coincide con  $\Omega_k^j$  se  $\mathbf{p}_i^v \in \Omega_k^j$ , oppure con l'unione di più esaedri nel caso in cui  $\mathbf{p}_i^v$  si trovi sul bordo di essi. A questo punto, ripetiamo questo procedimento per  $k = 1, \dots, K$ , ed enumeriamo infine nodi e basi in modo opportuno e coerente tra di loro. Sia quindi

$$D^v = \sum_{k=1}^K (J_k(N_k^v + 1)^3 - N_{face,k}^v(N_k^v + 1)^2) \quad (2.3.1)$$

Il numero totale di nodi  $\{\mathbf{p}_i^v\}_{i=1}^{D^v}$  e funzioni di base  $\{\Psi_i\}_{i=1}^{D^v}$  per la velocità, ovvero la dimensione di ogni componente di  $V^{DG}$ . Possiamo allora definire una base vettoriale  $\{\Psi_i^l, \quad i = 1, \dots, Nnodi_v, \quad l = 1, 2, 3\}$  per  $V^{DG}$  nel seguente modo:

$$\Psi_i^1 = \begin{bmatrix} \Psi_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_i^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_i^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_i \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, D^v$$

**Osservazione 2.3.3.** *Nel codice sviluppato, la scelta della base lagrangiana, unitamente all'osservazione 2.1.3, costituiranno un gran vantaggio da un punto di vista numerico, come vedremo più nel dettaglio nel prossimo capitolo.*

In modo del tutto analogo si definiscono  $\{\mathbf{p}_i^p\}_{i=1}^{D^p}$  e  $\{\psi_i\}_{i=1}^{D^p}$  per caratterizzare  $Q^{DG}$ , dove ancora come prima abbiamo indicato la dimensione dello spazio con

$$D^p = \sum_{k=1}^K (J_k(N_k^p + 1)^3 - N_{face,k}^p(N_k^p + 1)^2) \quad (2.3.2)$$

Ogni funzione  $\mathbf{u} \in V^{DG}$  e  $p \in Q^{DG}$  può essere scritta come combilazione lineare delle funzioni di base dei rispettivi spazi:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{D^v} (U_j^1 \Psi_j^1(\mathbf{x}) + U_j^2 \Psi_j^2(\mathbf{x}) + U_j^3 \Psi_j^3(\mathbf{x})) \quad (2.3.3)$$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{D^p} P_j \psi_j(\mathbf{x}) \quad (2.3.4)$$

Al fine di avere delle matrici con blocchi “ben organizzati” (vedi figura 2.3 e oss. 2.3.4), introduciamo le quantità  $a_k^v, b_k^v$  definite come segue:

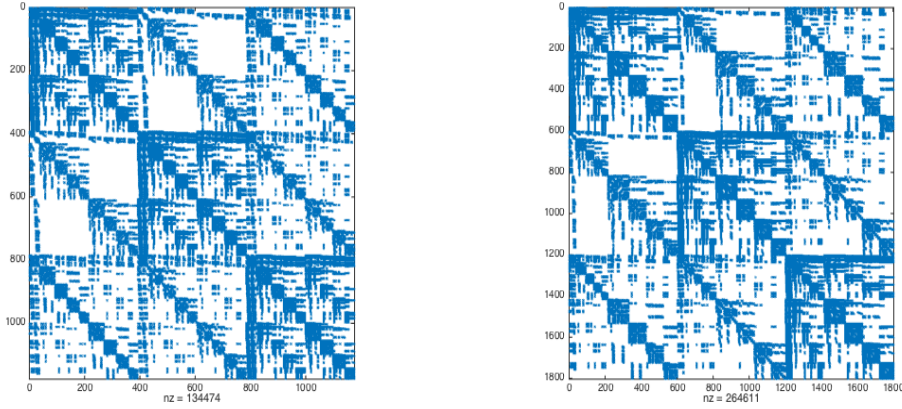


Figura 2.3: Esempio semplice matrice in velocità nel caso di mesh con 2 macro-elementi su  $\Omega = (-1, 1)^3$  aventi discontinuità in  $z = 0$ , e ciascuno di 4 esaedri conformi con  $N_1^v = N_1^v = 3$  e 1176 gradi di libertà (sinistra), e  $N_1^v = 3, N_2^v = 4$  1803 gradi di libertà (destra).

**Osservazione 2.3.4.** *In figura 2.3 si ha ad esempio che: in ciascuna matrice, si riescono ad identificare 9 blocchi (quadrati) più grandi, legati ad integrazioni “ $\Psi_i^l$  vs.  $\Psi_j^m$ ”  $l, m = 1, 2, 3$ , e all’interno di ciascuno si identificano 4 blocchi con dimensione che dipende da  $N_k^v$ , legati ad integrazioni su  $\Omega_1$  o  $\Omega_2$ .*

$$a_k^v = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (J_j(N_j^v + 1)^3 - N_{face,j}^v(N_j^v + 1)^2) \quad (2.3.5)$$

$$b_k^v = \sum_{j=1}^k (J_j(N_j^v + 1)^3 - N_{face,j}^v(N_j^v + 1)^2) \quad (2.3.6)$$

ed enumeriamo nuovamente le funzioni di base, in modo tale da avere:

$$\mathbf{u}|_{\Omega_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=a_k^v}^{b_k^v} (U_j^1 \Psi_j^1(\mathbf{x}) + U_j^2 \Psi_j^2(\mathbf{x}) + U_j^3 \Psi_j^3(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \sum_{j=a_k^v}^{b_k^v} U_j^1 \Psi_j^1(\mathbf{x}) \\ \sum_{j=a_k^v}^{b_k^v} U_j^2 \Psi_j^2(\mathbf{x}) \\ \sum_{j=a_k^v}^{b_k^v} U_j^3 \Psi_j^3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

effettuiamo quindi la stessa operazione per le  $\psi_i$ , al fine di ottenere un’espansione analoga per le funzioni degli spazi di pressione.

A questo punto possiamo dare un volto alle matrici utilizzate in fase di risoluzione, sostituendo  $\tilde{\mathbf{u}}_\delta^n, \phi_\delta^n, \mathbf{u}_\delta^n, p_\delta^n$  nella formulazione DG-SEM, con le rispettive forme espansive del tipo (2.3.3) e (2.3.4).

### 2.3.1 Matrici di Massa

Le matrici di massa per velocità e pressione sono entrambe diagonali a blocchi, grazie al fatto che le funzioni di base hanno supporto coincidente con gli esaedri  $\Omega_k^j$  cui appartiene il nodo associato alla funzione di base. In modo particolare per la velocità avremo la seguente forma:

$$\mathbf{M}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3D^v \times 3D^v} \quad (2.3.8)$$

dove  $\mathbf{M}^l = \text{diag}(\mathbf{M}_1^l, \dots, \mathbf{M}_K^l)$   $l = 1, 2, 3$ ; ciascun blocco  $\mathbf{M}_k^l$  è associato alla  $l$ -esima componente della velocità, e all'elemento  $\Omega_k$  della macro-partizione  $\mathcal{T}$  di  $\Omega$ : in particolare essi sono delle matrici sparse in cui ogni elemento è del tipo

$$(\mathbf{M}_k^l)_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \Psi_j^l \cdot \Psi_i^l dV \quad l = 1, 2, 3$$

Anche per la pressione è possibile definire:

$$\mathbf{M}^p = \text{diag}(\mathbf{M}_1^p, \dots, \mathbf{M}_K^p), \quad (\mathbf{M}_k^p)_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \psi_j \psi_i dV$$

### 2.3.2 Matrici di Stiffness

Definiamo ora le matrici legate al prodotto di stiffness: in modo particolare considereremo soltanto i termini di integrazione di volume delle forme bilineari  $\mathcal{A}^{DG}$  e  $\mathcal{A}^{p,DG}$ , ed indicheremo le matrici ad essi associate rispettivamente con  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{S}^p$ ; i termini legati all'integrazione sulle interfacce di discontinuità verranno trattati separatamente e porteranno a definire delle "matrici di salto". Guardiamo la forma bilineare del problema di diffusione-reazione: avendo deciso di utilizzare esplicitamente il tensore degli sforzi per fluidi Newtoniani nell'equazione del momento, la matrice  $\mathbf{S}$  non sarà diagonale a blocchi come  $\mathbf{M}$ , ma avrà la seguente struttura:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1,1} & \mathbf{S}^{1,2} & \mathbf{S}^{1,3} \\ \mathbf{S}^{2,1} & \mathbf{S}^{2,2} & \mathbf{S}^{2,3} \\ \mathbf{S}^{3,1} & \mathbf{S}^{3,2} & \mathbf{S}^{3,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3D^v \times 3D^v} \quad (2.3.9)$$

dove però, ciascun blocco  $\mathbf{S}^{l,m} = \text{diag}(\mathbf{S}_1^{l,m}, \dots, \mathbf{S}_K^{l,m})$ ,  $l, m = 1, 2, 3$ . I blocchi precedenti hanno una struttura sparsa, e sono definiti come

$$(\mathbf{S}_k^{l,m})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_j^m) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_i^l) dV \quad l, m = 1, 2, 3 \quad i, j = a_k^v, \dots, b_k^v \quad (2.3.10)$$

Ricordando che  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{(i,j)} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ , avremo quindi che:

$$(\mathbf{S}_k^{1,1})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} 2\nu \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.11a)$$

$$(\mathbf{S}_k^{1,2})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) dV \quad (2.3.11b)$$

$$(\mathbf{S}_k^{1,3})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.11c)$$

$$(\mathbf{S}_k^{2,1})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) dV \quad (2.3.11d)$$

$$(\mathbf{S}_k^{2,2})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} 2\nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.11e)$$

$$(\mathbf{S}_k^{2,3})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.11f)$$

$$(\mathbf{S}_k^{3,1})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right) dV \quad (2.3.11g)$$

$$(\mathbf{S}_k^{3,2})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) dV \quad (2.3.11h)$$

$$(\mathbf{S}_k^{3,3})_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} 2\nu \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.11i)$$

Analogamente si definisce  $\mathbf{S}^p = \text{diag}(\mathbf{S}_1^p, \dots, \mathbf{S}_K^p) \in \mathbb{R}^{D^p}$ , in cui ogni blocco sarà definito come:

$$(\mathbf{S}_k^p)_{(i,j)} = \int_{\Omega_k} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i dV \quad i, j = a_k^p, \dots, b_k^p \quad (2.3.12)$$

### 2.3.3 Matrici di Divergenza

Analogamente a quanto visto nella sezione precedente, analizziamo la costruzione della matrici associate alla parte volumetrica della forma bilineare  $\mathcal{B}$ , che indicheremo con  $\mathbf{B}$ , e tratteremo nella sezione successiva quella relativa agli integrali sulle interfacce di discontinuità. Avremo quindi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D^p \times 3D^v} \quad (2.3.13)$$

Dove  $\mathbf{B}^m = \text{diag}(\mathbf{B}_1^m, \dots, \mathbf{B}_K^m)$   $m = 1, 2, 3$ . In particolare quindi

$$(\mathbf{B}_k^m)_{(i,j)} = - \int_{\Omega_k} (\nabla \cdot \Psi_j^m) \psi_i dV \quad m = 1, 2, 3 \quad i = a_k^p, \dots, b_k^p \quad j = a_k^v, \dots, b_k^v \quad (2.3.14)$$

### 2.3.4 Matrici Termine Non-Lineare

Come abbiamo visto in precedenza, anche il trattamento del termine non-lineare della formulazione DG-SEM, è realizzato attraverso l'introduzione di una forma trilineare in cui compaiono termini di integrazione volumetrica e di integrazione sulle interfacce di discontinuità. In questo caso, sia le matrici legate ai termini di volume che quelle dei termini superficiali, vanno costruite ad ogni iterazione temporale, e per ogni passo del metodo di Taylor, rendendo elevato il costo computazionale. Seguendo quanto mostrato da E. Ferrer e R.H.J. Willden in [14] e [16], quando si utilizzano metodi ad alto ordine, i test numerici dei metodi DG con  $\mathcal{C}^{DG}$ , forniscono risultati pressoché identici a test DG effettuati senza l'utilizzo di termini superficiali (ovvero utilizzando  $\tilde{\mathcal{C}}$  nella formulazione DG). Inoltre, la possibilità di utilizzare  $\tilde{\mathcal{C}}$  nei metodi DG è strettamente relazionata anche alle seguenti tre caratteristiche del metodo che utilizziamo in questo lavoro:

- In questo lavoro si effettuano simulazioni di *flussi laminari*, e non trattiamo il caso della *turbolenza*;
- Il termine non lineare agisce solo in veste di termine forzante nei passi del metodo Pressure-Correction Rotational implementato; inoltre è dimostrato nelle fonti già citate, che aumentando l'ordine di approssimazione, la soluzione tende a diventare continua, riducendo gli effetti dei termini di salto.
- Da un punto di vista della stabilità, il nostro metodo non richiede l'utilizzo di una forma trilineare positiva (o emisimmetrica), avendo adottato un trattamento esplicito per il termine non lineare;

In definitiva, in conseguenza alle affermazioni precedenti, abbiamo deciso di utilizzare la forma bilineare  $\tilde{\mathcal{C}}$  anche nella formulazione DG-SEM, in modo tale da ottenere un metodo numerico dal costo computazionale relativamente ridotto. Detto quindi  $\mathbf{V} = [V_1^1, \dots, V_{D^v}^1, V_1^2, \dots, V_{D^v}^2, \dots, V_1^3, \dots, V_{D^v}^3]$  il vettore dei gradi di libertà della velocità nota, verranno di volta in volta costruite le matrici

$$\mathbf{C}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{V})^{1,1} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{1,2} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{1,3} \\ \mathbf{C}(\mathbf{V})^{2,1} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{2,2} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{2,3} \\ \mathbf{C}(\mathbf{V})^{3,1} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{3,2} & \mathbf{C}(\mathbf{V})^{3,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3D^v \times 3D^v} \quad (2.3.15)$$

con  $\mathbf{C}(\mathbf{V})^{l,m} = \text{diag}(\mathbf{C}(\mathbf{V})_1^{l,m}, \dots, \mathbf{C}(\mathbf{V})_K^{l,m})$   $l, m = 1, 2, 3$  e dove, chiamando  $\mathbf{v}$  la funzione associata a  $\mathbf{V}$ , ciascun blocco è

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(\mathbf{V})_k^{l,m})_{i,j} &= \int_{\Omega_k} ((\mathbf{v}|_{\Omega_k} \cdot \nabla) \Psi_j^m \cdot \Psi_i^l) dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} (\nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Omega_k}) \Psi_j^m \cdot \Psi_i^l dV \\ i, j &= a_k^v, \dots, b_k^v \quad l, m = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

### 2.3.5 Matrici di Salto

Nel caso di approssimazione con approccio DG-SEM, le matrici di salto associate agli integrali sulle interfacce di discontinuità delle forme bilineari  $\mathcal{A}^{DG}$ ,  $\mathcal{A}^{p,DG}$  e  $\mathcal{B}^{DG}$ , verranno indicate rispettivamente con  $\mathbf{J}^v$ ,  $\mathbf{J}^p$  e  $\mathbf{J}\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{J}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{1,1} & \mathbf{J}^{1,2} & \mathbf{J}^{1,3} \\ \mathbf{J}^{2,1} & \mathbf{J}^{2,2} & \mathbf{J}^{2,3} \\ \mathbf{J}^{3,1} & \mathbf{J}^{3,2} & \mathbf{J}^{3,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3D^v \times 3D^v} \quad (2.3.17)$$

Dove ciascun blocco, contrariamente a quanto si aveva nei casi precedenti, ha una struttura sparsa, poichè in generale due funzioni di base con supporti su due sottodomini  $\Omega_k$  e  $\Omega_n$  differenti, possono dar luogo a termini non nulli:

$$\mathbf{J}^{l,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1}^{l,m} & \cdots & \mathbf{J}_{1,K}^{l,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{K,1}^{l,m} & \cdots & \mathbf{J}_{K,K}^{l,m} \end{bmatrix} \quad l, m = 1, 2, 3 \quad (2.3.18)$$

In modo particolare, gli elementi di ogni matrice  $\mathbf{J}_{k,n}^{l,m}$  sono definiti da:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{J}_{k,n}^{l,m})_{(i,j)} &= \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_j^m)\} : \llbracket \boldsymbol{\Psi}_i^l \rrbracket d\sigma - \int_{\gamma} 2\{\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_i^l)\} : \llbracket \boldsymbol{\Psi}_j^m \rrbracket d\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} \llbracket \boldsymbol{\Psi}_j^m \rrbracket : \llbracket \boldsymbol{\Psi}_i^l \rrbracket d\sigma \right) \\
 i &= a_k^v, \dots, b_k^v \quad j = a_n^v, \dots, b_n^v \quad l, m = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

In modo del tutto analogo, si definisce la matrice  $\mathbf{J}^p$  come

$$\mathbf{J}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1}^p & \cdots & \mathbf{J}_{1,K}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{K,1}^p & \cdots & \mathbf{J}_{K,K}^p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D^p \times D^p} \tag{2.3.20}$$

Dove

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{J}_{k,n}^p)_{(i,j)} &= \sum_{\gamma \subset \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} \{\nabla \psi_j\} \cdot \llbracket \psi_i \rrbracket d\sigma - \int_{\gamma} \{\nabla \psi_i\} \cdot \llbracket \psi_j \rrbracket d\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \eta_{\gamma}^p \int_{\gamma} \llbracket \psi_j \rrbracket : \llbracket \psi_i \rrbracket d\sigma \right) \\
 i &= a_k^p, \dots, b_k^p \quad j = a_n^p, \dots, b_n^p
 \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Per quel che riguarda invece la matrice di salto legata alla forma bilineare  $\mathcal{B}^{DG}$  abbiamo che

$$\mathbf{JB} = \begin{bmatrix} \mathbf{JB}^1 & \mathbf{JB}^2 & \mathbf{JB}^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D^p \times 3D^v} \tag{2.3.22}$$

dove ancora si ha

$$\mathbf{JB}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{JB}_{1,1}^l & \cdots & \mathbf{JB}_{1,K}^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{JB}_{K,1}^l & \cdots & \mathbf{JB}_{K,K}^l \end{bmatrix} \quad l = 1, 2, 3 \tag{2.3.23}$$

e infine

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{JB}_{(k,n)}^l)_{i,j} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \int_{\gamma} \mathbf{n}_{\gamma} \cdot \llbracket \boldsymbol{\Psi}_j^l \rrbracket \{\psi_i\} d\sigma \\
 i &= a_k^p, \dots, b_k^p \quad j = a_n^v, \dots, b_n^v \quad l = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.3.24}$$



### 2.3.6 Formulazione

In definitiva, la versione matriciale della formulazione DG-SEM 2.2.4, può essere scritta nel seguente modo: noti e i valori iniziali  $\mathbf{U}^0, \mathbf{P}^0$ , e i valori  $(\tilde{\mathbf{U}}^1, \mathbf{U}^1, \mathbf{P}^1)$ , cerchiamo per ogni  $n \geq 1$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{3D^v}$ ,  $\mathbf{U}^{n+1} \in \mathbb{R}^{3D^v}$ ,  $\mathbf{P}^{n+1} \in \mathbb{R}^{D^p}$  tali che:

- per  $i = 1, 2$  poniamo  $\bar{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{U}^{n+1-i}$ , sia  $j \in \mathbb{N}$  e  $\Delta s = \frac{\Delta t}{j}$ , per  $m = 0, \dots, i(j-1)$  risolviamo:

$$\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{3}} = \bar{\mathbf{U}}^m - \frac{\Delta s}{3}(\mathbf{M}^v)^{-1}\mathbf{C}(\bar{\mathbf{U}}^m)\bar{\mathbf{U}}^m$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{U}}^m - \frac{\Delta s}{2}(\mathbf{M}^v)^{-1}\mathbf{C}(\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{3}})\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{3}}$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{m+1} = \bar{\mathbf{U}}^m - \Delta s(\mathbf{M}^v)^{-1}\mathbf{C}(\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{2}})\bar{\mathbf{U}}^{m+\frac{1}{2}}$$

poniamo quindi  $\hat{\mathbf{U}}^{n+1-i} = \bar{\mathbf{U}}^i$

- cerchiamo  $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1}$  tale che

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2\Delta t}\mathbf{M}^v + \mathbf{K}^v + \mathbf{J}^v\right)\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} &= \\ &= \mathbf{F}^{n+1} + \frac{4}{2\Delta t}\mathbf{M}^v\hat{\mathbf{U}}^n - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{M}^v\hat{\mathbf{U}}^{n-1} - (\mathbf{B}^T + \mathbf{J}\mathbf{B}^T)\mathbf{P}^{*,n+1} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

- cerchiamo  $\Phi^{n+1} \in \mathbb{R}^{D^p}$  tale che

$$(\mathbf{K}^p + \mathbf{J}^p)\Phi^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{B} + \mathbf{J}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (2.3.26)$$

- Infine  $\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{P}^{n+1}$  tali che:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} - \frac{2}{3\Delta t}(\mathbf{M}^v)^{-1}(\mathbf{B}^T + \mathbf{J}\mathbf{B}^T)\Phi^{n+1} \quad (2.3.27)$$

$$\mathbf{P}^{n+1} = (\mathbf{P}^n + \Phi^{n+1}) + 2\nu(\mathbf{M}^p)^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{J}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (2.3.28)$$

**Osservazione 2.3.5.** Abbiamo introdotto anche il vettore legato al termine forzante  $\mathbf{F} = [(\mathbf{F}^n)^1 \quad (\mathbf{F}^n)^2 \quad (\mathbf{F}^n)^3]^T \in \mathbb{R}^{3D^v}$  in cui ciascuna componente è data da

$$(\mathbf{F}^n)_i^l = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t^n) \cdot \Psi_i^l dV \quad i = 1, \dots, D^v \quad l = 1, 2, 3$$

**Osservazione 2.3.6.** Per quel che riguarda le matrici  $\mathbf{J}^v, \mathbf{J}^p, \mathbf{J}\mathbf{B}$ , esse saranno in realtà soggette ad una ulteriore suddivisione, come vedremo più nel dettaglio nel prossimo capitolo.

**Osservazione 2.3.7.** *Nel capitolo finale, verrà discussa una situazione applicativa in cui l'utilizzo dell'estrapolazione del secondo ordine del termine non lineare verrà preferita al metodo di Taylor-Galerkin, per motivi legati al costo computazionale: in tal caso non si effettua il primo sottopasso della formulazione precedente, e si aggiunge*

$$-2\mathbf{C}(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}^n + \mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1})\mathbf{U}^{n-1}$$

*al forzante del problema (2.3.25).*

## Capitolo 3

# Implementazione in SPEED

In questo capitolo analizzeremo in dettaglio gli aspetti algoritmici legati all'implementazione delle formulazioni introdotte nel capitolo precedente. Analizzeremo il metodo di risoluzione adottato per la soluzione dei sistemi lineari, e la strategia utilizzata per calcolare gli integrali superficiali che caratterizzano gli elementi delle matrici di salto.

Il metodo numerico che abbiamo descritto nei capitoli precedenti, è stato implementato utilizzando il linguaggio Fortran 90, in un codice che nasce come estensione del codice SPEED ([37], [22], [45], [3]), del quale ereditiamo quindi tutte le funzioni in esso implementate, soprattutto per quanto riguarda la fase di set-up, in cui viene effettuata la lettura dei dati di input, la partizione degli esaedri della mesh sui processori, le matrici di salto e i vettori di connettività che descrivono gli spazi funzionali discreti per velocità e pressione.

**Osservazione 3.0.8.** *La partizione degli esaedri della griglia sui processori viene realizzata attraverso la libreria METIS [2]: ogni processore avrà un determinato insieme di esaedri  $\{\Omega_k^m\}$  “ad esso affidati”, ovvero ciascun processore calcolerà il valore della soluzione sui nodi di tali esaedri, scambiando informazioni con i processori ai quali sono affidati gli esaedri adiacenti.*

**Osservazione 3.0.9.** *La partizione del dominio è generata esternamente attraverso programmi di generazione di mesh, come ad esempio CUBIT [1]. Una volta generata essa viene scritta in un formato adatto a SPEED tramite un'apposita funzione*

---

*MATLAB. Per dettagli sulla generazione della mesh, è possibile consultare la pagina web di SPEED [3].*

Per quanto riguarda la fase di risoluzione, ad ogni passo temporale devono essere risolti due sistemi lineari: il problema di diffusione-reazione per la velocità, e quello di Poisson per la pressione; le altre equazioni che compaiono nella formulazione sono invece dei problemi di proiezione. Come abbiamo visto nel precedente capitolo, le matrici che caratterizzano i due problemi sono

$$\underline{\mathbf{A}}^v = \left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M}^v + \mathbf{S}^v + \mathbf{J}^v \right)$$

$$\underline{\mathbf{A}}^p = (\mathbf{S}^p + \mathbf{J}^p)$$

Osserviamo che il metodo discontinuo introdotto precedentemente è tale da rendere le forme bilineari simmetriche, ed è infatti noto in letteratura con il nome di Symmetric Interior Penalty Discontinuous Galerkin (SIP-DG): tale scelta deriva dall'obiettivo di mantenere la simmetria delle stesse matrici che si ha nel caso CG-SEM; infatti sia la matrice  $\underline{\mathbf{A}}^v$  che la sua versione per Galerkin Continuo, sono Simmetriche e Definite Positive (SDP), e il sistema lineare ad esse associato può essere quindi risolto con il metodo iterativo del Gradiente Coniugato: in particolare si è scelto di utilizzare il gradiente coniugato preconditionato con la diagonale della matrice stessa [6], implementato con un criterio d'arresto basato sul controllo del residuo relativo, e imponendo come "punto di partenza" la soluzione del passo precedente.

Per quanto riguarda invece il sistema lineare associato ad  $\underline{\mathbf{A}}^p$ , come sappiamo, nel caso *fully-Dirichlet*, la soluzione è definita a meno di una costante additiva: per fissare tale costante in fase di risoluzione, abbiamo fissato a 0 il valore della soluzione su un arbitrario nodo di bordo  $\mathbf{p}_i^p$ , azzerando la  $i$ -esima riga e  $i$ -esima colonna della matrice, ponendo  $\underline{\mathbf{A}}_{i,i}^p = 1$  e fissando a 0 l' $i$ -esimo valore del termine forzante.

Riportiamo di seguito il Gradiente Coniugato implementato nel metodo:

**Gradiente Coniugato Precondizionato:**

$$\mathbf{x} : \quad \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{poniamo } \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_0, \mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}^0;$$

---

se  $\frac{\|\mathbf{r}^0\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \text{toll}$ , allora poniamo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ;  
altrimenti, per ogni  $k \geq 0$

- $\mathbf{P}\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{r}^k$ ;
- $\rho = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{z}^{k+1}$ ;
- se  $k = 0 \Rightarrow \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1}$ ;

altrimenti

- $\beta^{k+1} = \frac{\rho}{\eta}$
- $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1} + \beta^{k+1}\mathbf{p}^k$

- $\alpha^{k+1} = \frac{\rho}{\mathbf{p}^{k+1} \cdot \underline{\mathbf{A}}\mathbf{p}^{k+1}}$
- $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^{k+1}\mathbf{p}^{k+1}$
- $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha^{k+1}\underline{\mathbf{A}}\mathbf{p}^{k+1}$

se  $\frac{\|\mathbf{r}^{k+1}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \text{toll}$ , allora poniamo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{k+1}$ ;

- $\eta = \rho$ ;

Come abbiamo visto in precedenza, le matrici  $\underline{\mathbf{A}}^v$  e  $\underline{\mathbf{A}}^p$  sono entrambe caratterizzate da una parte legata all'integrazione volumetrica, ed una relativa a quella superficiale: ogni volta che dovremo effettuare un prodotto tra la matrice e un arbitrario vettore  $\mathbf{x}$  avremo che

$$\underline{\mathbf{A}}^v \mathbf{x} = \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M}^v \mathbf{x} + \mathbf{S}^v \mathbf{x} + \mathbf{J}^v \mathbf{x}$$

- il prodotto per la matrice di massa viene realizzato esplicitamente, e tale matrice risulta calcolata e memorizzata in fase di set-up: ricordando che le funzioni di base sono lagrangiane, e che gli integrali numerici sono realizzati utilizzando come nodi di quadratura gli stessi definiti per i gradi di libertà, ciascun blocco della matrice di massa sarà

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_k^l)_{(i,j)} &= \sum_{m=1}^{J_k} \int_{\Omega_k^m} \Psi_j^l \cdot \Psi_i^l dV \simeq \sum_{m=1}^{J_k} \sum_{r=a_k^v}^{b_k^v} \Psi_j(\mathbf{p}_r) \Psi_i(\mathbf{p}_r) |\mathbf{F}_k^m| \hat{\mathbf{w}}_r = \\ &= \delta_{i,r} \delta_{j,r} |\mathbf{F}_k^m| \hat{\mathbf{w}}_r \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

ovvero, la massa sarà una *matrice diagonale* come conseguenza dell'integrazione numerica.

- il prodotto per la parte di salto verrà realizzato in modo classico, ovvero costruiremo le matrici di salto in fase di set-up e le memorizzeremo come matrici sparse nel formato Compressed Row Storage (CRS);
- il prodotto per la matrice di Stiffness, i cui elementi derivano da integrali volumetrici, verrà invece realizzato utilizzando la tecnica matrix-free; vedremo i dettagli nelle prossime sezioni.

Ricordiamo che tutti gli integrali della formulazione sono calcolati numericamente mediante formule di quadratura gaussiana con nodi *GLL*: in modo particolare verrà utilizzata, in ogni macro-dominio  $\Omega_k$ , una formula di quadratura di grado  $N_k^v$  per gli integrali relativi ai problemi in velocità, e di grado  $N_k^p$  per quelli relativi a problemi in pressione.

**Osservazione 3.0.10.** *A livello monodimensionale, utilizzando una formula di quadratura gaussiana di grado  $N$ , cioè con  $(N + 1)$  nodi *GLL*, è possibile integrare esattamente polinomi di grado  $\leq 2N - 1$ .*

## 3.1 Prodotti di Stiffness

Possiamo osservare che in questo metodo non è necessario assemblare la matrice associata ai sistemi: è infatti sufficiente essere in grado di calcolare l'azione della matrice su un vettore, il che permette di scrivere un metodo Matrix-Free per questo problema. Il metodo Matrix-Free è un algoritmo che permette di effettuare il prodotto tra una matrice  $\mathbf{M}$  e un vettore  $\mathbf{x}$  senza salvare i coefficienti della matrice in modo esplicito, andando a valutare direttamente il valore del vettore risultante dalla moltiplicazione. Il vantaggio è evidente soprattutto quando si risolvono problemi caratterizzati da un numero di gradi di libertà molto elevato, poiché si evita di occupare una quantità eccessiva di memoria. Inoltre questa tecnica si adatta in modo naturale alla politica di parallelizzazione utilizzata da questo codice, in quanto ogni processore va ad occuparsi della moltiplicazione dei blocchi di matrice relativi agli esaedri della sua partizione. Nel codice sviluppato in questo lavoro, si è adottata tale tecnica per effettuare i prodotti del tipo

$$\mathbf{S}^v \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3D^v}, \quad \mathbf{S}^p \mathbf{y} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D^p},$$

Le due matrici non sono infatti mai memorizzate: i prodotti vengono realizzati in base a ciò che esse rappresentano secondo la definizione data nel capitolo precedente.

Ad esempio consideriamo il vettore  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}^1 \quad \mathbf{V}^2 \quad \mathbf{V}^3]^T$ , sia  $i \leq D^v$  e supponiamo  $\mathbf{p}_i^v \in \Omega_k^m$  in modo che la funzione di base associata abbia supporto coincidente con  $\Omega_k^m$ , allora l' $i$ -esima componente del vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{S}^v \mathbf{V}$  sarà

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_i &= (\mathbf{S}^v \mathbf{V})_i = \\
 &= (\mathbf{S}_k^{1,1})_i \cdot \mathbf{V}^1 + (\mathbf{S}_k^{1,2})_i \cdot \mathbf{V}^2 + (\mathbf{S}_k^{1,3})_i \cdot \mathbf{V}^3 = \\
 &= \int_{\Omega_k^i} 2\nu \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) dV \\
 &\simeq \sum_{n=1}^{(N_k^v+1)^3} 2\nu \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx}(\mathbf{p}_n^v) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(\mathbf{p}_n^v) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(\mathbf{p}_n^v) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y}(\mathbf{p}_n^v) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz}(\mathbf{p}_n^v) \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}(\mathbf{p}_n^v) \right) |\mathbf{J}_k^m| \hat{\mathbf{w}}_n
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

In cui per comodità stiamo considerando una enumerazione locale dei nodi che si trovano su  $\Omega_k^m$ , e dove abbiamo indicato le componenti del tensore  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{yx} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{yy} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{zx} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{zy} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{zz} \end{bmatrix}$$

**Osservazione 3.1.1.** *Considerando in questo esempio  $i \leq D^v$ , per come abbiamo costruito le matrici, abbiamo la valutazione della riga di  $\mathbf{S}^v$  relativa all'integrazione "contro" la funzione test  $\Psi_i^1$ .*

A questo punto, sfruttando le proprietà delle funzioni di base, è possibile calcolare con un costo dell'ordine di  $\mathcal{O}(N_k^v)^4$ , i valori

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3 \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3 \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Per quanto riguarda invece le derivate delle funzioni di base, esse verranno costruite a partire dalle derivate delle funzioni di base  $\hat{\varphi} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definite nel capitolo precedente, in aggiunta alla valutazione dello Jacobiano della mappa  $\mathbf{F}_k^m$  in ogni punto  $\mathbf{p}_n^v$  dell'esaedro.

Indichiamo con  $\hat{\mathbf{x}}$  i punti nell'elemento di riferimento, e  $(\xi, \eta, \zeta)$  le coordinate; sia

inoltre

$$\mathbf{F}_k^m = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

da  $\Psi_i = \Psi(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$  avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \end{aligned}$$

o meglio, essendo  $\hat{\varphi}_i = \Psi_i \circ \mathbf{F}_k^m$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \end{aligned}$$

che in forma matriciale può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_k^m \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{J}_k^m$  è la matrice Jacobiana della trasformazione. Dalla precedente si deduce:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \left( \mathbf{J}_k^m \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$



Dove la forma estesa dell'inverso dello Jacobiano è:

$$\left(\mathbf{J}_k^m\right)^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}_k^m|} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

La valutazione delle derivate  $\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \zeta}$  sui nodi dell'intervallo di riferimento  $\hat{\Omega}$ , può essere effettuata sfruttando la definizione data nel capitolo precedente: indicando con  $\hat{x}_n$ ,  $n = 1, \dots, (N_k^v + 1)$  i nodi 1D, e ricordando la definizione delle funzioni di base monodimensionali  $\hat{\phi}_n$ , costruiamo la matrice di derivate ad esse associate  $\mathbf{D}_{l,n} = \hat{\phi}'_n(\hat{x}_l)$ . Siano  $\hat{\mathbf{x}}_n$ ,  $n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3$  i nodi 3D sull'intervallo di riferimento definito come nel capitolo 2, e supponiamo che sia  $\mathbf{p}_i^v = \mathbf{F}_k^m(\hat{x}_p, \hat{x}_q, \hat{x}_r)$ , ovvero  $\hat{\varphi}_i(\hat{x}_p, \hat{x}_q, \hat{x}_r) = 1$ , e vale 0 in tutti gli altri nodi. Per valutare ad esempio le derivate su  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}_a, \hat{x}_b, \hat{x}_c)$ , avremo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi}(\hat{\mathbf{y}}) &= \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\varphi}_i(\hat{x}_l, \hat{x}_b, \hat{x}_c) \mathbf{D}_{a,l} = \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\phi}_p(\hat{x}_l) \hat{\phi}_q(\hat{x}_b) \hat{\phi}_r(\hat{x}_c) \mathbf{D}_{a,l} = \delta_{b,q} \delta_{c,r} \mathbf{D}_{a,p} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta}(\hat{\mathbf{y}}) &= \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\varphi}_i(\hat{x}_a, \hat{x}_l, \hat{x}_c) \mathbf{D}_{b,l} = \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\phi}_p(\hat{x}_a) \hat{\phi}_q(\hat{x}_l) \hat{\phi}_r(\hat{x}_c) \mathbf{D}_{b,l} = \delta_{a,p} \delta_{c,r} \mathbf{D}_{b,q} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \zeta}(\hat{\mathbf{y}}) &= \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\varphi}_i(\hat{x}_a, \hat{x}_b, \hat{x}_l) \mathbf{D}_{c,l} = \sum_{l=1}^{(N_k^v+1)} \hat{\phi}_p(\hat{x}_a) \hat{\phi}_q(\hat{x}_b) \hat{\phi}_r(\hat{x}_l) \mathbf{D}_{c,l} = \delta_{a,p} \delta_{b,q} \mathbf{D}_{c,r} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Dalle uguaglianze (3.1.6) appena definite, e considerando la relazione (3.1.4), possiamo calcolare i valori

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3 \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial y}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3 \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}(\mathbf{p}_n^v), & \quad n = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

A questo punto, inserendo i valori delle (3.1.6) e delle (3.1.2) all'interno della sommatoria per il calcolo dell'integrale numerico (3.1.1) associato a  $\mathbf{r}_i$  ed effettuando

le semplificazioni legate alla presenza delle “delta di Kronecker” nelle derivate delle funzioni di base, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_i = \sum_{l=1}^{N_k^v+1} 2\nu & \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx}(x_l, x_q, x_r) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) (x_l, x_q, x_r) \mathbf{D}_{(l,p)} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_q \hat{\omega}_r \right. \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx}(x_p, x_l, x_r) \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) (x_p, x_l, x_r) \mathbf{D}_{(l,q)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_l \hat{\omega}_r \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xx}(x_p, x_q, x_l) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) (x_p, x_q, x_l) \mathbf{D}_{(l,r)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_q \hat{\omega}_l \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(x_l, x_q, x_r) \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) (x_l, x_q, x_r) \mathbf{D}_{(l,p)} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_q \hat{\omega}_r \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(x_p, x_l, x_r) \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) (x_p, x_l, x_r) \mathbf{D}_{(l,q)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_l \hat{\omega}_r \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xy}(x_p, x_q, x_l) \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) (x_p, x_q, x_l) \mathbf{D}_{(l,r)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_q \hat{\omega}_l \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz}(x_l, x_q, x_r) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) (x_l, x_q, x_r) \mathbf{D}_{(l,p)} \hat{\omega}_l \hat{\omega}_q \hat{\omega}_r \\
 & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz}(x_p, x_l, x_r) \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) (x_p, x_l, x_r) \mathbf{D}_{(l,q)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_l \hat{\omega}_r \\
 & \left. \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})_{xz}(x_p, x_q, x_l) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) (x_p, x_q, x_l) \mathbf{D}_{(l,r)} \hat{\omega}_p \hat{\omega}_q \hat{\omega}_l \right] \quad (3.1.8)
 \end{aligned}$$

Dove vale la pena notare che il costo computazionale per effettuare la precedente sommatoria è dell'ordine di  $\sim O(N_k^v)$ . Inoltre in modo analogo a quanto fatto in precedenza, si possono valutare i prodotti “contro” le altre funzioni di base associate al nodo  $\mathbf{p}_i^v$  (corrispondenti ai valori  $\mathbf{r}_{(N_k^v+1)+i}$  e  $\mathbf{r}_{2(N_k^v+1)+i}$ ).

Lo pseudo-codice utilizzato per effettuare i prodotti di Stiffness può così essere sintetizzato:

Per ogni  $\Omega_k^j$ :

- valuto  $\mathbf{D}$  per funzioni  $\hat{\phi}$  1D di grado  $N_k^v$  con un costo  $\sim (N_k^v)^2$ ;
- valuto le componenti di  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  con  $\sim (N_k^v)^4$  operazioni;
- per ogni  $I = 1, \dots, (N_k^v + 1)^3$  (cui corrisponde l'indice globale  $i$ ):

- effettuare la sommatoria (3.1.1) per calcolare  $\mathbf{r}_i$  con  $\sim N_k^v$  operazioni;
- si effettua la sommatoria anche per approssimare l'integrale associato alle test  $\Psi_i^2$  e  $\Psi_i^3$ , per valutare  $\mathbf{r}_{2i}$  e  $\mathbf{r}_{3i}$ ;

Il costo totale del prodotto di Stiffness “locale” è quindi dell'ordine di  $(N_k^v)^4$  operazioni; il vantaggio fondamentale del metodo “Matrix-Free” è il fatto di non occupare spazio in memoria per la memorizzazione della matrice di Stiffness, vantaggio evidente soprattutto per problemi di elevate dimensioni.

Infine, considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per i prodotti con la matrice  $\mathbf{S}^p$  del problema in pressione.

## 3.2 Matrici di Salto

In figura 3.1 è presentato un semplice esempio di come partizionare un dominio secondo il metodo che è stato utilizzato in questo lavoro. La macro-partizione di un dominio cubico  $\Omega$  è costituita dai blocchi non conformi  $\Omega_k$   $k = 1, \dots, K = 3$ , ovvero il giallo il verde e il bianco. Su ciascuno di essi è definita una partizione conforme  $\mathcal{T}_{h_k}$  fatta da esaedri  $\Omega_k^j$   $j = 1, \dots, J^k$ , e diametro  $h_k$ .

Le superfici contornate dalle linee rosse tratteggiate costituiscono le  $M$  superfici elementari  $\gamma_j$  già citate nel capitolo 2, sulle quali sono definiti i flussi relativi ai salti della soluzione (non sono indicate quelle tra il blocco giallo e quello verde). Come abbiamo visto precedentemente, l'intera interfaccia di discontinuità può essere scritta come

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{j=1}^M \gamma_j$$

dove  $\gamma_j = \partial\Omega_{k_1}^{m_1} \cap \partial\Omega_{k_2}^{m_2}$  per qualche coppia di indici  $(k_1, m_1), (k_2, m_2)$ . Per comprendere meglio ciò che viene fatto in fase di implementazione, riferiamoci ad un caso particolare di questo esempio: introduciamo una enumerazione tale per cui  $\Omega_1$  è il macro-dominio bianco, e  $\Omega_2$  quello giallo, inoltre all'interno di ciascuno di essi vogliamo che sia  $\Omega_1^1$  l'esaedro bianco, e  $\Omega_2^2$  quello giallo indicati dalle 2 frecce; nel seguito, ci riferiremo alla calcolo numerico dell'integrale effettuato sulla superficie  $\bar{\gamma} = \partial\Omega_1^1 \cap \partial\Omega_2^2$ .

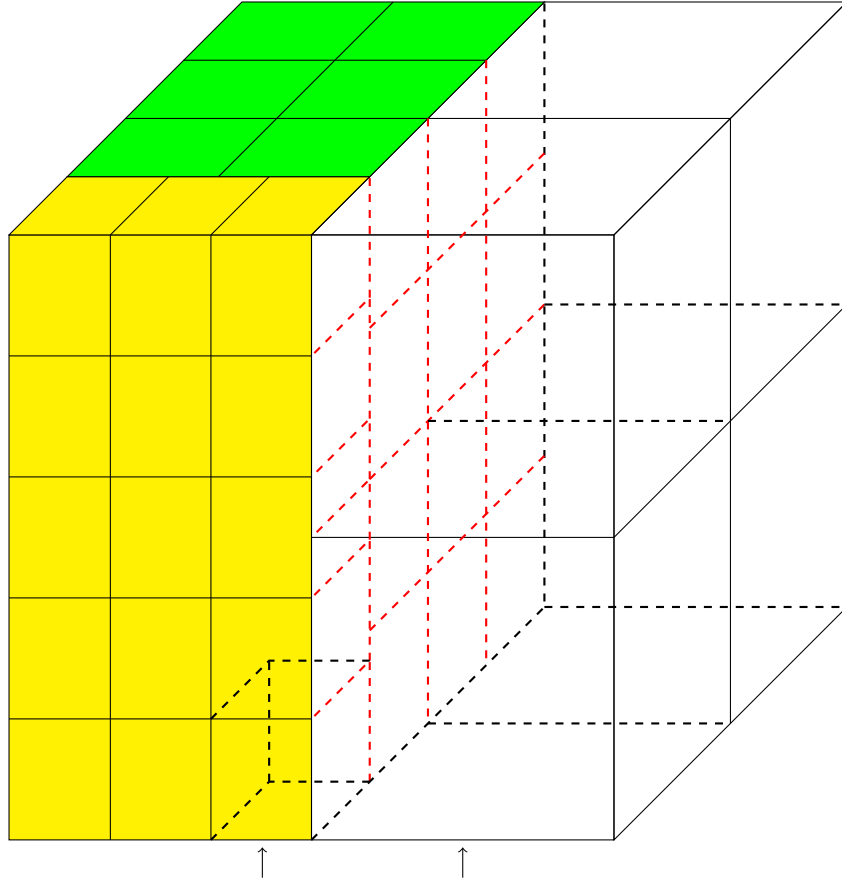


Figura 3.1: Esempio di partizione del dominio.

Consideriamo la parte relativa ai flussi di salto delle forme bilineari definite nel capitolo precedente:

$$\mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} 2\{\nu \varepsilon(\mathbf{u})\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \int_{\gamma} 2\{\nu \varepsilon(\mathbf{v})\} : \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \right) \quad (3.2.1)$$

$$\mathcal{J}^p(p, q) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} \{\nabla p\} \cdot \llbracket q \rrbracket - \int_{\gamma} \{\nabla q\} \cdot \llbracket p \rrbracket + \eta_{\gamma}^p \int_{\gamma} \llbracket p \rrbracket : \llbracket q \rrbracket \right) \quad (3.2.2)$$

$$\mathcal{J}\mathcal{B}(\mathbf{u}, q) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \int_{\gamma} \mathbf{n}_{\gamma} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \{q\} \quad (3.2.3)$$

Guardiamo prima a quella relativa al problema di diffusione-reazione, e consideriamo la sua parte elementare relativa agli integrali su una sola  $\gamma$ : indichiamo quest'ultima con

$$\mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_\gamma = - \int_\gamma 2\{\nu\varepsilon(\mathbf{u})\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \int_\gamma 2\{\nu\varepsilon(\mathbf{v})\} : \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \eta_\gamma \int_\gamma \llbracket \mathbf{u} \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \quad (3.2.4)$$

**Osservazione 3.2.1.** *Per semplificare la notazione, diciamo che in generale  $\gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ .*

Ricordando le definizioni di  $\llbracket \cdot \rrbracket$  e di  $\{\cdot\}$  possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_\gamma &= - \int_\gamma 2\frac{1}{2}(\nu^+\varepsilon(\mathbf{u}^+) + \nu^-\varepsilon(\mathbf{u}^-)) : (\mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad - \int_\gamma 2\frac{1}{2}(\nu^+\varepsilon(\mathbf{v}^+) + \nu^-\varepsilon(\mathbf{v}^-)) : (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad + \eta_\gamma \int_\gamma (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) : (\mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}^-) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Scegliamo quindi una generica funzione test e poniamo  $\mathbf{v} = \Psi_i^l$ . L'equazione precedente, ricordando che stiamo considerando fluidi con  $\nu$  costante, diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \Psi_i^l)|_\gamma &= - \int_\gamma 2\nu\frac{1}{2}(\varepsilon(\mathbf{u}^+) + \varepsilon(\mathbf{u}^-)) : (\Psi_i^{l+} \otimes \mathbf{n}^+ + \Psi_i^{l-} \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad - \int_\gamma 2\nu\frac{1}{2}(\varepsilon(\Psi_i^{l+}) + \varepsilon(\Psi_i^{l-})) : (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad + \eta_\gamma \int_\gamma (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) : (\Psi_i^{l+} \otimes \mathbf{n}^+ + \Psi_i^{l-} \otimes \mathbf{n}^-) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

A questo punto consideriamo  $\gamma = \bar{\gamma}$  e fissiamo, nel nostro caso esempio,  $\Omega^+ = \Omega_1^1$  e  $\Omega^- = \Omega_2^2$ : a livello pratico, il calcolo di  $\mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_\gamma$  verrà effettuato rispetto a due punti di vista: uno si ha quando guardiamo  $\gamma$  da  $\Omega^+$  (ovvero consideriamo funzioni test aventi supporto in  $\Omega^+$ ), e l'altro quando si guarda a  $\gamma$  da  $\Omega^-$ . Nel primo caso abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \Psi_i^l)|_\gamma &= - \int_\gamma 2\nu\frac{1}{2}(\varepsilon(\mathbf{u}^+) + \varepsilon(\mathbf{u}^-)) : \Psi_i^{l+} \otimes \mathbf{n}^+ \\ &\quad - \int_\gamma 2\nu\frac{1}{2}\varepsilon(\Psi_i^{l+}) : (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad + \eta_\gamma \int_\gamma (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) : \Psi_i^{l+} \otimes \mathbf{n}^+ \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

infatti, questo punto di vista consiste nel considerare le funzioni di base  $\Psi_i^l$  con  $i = a^{v^+}, \dots, b^{v^+}$ , per le quali si ha  $\Psi_i^{l-} = \mathbf{0}$  e  $\varepsilon(\Psi_i^{l-}) = \mathbf{0}$ . Per motivi analoghi, guardando  $\gamma$  da  $\Omega^-$ , e quindi per  $i = a^{v^-}, \dots, b^{v^-}$ , si considera solo l'altra parte dell'integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^v(\mathbf{u}, \Psi_i^l)|_\gamma &= - \int_\gamma 2\nu \frac{1}{2} (\varepsilon(\mathbf{u}^+) + \varepsilon(\mathbf{u}^-)) : \Psi_i^{l-} \otimes \mathbf{n}^- \\ &\quad - \int_\gamma 2\nu \frac{1}{2} \varepsilon(\Psi_i^{l-}) : (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) \\ &\quad + \eta_\gamma \int_\gamma (\mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \otimes \mathbf{n}^-) : \Psi_i^{l-} \otimes \mathbf{n}^- \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Come caso esempio, scegliamo di guardare  $\gamma$  da  $\Omega^+$ , e consideriamo soltanto il primo dei tre integrali che compaiono nella formula (3.2.7) e fissiamo ad esempio  $l = 1$ ; gli altri due termini potranno essere calcolati in maniera del tutto analoga:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \nu (\varepsilon(\mathbf{u}^+) + \varepsilon(\mathbf{u}^-)) : \Psi_i^{1+} \otimes \mathbf{n}^+ &= \\ &= \int_\gamma \nu \sum_{m=1}^3 \left( \sum_{j=a^{v^+}}^{b^{v^+}} U_j^m \varepsilon(\Psi_j^{m+}) + \sum_{j=a^{v^-}}^{b^{v^-}} U_j^m \varepsilon(\Psi_j^{m-}) \right) : \Psi_i^{1+} \otimes \mathbf{n}^+ = \\ &= \sum_{j=a^{v^+}}^{b^{v^+}} \left[ U_j^1 \left( \nu n_x^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^+}{\partial x} \Psi_i^+ + \frac{1}{2} \nu n_y^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^+}{\partial y} \Psi_i^+ + \frac{1}{2} \nu n_z^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^+}{\partial z} \Psi_i^+ \right) \right. \\ &\quad \left. + U_j^2 \frac{1}{2} \nu n_y^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^+}{\partial x} \Psi_i^+ + U_j^3 \frac{1}{2} \nu n_z^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^+}{\partial x} \Psi_i^+ \right] + \\ &+ \sum_{j=a^{v^-}}^{b^{v^-}} \left[ U_j^1 \left( \nu n_x^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial x} \Psi_i^+ + \frac{1}{2} \nu n_y^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial y} \Psi_i^+ + \frac{1}{2} \nu n_z^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial z} \Psi_i^+ \right) \right. \\ &\quad \left. + U_j^2 \frac{1}{2} \nu n_y^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial x} \Psi_i^+ + U_j^3 \frac{1}{2} \nu n_z^+ \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^-}{\partial x} \Psi_i^+ \right] \end{aligned}$$

A questo punto, cerchiamo di chiarire come calcolare gli integrali

$$\int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^\pm}{\partial x} \Psi_i^\pm \quad \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^\pm}{\partial y} \Psi_i^\pm \quad \int_\gamma \frac{\partial \Psi_j^\pm}{\partial z} \Psi_i^\pm$$

Concentriamoci sul primo dei tre, osservando che anche in questo caso, gli altri termini possono essere determinati in maniera del tutto analoga. Ricordando quindi

la (3.1.4) introdotta precedentemente per il calcolo delle derivate delle funzioni di base sullo spazio fisico, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial \Psi_j^{\pm}}{\partial x} \Psi_i^+ = & \int_{\hat{\gamma}} \left( \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \eta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \zeta} - \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \zeta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_j^{\pm}}{\partial \xi} \hat{\varphi}_i^+ + \int_{\hat{\gamma}} \left( \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \zeta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \xi} - \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \xi} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_j^{\pm}}{\partial \eta} \hat{\varphi}_i^+ \\ & + \int_{\hat{\gamma}} \left( \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \xi} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \eta} - \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \eta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_j^{\pm}}{\partial \zeta} \hat{\varphi}_i^+ \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

dove, nell'integrale di destra, gli apici  $\pm$  stanno ad indicare la trasformazione  $\mathbf{F}^{\pm} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega^{\pm}$ , mentre  $\hat{\gamma}$  è tale da verificare  $\gamma = \mathbf{F}^+(\hat{\gamma})$  (poichè stiamo guardando  $\gamma$  da  $\Omega^+$ ). Tale integrale viene quindi approssimato utilizzando una formula di quadratura con nodi di *Gauss-Legendre* (GL) di grado  $N^*$ : scegliendo  $N^*$  in modo da avere integrazione numerica esatta, si definiscono i nodi di quadratura *interni* a  $\gamma$ ,  $\{\bar{p}_r\}_{r=1}^{N^*}$ , e i loro corrispondenti su  $\hat{\gamma}$ ,  $\{\bar{x}_r^{\pm}\}$ , utilizzando  $\mathbf{F}^{\pm}$ . Il primo termine del membro di destra di (3.2.9) sarà quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} \left( \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \eta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \zeta} - \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \zeta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_j^{\pm}}{\partial \xi} \hat{\varphi}_i^+ & \simeq \\ & \simeq \frac{|\hat{\gamma}|}{2} \sum_{r=1}^{(N^*)^2} \left( \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \eta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \zeta} - \frac{\partial y^{\pm}}{\partial \zeta} \frac{\partial z^{\pm}}{\partial \eta} \right) (\bar{\mathbf{x}}_r^{\pm}) \frac{\partial \hat{\varphi}_j^{\pm}}{\partial \xi} (\bar{\mathbf{x}}_r^{\pm}) \hat{\varphi}_i^+ (\bar{\mathbf{x}}_r^+) \bar{\omega}_r^+ \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

dove  $|\hat{\gamma}|$  rappresenta l'area di  $\hat{\gamma}$  e dove le derivate sul dominio di riferimento possono essere calcolate dalla definizione

$$\hat{\varphi}_I(x, y, z) = \hat{\varphi}_i(x) \hat{\varphi}_j(y) \hat{\varphi}_k(z) \quad \text{con } I = i + (N_k^v + 1)j + (N_k^v + 1)^2 k$$

In modo del tutto analogo possono essere calcolati tutti gli altri termini che non sono stati descritti.

**Osservazione 3.2.2.** *I nodi  $\bar{\mathbf{x}}_r^{\pm}$  devono essere associati agli stessi nodi  $\bar{\mathbf{p}}_r$ , ovvero  $\bar{\mathbf{p}}_r = \mathbf{F}^+(\bar{\mathbf{x}}_r^+) = \mathbf{F}^-(\bar{\mathbf{x}}_r^-)$ : per tale motivo in *SPEED*, e quindi anche nel nostro codice, vengono prima definiti i nodi su  $\gamma$ , poi attraverso l'algoritmo di Newton-Raphson [6] si definiscono i nodi su  $\hat{\gamma}^{\pm}$ .*

**Osservazione 3.2.3.** *I nodi  $\bar{\mathbf{p}}_r^{\pm}$  sono diversi dai  $\mathbf{p}_i$  definiti nel capitolo precedente per i gradi di libertà, di conseguenza il fatto che le funzioni di base siano lagrangiane*

su questi ultimi, non permette di avere semplificazioni nella sommatoria in (3.2.10), caratterizzata in generale da termini che non si annullano.

Per quanto riguarda le matrici  $\mathbf{J}^p$  e  $\mathbf{JB}$ , possono essere fatti dei calcoli del tutto analoghi a quelli visti in questa sezione.

### 3.3 Condizioni al Bordo

In questa sezione illustriamo come imporre la condizione al bordo di Dirichlet nel caso di dato al bordo non omogeneo: consideriamo il problema di diffusione-reazione in velocità, e indichiamo con  $\underline{\mathbf{A}} = \left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M}^v + \mathbf{S}^v + \mathbf{J}^v \right)$  la matrice del sistema, e sia  $\mathbf{F}$  il termine forzante dell'equazione algebrica (2.3.25). Sia  $\mathbf{g} = [g_x, g_y, g_z]^T$  il dato al bordo, tale che  $\mathbf{g}(t) \in [H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)]^3 \quad t \in (0, T]$ . Vogliamo allora cercare  $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{3D}$ , associato alla funzione  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in V^{DG}$  secondo l'espansione (2.3.3), tale che

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} &= \mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\Gamma_D} &= \mathbf{g}^{n+1} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Da un punto di vista matriciale, per imporre la condizione di Dirichlet, modifichiamo  $\underline{\mathbf{A}}$  in  $\underline{\mathbf{A}}^*$  e  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{F}^*$  utilizzando il seguente algoritmo: siano  $\{\mathbf{p}_{i_1}^v, \dots, \mathbf{p}_{i_G}^v\}$  i nodi che si trovano su  $\Gamma_D$  (ovvero i “nodi di Dirichlet”):

1. poniamo  $\underline{\mathbf{A}}^* = \underline{\mathbf{A}}$  e  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$ ;
2. per  $h = 1, \dots, G$  azzeriamo la  $i_h$  -esima, la  $2i_h$  -esima e la  $3i_h$  -esima riga della matrice  $\underline{\mathbf{A}}^*$ , e azzeriamo anche la  $i_h$  -esima, la  $2i_h$  -esima e la  $3i_h$  -esima colonna;
3. poniamo  $\underline{\mathbf{A}}^*_{(i_h, i_h)} = \underline{\mathbf{A}}^*_{(2i_h, 2i_h)} = \underline{\mathbf{A}}^*_{(3i_h, 3i_h)} = 1, \quad \forall h = 1, \dots, G$ ;
4. poniamo  $\mathbf{F}^*_{i_h} = g_x(\mathbf{p}_{i_h}^v)$ ,  $\mathbf{F}^*_{2i_h} = g_y(\mathbf{p}_{i_h}^v)$ ,  $\mathbf{F}^*_{3i_h} = g_z(\mathbf{p}_{i_h}^v)$ ,  $\forall h = 1, \dots, G$ ;
5. per  $m$  tale che  $\mathbf{p}_m^v$  non è un nodo di Dirichlet, poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m^* &= \mathbf{F}_m - \sum_{h=1}^G \underline{\mathbf{A}}_{(m, i_h)} g_x(\mathbf{p}_{i_h}^v) \\ \mathbf{F}_{2m}^* &= \mathbf{F}_{2m} - \sum_{h=1}^G \underline{\mathbf{A}}_{(2m, i_h)} g_y(\mathbf{p}_{i_h}^v) \\ \mathbf{F}_{3m}^* &= \mathbf{F}_{3m} - \sum_{h=1}^G \underline{\mathbf{A}}_{(3m, i_h)} g_z(\mathbf{p}_{i_h}^v) \end{aligned}$$



Ovvero diminuiamo i gradi di libertà del sistema, sostituendo le equazioni relative ai nodi di Dirichlet, con l'imposizione del valore nodale della soluzione. Un procedimento di questo tipo, è del tutto equivalente alla tecnica del rilevamento del dato al bordo, allo stesso modo di come abbiamo visto per la formulazione variazionale nei capitoli 1 e 2.

Nel nostro codice però, la matrice di stiffness non è memorizzata, mentre quella di salto lo è solo a livello locale; l'algoritmo precedente viene realizzato quindi nel seguente modo: si costruisce una funzione  $\mathbf{R} \in V^{DG} \cap [H^1(\Omega)]^3$  di rilevamento del dato al bordo, come

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^D R_j^l \Psi_j^l$$

con  $R_{i_h}^l = g_l(\mathbf{p}_{i_h}^v) \quad \forall h = 1, \dots, G$ , e  $R_j^l = 0$  per  $j \notin \{i_1, \dots, i_G\}$ . Grazie a questa funzione la modifica (5) sul termine forzante può essere realizzata con

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{R}$$

le modifiche sulla matrice vengono invece realizzate valutando l'effetto di  $\underline{\mathbf{A}}^*$  su un generico vettore  $\mathbf{U}$ , ovvero valutando qualitativamente il vettore  $\mathbf{q} = (\underline{\mathbf{A}}^*)\mathbf{U}$ :

- osserviamo che, se  $j \notin \{i_1, \dots, i_G\}$ , effettuare il prodotto  $\mathbf{q}_j = (\underline{\mathbf{A}}^*)_{(j,:)} \cdot \mathbf{U}$  è del tutto equivalente ad effettuare il prodotto  $\underline{\mathbf{A}}_{(j,:)} \cdot \mathbf{U}^*$ , dove

$$\mathbf{U}_j^* = \mathbf{U}_j, \quad \mathbf{U}_{2j}^* = \mathbf{U}_{2j}, \quad \mathbf{U}_{3j}^* = \mathbf{U}_{3j} \quad \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_G\}$$

mentre

$$\mathbf{U}_{i_h}^* = \mathbf{U}_{2i_h}^* = \mathbf{U}_{3i_h}^* = 0 \quad \forall h = 1, \dots, G$$

ogni volta che dovremo effettuare un prodotto matrice vettore  $(\underline{\mathbf{A}}^*)\mathbf{U}$  faremo

$$(\underline{\mathbf{A}}^*)\mathbf{U} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{U}^* = \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M}^v \mathbf{U}^* + \mathbf{S}^v \mathbf{U}^* + \mathbf{J}^v \mathbf{U}^*$$

dove il prodotto  $\mathbf{S}^v \mathbf{U}^*$  sarà Matrix-Free utilizzando la funzione  $\mathbf{u}^*$  conseguenza dell'espansione (2.3.3).

- dopo aver effettuato il prodotto  $\mathbf{q} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*$  secondo la modalità precedentemente descritta, poniamo

$$\mathbf{q}_{i_h} = \mathbf{U}_{i_h} \quad \mathbf{q}_{2i_h} = \mathbf{U}_{2i_h} \quad \mathbf{q}_{3i_h} = \mathbf{U}_{3i_h} \quad \forall h = 1, \dots, G$$

# Capitolo 4

## Test Numerici

In questo capitolo, mostreremo alcuni risultati numerici ottenuti attraverso il codice sviluppato in questo lavoro. Nella prima parte del capitolo, verranno presentati i risultati riguardanti i test di validazione del codice, ottenuti risolvendo numericamente alcuni problemi semplici caratterizzati da soluzione analitica nota: mostreremo in particolare la validità dei principali risultati di convergenza previsti dalla teoria, dal punto di vista di un raffinamento del passo di griglia, del grado polinomiale di approssimazione, e del passo temporale. Nella sezione finale, mostreremo i risultati numerici per la simulazione del flusso all'interno di un canale, intorno a un cilindro a sezione quadrata.

### 4.1 Problemi di diffusione-reazione

Come abbiamo visto in precedenza, il metodo di proiezione utilizzato in questo lavoro risolve, ad ogni passo temporale, un problema di diffusione-reazione in 3 dimensioni, e un problema di Poisson scalare: prima di considerare il metodo nel suo insieme, è allora utile verificare le proprietà di convergenza del metodo DG-SEM per tali problemi ellittici. Consideriamo il problema di diffusione-reazione, con  $\Omega = (-1, 1)^3$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.1)$$

scegliamo i termini forzanti in modo tale che la soluzione esatta sia la seguente funzione analitica:

$$\mathbf{u}^{ex}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u_x^{ex}(x, y, z) \\ u_y^{ex}(x, y, z) \\ u_z^{ex}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \\ \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \\ \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{x} = (x, y, z) \in \bar{\Omega}$$

Introduciamo una generica partizione  $\mathcal{T} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_K\}$  di  $\Omega$  come quella descritta nel capitolo 2, e ricordiamo le definizioni di  $\mathbf{N} = \{N_1, \dots, N_K\}$  e  $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_K\}$  che rappresentano rispettivamente l'insieme dei gradi polinomiali e delle dimensioni che caratterizzano la discretizzazione su ciascun elemento della macro-partizione  $\mathcal{T}$ . La formulazione DG-SEM del problema (4.1.1), si presenta nella seguente forma: sia  $\mathbf{R}_\delta \in V^{DG}$  il rilevamento del dato al bordo  $\mathbf{g}$ , e

$$\begin{aligned} a^{DG}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{v} \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma_{int}} \left( - \int_{\gamma} \{\nabla \mathbf{u}\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\sigma \int_{\gamma} \{\nabla \mathbf{v}\} : \llbracket \mathbf{u} \rrbracket d\sigma + \eta_{\gamma} \int_{\gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\sigma \right) \\ \mathcal{L}(\mathbf{v}_\delta) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_\delta \end{aligned}$$

cerchiamo allora  $\tilde{\mathbf{u}}_\delta \in V_0^{DG} = \{\mathbf{v}_\delta \in V^{DG} : \mathbf{v}_\delta|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}$  tale che

$$a^{DG}(\tilde{\mathbf{u}}_\delta, \mathbf{v}_\delta) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_\delta) - a^{DG}(\mathbf{R}, \mathbf{v}_\delta) \quad \forall \mathbf{v}_\delta \in V_0^{DG} \quad (4.1.2)$$

e poniamo quindi  $\mathbf{u}_\delta = \tilde{\mathbf{u}}_\delta + \mathbf{R}$ .

In generale vale quanto segue: assumendo che  $N_k \geq 1 \forall k$ , e che la soluzione esatta del problema (4.1.1) sia  $\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in [H^{s_k}(\Omega_k)]^3$  con  $s_k \geq 2 \forall k = 1, \dots, K$ , e indicando con  $\mathbf{u}_\delta \in V^{DG}$  la soluzione del problema (4.1.2), valgono le seguenti stime a priori dell'errore:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{DG} \leq C_1 \left( \sum_{k=1}^K \frac{h_k^{2m_k-2}}{N_k^{2s_k-3}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{s_k}(\Omega_k)]^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.3)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C_0 \left( \sum_{k=1}^K \frac{h_k^{2m_k}}{N_k^{2s_k-2}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{s_k}(\Omega_k)]^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.4)$$

con  $m_k = \min(N_k + 1, s_k)$ , e  $C_0, C_1 > 0$ , e dove abbiamo utilizzato la norma dell'energia:

$$\|\mathbf{v}_\delta\|_{DG} = \left( \|\mathbf{v}_\delta\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 + |\mathbf{v}_\delta|_J^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

con

$$|\mathbf{v}_\delta|_J = \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \partial\Omega} \frac{1}{h_\gamma} \|\mathbf{v}_\delta\|_{[L^2(\gamma)]^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.5)$$

Per dettagli e dimostrazioni, rimandiamo a [48], [40], [12].

### 4.1.1 Convergenza in $h$

In questa sezione mostriamo che il metodo rispetta l'ordine di convergenza rispetto ad un raffinamento del passo di griglia. Per verificare le stime, consideriamo una macro-partizione di  $\Omega$  in due elementi  $\Omega_1, \Omega_2$ , all'interno dei quali definiamo due partizioni conformi  $\mathcal{T}_{h_1} = \{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^{J_1}\}$ ,  $\mathcal{T}_{h_2} = \{\Omega_2^1, \dots, \Omega_2^{J_2}\}$  di esaedrici. Per semplicità considereremo mesh fatte dallo stesso numero di esaedri  $J = J_1 = J_2$ , ed in cui approssimiamo con lo stesso grado polinomiale  $N = N_1 = N_2$ . Inoltre assumiamo che ogni esaedro  $\Omega_k^j$  abbia diametro pari a  $h$ . Con tali assunzioni, e considerando che la soluzione esatta è analitica, le stime (4.1.3) e (4.1.4) si riducono a:

$$\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{*,DG} \leq C_1(N, \mathbf{u}^{ex}) h^N, \quad \|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C_1(N, \mathbf{u}^{ex}) h^{N+1}$$

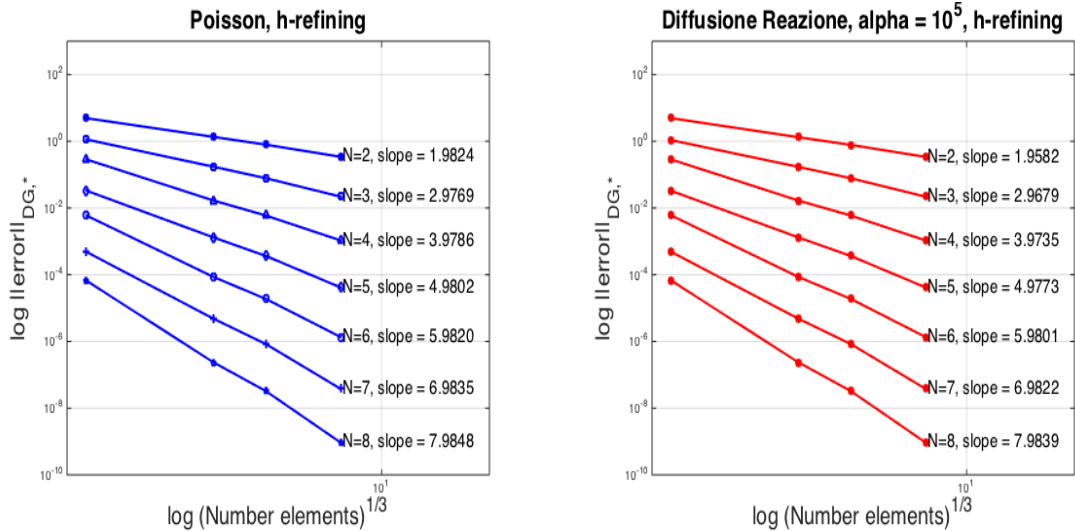


Figura 4.1: Poisson  $\alpha = 0$  (sinistra) e Diffusione-Reazione  $\alpha = 10^5$  (destra)

Fissando il grado polinomiale  $N$ , abbiamo verificato le stime per il problema di Poisson ( $\alpha = 0$ ) e per un problema di diffusione reazione con reazione dominante ( $\alpha = 10^5$ ). La figura 4.1 mostra l'andamento di  $\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{DG}$ , rispetto ad un raffinamento del passo di griglia  $h$ , realizzato considerando mesh fatte da 8, 64, 150, e 512 esaedri. Dai grafici si osserva che il metodo implementato verifica con buona approssimazione la stima degli ordini di convergenza previsti dalla teoria, sia nel caso del problema di Poisson, sia per il problema a reazione dominante.

**Osservazione 4.1.1** (Costante di penalità). *In fase di risoluzione, abbiamo fissato la costante  $\eta_\gamma = 10 \frac{N^2}{h_\gamma}$ , per entrambi i problemi risolti: la scelta di  $\eta$  per garantire la coercività del problema, non dipende infatti dalla costante  $\alpha$ . Questo è importante nel nostro ambito, poiché, essendo nel problema in velocità  $\alpha = \frac{3}{2\Delta t}$ , la reazione diventa dominante per  $\Delta t \rightarrow 0$ , ma le costanti  $\eta_\gamma$  sono scelte sempre allo stesso modo.*

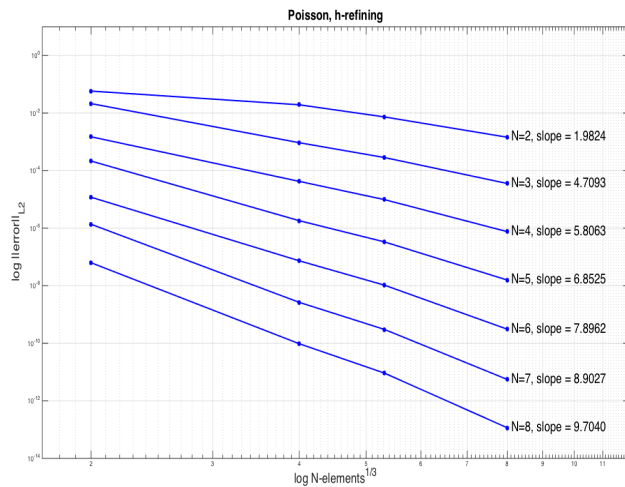


Figura 4.2: Poisson  $\alpha = 0$ : andamento dell'errore in norma  $\|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^3}$

La figura la figura 4.2 mostra invece l'andamento dell'errore misurato in norma  $\|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^3}$  per il problema di Poisson: fatta eccezione per il caso meno accurato con  $N = 2$ , l'ordine di convergenza previsto dalla stima teorica (4.1.4) risulta verificato.

### 4.1.2 Convergenza in $N$

Per quel che riguarda l'andamento dell'errore rispetto ad un raffinamento del grado polinomiale di approssimazione, il caso test considerato è caratterizzato da una soluzione esatta analitica  $\mathbf{u}^{ex} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ : per questo motivo, le stime (4.1.3) e (4.1.4) si riducono a

$$\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{*,DG} \leq C_0(h, \mathbf{u}^{ex}) \exp(-\gamma_0 N)$$

$$\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C_1(h, \mathbf{u}^{ex}) \exp(-\gamma_1 N)$$

Con  $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ . Fissando il passo di griglia  $h$ , e facendo variare  $N \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , si ritrova la convergenza esponenziale riportata in figura 4.3 in scala semi-logaritmica.

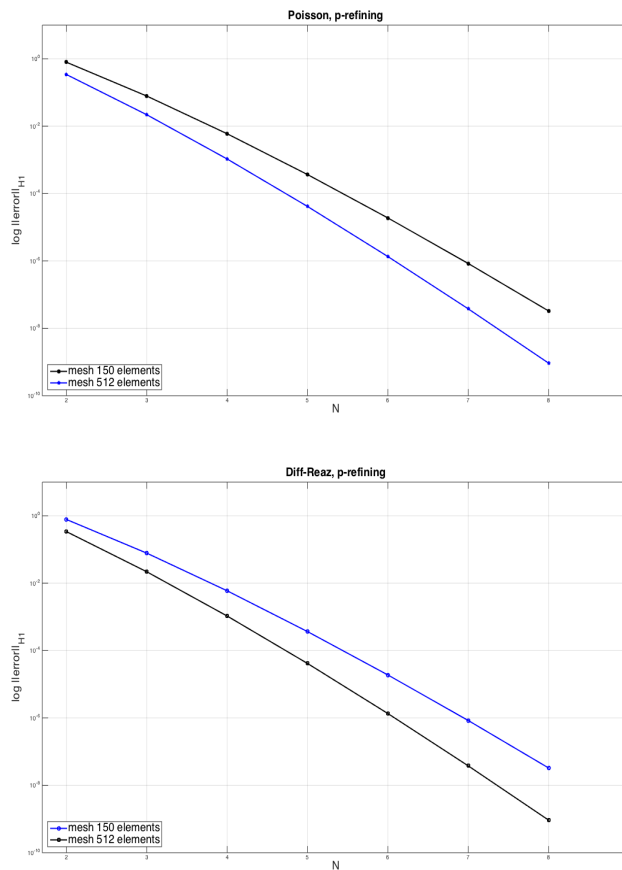


Figura 4.3: Poisson  $\alpha = 0$  (sopra) e Diffusione-Reazione  $\alpha = 10^5$  (sotto)

## 4.2 Problema di Navier-Stokes

Al fine di effettuare test di validazione per il solutore di Navier Stokes proposto, analogamente a quanto fatto per il problema di diffusione-reazione nella sezione precedente, consideriamo un problema con soluzione analitica nota. Confrontiamo tale soluzione con quella numerica ottenuta con il metodo Pressure-Correction rotazionale con risoluzione DG-SEM, valutando l'errore commesso e misurato in varie norme, rispetto ai parametri di discretizzazione  $\Delta t, h, N$ .

Per i nostri test, consideriamo quindi la seguente soluzione analitica, proposta da C. R. Ethier, D. A. Steinman in [10]: siano date  $\mathbf{u}^{ex} = [u_x^{ex} \quad u_y^{ex} \quad u_z^{ex}]^T : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $p^{ex} : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  della seguente forma

$$\begin{aligned} u_x^{ex}(\mathbf{x}, t) &= -a(e^{ax} \sin(ay + dz) + e^{az} \cos(ax + dy))e^{-\nu t d^2} \\ u_y^{ex}(\mathbf{x}, t) &= -a(e^{ay} \sin(az + dx) + e^{ax} \cos(ay + dz))e^{-\nu t d^2} \\ u_z^{ex}(\mathbf{x}, t) &= -a(e^{az} \sin(ax + dy) + e^{ay} \cos(az + dx))e^{-\nu t d^2} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} p^{ex}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2}a^2(e^{2ax} + e^{2ay} + e^{2az} \\ &\quad + 2 \sin(ax + dy) \cos(az + dx)e^{a(y+z)} \\ &\quad + 2 \sin(ay + dz) \cos(ax + dy)e^{a(z+x)} \\ &\quad + 2 \sin(az + dx) \cos(ay + dz)e^{a(x+y)})e^{-2\nu t d^2} + \bar{C}e^{-2\nu t d^2} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

con  $a = \frac{\pi}{4}$ , e  $d = \frac{\pi}{2}$ , mentre il dominio spaziale di riferimento è il cubo  $\Omega = (-1, 1)^3$  e dove la costante  $\bar{C}$  è scelta in modo tale che la pressione risulti essere a media nulla. Consideriamo allora il problema di Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{per } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{per } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & \text{per } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (4.2.3)$$

dove poniamo  $\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{u}^{ex}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{ex} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{ex} + \nabla p^{ex} - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{ex})) = (\nu - 1) \mathbf{u}^{ex}$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^{ex}(t = 0)$  e  $\mathbf{g} = \mathbf{u}^{ex}|_{\partial\Omega}$ , in modo tale che (4.2.1) - (4.2.2) sia la soluzione esatta di (4.2.3).

### 4.2.1 Convergenza rispetto a $\Delta t$

In questa sezione si analizza la convergenza rispetto al passo temporale sia per quel che riguarda una risoluzione mediante CG-SEM, sia per il DG-SEM, con l'obiettivo di verificare le stime del Teorema 1.2.4.

#### 4.2.1.1 Spazi non compatibili CG-SEM

In questa sezione, cerchiamo di giustificare, almeno numericamente, la scelta di adottare spazi "inf-sup compatibili". Consideriamo il problema (4.2.3) con soluzione analitica (4.2.1)-(4.2.2), e introduciamo su  $\Omega$  una partizione *conforme*  $\mathcal{T}$  fatta da 64 esaedri, caratterizzati tutti dallo stesso diametro  $h$ . Suddividiamo quindi l'intervallo temporale  $(0, T]$  in  $N_{time}$  passi temporali di ampiezza  $\Delta t$ , e indichiamo quindi con  $\{(\mathbf{u}_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_{time}}$  la soluzione numerica ottenuta con il metodo Pressure-Correction rotazionale con discretizzazione spaziale CG-SEM. Effettuiamo quindi simulazioni utilizzando spazi polinomiali caratterizzati dallo stesso grado di approssimazione  $N = N^v = N^p$  per velocità e pressione, con  $N \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

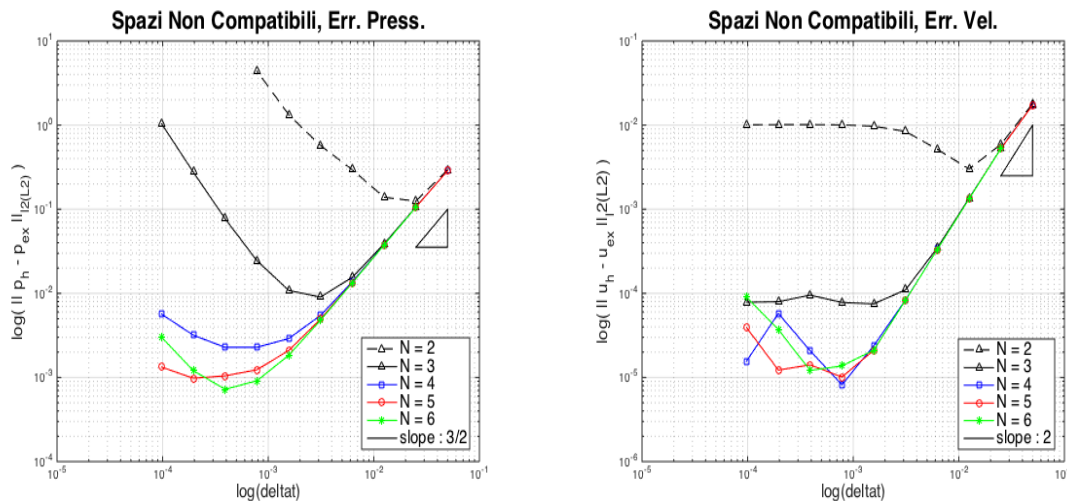


Figura 4.4: Errore  $L^2$  per pressione (sinistra) e velocità (destra) per coppie di spazi non compatibili

Per ogni  $N$  fissato, è stato quindi studiato l'andamento dell'errore relativo di velocità e pressione rispetto a un raffinamento del passo temporale: i grafici 4.4



mostrano rispettivamente l'andamento in scala logaritmica di  $\frac{\sum_n \|p_{ex}(t^n) - p_h^n\|_{L^2}}{\|p_{ex}\|_{L^2}} - \Delta t$ , e di  $\frac{\sum_n \|\mathbf{u}_{ex}(t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}_{ex}\|_{L^2}} - \Delta t$ , per  $\Delta t = \frac{0.05}{2^i}$ , con  $i = 2, 3, \dots, 9$ .

I due triangolini mostrano gli ordini di riferimento, rispettivamente  $\frac{3}{2}$  per l'errore della pressione e 2 per quello in velocità, previsti dal teorema 1.2.4. Per una fissata discretizzazione spaziale  $(h, N)$ , l'errore in norma  $L^2$ , in accordo con il Teorema 1.2.4, ha un andamento del tipo  $err(\mathbf{u})_{L^2} \leq C\Delta t^2$   $err(p)_{L^2} \leq C\Delta t^{\frac{3}{2}}$  con  $C = C(\mathbf{u}^{ex}, p^{ex}, T) > 0$ , che risulta essere verificato fintantoché il passo temporale è relativamente grande; quando  $\Delta t$  è “piccolo”, l'errore dovuto alla discretizzazione spaziale risulta dominante e ci aspetteremmo di osservare, in questo caso, una zona di *plateau*: i due grafici mostrano invece un comportamento irregolare quando  $\Delta t$  diventa molto piccolo, in cui si può osservare che, in media, l'errore tende ad aumentare, soprattutto per il grafico della pressione. Per avere una visione del problema più dettagliata, osserviamo i valori della norma  $H^1$  dell'errore commesso dalla pressione,  $\left(\sum_n \|p_{ex}(t^n) - p_h^n\|_{[H^1(\Omega)]^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ , che sono riportati nella seguente tabella:

$\Delta t$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
0.05	0.309	0.303	0.302	0.302
$(0.05)2^{-1}$	0.1875	0.139	0.138	0.138
$(0.05)2^{-2}$	0.378	6.64E-2	6.47E-2	6.4E-2
$(0.05)2^{-3}$	1.153	3.75E-2	3.39E-2	3.24E-2
$(0.05)2^{-4}$	3.3039	3.61E-2	2.72E-2	2.14E-2
$(0.05)2^{-5}$	10.15	0.105	3.69E-2	2.42E-2
$(0.05)2^{-6}$	44.549	0.436	5.9E-2	3.56E-2
$(0.05)2^{-7}$	231.35	2.077	0.109	5.24E-2
$(0.05)2^{-8}$	1260.17	10.674	0.160	7.43E-2
$(0.05)2^{-9}$	6996.74	57.21	0.412	0.1078

La norma  $H^1$  per l'errore in pressione aumenta vistosamente quando  $\Delta t$  diventa molto piccolo, e per simulazioni a basso ordine: questo risultato suggerisce la comparsa, in tali casi, di modi spuri di pressione; a conferma di questa supposizione, osserviamo ad esempio la figura 4.5, in cui sono rappresentati i grafici della pressione nella sezione  $y = 0$  del dominio, in 3 istanti diversi della simulazione effettuata con

grado  $N = 3$  e  $\Delta t = (0.05)2^{-9}$ : dalla forma esatta della pressione (4.2.2) ci si aspetta che col passare del tempo essa tenda al valore nullo, mentre i grafici mostrano la comparsa di oscillazioni sempre più evidenti, che si manifestano in prossimità del bordo del dominio.

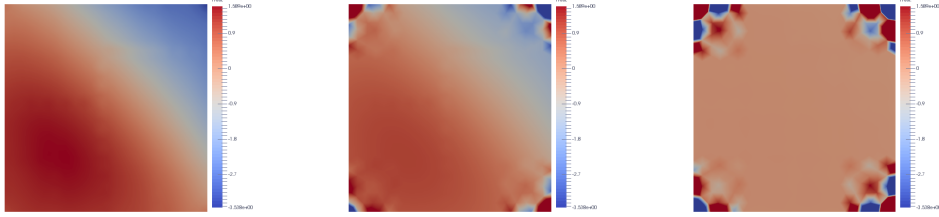


Figura 4.5: Grafico pressione  $N = 3$  per  $t = 0s, t = 0.2s, t = 0.5$

Il comportamento che si osserva per il nostro metodo è analogo a quello presentato in [15] per un metodo di proiezione *non-incrementale*, già analizzato in 2.1.3, dove è mostrato come tale metodo risolto con spazi discreti non compatibili, viene riletto come un problema accoppiato stabilizzato, in modo tale che, scegliendo  $\Delta t \geq \Delta t_s = \mathcal{O}(N^{-3})$ , la soluzione non presenta modi spuri di pressione. Come inoltre è stato mostrato da Guermond in [29], [28], i modi spuri di pressione risultano sempre presenti nei metodi di proiezione, se gli spazi non sono compatibili: per i metodi *non-incrementali* risultano visibili ad occhio nudo solo quando  $\Delta t$  risulta essere più piccolo di  $\Delta t_s$ , mentre per metodi *incrementali* essi risultano molto più evidenti, soprattutto per simulazioni di basso ordine.

**Osservazione 4.2.1.** *Il discorso risulta del tutto analogo nel caso in cui il passo temporale venga risolto con il metodo DG-SEM. Ciò che vale la pena di osservare però, è il fatto che in questo caso si ha la possibilità di stabilizzare il metodo che utilizza spazi con lo stesso grado polinomiale, scegliendo la costante di penalizzazione dei salti per il problema di Poisson come  $\eta_\gamma^p = C \frac{N^2}{h_\gamma \Delta t}$  [15]. Questa scelta però, incide negativamente sul numero di condizionamento della matrice del problema in pressione, causando nella pratica un notevole aumento delle iterazioni del metodo del Gradiente Coniugato, necessarie per la risoluzione del sistema lineare.*

## 4.2.1.2 Spazi compatibili CG-SEM

Quelli che seguono sono grafici realizzati allo stesso modo dei precedenti, ma utilizzando un grado di approssimazione pari a  $N$  per la velocità, e  $N - 2$  per la pressione, con  $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ :

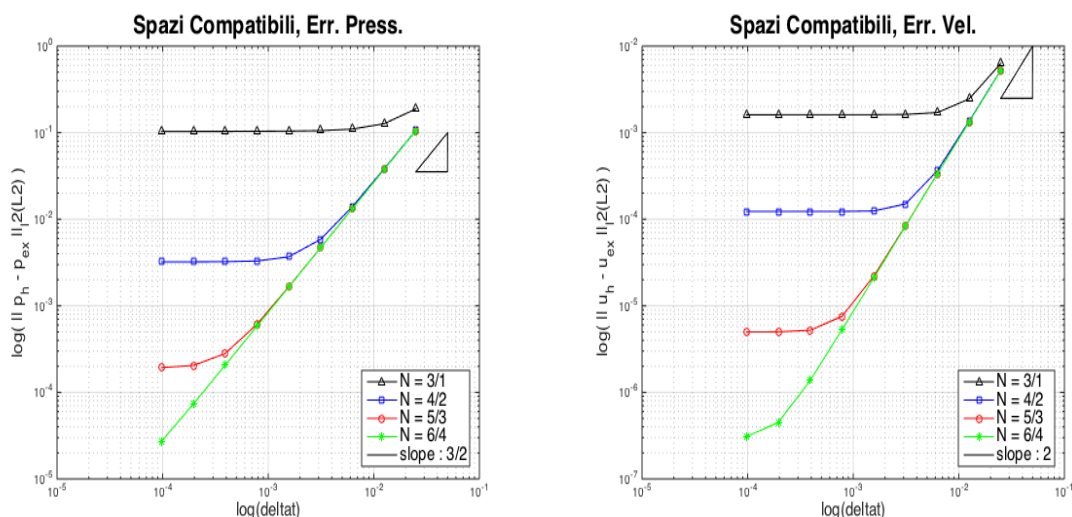


Figura 4.6: Errore  $L^2$  per pressione (sinistra) e velocità (destra) per coppie di spazi compatibili

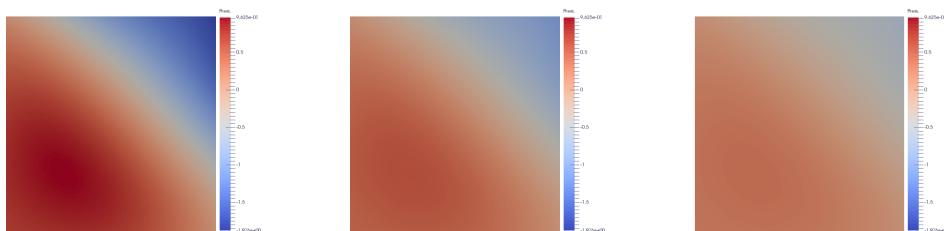


Figura 4.7: Grafico pressione  $N = 5/3$  per  $t = 0s, t = 0.2s, t = 0.5$

Per spazi compatibili, i grafici precedenti mostrano un andamento che risulta essere in linea con quanto previsto dalla teoria: soprattutto per  $\Delta t$  molto piccolo, l'errore rispetto alla discretizzazione spaziale risulta dominante e si ritrova il “plateau” che ci si aspetta, inoltre i grafici in figura 4.7, che mostrano l'andamento della

pressione nel caso di  $N = 5/3$  quando  $\Delta t = (0.05)2^{-9}$ , non presentano le oscillazioni viste in figura 4.5.

**Osservazione 4.2.2.** *Utilizzando spazi che soddisfano la condizione LBB, l'unica limitazione alla scelta del passo temporale  $\Delta t$  sarà rappresentata dalla condizione CFL.*

Comportamenti analoghi si riscontrano anche per una risoluzione DG-SEM, per questo motivo d'ora in poi verranno considerati soltanto spazi che soddisfano la condizione LBB.

### 4.2.1.3 Spazi compatibili DG-SEM

Consideriamo invece una risoluzione mediante DG-SEM, e scegliendo coppie di spazi compatibili, mostriamo la validità delle stime del Teorema 1.2.4 anche per questo caso. Consideriamo allora il problema 4.2.3 con soluzione esatta (4.2.1)-(4.2.2), e introduciamo una partizione del dominio, fissando  $h$  in modo che vi siano 64 o 150 esaedri caratterizzati dallo stesso diametro; i seguenti grafici mostrano l'anadamento dell'errore in velocità (nelle norme  $\|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^3}$  e  $\|\cdot\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ ) e in pressione (nella norma  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ), rispetto ad un raffinamento del passo temporale scelto come  $\Delta t \in 0.05 \cdot \{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}\}$ , mantenendo fissato  $N \in \{3, 5, 8\}$  per la velocità e scegliendo  $N - 2$  per la pressione:

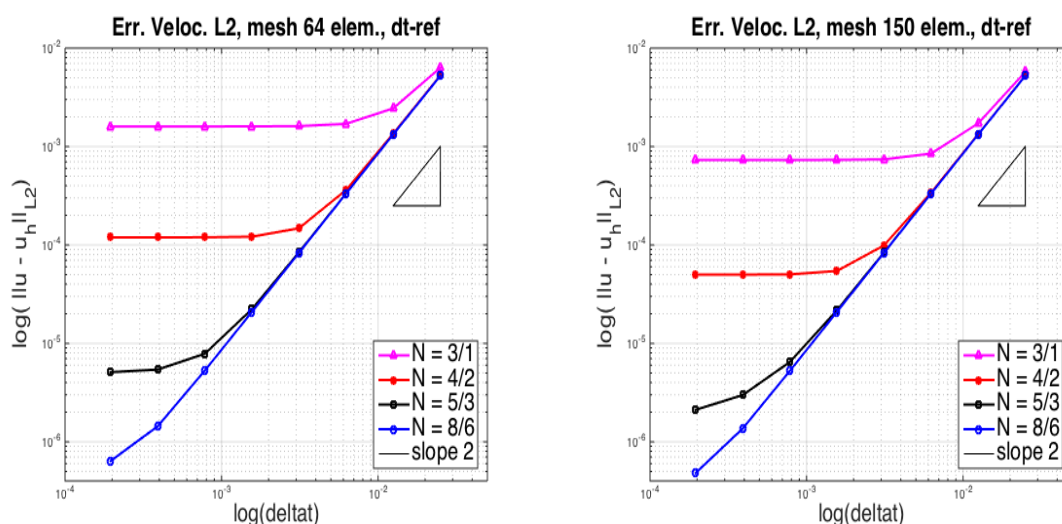


Figura 4.8:  $\Delta t$ -raff. Vel.  $L^2$ , mesh 64 elem. (sinistra) e 150 (destra)

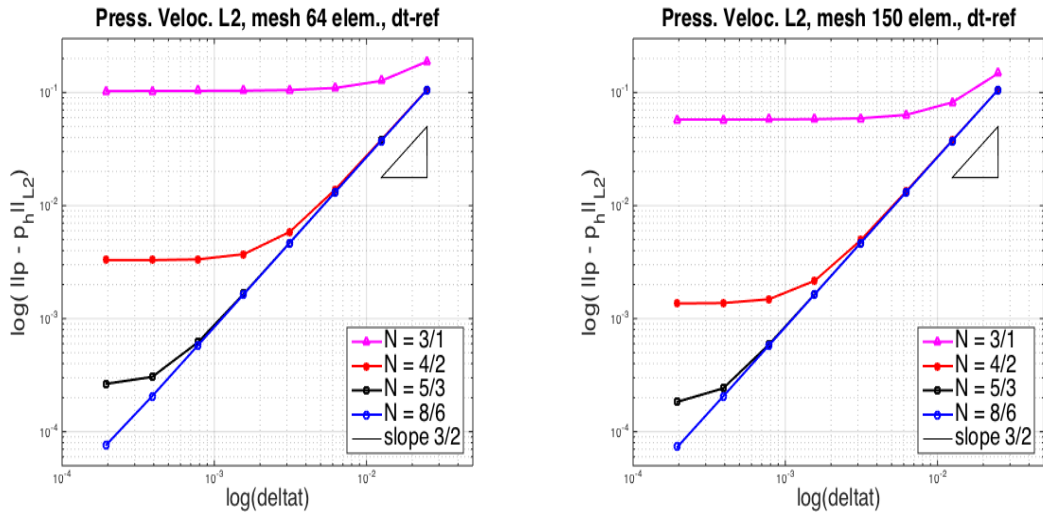


Figura 4.9:  $\Delta t$ -raff. Press.  $L^2$ , mesh 64 elem. (sinistra) e 150 (destra)

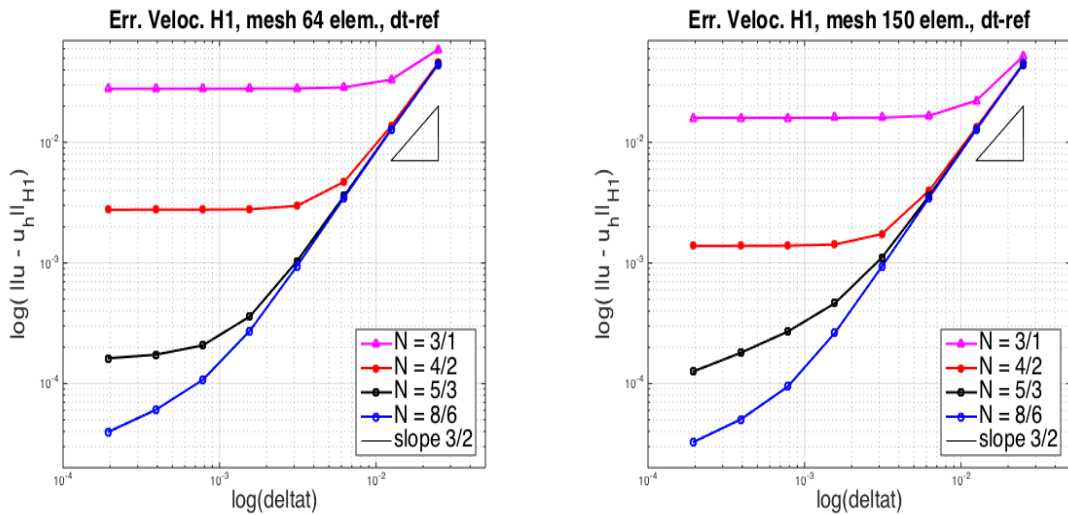


Figura 4.10:  $\Delta t$ -raff. Vel.  $H^1$ , mesh 64 elem. (sinistra) e 150 (destra)

La figura 4.8 mostra l'andamento di

$$\sum_{n=1}^{N_{time}} \left( \|\mathbf{u}^{ex}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}_\delta^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\mathbf{u}^{ex}(t^n) - \mathbf{u}_\delta^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} \right)$$

rispetto al passo temporale  $\Delta t$ , e da essa si osserva che l'andamento del secondo ordine previsto dal Teorema 1.2.4 risulta essere verificato fintantoché l'errore spaziale non diventa dominante; si ha inoltre maggiore accuratezza quando l'ordine è più elevato, e la mesh più fine.

Per quel che riguarda invece l'ordine di convergenza pari a  $\frac{3}{2}$ , per le norme

$$\sum_{n=1}^{N_{time}} \|p^{ex}(t^n) - p_\delta^n\|_{L^2(\Omega)}, \quad \sum_{n=1}^{N_{time}} \left( \|\mathbf{u}^{ex}(t^n) - \tilde{\mathbf{u}}_\delta^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\mathbf{u}^{ex}(t^n) - \mathbf{u}_\delta^n\|_{[L^2(\Omega)]^3} \right)$$

essi sono illustrati rispettivamente in 4.9 - 4.10: per quanto riguarda la pressione, l'ordine è verificato e si ha lo stesso comportamento visto per l'errore  $L^2$  della velocità, mentre dal grafico dell'errore in norma  $H^1$  della velocità, si osserva un ordine migliore rispetto a quello previsto dal Teorema.

### 4.2.2 Convergenza spaziale

In questa sezione mostriamo invece i risultati di convergenza spaziale per il metodo Pressure-Correction rotazionale con risoluzione mediante DG-SEM, considerando ancora il problema di Navier-Stokes (4.2.3), con soluzione esatta di Ethier-Steinman (4.2.1)-(4.2.2). Se dal punto di vista del raffinamento rispetto al passo temporale, abbiamo verificato le stime del Teorema 1.2.4, dal punto di vista della convergenza spaziale è necessario ricordare alcuni risultati noti: le stime di convergenza spaziale viste nella sezione 4.1, non sono infatti sufficienti a caratterizzare l'ordine dell'errore del metodo utilizzato, poiché, nel caso di Navier-Stokes, l'errore commesso in pressione influenza quello che viene commesso in velocità, e viceversa; è necessario quindi comprendere come l'uno influenzi l'altro.

Introduciamo una generica partizione  $\mathcal{T} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_K\}$  di  $\Omega$  come quella descritta in 4.1. In [53] è dimostrata la seguente stima dell'errore: sia  $(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{p}) \in [H^1(\Omega)]^3 \times L_0^2(\Omega)$  la soluzione esatta del problema di Stokes stazionario, e supponiamo che sia  $(\underline{\mathbf{u}}|_{\Omega_k}, \mathbf{p}|_{\Omega_k}) \in [H^{s_k}(\Omega_k)]^3 \times H^{r_k}(\Omega_k)$ ,  $\forall k = 1, \dots, K$ , e con  $s_k \geq 2, r_k \geq 1$ . Sia quindi

$(\mathbf{u}_\delta, p_\delta) \in V^{DG} \times Q_0^{DG}$  la soluzione del problema accoppiato DG-SEM, associato al problema di Stokes, dove gli spazi sono scelti in modo da soddisfare la condizione LBB ( $N_k^p = N_k^v - 2 = N_k - 2$ ). Allora esiste una costante  $C$  dipendente da  $\nu$ , ma indipendente da  $h_k$  e  $N_k$ , tale che

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\delta\|_{DG} \leq C \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{\beta_h} \frac{h_k^{m_k-1}}{N_k^{s_k-\frac{3}{2}}} |\underline{\mathbf{u}}|_{[H^{s_k}(\Omega_k)]^3} + \frac{h_k^{n_k}}{N^{n_k}} |\mathbf{p}|_{H^{r_k}(\Omega_k)} \right) \quad (4.2.4)$$

$$\|\mathbf{p} - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{\beta_h^2} \frac{h_k^{m_k-1}}{N_k^{s_k-\frac{3}{2}}} |\underline{\mathbf{u}}|_{[H^{s_k}(\Omega_k)]^3} + \frac{h_k^{n_k}}{N^{n_k}} |\mathbf{p}|_{H^{r_k}(\Omega_k)} \right) \quad (4.2.5)$$

con  $1 \leq m_k \leq \min(N_k + 1, s_k)$ ,  $1 \leq n_k \leq \min(N_k - 1, n_k)$  e  $\beta_h$  è la costante che compare nella definizione di inf-sup (1.3.4).

L'influenza dell'errore in pressione, e il fatto di dover utilizzare spazi con  $N/N - 2$ , non permette di avere una stima ottimale per la velocità rispetto al suo grado di approssimazione: nel caso di approssimazione uniforme sia dal punto di vista della griglia  $h$ , che del grado  $N$ , e supponendo che la soluzione esatta sia analitica, le due stime si riducono a:

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\delta\|_{DG} + \|\mathbf{p} - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{p}, \beta_h, \nu) \exp(-\gamma_0 N) h^{N-1} \quad (4.2.6)$$

#### 4.2.2.1 Convergenza in $h$

Al fine di verificare la validità delle stime (4.2.4) e (4.2.5), consideriamo un problema di Navier-Stokes *stazionario*, in cui scegliamo il termine forzante affinché la soluzione esatta sia data dalla funzione di Ethier-Steinman (4.2.1)-(4.2.2) valutata al tempo  $t = 0$ ,  $(\mathbf{u}^{ex}(t = 0), p^{ex}(t = 0))$ :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{per } (\mathbf{x}) \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{per } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), & \text{per } (\mathbf{x}) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2.7)$$

poiché nella soluzione di Ethier-Steinman il gradiente di pressione bilancia il termine non lineare (ciò è vero anche nel problema *non-stazionario*), il termine forzante dovrà quindi essere scelto in modo da bilanciare il termine diffusivo  $\mathbf{f} = -\nu \nabla^2 \mathbf{u}^{ex}(t = 0)$ ; poniamo inoltre  $\mathbf{g} = \mathbf{u}^{ex}(t = 0)|_{\partial\Omega}$  e scegliamo  $\nu = 1$ .

In fase di risoluzione, scegliamo di utilizzare un passo temporale fittizio molto piccolo, al fine di non avere influenza dell'errore rispetto alla discretizzazione temporale, ad esempio  $\Delta t = 0.5 \times 10^{-4}$ ; introducendo quindi una condizione iniziale omogenea su tutto il dominio ed effettuiamo un numero sufficiente di passi temporali del metodo, fino a quando non si ottiene una soluzione stazionaria  $(\tilde{\mathbf{u}}_\delta, \mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ , che verrà confrontata con la soluzione esatta di (4.2.7),  $(\mathbf{u}^{ex}, p^{ex})$ .

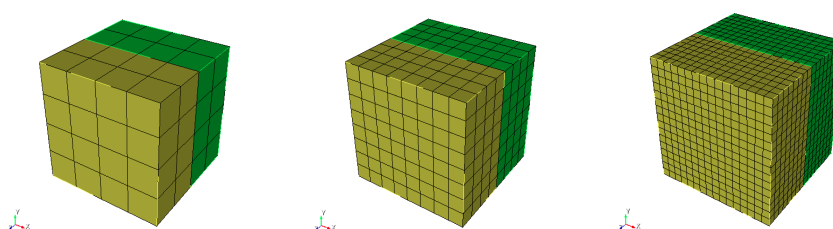


Figura 4.11: mesh con 64, 512, 4096 esaedri, e interfaccia di discontinuità in  $z = 0$

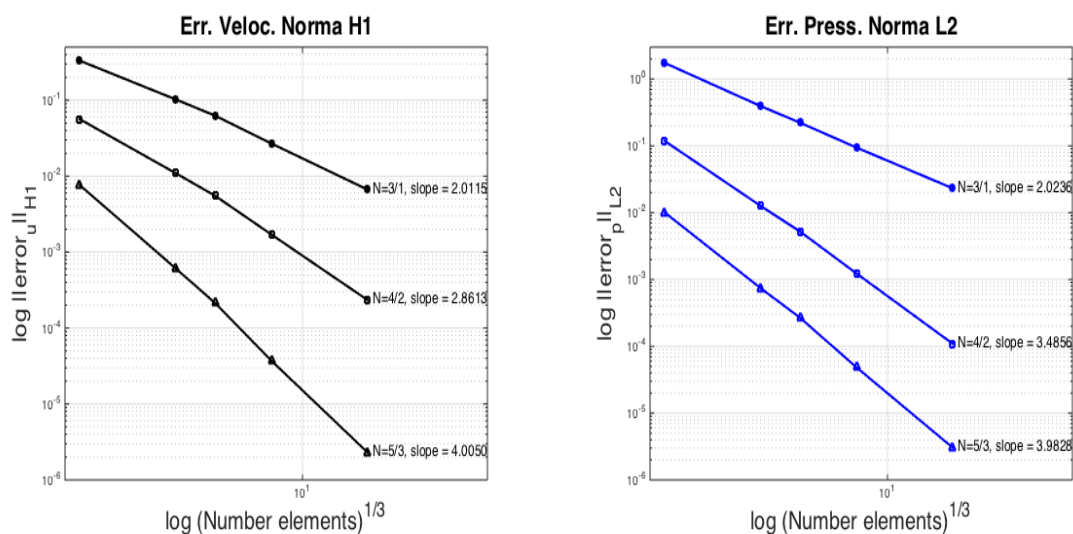


Figura 4.12:  $h$ -raffinement,  $H^1$ -velocità (sinistra) e  $L^2$ -pressione (destra)

Consideriamo quindi una partizione del dominio come quella illustrata in figura 4.1.1, e fissando una coppia di spazi compatibili  $N = N - 2$ , con  $N \in \{3, 4, 5\}$ , valutiamo l'ordine di convergenza di  $\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}_\delta\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|\mathbf{u}^{ex} - \tilde{\mathbf{u}}_\delta\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ , e di  $\|p^{ex} - p_\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , rispetto ad un raffinamento del passo di griglia  $h$ , considerato mesh di 8, 64, 150, 512 e 4096 esaedri caratterizzati tutti dallo stesso diametro  $h$ :



l'andamento che si osserva nei grafici di figura 4.12, risulta essere in accordo con la stima (4.2.6) derivante da 4.2.4 e (4.2.5), in modo particolare nel grafico della pressione, il caso con  $N = 4$  mostra un ordine di convergenza più elevato rispetto a quello previsto dalle stime teoriche.

Per quanto riguarda invece l'ordine di convergenza dell'errore in norma  $L^2$  della velocità, in generale ci si aspetta di guadagnare un ordine rispetto a quello nella norma  $H^1$ : riferendoci ai risultati mostrati in figura 4.13, si nota che gli ordini previsti risultano verificati con buona approssimazione per i gradi polinomiali di approssimazione  $N = 3$  e  $N = 4$ , mentre osserviamo che per  $N = 5$  si perde un'ordine rispetto a quanto previsto dalla teoria: è lecito ipotizzare che questo comportamento sia dovuto all'influenza dell'errore indotta dal passo temporale  $\Delta t$ , che risulta dominante o paragonabile a quello spaziale, e andrebbe scelto quindi più piccolo per caratterizzare meglio la stima.

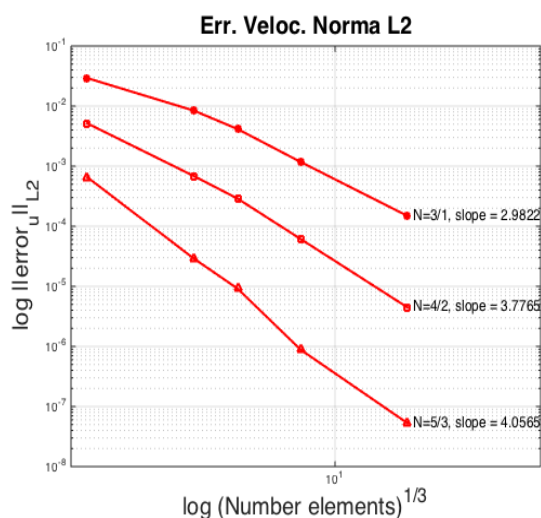


Figura 4.13:  $h$ -raffinemento, errore della velocità in norma  $L^2$

#### 4.2.2.2 Convergenza in $N$

Al fine di verificare che la convergenza rispetto ad un raffinamento del grado polinomiale  $N$  sia esponenziale per le norme degli errori visti precedentemente, fissiamo il passo di griglia  $h$  considerando la mesh di 8 o 64 esaedri, e facciamo variare

$N \in \{3, 4, 5, 6\}$ : i seguenti grafici semi-logaritmici mostrano l'andamento esponenziale atteso, con buona approssimazione per le norme dell'errore considerate.

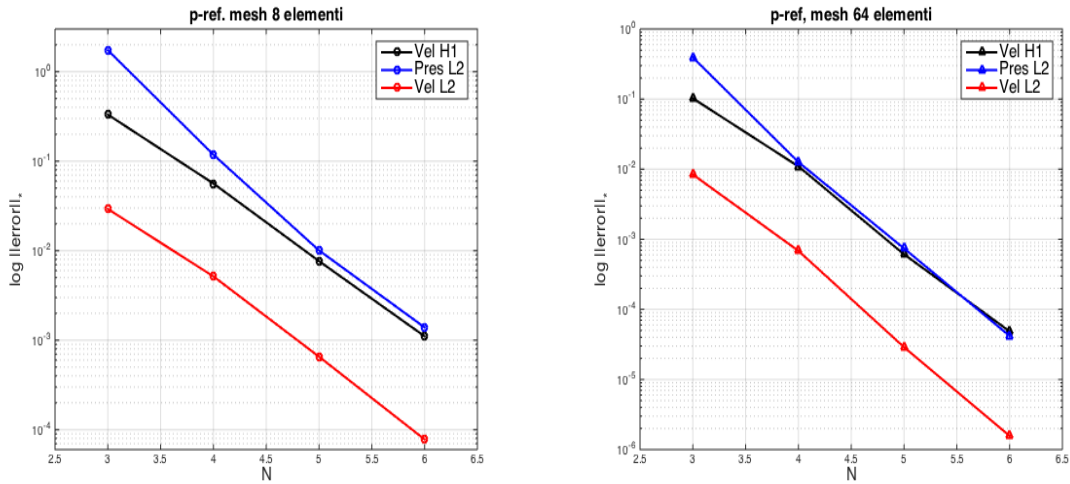


Figura 4.14:  $p$ -raffinamento, mesh 8 elem. (sinistra) e 64 (destra)

### 4.3 Scalabilità del codice

Come anticipato nell'introduzione iniziale, una delle caratteristiche principali del codice SPEED è il fatto di essere altamente scalabile su problemi costituiti da un elevato numero di gradi di libertà: per questo motivo, un ulteriore obiettivo di questo lavoro è stato quello di implementare un codice strutturato in modo tale da mantenere questa caratteristica. A differenza di SPEED che utilizza un metodo completamente esplicito, il codice implementato per il metodo descritto nei capitoli precedenti, prevede la risoluzione di due sistemi lineari ad ogni passo di iterazione temporale. Entrambi i problemi vengono risolti con il metodo del Gradiente Coniugato Precondizionato, caratterizzato da un criterio d'arresto basato sul controllo del residuo relativo: ad esempio per un sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , le iterazioni del Gradiente Coniugato si arrestano quando la soluzione  $\mathbf{x}^{m+1}$ , determinata all'iterazione  $m$ -esima, sarà tale per cui

$$\frac{\|\mathbf{Ax}^{m+1} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \leq \text{toll}$$

dove  $tol$  è fissata a  $10^{-6}$ . Ogni volta che si risolve ciascun sistema lineare, riferendoci all’algoritmo introdotto all’inizio del precedente capitolo, il “flusso parallelo” incontra i seguenti ostacoli (o “colli di bottiglia”) ad ogni iterazione  $m$ -esima, che limitano la scalabilità:

- calcolo del prodotto scalare  $\rho = \mathbf{r}^m \cdot \mathbf{z}^{m+1}$ ;
- prodotto matrice vettore  $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{p}^{m+1}$ :
  - scambio informazioni tra processori alla fine del prodotto di stiffness  $\mathbf{K}\mathbf{p}^{m+1}$ ;
  - scambio informazioni alla fine del prodotto con matrice di salto  $\mathbf{J}\mathbf{p}^{m+1}$  (solo nel caso DG-SEM);
- calcolo del residuo relativo dell’iterazione  $m$ -esima;

I limiti della parallelizzazione causati dai numerosi “colli di bottiglia” presenti, si manifestano con maggiore evidenza soprattutto quando il problema è caratterizzato da un basso numero di gradi di libertà.

Per effettuare uno studio di scalabilità del codice, consideriamo un determinato problema e valutiamo l’indice di *Speed-up* (Xiao, 2010) ad esso associato, che definiamo come

$$S_p(n) = \frac{T_1}{T_n}$$

dove  $T_1$  è il tempo di risoluzione del problema utilizzando un solo processore, mentre  $T_n$  è il tempo di risoluzione dello stesso problema utilizzando  $n$  processori. L’andamento dello *Speed-up* risulterà essere *ideale* nel caso in cui  $S_p(n) = n$ , ovvero quando il codice è scritto in modo tale che, raddoppiando il numero di processori, si dimezza il tempo di risoluzione del problema.

Consideriamo il problema di Navier-Stokes 4.2.3, e introduciamo una macro-partizione di  $\Omega = (-1, 1)^3$  fatta da 2 elementi, e in modo analogo a quanto visto nelle sezioni precedenti, introduciamo su ciascuno dei due una partizione conforme in modo da avere 512 esaedri totali: i grafici in figura 4.15, mostrano l’andamento degli *Speed-up* per i 3 seguenti problemi (risolti con DG-SEM):

1.  $N/N - 2 = 3/1 \Rightarrow 49560$  gdl totali (velocità + pressione);
2.  $N/N - 2 = 6/4 \Rightarrow 397176$  gdl totali;
3.  $N/N - 2 = 9/7 \Rightarrow 1371480$  gdl totali;

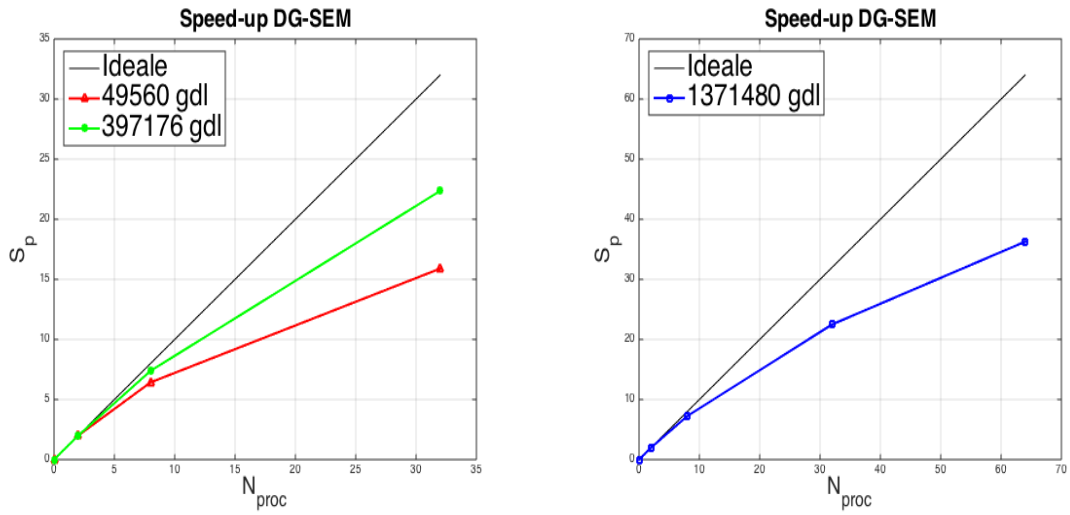


Figura 4.15: Speed-up DG-SEM per problemi 1 2 (sinistra) e 3 (destra)

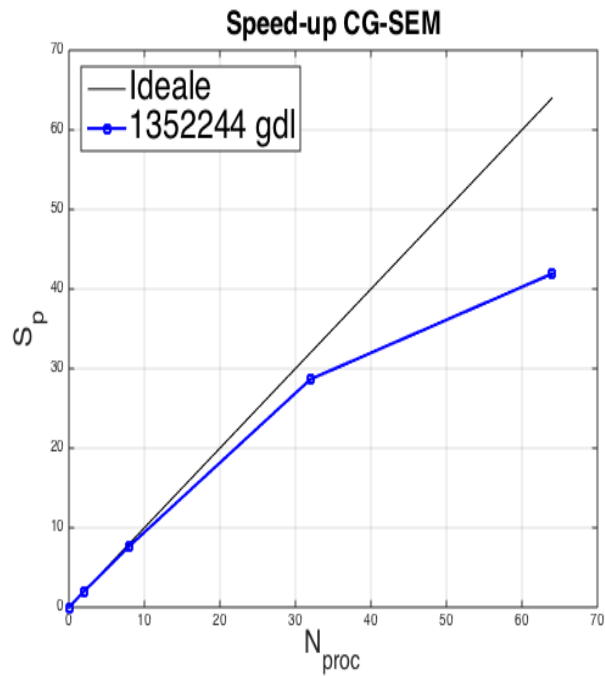


Figura 4.16: Speed-up CG-SEM per il problema 3

Il grafico di sinistra in figura 4.15, mostra un evidente limite di scalabilità nel caso in cui si risolve un problema caratterizzato da pochi gradi di libertà, mentre la situazione risulta migliore per il grafico di destra relativo al problema 3, in cui l'efficienza della parallelizzazione, definita come  $E(n) = \frac{T_1}{nT_n}$ , si assesta ad un valore  $E(64) = 0.5668$ . Il grafico di figura 4.16, mostra invece l'andamento dello *Speed-up* per il problema 3, in cui però si utilizza una risoluzione dei passi temporali mediante CG-SEM: in quest'ultimo caso si nota un andamento migliore rispetto al caso DG-SEM, e nel caso di 64 processori l'efficienza si assesta ad un valore  $E(64) = 0.6549$ .

Il risultato migliore che si osserva per il caso CG-SEM, è dovuto al fatto che il lavoro complessivo risulta meglio distribuito sui processori che si utilizzano, poiché nel caso DG-SEM non tutti i processori effettuano le moltiplicazioni matrice-vettore legate alle matrici di salto, mentre nel caso CG-SEM, essendo queste ultime del tutto assenti, ciascun processore effettua soltanto i prodotti di Stiffness sugli esaedri ad esso assegnati nella fase di set-up.

## 4.4 Flusso intorno ad un cilindro

In quest'ultima sezione mostreremo i risultati di validazione ottenuti per il caso test del flusso intorno ad un cilindro a sezione quadrata, in cui a differenza dei casi precedentemente analizzati, non si conosce la forma della soluzione esatta. Ciò che viene fatto è un confronto tra i risultati numerici ottenuti e alcuni risultati sperimentali. Tra i più importanti risultati presenti in letteratura per lo studio di questo fenomeno, ricordiamo Okajima [36] per la fase sperimentale, e Kelkar [31], Darekar e Sherwin [46] e Ferrer [16] per i test numerici.

I risultati presentati in questa sezione, sono relativi al set-up proposto in [34], in cui sono inoltre presentati una serie di risultati numerici ai quali faremo riferimento per dei confronti con quelli qui ottenuti.

Sulla base della configurazione geometrica di figura 4.17, consideriamo quindi un fluido omogeneo caratterizzato da densità  $\rho = 1.0 \frac{Kg}{m^3}$  e viscosità cinematica  $\nu = 10^{-3} \frac{m^2}{s}$ . La dimensione caratteristica del problema è fissata al valore del diametro diametro del cilindro pari a  $D = 0.1m$ , mentre la velocità caratteristica  $\bar{U}$  ha un

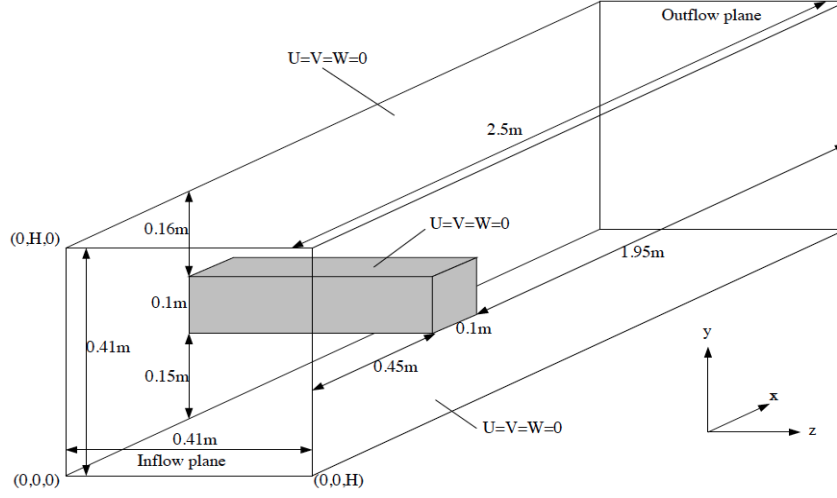


Figura 4.17: Configurazione geometrica del problema, figura da [34]

valore che dipende dal profilo di velocità sul bordo di *inflow*  $[U(t, x, y, z), 0, 0]^T$ , ed è fissata al valore  $\bar{U}(t) = \frac{4}{9}U(t, 0, \frac{H}{2}, \frac{H}{2})$ , dove  $H = 0.41m$  è la lunghezza dello spigolo sul bordo di *inflow*. Viene quindi risolta l'equazione di Navier-Stokes (1.1.15) sul dominio di riferimento di figura 4.17, inizializzata con le condizioni  $\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{0}$  e  $p(t = 0) = 0$ , e chiusa con le seguenti condizioni al bordo:

- condizioni di Dirichlet *omogenee* sulle superfici laterali del canale, e sulla superficie del cilindro;
- una condizione di Dirichlet non omogenea che descrive il profilo di velocità sul bordo di *inflow*,  $\mathbf{u}|_{\Gamma_{inflow}} = [U(t, x, y, z), 0, 0]^T$  ;
- sul bordo di *outflow* imponiamo che lo sforzo normale sia nullo, ovvero  $2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , attraverso le modalità descritte nella sezione 1.2.6 del capitolo 1;

Questo fenomeno è caratterizzato da due diversi comportamenti del flusso a seconda del valore assunto dal *numero di Reynolds* caratteristico che viene definito come

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu}$$

in modo particolare, come viene discusso in [31], quando il valore del numero di Reynolds risulta essere basso (ovvero  $Re < Re_{crit} \sim 54$ ), la soluzione del problema tende ad una configurazione stazionaria, nel caso in cui il numero di Reynolds sia

maggiore dal valore critico, la soluzione è soggetta al fenomeno dei *vortici di Von Kármán*

#### 4.4.1 Caso stazionario

Fissiamo la componente  $x$  della velocità sul bordo di inflow al valore

$$u_x(t, 0, y, z) = U(t, 0, y, z) = 16U_m yz(H - y)(H - z)/H^4 \quad (4.4.1)$$

costante nel tempo e con  $U_m = 0.45 \frac{m}{s}$ , e imponiamo inoltre valori nulli per le componenti  $u_y$  e  $u_z$ : questa scelta corrisponde a  $Re = 20$ , e ci si aspetta che la soluzione tenda ad un valore stazionario.

Per valutare l'accuratezza delle simulazioni, misuriamo il *Coefficiente di resistenza (Drag)* e quello di *portanza (Lift)* che si ottengono durante ciascuna simulazione, e confrontiamo i risultati con quelli ottenuti in [34]. Ricordiamo che la forza di Drag è la risultante degli sforzi lungo la direzione dominante della velocità del flusso (nel nostro caso  $x$ ), mentre la forza di Lift è la risultante degli sforzi lungo la componente normale alla velocità (ovvero lungo  $y$ ); formalmente abbiamo

$$F_D = \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})_x ds = \int_S (2\nu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_x - pn_x) ds$$

$$F_L = \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})_y ds = \int_S (2\nu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_y - pn_y) ds$$

dove  $S$  rappresenta la superficie laterale del cilindro, ovvero le 4 facce "immerse" nel flusso, mentre  $\mathbf{n}$  è il versore normale a tale superficie; a queste 2 forze sono quindi associati dei coefficienti adimensionali definiti come:

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho \bar{U}^2 DH}, \quad C_L = \frac{2F_L}{\rho \bar{U}^2 DH}$$

Consideriamo una mesh composta da 3 macro-elementi e un totale di 1152 esaedri disposti come mostrato in figura 4.18, dove è stata introdotta una partizione più fine in prossimità della zona in cui si trova il cilindro al fine di approssimare con maggiore dettaglio i gradienti di velocità: chiameremo quindi  $\Omega_1$  la macro-regione in cui è imposto il bordo di *inflow*,  $\Omega_2$  quella in cui c'è il cilindro, e  $\Omega_3$  la regione restante. In figura 4.20 è invece mostrato il profilo di velocità per le componenti  $u_x$  e  $u_y$ , ottenuto per il flusso completamente sviluppato e valutato sulla sezione centrale del canale disposta longitudinalmente rispetto ad esso.

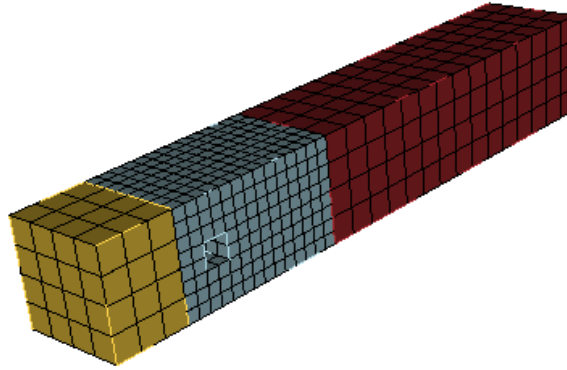
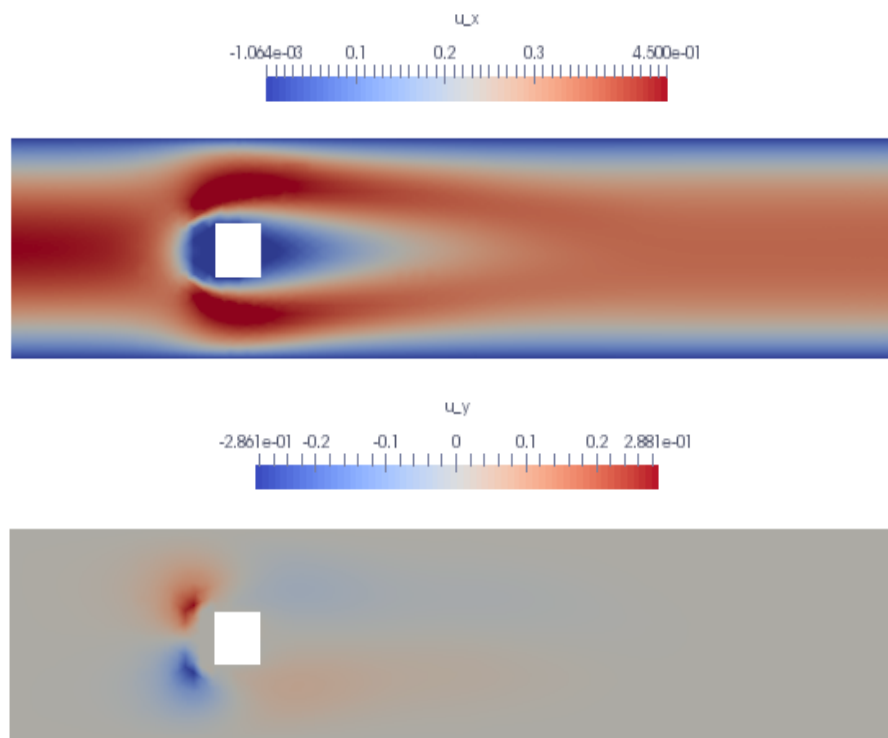


Figura 4.18: Mesh utilizzata per le simulazioni

Figura 4.19:  $u_x$  (sopra) e  $u_y$  (sotto), profilo all'istante temporale  $T = 10s$ , ottenuto utilizzando  $N_1 = N_2 = 4/2, N_3 = 3/1$



Le stime dei coefficienti di Drag e Lift sono state realizzate effettuando 3 simulazioni caratterizzate rispettivamente da

1.  $N_1 = N_2 = N_3 = 3/1$  gradi di approssimazione polinomiale per un totale di 108848 gradi di libertà (velocità + pressione) e  $\Delta t = 0.001$  in modo da soddisfare la condizione CFL;
2.  $N_1 = N_2 = 4/2, N_3 = 3/1$  gradi di approssimazione polinomiale per un totale di 225156 gradi di libertà, e  $\Delta t = 0.001$
3.  $N_1 = 4/2, N_2 = 5/3, N_3 = 3/1$  gradi di approssimazione polinomiale per un totale di 420920 gradi di libertà, e  $\Delta t = 0.001$ ;

Gli andamenti dei coefficienti rispetto al passo temporale, sono mostrati in figura 4.20. L'andamento che si osserva mostra una fase iniziale di "assestamento" cui

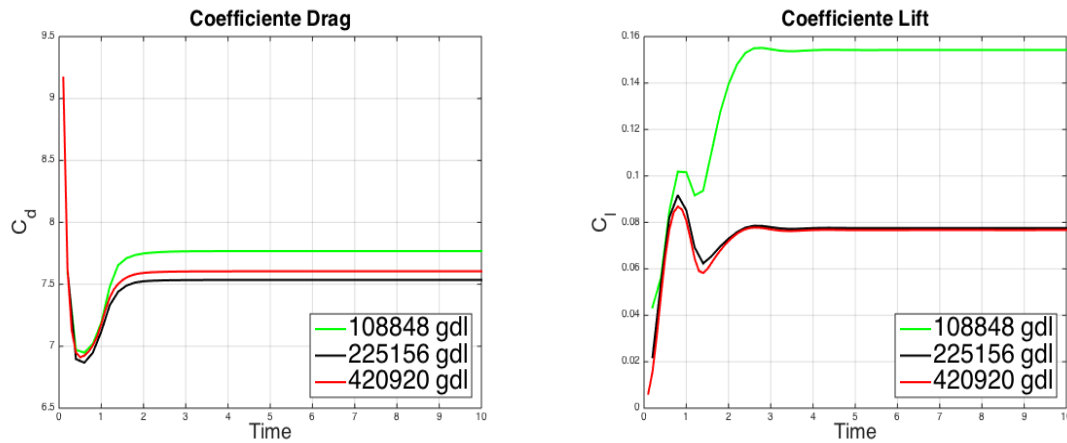


Figura 4.20: Andamento di  $C_d(t)$  e  $C_l(t)$

corrisponde un andamento irregolare, seguita da un *plateau* corrispondente alla fase in cui il flusso è completamente sviluppato, e il cui valore indica la stima dei 2 coefficienti per ogni simulazione. Le stime dei coefficienti sono riassunte nella seguente tabella:

	caso 1	caso 2	caso 3
$C_d$	7.768	7.535	7.605
$C_l$	0.1542	0.0776	0.0767

Si nota un andamento convergente verso valori il linea con i risultati numerici ottenuti in [34], in cui i range di appartenenza dei due coefficienti, sono stimati dagli

autori come:

$$C_d \in [7.5, 7.7] \quad C_l \in [0.06, 0.08] \quad (4.4.2)$$

	Discr. in spazio	Discr. tempo	gdl	$C_d$	$C_l$
1	FDM	FD 2nd ordine impl.	2530836	7.6415	0.0673
2	FV, upwind ord.1	STARCD softw.	1472000	7.9200	0.0645
3	FEM P2-P1 (Tay.-Hood)	frac. step. 2nd ord.	362613	7.6480	0.0670
4	FV	Crank-Nicolson	454656	7.5395	0.0797
5	FE Q1(rot)-Q0	proj. meth. 2nd oder	6094976	7.6148	0.06
6	FE Q1(rot)-Q0	proj. meth. 2nd oder	768544	7.5622	0.0503

La tabella mostra una breve descrizione di alcune delle simulazioni più accurate effettuate dagli autori di [34] per lo stesso problema trattato in questa sezione: paragonando il nostro solutore, con quelli che utilizzano un metodo di proiezione per la discretizzazione del tempo, si nota che il 3 stima un modo accurato i due coefficienti con un ordine di gradi di libertà paragonabile a quelli da noi utilizzato, mentre la 5-6 necessita di un ordine maggiore ( $\sim 6 \cdot 10^6$ ) per ottenere una stima del Lift in linea con (4.4.2).

#### 4.4.2 Caso non stazionario

L'analisi del caso non stazionario è invece effettuata imponendo una condizione di *inlet* analoga a (4.4.1), ma con la scelta  $U_m = 2.25 \frac{m}{s}$ , al fine di considerare un problema caratterizzato da  $Re = 100$ . Analogamente a quanto fatto prima, effettuiamo diverse simulazioni raffinando la griglia 4.18 dal punto di vista del grado polinomiale, e studiamo l'andamento di  $C_d(t)$  e  $C_l(t)$  confrontando poi i risultati ottenuti con quelli presentati in [34]: in questo caso ci si aspetta un andamento di tipo oscillatorio.

Lo studio di questo caso ha messo in luce i limiti del codice legati al trattamento del termine non lineare. Tutte le simulazioni presentate nelle sezioni precedenti, sono state realizzate approssimando il termine non lineare attraverso un problema di Taylor-Galerkin a 3 passi anteposto al passo di diffusione-reazione, e approssimando gli integrali utilizzando una formula di quadratura Gaussiana di grado  $N_k^v$

per ogni macro-elemento  $\Omega_k$ , attraverso i nodi GLL relativi ai gradi di libertà. Si è avuto ad esempio (sia  $\mathbf{p}_i^v \in \Omega_k^j, \mathbf{p}_i^v = \mathbf{F}_k^j(\hat{\mathbf{x}}_I)$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \Psi_i^1) &= \int_{\Omega_k^j} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \Psi_i^1 \\ &\simeq \left( u_x(\mathbf{p}_i^v) \frac{\partial u_x}{\partial x}(\mathbf{p}_i^v) + u_y(\mathbf{p}_i^v) \frac{\partial u_x}{\partial y}(\mathbf{p}_i^v) + u_z(\mathbf{p}_i^v) \frac{\partial u_x}{\partial z}(\mathbf{p}_i^v) \right) \Psi_i(\mathbf{p}_i^v) |J_k^j| \hat{\mathbf{w}}_I \end{aligned}$$

grazie al fatto che la base è Lagrangiana, il calcolo dell'integrale sull'esaedro  $\Omega_k^j$  si riduce infatti a un prodotto: questo da un lato costituisce un vantaggio computazionale, ma dall'altro è causa di una integrazione *non esatta* di tale termine: la funzione integranda è infatti un polinomio di grado  $3N_k$  in ciascuna variabile, mentre con una formula di quadratura *GLL* di grado  $N_k$  si integra esattamente solo fino al grado  $2N_k - 1 < 3N_k$ . Questo trattamento non ha generato problemi per le simulazioni discusse nelle sezioni precedenti, mentre per il cilindro non stazionario ha dato luogo a delle instabilità in fase di risoluzione. I grafici in figura 4.21 mostrano l'andamento dei coefficienti di Drag e Lift determinati per una simulazione con integrazione non esatta del termine non lineare, che utilizza la mesh 4.18 con una scelta di gradi polinomiali  $N_1 = N_2 = 4/2, N_3 = 3/1$  e un passo temporale  $\Delta t = 0.001 < \Delta t_{cfl}$ : i grafici mostrano come, utilizzando l'integrazio-

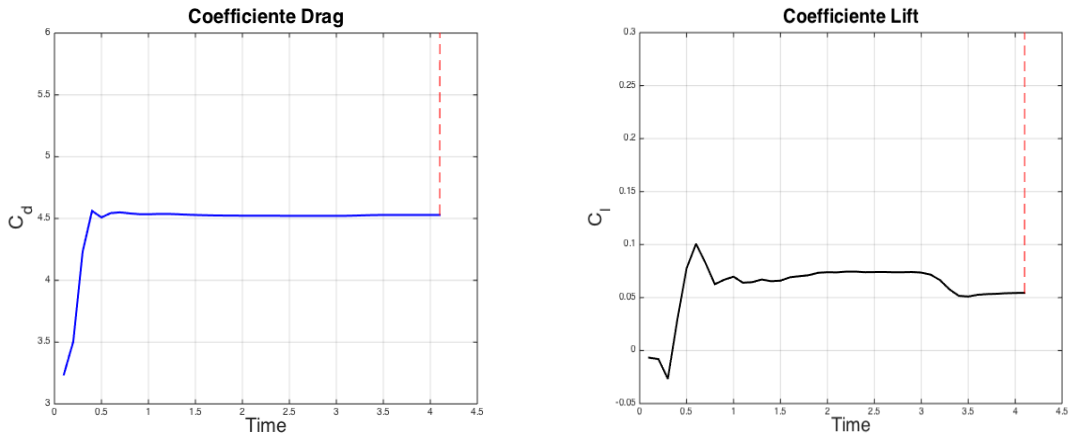


Figura 4.21: Andamento di  $C_d(t)$  e  $C_l(t)$

ne non esatta, quando  $t = 4, 1s$  si manifesta un comportamento fortemente instabile.

Decidiamo quindi di integrare esattamente il termine non lineare, scegliendo

all'interno di ciascun macro-regione  $\Omega_k$  un grado di quadratura  $M_k$  tale che

$$2M_k - 1 \geq 3N_k$$

ovvero sceglieremo  $M_k = \frac{3}{2}N_k + 1$  se  $N_k$  è pari, e  $M_k = \frac{3}{2}N_k + \frac{1}{2}$  se  $N_k$  è dispari. L'integrazione esatta comporta però un incremento notevole del costo computazionale di risoluzione, poichè, integrando su nodi diversi dai quelli associati alle funzioni di base Lagrangiane, gli integrali approssimati non subiscono in generale semplificazioni. Gli integrali legati al termine non lineare vengono quindi calcolati numericamente con un costo computazionale dell'ordine di  $O(N_k^6)$  per ogni esaedro.

**Osservazione 4.4.1.** *Per limitare il costo computazionale, si osserva che il metodo di Taylor-Galerkin prevede di calcolare  $\mathcal{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \Psi_i^l)$  almeno 6 volte per ogni funzione di base: 3 volte per la determinazione di  $\hat{\mathbf{u}}^n$  e 3 per determinare  $\hat{\mathbf{u}}^{n-1}$ . Per questo motivo, decidiamo di valutare il termine non lineare utilizzando l'extrapolazione del secondo ordine presentata in 1.2.5.1, che permette di valutare termini del tipo  $\mathcal{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \Psi_i^l)$  soltanto 2 volte per ogni iterazione temporale.*

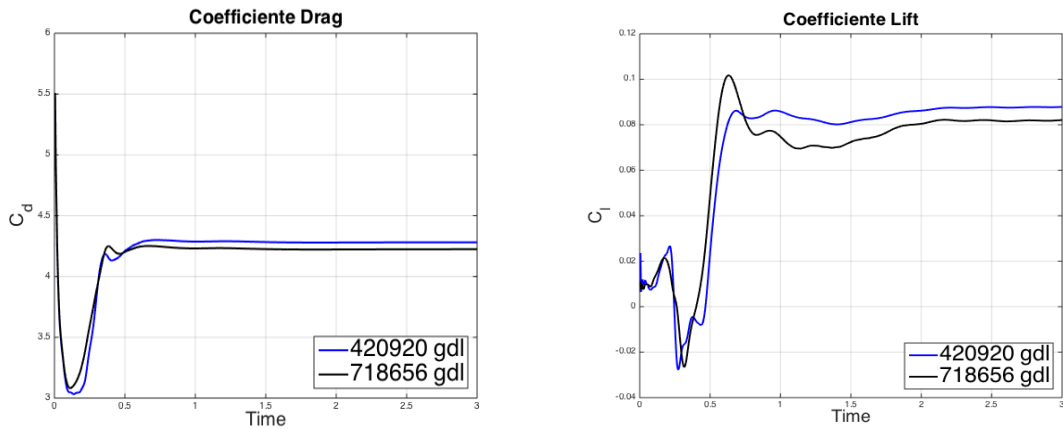


Figura 4.22: Andamento di  $C_d(t)$  e  $C_l(t)$

A partire dalla mesh introdotta precedentemente, le 2 simulazioni più accurate effettuate per questo caso sono state effettuate scegliendo

1.  $N_1 = 4/2, N_2 = 5/3, N_3 = 3/1$  gradi di approssimazione polinomiale per un totale di 420920;
2.  $N_1 = 3/1, N_2 = 5/3, N_3 = 4/2$  gradi di approssimazione polinomiale per un totale di 718656;

scegliendo in entrambi i casi  $\Delta t = 0.0005s$  al fine di rispettare la condizione CFL. I grafici di figura 4.22 mostrano l'andamento per il Drag e il Lift, stimate al tempo finale come descritto nella seguente tabella:

	caso 1	caso 2
$C_d$	4.2813	4.2242
$C_l$	0.0878	0.0821

La prima osservazione che salta subito all'occhio è il fatto che le 2 simulazioni non restituiscono una soluzione evolutiva, caratterizzata dal fenomeno dei vortici di Von Karman come ci si aspetta dalle osservazioni sperimentali. I grafici in figura 4.23 mostrano 3 snap-shot nella sezione centrale del canale del modulo della velocità per la simulazione più accurata, relativi rispettivamente agli istanti  $t_1 = 0.3s$ ,  $t_2 = 1.5s$ ,  $t_3 = 3s$ .

Quello che si osserva è il fatto che la soluzione tende ad un valore stazionario: come riportato in [34], le simulazioni che utilizzano metodi di proiezione del secondo ordine, effettuate dagli autori con un numero di gradi di libertà dello stesso ordine rispetto a quello da noi utilizzato, manifestano questo comportamento, e la soluzione tende ad un valore stazionario con una stima di coefficienti in linea con quelli da noi ottenuti.

**Osservazione 4.4.2.** *Per riuscire a ricostruire il comportamento oscillatorio, è necessario effettuare simulazioni caratterizzate da un numero di gradi di libertà dell'ordine di  $O(10^6)$ . Purtroppo per motivi di tempo, non ci è stato possibile approfondire questa lacuna.*

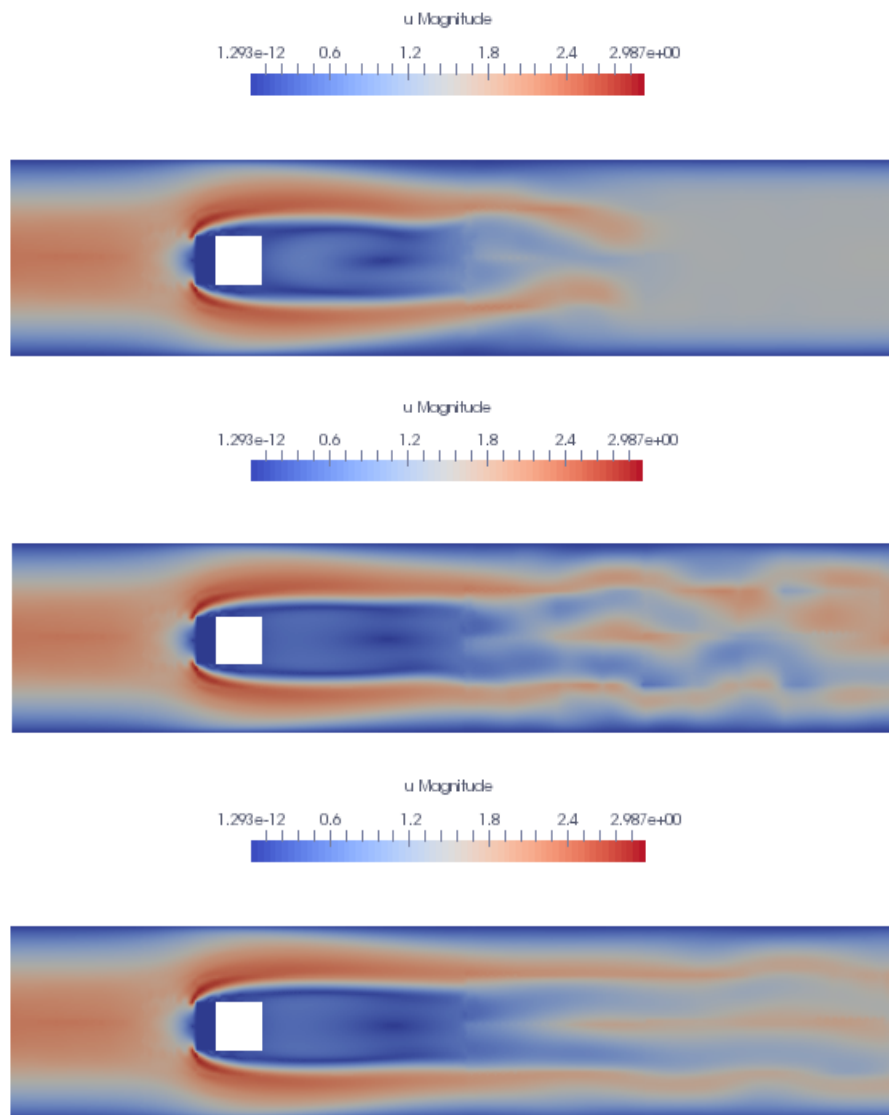


Figura 4.23: modulo della soluzione a 3 passi temporale differenti

# Conclusioni

In questo lavoro è stato sviluppato un solutore di alto ordine a partire dal codice *SPEED*, utilizzando le funzioni in esso implementate, e adattandone la struttura alla risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes tramite un metodo di proiezione: tale metodo consiste nella risoluzione di un problema parabolico e un ellittico ad ogni passo temporale, ovvero un problema di diffusione-reazione e uno di Poisson. Il termine diffusivo dell'equazione di Navier-Stokes è quindi trattato in modo implicito, al contrario del termine non lineare trattato esplicitamente. Per quel che riguarda la fase di implementazione, si è cercato di scrivere un codice che minimizzasse l'utilizzo di memoria, al fine di trarne vantaggio per la risoluzione di problemi di elevate dimensioni: per fare ciò è stato implementato un algoritmo matrix-free per il prodotti di stiffness, e viene memorizzata, analogamente a quanto fa *SPEED* su problemi di onde, soltanto la parte della matrice legata alle interfacce di discontinuità. Questo codice eredita una struttura altamente parallela, e si è quindi cercato di mantenerne alte le prestazioni da un punto di vista della scalabilità: purtroppo però, il metodo del Gradiente Coniugato scritto per la risoluzione dei 2 sistemi lineari, è caratterizzato da numerosi "colli di bottiglia" legati in particolare all'algoritmo matrix-free per i prodotti di stiffness, i quali limitano la scalabilità del codice. Per quanto riguarda la parte di validazione, buoni risultati sono stati ottenuti per tutti i test di convergenza effettuati, sia da un punto di vista spaziale che temporale, dove si sono ritrovate le velocità di convergenza attese. Inoltre nel caso del flusso intorno al cilindro, è stato mostrato un buon comportamento nel caso di flusso a basso Reynolds.

Questo lavoro di tesi rappresenta un primo step nella realizzazione di un codice efficiente per la soluzione di problemi di interesse. Ulteriori sviluppi necessari per superare le attuali limitazioni sono:

- le iterazioni del Metodo del Gradiente Coniugato nel problema di Poisson risultano spesso essere dell'ordine delle centinaia e sono maggiori nel caso di simulazioni di ordine particolarmente elevato, che andrebbero ridotte introducendo preconditionatori migliori di quello diagonale attualmente implementato;
- l'integrazione non esatta del termine non lineare è stata la causa delle principali instabilità che si sono riscontrate su problemi complessi: tale problema è risolvibile integrando esattamente, ma ciò comporta un elevato costo computazionale che limita notevolmente le qualità del metodo in termini di tempi di risoluzione; un trattamento implicito o semi-implicito, nonostante richiederebbe da un lato un tempo di risoluzione maggiore per la soluzione di ciascuna iterazione temporale, dall'altro garantirebbe la possibilità di utilizzare un passo temporale più grande rispetto a quelli utilizzati in questo lavoro.



# Bibliografia

- [1] <http://cubit.sandia.gov/>.
- [2] <http://glaros.dt.umn.edu/gkhome/views/metis>.
- [3] <http://speed.mox.polimi.it/speed/home.html>.
- [4] J. E. Marsden A. Chorin. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, fourth edition edition, 2000.
- [5] A. Veneziani A. Quarteroni, F. Saleri. Factorization methods for the numerical approximation of the navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 188:505–526, 2000.
- [6] F. Saleri A. Quarteroni, R. Sacco. *Matematica Numerica*, volume 37 di Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, second edition edition, 2007.
- [7] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 3(20):179–192, 1973.
- [8] L. A. Botti. *Galerkin Methods For Incompressible Fluid Flow Simulations, Application to Hemodynamics*. PhD thesis, University of Bergamo, 2009.
- [9] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, (8):129–151, 1974.
- [10] D. A. Steinman C. R. Ethier. Exact fully 3d navier-stokes solutions for benchmarking. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 19:369–375, 1994.

- [11] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Math. CComput.*, 22:745–762, 1968.
- [12] A. Ern D. A. Di Pietro. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Springer-Verlag, 2012.
- [13] B. Cockburn L. D. Marini D. N. Arnold, F. Brezzi. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Sci. Numerical Analysis*, 39(5):1749–1779, 2001/02.
- [14] R. H. J. Willden E. Ferrer. A high order discontinuous galerkin finite element solver for the incompressible navier–stokes equations. *Computers and Fluids*, (46):224–230, 2011.
- [15] R. H. J. Willden J. Spencer E. Ferrer, D. Moxey. Stability of projection methods for incompressible flows using high order pressure-velocity pairs of same degree: Continuous and discontinuous galerkin formulations. *Journal of Computational Physics*, 16(3):817–840, September 2014.
- [16] E. Ferrer. *A high order Discontinuous Galerkin-Fourier incompressible 3D Navier-Stokes solver with rotating sliding meshes for simulating cross-flow turbines*. PhD thesis, University of Oxford, 2012.
- [17] S. Sherwin G. E. Karniadakis. *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications, 2005.
- [18] R. Glowinski. Finite element methods for incompressible viscous flows. *Handbook of numerical analysis*, 9:3–1176, 2003.
- [19] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three- dimensional cavity flows. *J. Comput. phys.* 30, pages 76–95, 1979.
- [20] J. L. Guermond. Un résultat de convergence d’ordre deux en temps pour l’approximation des équations de navier-stokes par une technique de projection incrémentale. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(1):169–189, 1999.
- [21] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Second edition edition, 2007.

- [22] R. Guidotti C. Smerzini I. Mazziere, M. Stupazzini. Speed: Spectral elements in elastodynamics with discontinuous galerkin: a non-conforming approach for 3d multi-scale problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 95(12):991–1010, 2013.
- [23] M. Peric J. H. Ferziger. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1996.
- [24] J. Shen J. L. Guermond. A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows. *Journal of computational physics*, (192):262–276, 2003.
- [25] J. Shen J. L. Guermond. Velocity-correction projection methods for incompressible flows. *SIAM J. Sci. Numerical Analysis*, 41(1):112–134, 2003.
- [26] J. Shen J. L. Guermond. On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. *Math. Comput.*, 73(248):1719–1737, 2004.
- [27] J. Shen J. L. Guermond, P. Minev. Error analysis of pressure-correction schemes for the navier-stokes equations with open boundary conditions. *SIAM J. Sci. Numerical Analysis*, 43(1):239–258, 2005.
- [28] J. Shen J. L. Guermond, P. Minev. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, (195):6011–6045, 2006.
- [29] L. Quartapelle J. L. Guermond. On stability and convergence of projection methods based on pressure poisson equation. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 26:1039–1053, 1998.
- [30] T. Warburton J. S. Hesthaven. Nodal discontinuous galerkin methods. *Text in Applied Mathematics*, 54, 2008.
- [31] K. M. Kelkar. Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 14:327–341, 1992.
- [32] F. N. Van De Vosse L. J. P. Timmermans, P. D. Minev. An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 22:673–688, 1996.

- [33] O. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York, 2nd edition edition, 1969.
- [34] S. Turek M. Schafer. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder.
- [35] I. Mazziere. *Non-Conforming High Order Methods For The Elastodynamics Equation*. PhD thesis, Politecnico di Milano - Université de Nice Sophia-Antipolis, 2012.
- [36] A. Okajima. Strouhal numbers of rectangular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 123:379–398, 1982.
- [37] A. Quarteroni F. Rapetti P. F. Antonietti, I. Mazziere. Non-conforming high order approximations of the elastodynamics equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 209/212(212-238), 2012.
- [38] F. Saleri P. Gervasio. Stabilized spectral element approximation for the navier-stokes equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14(1):115–141, 1998.
- [39] F. Saleri. A. Veneziani P. Gervasio. Algebraic fractional-step schemes with spectral methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 214(1):347–365, 2006.
- [40] E. Suli P. Houston, C. Schwab. Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J. Sci. Numerical Analysis*, 39(6):2133–2163, 2002.
- [41] A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. phys.*, 54:468–488, 1984.
- [42] O. Pironneau. *Méthodes des Éléments Finis pour les fluides*. Masson, 1988.
- [43] A. Prohl. Projection and quasi-compressibility methods for solving the incompressible navier–stokes equations. *Advances in Numerical Mathematics*, 1997.

- [44] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer-Verlag, 5a edition, 2012.
- [45] M. Stupazzini R. Guidotti, I. Mazzieri. 3d numerical simulation of the site-city interaction during the 22 february 2011 mw 6.2 christchurch earthquake. In *Proceeding of WCEE 2012 - 15th World Conference on Earthquake Engineering*, 2012.
- [46] S. J. Sherwin R. M. Darekar. Flow past a square-section cylinder with a wavy stagnation face. *Journal of Fluid Mechanics*, 426:263–295, 2001.
- [47] R. Rannacher. On chorin’s projection methof for the incompressible navier-stokes equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 1530, 1991.
- [48] Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. 2008.
- [49] S. Salsa. *Equazioni a derivate parziali, metodi, modelli e applicazioni*. Springer-Verlag, 2010.
- [50] J. Shen. On error estimates of projection methods for the navier-stokes equations: second-order schemes. *Math. Comput.*, 65(215):1039–1065, 1996.
- [51] A. R. Temam. Une méthode d’approximation de la solution des équations de navier-stokes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:115–152, 1968.
- [52] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthod des pas fractionnaires. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 33, pages 377–385, 1969.
- [53] A. Toselli. hp discontinuous galerkin approximations for the stokes problem. Technical report, Seminar fu Àà Angewandte Mathematik Eidgeno Ààssische Technische Hochschule CH-8092 Zu Ààrich Switzerland, 2002.
- [54] J. van Kan. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7, pages 870–891, 1986.

- [55] J. G. Liu W. E. Projection method i: Convergence and numerical boundary layers. *SIAM J. Sci. Numerical Analysis*, 32:1017–1057, 1995.
- [56] B. Rivière Y. Epshteyn. Estimation of penalty parameters for symmetric interior penalty galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206:843–872, 2007.
- [57] A. T. Patera Y. Maday. Spectral element methods for the incompressible navier-stokes equation. in *State of the Art Survey in Computational Mechanics* A. K. Noor and J. T. Oden (editors) *ASME*, (71-143), 1989.
- [58] M. R. Einal Y. Maday, A. T. Patera. An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: Application to incompressible fluid flow. *Journal of Scientific Computing*, 5(4), 1990.
- [59] N. N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer-Verlag, 1971.