

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione



**MODELLI PROBABILISTICI PER IL CONTROLLO DELLE CODE IN UN
INCROCIO STRADALE CON SEMAFORO**

Relatore: Prof. Paolo BOLZERN

Candidato:

Carlo PIGNATARO

Matricola:

799727

Anno Accademico 2014-2015

Sommario

Abstract	4
Abstract in lingua inglese	5
1. Introduzione	6
2. Modello della Singola Coda	8
2.1 <i>Flussi in Ingresso e in Uscita</i>	9
2.2 <i>Catena di Markov per l'Evoluzione della Coda</i>	12
2.3 <i>Strategie Periodiche di Attivazione del Semaforo</i>	19
3. Modello dell'Incrocio con Strategie Periodiche	30
3.1 <i>Descrizione del Modello e degli Obiettivi</i>	30
3.2 <i>Analisi delle Prestazioni</i>	37
4. Simulatore	53
4.1 <i>Strategie Periodiche</i>	57
4.2 <i>Strategie di Tipo Prioritario</i>	67
5. Conclusioni	77
Ringraziamenti	83
Bibliografia	85

Abstract

Lo sviluppo di questo lavoro è orientato al controllo delle code in un incrocio stradale regolato da un impianto semaforico. L'obiettivo principale consiste nel minimizzare le code delle strade in oggetto. È proposto un modello probabilistico basato sull'utilizzo delle catene di Markov. Attraverso tale modello viene prima effettuata un'analisi nel caso di una singola strada separata in due dalla presenza di un semaforo, il quale si comporta secondo le logiche di una strategia periodica. Successivamente l'analisi si estende al caso più complesso di un incrocio che taglia perpendicolarmente due strade. Si osservano i risultati teorici derivanti dall'applicazione della medesima strategia periodica per l'attivazione del semaforo. Viene proposta una strategia alternativa, di tipo prioritario, che agevoli il flusso veicolare della strada più trafficata. Attraverso l'ausilio di un simulatore, vengono eseguite le stesse analisi per code generate casualmente. Viene infine effettuato un confronto fra le due diverse strategie.

Abstract in lingua inglese

The development of this work is oriented to the control of the queues in a road intersection controlled by a traffic light. The main objective is to minimize the queues of the streets in question. A probabilistic model based on the use of the Markov chains is proposed. Through this model, it is first carried out an analysis in the case of a single street separated in two parts by the presence of a traffic light, which behaves according to the logic of a periodical strategy. Subsequently, the analysis is extended to the more complex case of an intersection that perpendicularly cuts two streets. One can observe the theoretical results derived from the application of the same periodical strategy for the activation of the traffic light. An alternative strategy is proposed, of prior type, to facilitate the vehicular flow of the main thoroughfare. Through the aid of a simulator, the same analyses are executed for randomly generated queues. Finally, a comparison is made between the two different strategies.

1. Introduzione

La congestione del traffico è un problema di grande rilevanza che riguarda tutte le più grandi città. I flussi dei veicoli sono per loro stessa natura imprevedibili, dipendendo dalle esigenze dei conducenti: studiare il loro evolversi, ipotizzarne gli andamenti e adottare delle opportune misure di controllo, sono quesiti non banali con i quali chi ha la responsabilità di gestire il traffico urbano deve interfacciarsi.

Per agevolare il normale scorrere delle vetture vigono ovviamente le regole del codice della strada, e assumeremo per semplicità che queste vengano rispettate da tutti i conducenti. Il caso principale che sarà analizzato nel dettaglio è l'incrocio che separa due strade perpendicolari fra loro, regolato da un impianto semaforico. Le modalità di funzionamento di tale impianto determinano l'adeguato evolversi dei flussi veicolari delle due strade. Da qui deriva l'importanza cruciale che riveste il semaforo e con esso il sistema che lo regola.

L'utilizzo di modelli matematici può aiutare a progettare strategie di attivazione degli impianti semaforici capaci di ridurre la congestione del traffico e limitare la lunghezza delle code. Alcuni esempi di studi di questo genere sono riportati in [1], [5], [6], [15] e [2]. [1], [5] e [6] si propongono di determinare la corretta suddivisione dei segnali al semaforo, minimizzando il tempo di attesa totale delle vetture all'incrocio. [15] presenta un metodo basato su una programmazione dinamica, tesa a ottimizzare determinati indici di performance: ritardi, stop e lunghezze delle code. In [2] il problema viene invece affrontato sulla base della teoria dei giochi, adottando un approccio non cooperativo, da cui prende forma un gioco non cooperativo a due giocatori; ogni giocatore si pone come obiettivo minimizzare la coda di una delle due strade, in evidente opposizione con l'obiettivo dell'altro. In letteratura sono presenti anche studi sulla sincronizzazione di gruppi di semafori disposti lungo la stessa rete stradale. Si vedano al riguardo [3], [4], [7], [8], [9], [13], [14].

Solitamente sono scelti modelli di tipo probabilistico a causa dell'intrinseca aleatorietà dei flussi di veicoli in ingresso. In questo lavoro ci si concentrerà su un semplice modello di coda basato sulle catene di Markov. L'ipotesi che viene effettuata è che la probabilità per cui il sistema evolva da un certo stato ad un altro dipenda esclusivamente dallo stato

immediatamente precedente assunto dal sistema. Con il supporto matematico descritto sono state vagliate due diverse strategie per il controllo del traffico:

- Strategie di tipo periodico (in anello aperto)
- Strategie di tipo prioritario (in anello chiuso)

Lo studio è stato condotto prendendo inizialmente in considerazione il modello di una singola strada troncata dalla presenza di un semaforo, e ricavandone i risultati teorici basati su strategie periodiche. Si è poi estesa la stessa analisi al caso di un incrocio. Attraverso l'ausilio di un simulatore sono state ripetute le stesse analisi su code generate casualmente, indagando su di esse anche strategie di tipo prioritario. Si è poi potuto effettuare un confronto fra le diverse strategie, traendone le relative conclusioni.

2. Modello della Singola Coda

Il punto di partenza della nostra trattazione propone come riferimento una singola strada, il cui traffico viene gestito dalla presenza di un semaforo. Pur trattandosi di una circostanza apparentemente poco interessante ai fini della ricerca, l'idea di scandire il flusso delle vetture della strada attraverso un semaforo trova la sua pratica realizzazione in presenza di opportuni attraversamenti pedonali. Inoltre essa costituisce un caso base di notevole importanza su cui impostare il prosieguo del lavoro: estenderemo infatti i risultati ottenuti al più generale caso dell'incrocio.

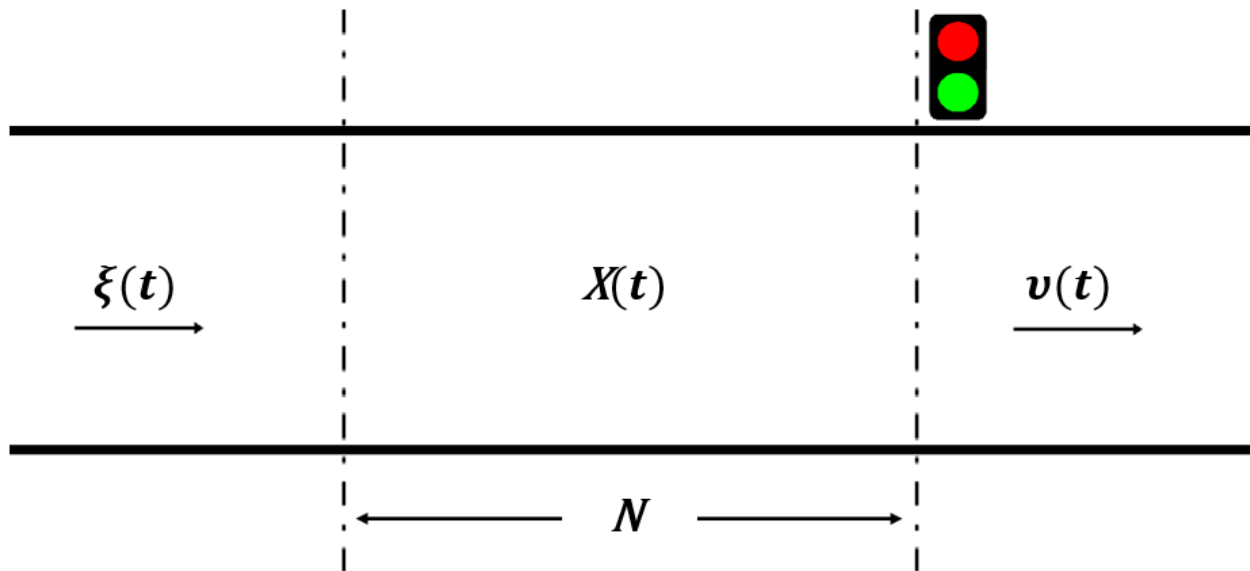


Figura 1: Singola strada, variabili di flusso

L'asse dei tempi è suddiviso in intervalli elementari e quindi t è una variabile discreta che rappresenta l'indice dell'intervallo elementare. La figura 1 schematizza la situazione dal punto di vista delle variabili di flusso:

- $X(t)$ rappresenta lo stato corrente della coda, ovvero specifica il numero di veicoli in coda all'inizio dell'intervallo t
- $\xi(t)$ rappresenta il numero di veicoli in ingresso nell'intervallo t
- $v(t)$ rappresenta il numero di veicoli in uscita nell'intervallo t

N rappresenta infine la capacità massima della strada, ovvero il massimo numero consentito di veicoli che la strada può ospitare.

Il valore di N è pensato per misure ragionevoli di autovetture, escludendo dall'analisi veicoli di dimensioni diverse (a due ruote, autobus, filobus, autocarri, rimorchi). Si noti come l'impianto semaforico disponga di due possibili alternative, inviando un segnale luminoso verde qualora ci sia la possibilità di attraversare la strada, e un segnale luminoso rosso quando il transito è vietato¹. Assumeremo sempre come ipotesi fondamentale che nessun conducente violi il codice della strada. In particolare:

- Essendo la strada a senso unico, non saranno consentite inversioni del senso di marcia.
- Per garantire il regolare scorrimento del traffico, nessuna vettura può fermarsi. Se dunque una vettura entra nella strada, deve attraversarla interamente e uscirne.
- Le vetture possono uscire dalla strada solo quando sul semaforo appare il segnale luminoso verde, mai in caso di rosso.

2.1 *Flussi in Ingresso e in Uscita*

Si assume che i flussi in ingresso e in uscita siano processi casuali stazionari descritti da una loro propria distribuzione. Per quanto riguarda quello in ingresso, possiamo supporre che il numero di veicoli in arrivo in un certo lasso di tempo sia una variabile aleatoria discreta modellizzata tramite una distribuzione di Poisson. Essa è una distribuzione di probabilità discreta che esprime le probabilità per il numero di eventi che si manifestano successivamente e in maniera indipendente l'uno dall'altro in un dato intervallo di tempo, sapendo che in media se ne verificano un certo numero λ .

Per tale motivo la distribuzione si presta particolarmente alla nostra situazione, andando a identificare il conteggio di vetture che si immettono nella strada in un definito arco temporale, conoscendo a priori il numero medio di arrivi λ nell'unità di tempo:

$$\xi(t) \sim P(\lambda)$$

¹ Per semplicità è stato omissso il segnale "giallo". Può a tutti gli effetti essere trattato come se facesse parte del segnale "verde", in quanto il transito è ancora lecito e nella direzione perpendicolare continua a vigere il segnale "rosso". Se volessimo includere tale segnale all'interno della trattazione, si potrebbe semplicemente dedicare ad esso, all'interno del periodo di verde, un costante lasso di tempo finale. Tuttavia la soluzione servirebbe solo come monito per gli automobilisti, in quanto esula dallo scopo della tesi.

La relativa funzione di densità di probabilità è espressa dalla formula:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

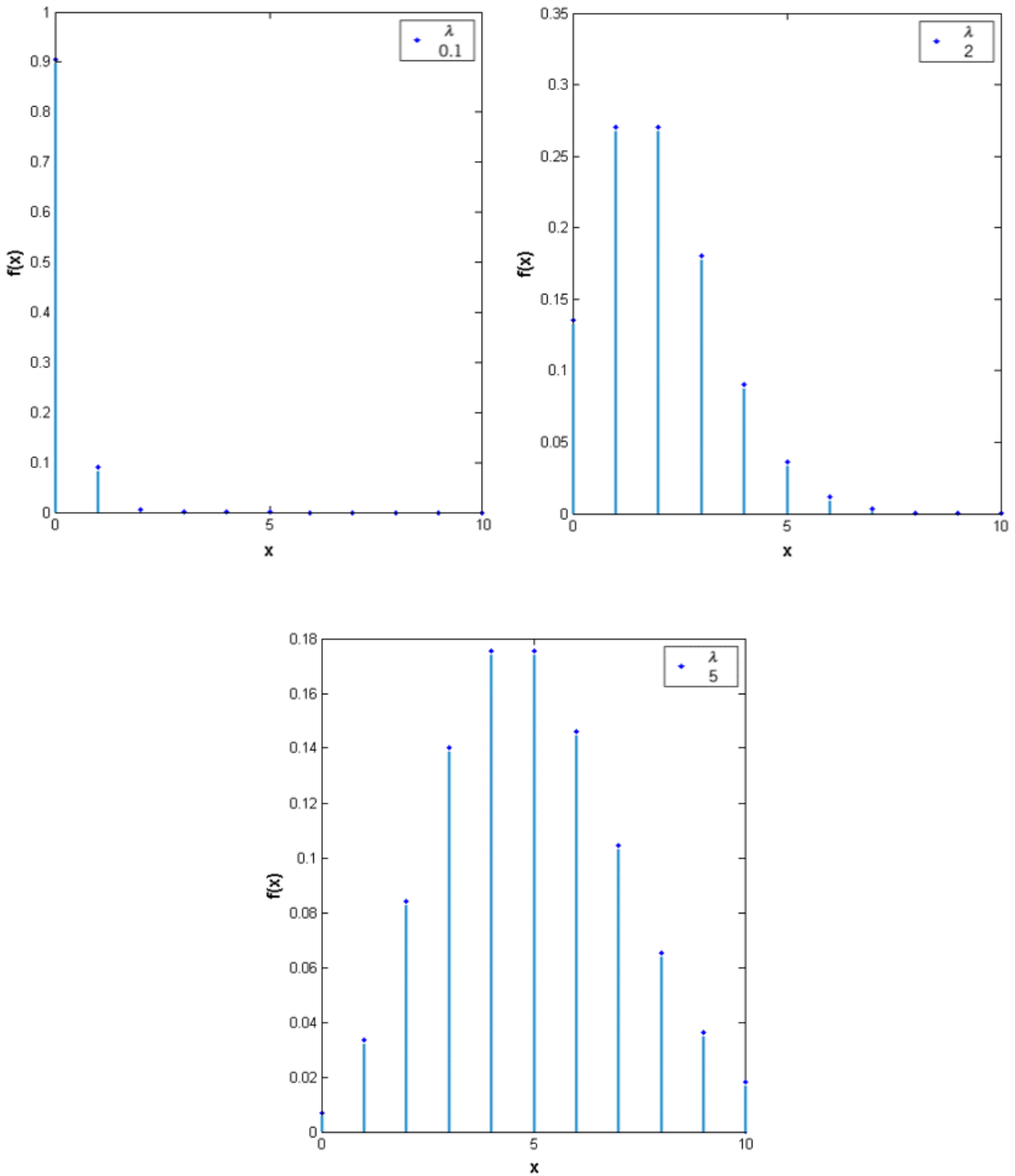


Figura 2: Funzione di densità di probabilità della distribuzione di Poisson per diversi valori di λ

La figura 2 descrive come si presenta la funzione di densità di probabilità per alcuni valori del parametro λ . La variabile $\xi(t)$ ha valore atteso e varianza:

$$E[\xi(t)] = \lambda$$

$$\sigma_{\xi(t)}^2 = \lambda$$

Il flusso in uscita $v(t)$ non può essere descritto tramite la stessa distribuzione di probabilità: quando scatta il segnale verde, con i rispettivi tempi di reazione, ogni vettura in coda per sgomberare la strada è immediatamente pronta a farlo. È stata ipotizzata una distribuzione particolare, di tipo “quasi impulsivo”, centrata su un valore specifico e che tenesse conto di possibili lievi anomalie. Precisamente, fissato η come valore medio:

$$P\{v(t) = \eta - 1\} = 0.1$$

$$P\{v(t) = \eta\} = 0.8$$

$$P\{v(t) = \eta + 1\} = 0.1$$

$$P\{v(t) = \eta \pm k, k > 1\} = 0$$

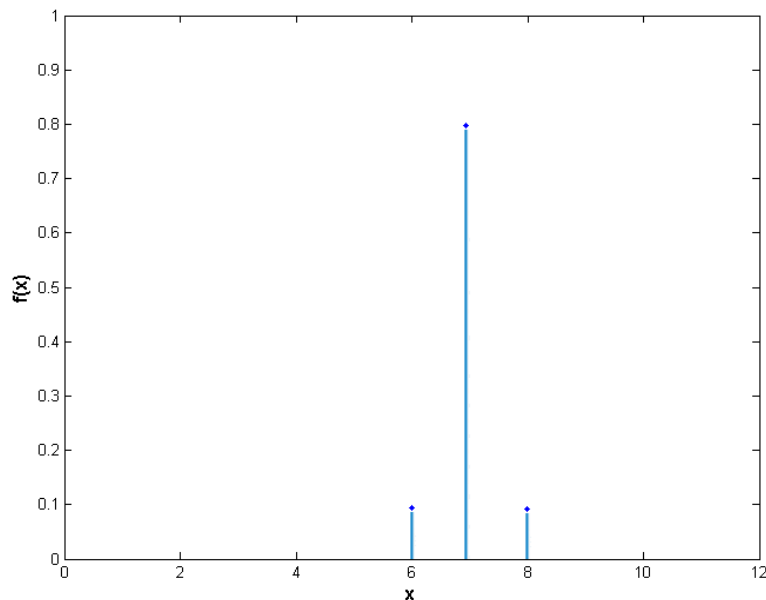


Figura 3: Funzione di densità di probabilità della distribuzione che regola il flusso in uscita, centrata sul valore $x=7$

Nella figura 3 è mostrato un esempio di come potrebbe essere distribuito il flusso in uscita, se il valore su cui viene centrata la distribuzione fosse $\eta = 7$. Una distribuzione centrata nei

valori 0 e N non sarà plausibile, in quanto deve tenere conto delle code immediatamente inferiori e superiori, che mancano rispettivamente a 0 e N . Si avrà dunque:

$$0 < \eta < N$$

2.2 Catena di Markov per l'Evoluzione della Coda

Lo strumento matematico utilizzato per la descrizione del modello è la catena di Markov. Si considerino lo spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) e l'insieme I finito o numerabile². Sia $(X(i))_{i \in I}$ una famiglia di variabili aleatorie su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in I . Tale successione viene definita come una catena di Markov con insieme degli stati I se, per ogni valore intero n , e per ogni $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$, si ha:

$$\begin{aligned} P\{X(n) = i_n \mid X(n-1) = i_{n-1}, X(n-2) = i_{n-2}, \dots, X(0) = i_0\} \\ = P\{X(n) = i_n \mid X(n-1) = i_{n-1}\} \end{aligned}$$

In pratica una catena di Markov si configura come un processo stocastico “senza memoria”, tale per cui le probabilità di transizione che individuano il passaggio ad un determinato stato del sistema dipendono esclusivamente dallo stato che il sistema ha assunto nell'istante immediatamente precedente. In tal senso non ha alcuna importanza il cammino intrapreso per arrivare ad uno specifico stato.

Una catena di Markov $(X(i))_{i \in I}$ viene detta omogenea se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$:

$$P\{X(n) = i_n \mid X(n-1) = i_{n-1}\} = P\{X(1) = i_n \mid X(0) = i_{n-1}\},$$

ovvero quando le probabilità di transizione sono indipendenti da n . Nel seguito considereremo solo catene di Markov omogenee, e per semplicità di trattazione ometteremo l'aggettivo.

Strumenti indispensabili per la nostra analisi sono la matrice di transizione e la distribuzione iniziale, che insieme specificano la distribuzione congiunta della famiglia di variabili aleatorie

² Nel nostro caso $I = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, per cui tratteremo catene di Markov a tempo discreto.

in oggetto. In particolare una matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$, dove con la notazione si intende che $(p_{ij}) = P\{X(1) = j | X(0) = i\}$, è definita dalle seguenti proprietà:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$ per ogni $i, j \in I$
- $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$ per ogni $i \in I$

Viene invece chiamata distribuzione iniziale la distribuzione $\mu(0)$ che regola la prima variabile aleatoria della successione, $X(0)$. Per approfondimenti relativi alle catene di Markov e alle loro applicazioni, si veda [12].

Bisogna chiarire che la matrice di transizione cambia al variare dei comandi imposti dal semaforo. Tale considerazione ha condotto a due diversi modelli, uno adibito al manifestarsi del rosso, l'altro ideato parallelamente per il verde. Nel primo caso si tenga presente che, finché persiste il segnale, la coda non decrescerà mai. La dinamica del sistema, in presenza del semaforo rosso, può essere sintetizzata nel modo seguente:

$$X(t + 1) = \begin{cases} N & \text{se } \xi(t) + X(t) \geq N \\ \xi(t) + X(t) & \text{se } \xi(t) + X(t) < N \end{cases}$$

La coda nell'intervallo $t + 1$ è il risultato della coda nell'intervallo precedente a cui si aggiunge una possibile componente dovuta alle vetture in ingresso. Una volta raggiunta la capacità massima della strada, la coda non supererà mai tale limite.

Date le considerazioni esposte precedentemente, si può costruire la matrice di transizione della catena di Markov relativa al semaforo rosso, che chiameremo R :

$$R = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-2}}{(N-2)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-3}}{(N-3)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che gli stati sono numerati da 0 a N , risultando in totale $N + 1$. È corretto dunque che la matrice quadrata sia di dimensione $(N + 1, N + 1)$. Al di sotto della diagonale principale si avrà sempre 0, in quanto la probabilità di passare da una coda più lunga ad una più corta è nulla. Infine, coerentemente con le proprietà sovraesposte, ogni riga somma a 1.

Se volessimo sintetizzare i risultati ottenuti in una formulazione matematica più compatta, avremmo:

$$R = (r_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i = j = N \\ \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{j-i}}{(j-i)!} & \text{se } i \leq j < N \\ 1 - \sum_{s=0}^{N-i-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} & \text{se } i < j = N \end{cases}$$

Si prenda in considerazione come primo esempio il caso banale di una strada caratterizzata da una capacità massima pari a $N = 2$. Gli stati a disposizione in cui il sistema può spostarsi sono quindi $N + 1 = 3$, ovvero 0 (coda vuota), 1 e 2 (coda piena). In tal caso la matrice di transizione di dimensione $(3,3)$ assumerà la semplice forma:

$$R = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} \\ 0 & e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un'immediata rappresentazione grafica è offerta da un automa a stati finiti, in cui i posti corrispondono agli stati e le transizioni da uno stato all'altro sono determinate da specifiche probabilità:

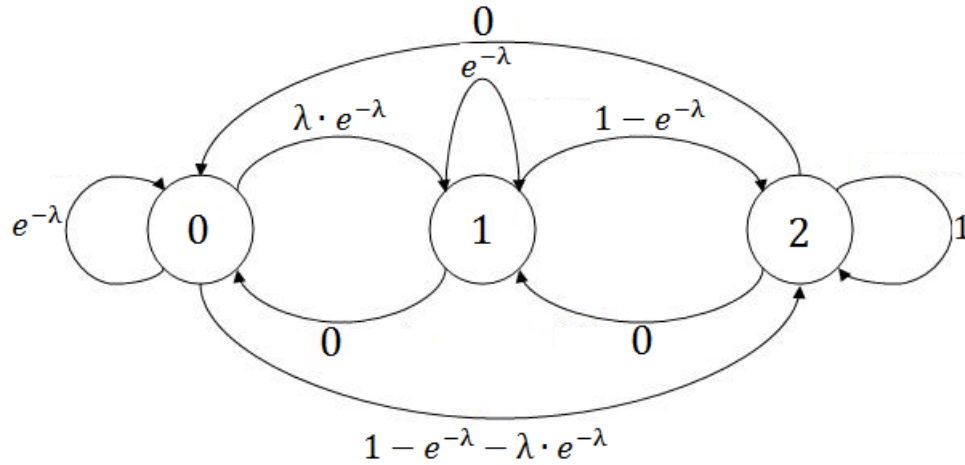


Figura 4: Automa a stati finiti della catena di Markov per il semaforo rosso, caso $N=2$

La dinamica del sistema cambia quando il semaforo impone il verde. Bisogna ora tenere conto di un certo numero di vetture uscenti dalla strada, fatto che precedentemente era vietato. In particolare, si avrà:

$$X(t+1) = \begin{cases} N & \text{se } \xi(t) + X(t) - v(t) \geq N \\ \xi(t) + X(t) - v(t) & \text{se } \xi(t) + X(t) - v(t) < N \end{cases}$$

Nell'intervallo $t+1$ la coda è ora in grado di svuotarsi, se $\xi(t) - v(t) < 0$, ovvero nel caso in cui sia maggiore il numero di vetture uscenti rispetto a quello delle vetture entranti. Se però $\xi(t) - v(t) > 0$, significa che nell'intervallo t arrivano più vetture di quelle che sono in grado di lasciare la strada, per cui la coda è destinata a crescere. Se la differenza fra $\xi(t)$ e $v(t)$ si annulla, la coda rimarrà costante e uguale a $X(t)$, il suo ultimo valore registrato. Persiste ovviamente il limite imposto dalla capacità massima della strada, che non sarà possibile superare.

Data la particolare distribuzione di $v(t)$, la matrice di transizione (che chiameremo V) sarà il risultato di una combinazione lineare di tre matrici diverse, del tipo:

$$V = 0.8 \cdot V_{v(t)=\eta} + 0.1 \cdot V_{v(t)=\eta-1} + 0.1 \cdot V_{v(t)=\eta+1}$$

Di seguito copriremo il caso della distribuzione con $\eta = 1$. La matrice risultante sarà:

$$V = 0.8 \cdot V_{v(t)=1} + 0.1 \cdot V_{v(t)=0} + 0.1 \cdot V_{v(t)=2}$$

$$V_{v(t)=0} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-2}}{(N-2)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-3}}{(N-3)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{v(t)=1} = \begin{bmatrix} (1+\lambda) \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^N}{N!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^N \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-2}}{(N-2)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$V_{v(t)=2} = \begin{bmatrix} (1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^N}{(N)!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N+1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ (1+\lambda) \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^N}{(N)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^N \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-2}}{(N-2)!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ 0 & e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^{N-3}}{(N-3)!} \cdot e^{-\lambda} & \frac{\lambda^{N-2}}{(N-2)!} \cdot e^{-\lambda} & 1 - \sum_{s=0}^{N-2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

Come in precedenza, la matrice di transizione è di dimensione $(N + 1, N + 1)$ e rispetta il vincolo che ogni riga sommi a 1. Si noti come il caso $v(t) = 0$ sia espresso dalla stessa matrice del semaforo rosso. Ciò è corretto, in quanto sotto tale ipotesi, nessuna vettura uscirà dalla strada e il comportamento sarà perfettamente analogo al precedente. Esclusa questa evenienza, si osservi come la coda possa ora svuotarsi, laddove gli elementi al di sotto della diagonale principale siano diversi da 0. Allo stesso modo può aumentare, ma con probabilità sempre minori tanto più è netta la differenza $X(t + 1) - X(t)$.

Più in generale, la struttura finale di $V = (v)_{i,j \in \mathbb{N}}$ può essere espressa nei seguenti termini:

Per $j \neq 0, N$

$$v_{ij} = \sum_{k=0}^{v_{max}} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{j-i+k}}{(j-i+k)!} \cdot H(j-i+k) \cdot P\{v(t) = k\}$$

Per $j = 0$

$$v_{i0} = \sum_{k=0}^{v_{max}} \sum_{s=0}^k \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{-i+s}}{(-i+s)!} \cdot H(-i+s) \cdot P\{v(t) = k\}$$

Per $j = N$

$$v_{iN} = \sum_{k=0}^{v_{max}} \left(1 - \sum_{s=0}^{k-i+N-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^s}{s!} \cdot H(k-i+N-1) \right) \cdot P\{v(t) = k\}$$

Dove con $P\{v(t) = k\}$ si intende la probabilità che le vetture uscenti siano esattamente k , e con $H(x)$ facciamo riferimento alla funzione di Heaviside, così definita:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Si definisce la distribuzione di probabilità come segue:

$$\mu_i(t) = P\{X(t) = i\},$$

e si costruisce il relativo vettore $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_0(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{bmatrix}$$

Per studiare la lunghezza media prevista per la coda ai vari intervalli, bisogna inizialmente stabilire una distribuzione di probabilità per il primo istante di osservazione. È legittimo pensare che sia equamente probabile per la catena di Markov trovarsi in uno qualsiasi degli $N + 1$ stati. Quindi:

$$\mu(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix},$$

dove $\mu(0)$ si presenta come un vettore colonna di dimensione $N + 1$, in cui ogni riga corrisponde ad uno stato, e $\alpha = \frac{1}{N+1}$.

Per descrivere come evolve la distribuzione di probabilità nel tempo, vale la formula:

$$\mu(t + 1) = P'_{\sigma(t)} \cdot \mu(t),$$

$$\text{dove } P_{\sigma(t)} = \begin{cases} R & \text{se } \sigma(t)=1 \\ V & \text{se } \sigma(t)=2 \end{cases}$$

$\sigma(t) = 1$ corrisponde al semaforo rosso nell'intervallo t , similmente $\sigma(t) = 2$ equivale al semaforo verde nell'intervallo t .

In tal modo, definendo a priori l'ordine periodico dei segnali, come verrà chiarito nel prossimo paragrafo, si corregge di volta in volta la distribuzione di probabilità. Sulla base di essa si definisce il valore atteso $n(t)$ della coda:

$$n(t) = E[X(t)] = \sum_{i=0}^N i \cdot \mu_i(t)$$

Noto il valore atteso, è immediato determinare la varianza:

$$\sigma_{X(t)}^2 = \sum_{i=0}^N (i - n(t))^2 \cdot \mu_i(t)$$

Per avere una misura della variabilità più compatibile coi valori di $n(t)$, si può prendere in considerazione la deviazione standard in luogo della varianza:

$$\sigma_{X(t)} = \sqrt{\sigma_{X(t)}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^N (i - n(t))^2 \cdot \mu_i(t)}$$

Si consideri infine un ultimo indice di prestazione, che chiameremo $q_s(t)$, così definito:

$$q_s(t) = \sum_{i=s}^N \mu_i(t)$$

$q_s(t)$ rappresenta la probabilità di avere nell'intervallo t una coda superiore ad una determinata soglia critica s . Nel seguito la soglia critica sarà considerata costante, a pari a:

$$s = [0.8 * N],$$

dove si è fatto uso della funzione parte intera, che restituisce il più grande intero minore o uguale a $(0.8 * N)$. Più in generale essa è definita come:

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$$

2.3 Strategie Periodiche di Attivazione del Semaforo

Si suppone che per l'analisi siano noti a priori i parametri della strada. Essi corrispondono ai valori medi delle vetture entranti (λ) e uscenti (η) ad ogni intervallo, e alla capacità massima della strada (N).

Per il modello della singola strada è stata ipotizzata una strategia di tipo periodico. Si prenda in esame un lasso di tempo composto da M intervalli di precisa durata temporale³. Tale tecnica permette di scandire il periodo assegnando il segnale rosso per una certa durata, e il segnale verde per il tempo rimanente. Esaurito il primo ciclo, questo viene ripetuto allo stesso modo per i successivi, imponendo, difatti, una cadenza periodica dei segnali. Si può supporre, senza perdita di generalità, che il primo comando del semaforo corrisponda al segnale rosso.

Definito T_v come il numero di intervalli all'interno del ciclo in cui viene assegnato il verde:

Per $0 < T_v < M$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [kM, (k+1)M - T_v - 1] \\ 2 & \text{se } t \in [(k+1)M - T_v, (k+1)M - 1] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Per $T_v = 0$

$$\sigma(t) = 1, \forall t$$

Per $T_v = M$

$$\sigma(t) = 2, \forall t$$

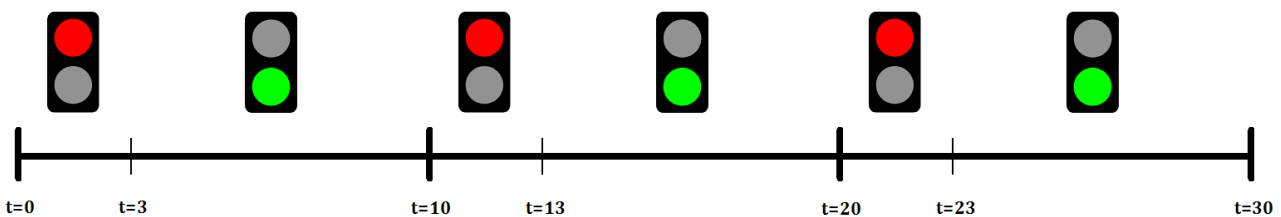


Figura 5: Esempio di strategia periodica per il modello di una singola strada. Tre cicli, $M=10$, $T_v=7$

Nell'esempio mostrato in figura 5, il ciclo è composto da un numero di intervalli $M = 10$. È stata scelta una suddivisione della sequenza in 3 intervalli di tempo dedicati al rosso, e nei 7 rimanenti al verde. La scansione del ciclo viene poi ripetuta ugualmente per i successivi.

Si consideri ora il caso limite di un ciclo composto esclusivamente da 10 intervalli di segnale rosso e si osservi come cambia la lunghezza media della coda nel tempo⁴:

³ Sulla base dei comuni impianti semaforici, 1 intervallo della nostra trattazione equivale verosimilmente a una quantità compresa tra i 5 e i 10 secondi.

⁴ In figura 6, così come nelle successive, è stato posto un orizzonte temporale pari a 100 intervalli, sufficiente a rilevare un andamento periodico laddove sia presente e a trarre le relative conclusioni del caso.

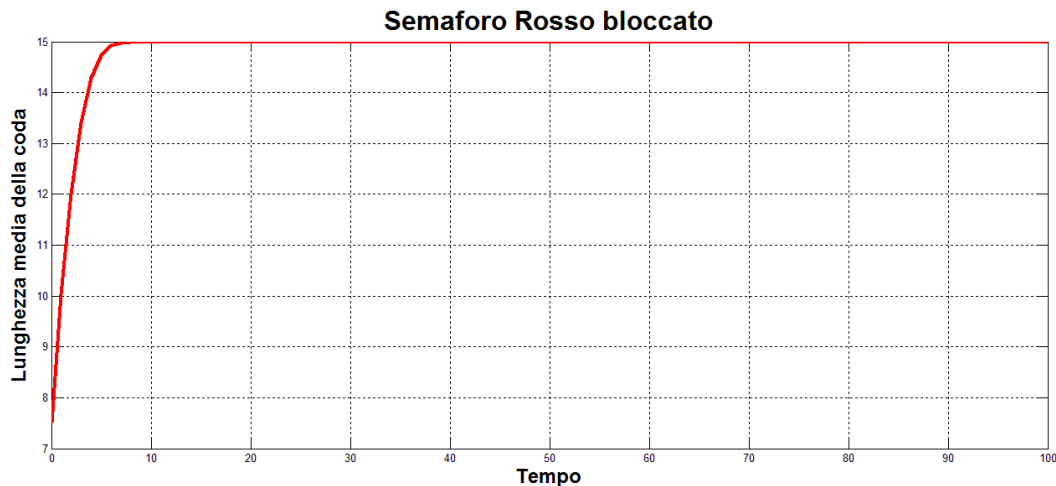


Figura 6: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo rosso bloccato, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$

La figura 6 mostra come in breve tempo sulla base della teoria una strada con capacità massima $N = 15$ e con $\lambda = 3$ saturi al valore massimo. L'equa distribuzione di probabilità iniziale suggerisce una coda media al tempo $t = 0$ di 7.5 vetture. Nelle condizioni di non poter liberare la strada da alcuna vettura, questa tenderà a riempirsi rapidamente: al secondo intervallo essa raggiunge quota 12, mentre in $t = 11$ il traffico sarà definitivamente bloccato per via del raggiungimento della saturazione. Evidentemente all'istante di osservazione finale la distribuzione di probabilità cambia in maniera significativa:

$$\mu(100) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Saturando presto a N , e non potendo garantire un deflusso delle vetture, il sistema con probabilità del 100% si troverà infine nell'ultimo stato, che dalla teoria prende il nome di "stato trappola". La considerazione è immediata se si torna a osservare la matrice di transizione in questione, che in ultima riga presentava probabilità nulla di passaggio da N a qualsiasi altro stato diverso da esso.

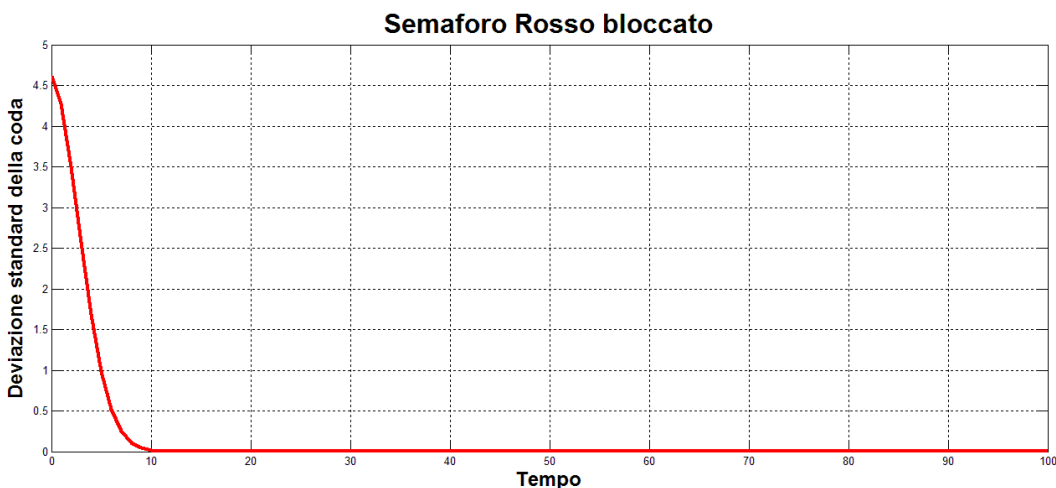


Figura 7: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo rosso bloccato, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$

Intuitivamente, come conferma la figura 7, la deviazione standard si assesta sullo zero non appena il valore atteso rimane costante e uguale al valore massimo 15.

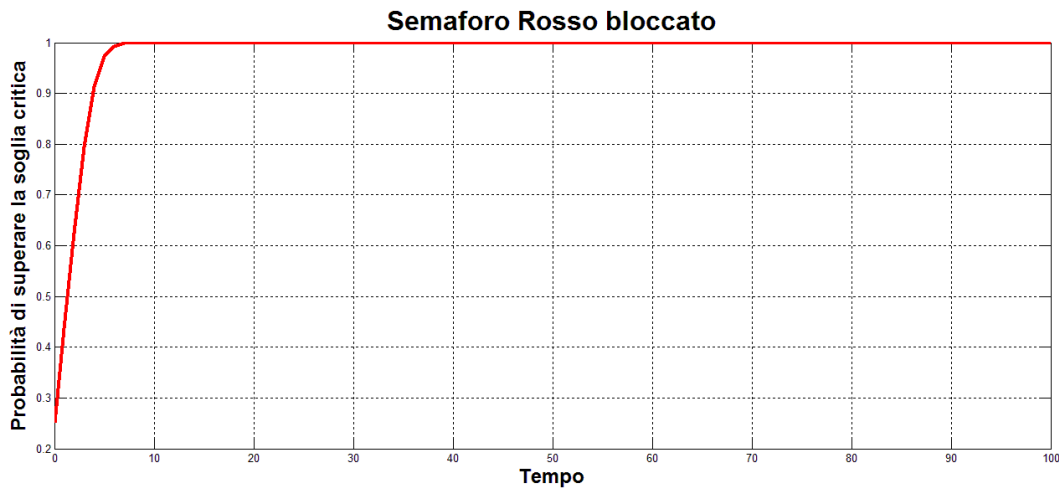


Figura 8: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo rosso bloccato, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$

L'indice $q_s(t)$ ha un andamento che ricalca quello della lunghezza media, crescendo istantaneamente verso il valore massimo che può assumere, 1. In $t = 9$ con probabilità certa la coda supererà la soglia critica delle 12 vetture⁵ e naturalmente continuerà a farlo in presenza di semaforo rosso.

È interessante indagare la situazione diametralmente opposta, caratterizzata da un ciclo composto solo da 10 intervalli di segnale verde. Per conservare un certo grado di confronto con i grafici precedenti, manterremo gli stessi input $N = 15$, $\lambda = 3$, andando semplicemente a definire η , di cui il caso precedente era sprovvisto.

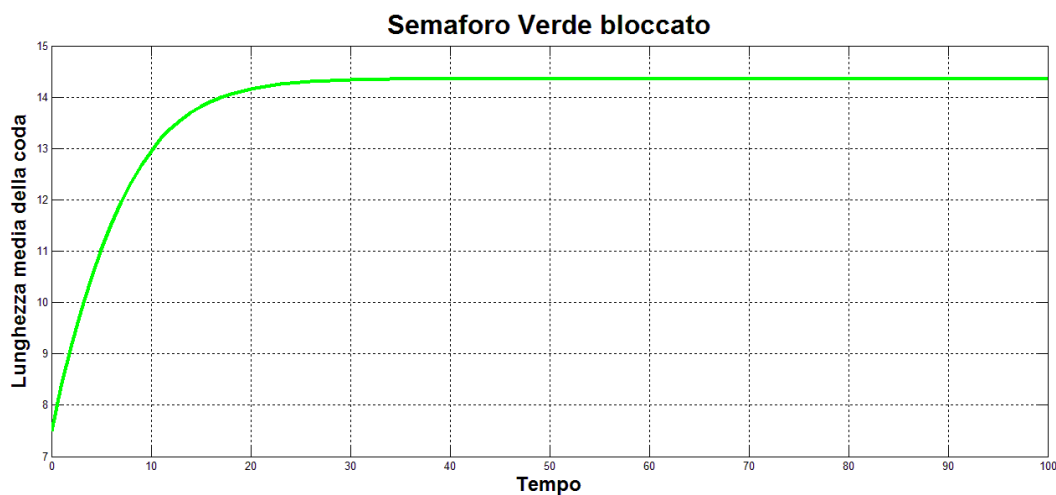


Figura 9: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=2$

⁵ Per $N=15$, $[0.8 * N] = 12$.

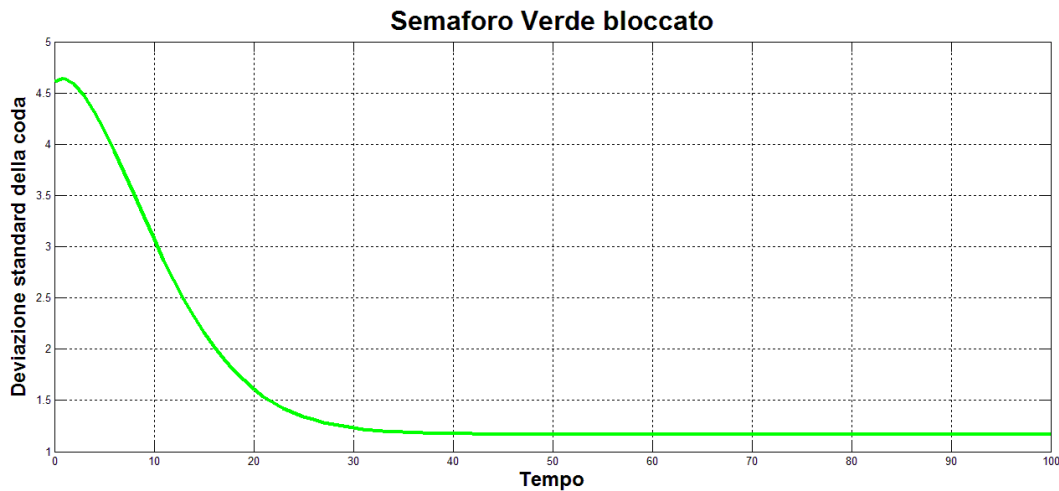


Figura 10: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=2$

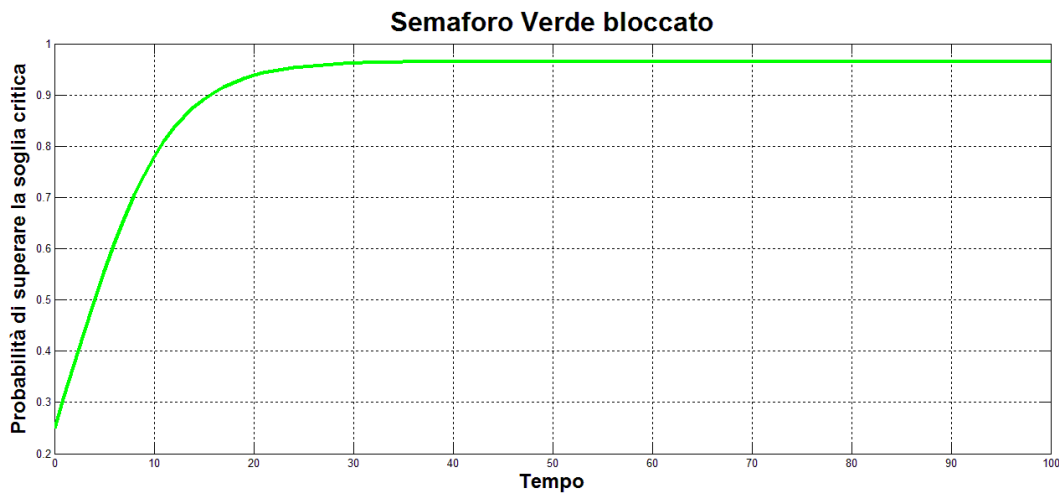


Figura 11: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=2$

Il comportamento è simile se ipotizziamo un valore di η basso in relazione a λ . Se impostassimo $\eta = 2$ la curva della lunghezza media della coda avrà un andamento affine alla curva di figura 6, sebbene non saturi mai al valore massimo, ma si stabilizzi su uno poco inferiore, in tempi comunque più lunghi; questo perché mediamente arrivano più vetture di quelle che sono in grado di uscire. Nonostante il semaforo rimanga bloccato sul verde, la coda non riuscirebbe mai a svuotarsi, anche solo parzialmente. Tale situazione rappresenta certamente una rara eccezione, che rischierebbe di danneggiare gravemente il traffico anche nelle vie circostanti. Non giungendo mai la coda a saturazione, la deviazione standard si terrà sempre su una quota costante piuttosto bassa, ma mai nulla. Infine la probabilità di superare la soglia critica delle 12 vetture aumenterà progressivamente col tempo, ma rimarrà sempre una probabilità, seppur bassa, di avere una coda al di sotto della soglia critica.

Tenendo conto dei risultati appena riscontrati, si è modificato il valore di η , portandolo a 5:

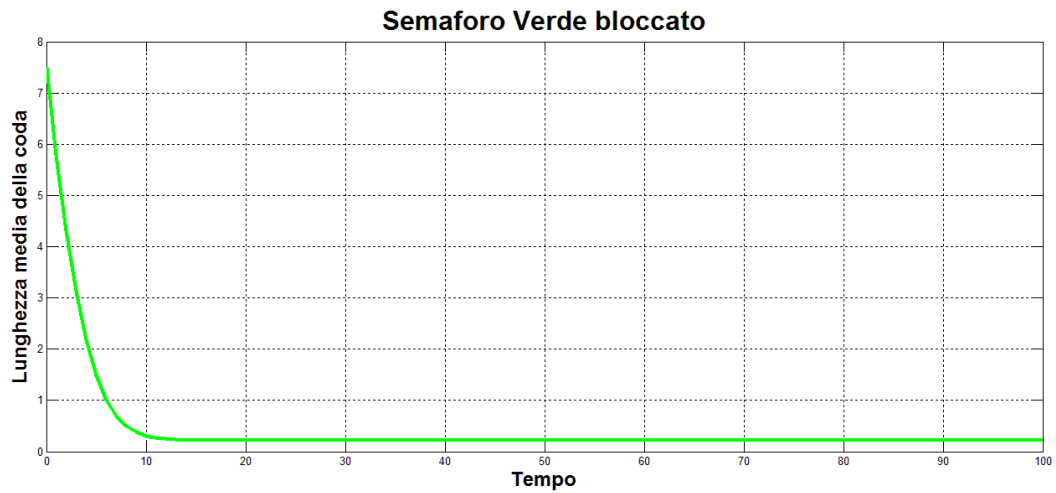


Figura 12: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

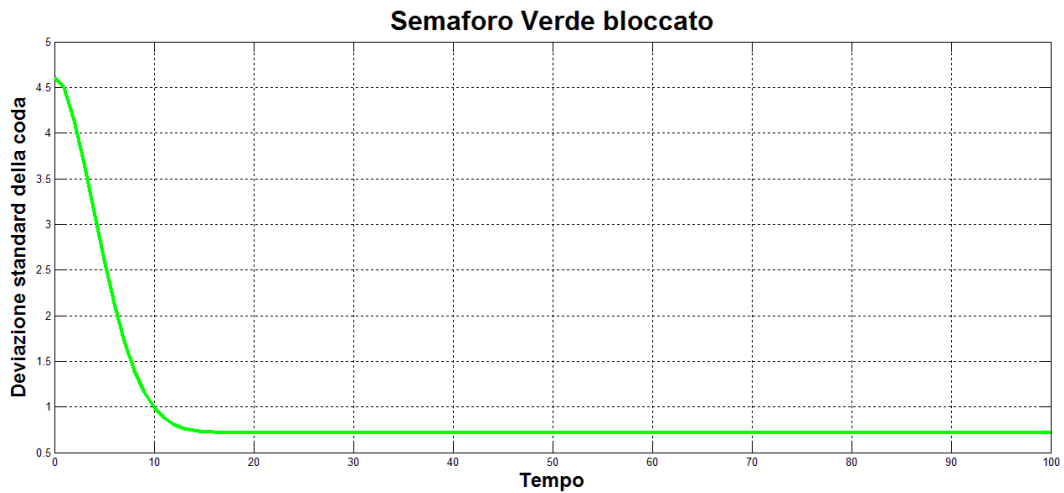


Figura 13: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

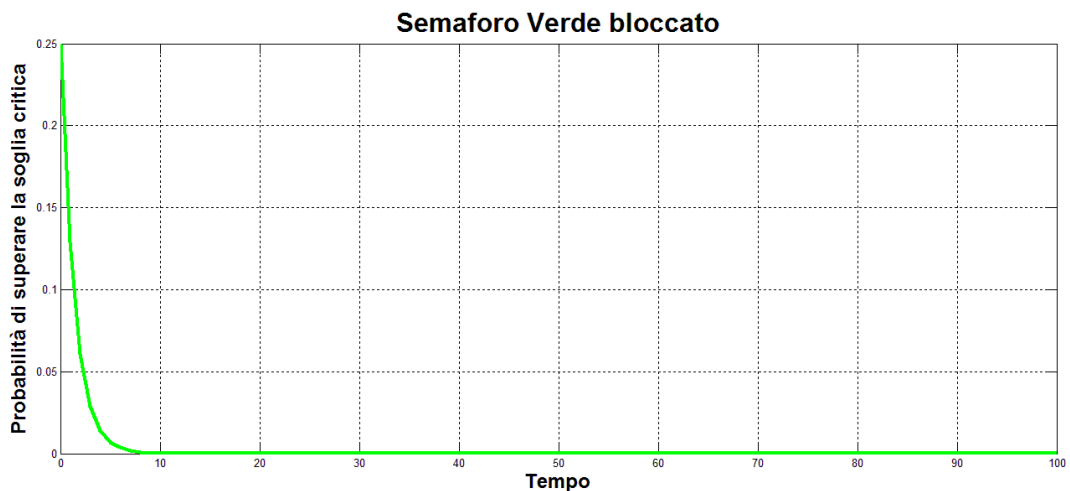


Figura 14: Modello singola strada, strategia periodica, semaforo verde bloccato, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

Partendo sempre, come è corretto che sia, da una lunghezza media iniziale identica, la curva ora decresce, in quanto in media sono più le vetture che escono che quelle entranti, ad ogni

intervallo. Si noti come, nonostante il semaforo permanga indefinitamente sul verde, la coda non si azzererà mai. La questione è facilmente risolta se si pensa che ad ogni intervallo avremo sempre una probabilità non nulla di immissione di altre vetture. Tuttavia la mancanza del divieto di transito permette alla coda di defluire agevolmente e assestarsi su un valore medio inferiore a 1. Similmente a prima, poiché la coda non satura a 0, rimane una componente, seppur limitata, di variabilità, come si può osservare in figura 13. Per quanto riguarda l'indice $q_s(t)$, in questo caso, la probabilità di superare la soglia critica, a regime, è da considerarsi praticamente nulla.

Dopo aver affrontato i casi limite di semafori ad un solo segnale luminoso, mettiamo in atto la strategia periodica descritta, al variare del numero di intervalli di verde T_v nel ciclo. I parametri in ingresso sono gli stessi utilizzati nell'ultimo caso: $N = 15$, $\lambda = 3$, $\eta = 5^6$.

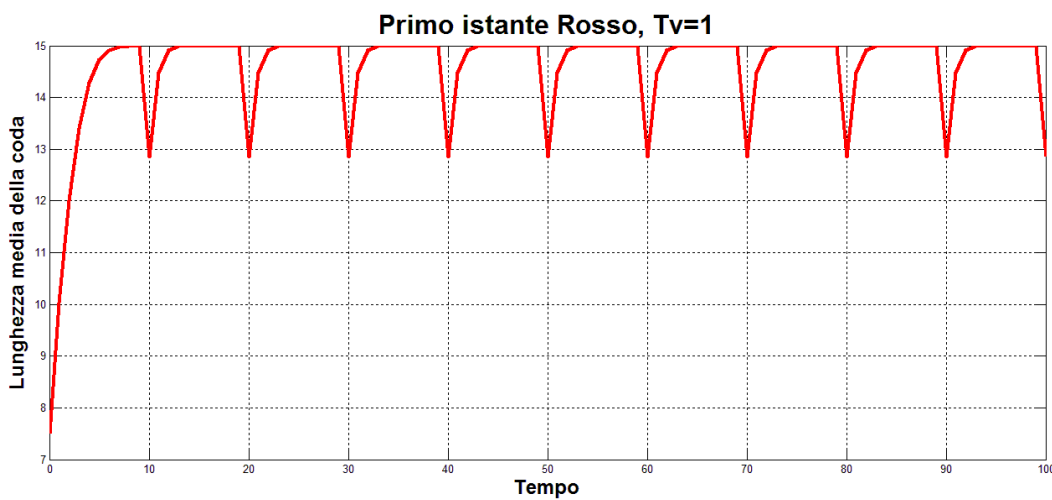


Figura 15: Modello singola strada, strategia periodica, 1 intervallo di verde sul singolo ciclo, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

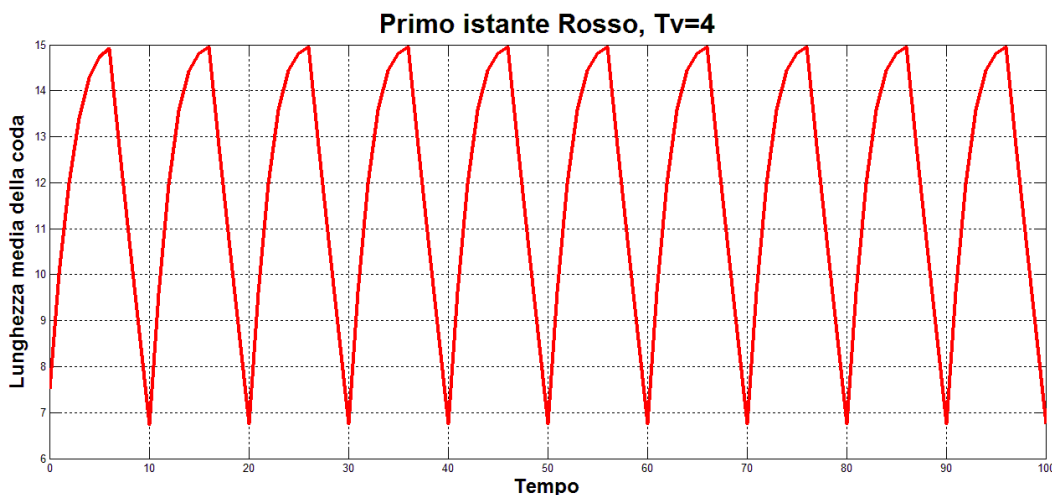


Figura 16: Modello singola strada, strategia periodica, 4 intervalli di verde sul singolo ciclo, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

⁶ Di seguito sono riportati solo i casi più significativi.

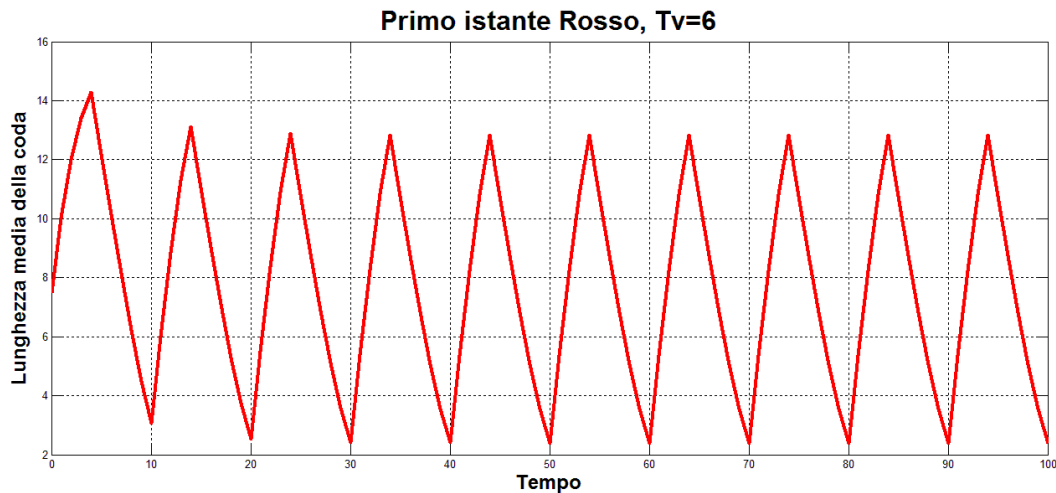


Figura 17: Modello singola strada, strategia periodica, 6 intervalli di verde sul singolo ciclo, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

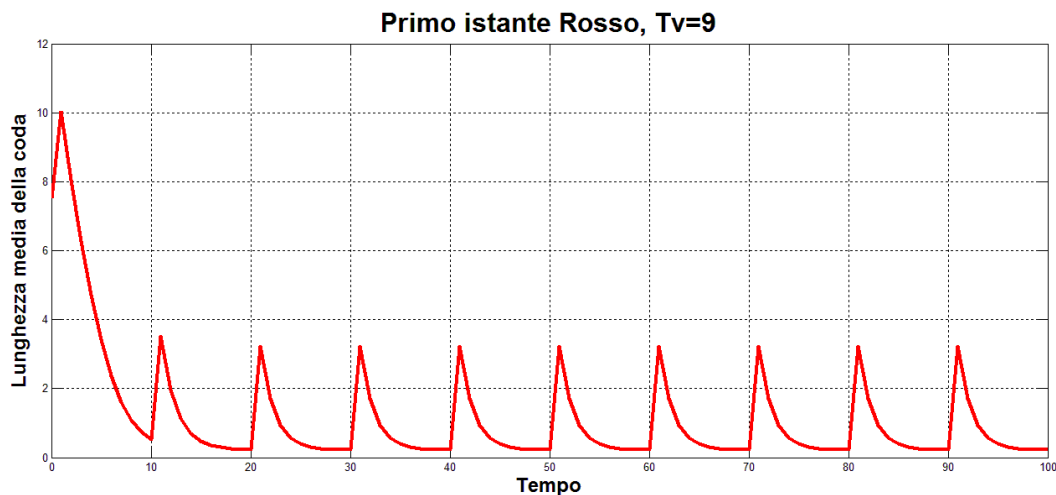


Figura 18: Modello singola strada, strategia periodica, 9 intervalli di verde sul singolo ciclo, lunghezza media della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

Imponendo il verde per 1 intervallo di tempo, a seguito di 9 intervalli di rosso, si nota come la lunghezza media della coda cresce fino a saturare prima dell'intervallo di verde successivo, fin dal primo ciclo. È ovvio che una situazione simile è difficilmente accettabile per la strada in questione, che resterebbe sempre altamente congestionata. Aumentando progressivamente il tempo di verde, la situazione migliora: per $T_v = 4$ per la prima volta la lunghezza media non raggiunge il valore massimo, sebbene lo sfiori all'ultimo istante di rosso. Prolungando la porzione di verde, la strada beneficerebbe di un traffico sempre più leggero: per $T_v = 6$ la lunghezza media massima prevista, escluso il primo ciclo, non tocca nemmeno le 13 vetture. Lasciando il rosso per 1 solo intervallo di tempo, dopo un primo ciclo di assestamento, la coda mediamente non supererà mai la quota di 4 vetture.

Accanto alle considerazioni legate a $n(t)$, è opportuno porre l'attenzione anche sull'andamento di $\sigma_{X(t)}$ nel tempo:

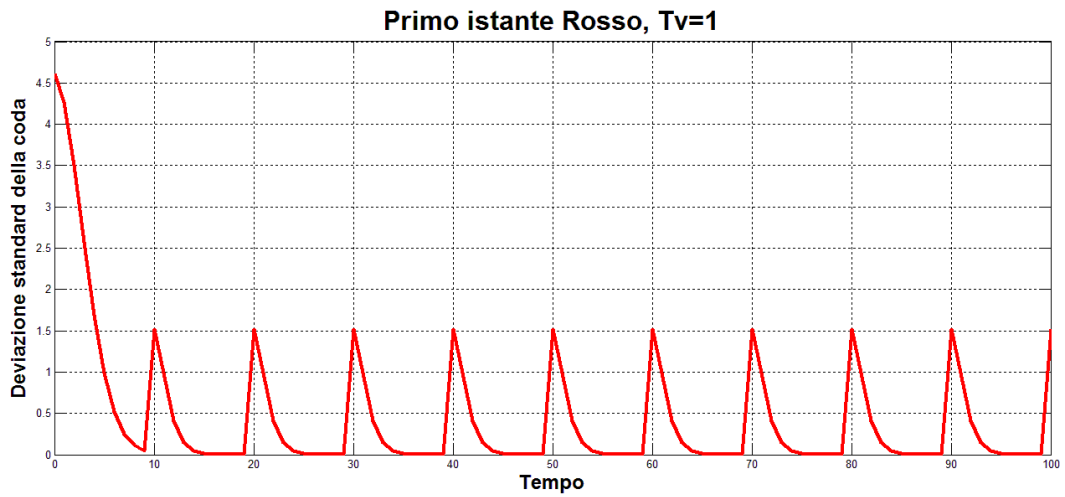


Figura 19: Modello singola strada, strategia periodica, 1 intervallo di verde sul singolo ciclo, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

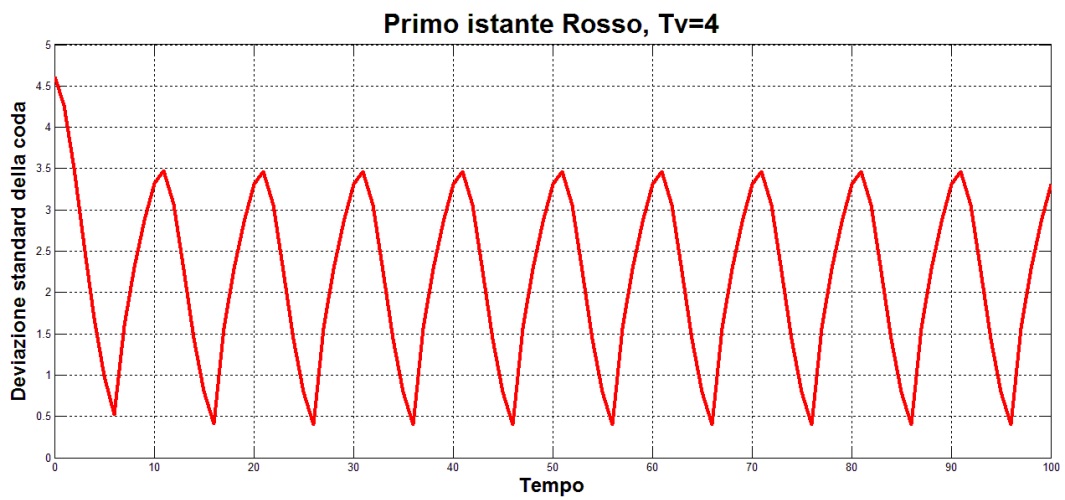


Figura 20: Modello singola strada, strategia periodica, 4 intervalli di verde sul singolo ciclo, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

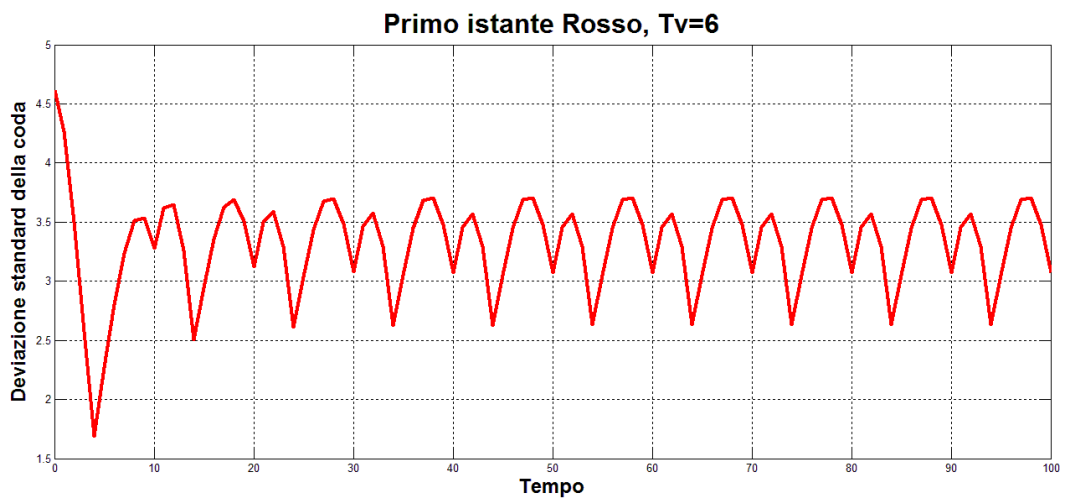


Figura 21: Modello singola strada, strategia periodica, 6 intervalli di verde sul singolo ciclo, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

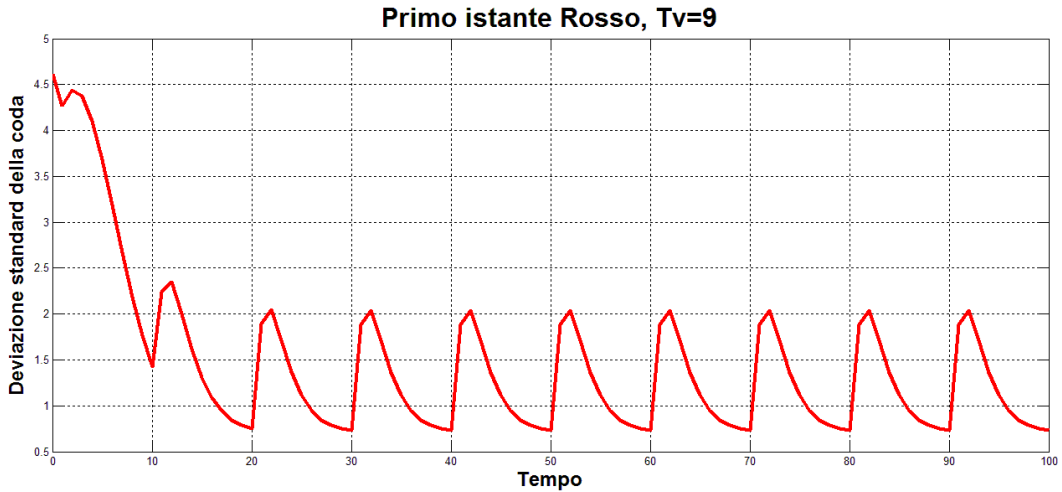


Figura 22: Modello singola strada, strategia periodica, 9 intervalli di verde sul singolo ciclo, deviazione standard della coda, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

In tutti i casi mostrati il primo ciclo è da considerarsi anomalo, caratterizzato da sbalzi significativi, per via della condizione iniziale della coda spesso ampiamente lontana dagli intervalli successivi. Per $T_v = 1$, a seguito della rapida saturazione della coda, la deviazione standard sarà in larga parte nulla, facendo registrare dei picchi in corrispondenza del segnale verde. Per $T_v = 4$ e $T_v = 6$, poiché l'andamento delle lunghezze medie è molto oscillatorio, le deviazioni standard varieranno entro un range di valori senza mai stabilizzarsi. Ciò accade invece, seppur parzialmente, quando $T_v = 9$, dal momento che, esclusi i picchi di rosso, la corrispettiva lunghezza media risulta quasi costante su un valore prossimo allo zero.

Si veda ora come cambia $q_s(t)$ al variare di T_v :

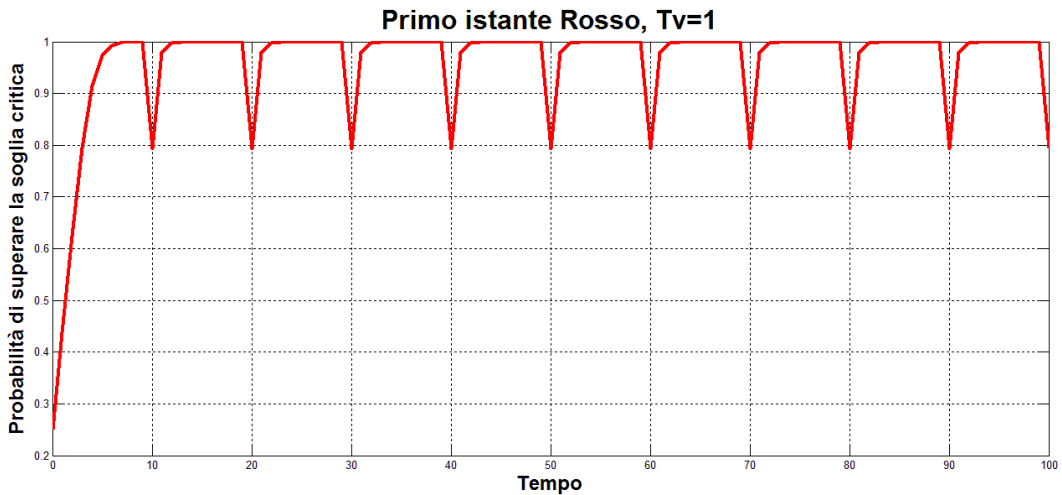


Figura 23: Modello singola strada, strategia periodica, 1 intervallo di verde sul singolo ciclo, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

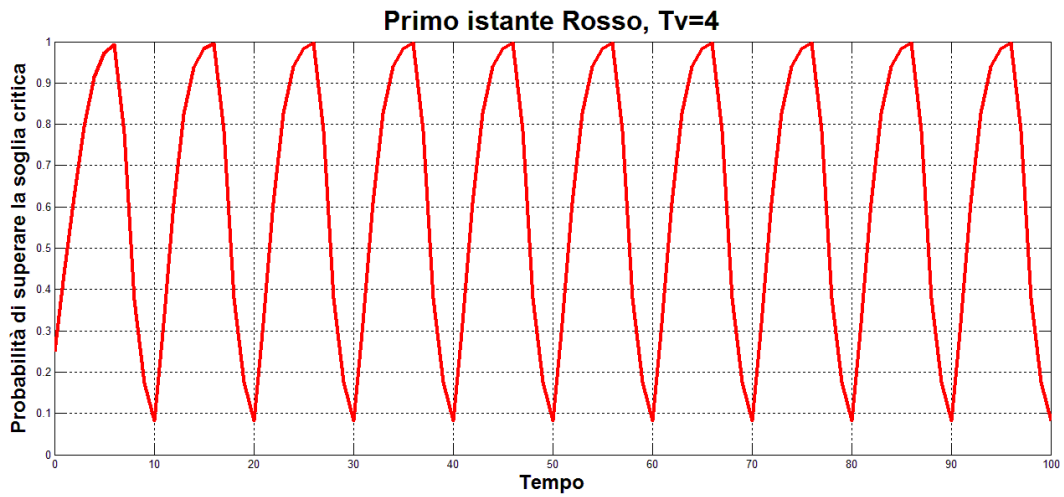


Figura 24: Modello singola strada, strategia periodica, 4 intervalli di verde sul singolo ciclo, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

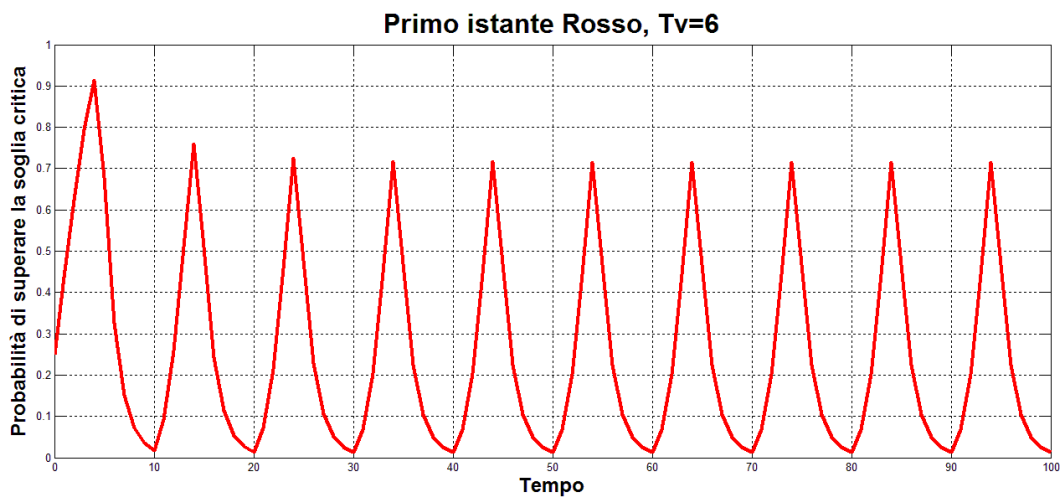


Figura 25: Modello singola strada, strategia periodica, 6 intervalli di verde sul singolo ciclo, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

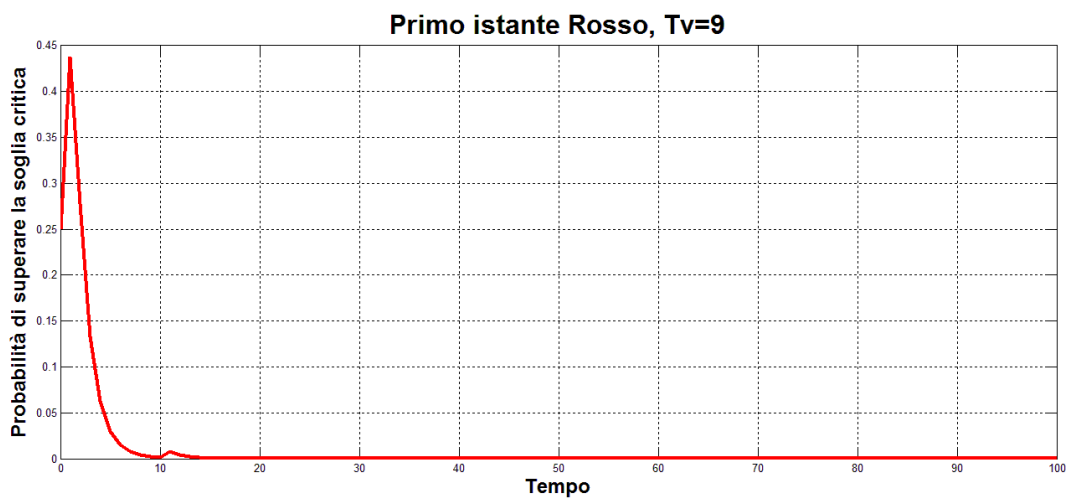


Figura 26: Modello singola strada, strategia periodica, 9 intervalli di verde sul singolo ciclo, probabilità di superare la soglia critica, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

Nei primi tre casi, l'andamento di $q_s(t)$ si adatta particolarmente a quello di $n(t)$, raggiungendo picchi di alte probabilità di varcare la soglia critica quando, parallelamente, la lunghezza media si avvicina alla capacità massima della strada. Per $T_v = 9$ il discorso è diverso, in quanto nel corrispondente grafico della lunghezza media la curva non supera mai la soglia critica; di conseguenza $q_s(t)$, eccetto un primo ciclo in cui si mantiene comunque basso, è da considerarsi nullo per tutti gli intervalli successivi.

Un'ulteriore indicazione di massima è fornita dal valore medio delle lunghezze medie della coda per ogni ciclo. Tale misura sintetizza in un unico numero l'andamento previsto per le code nei singoli periodi.

T_v	L_{c1}	$L_{cRegime}$
1	13.72	14.72
2	13.30	14.11
3	12.68	13.15
4	11.83	11.85
5	10.75	10.05
6	9.39	7.46
7	7.34	4.45
8	5.86	2.17
9	3.88	0.81

Tabella 1: Modello singola strada, strategia periodica, media delle lunghezze medie per ciclo, $N=15$, $\lambda=3$, $\eta=5$

In tabella, al variare di T_v , sono riportati i valori medi delle lunghezze medie relative al primo ciclo, L_{c1} , e di quelle ottenute a regime, dove per $L_{cRegime}$ si intende quel valore che oltre un certo ciclo rimane costante. Si osservi come da $T_v = 5$ in poi $L_{cRegime}$ decresca a partire dalla condizione iniziale. Se tenessimo in considerazione la stessa soglia critica s analizzata nel caso precedente, a regime non si correrebbe il rischio di superarla a partire da $T_v = 4$ in crescendo.

Nei prossimi capitoli si trasporranno le conclusioni derivanti dal comportamento della singola strada al caso più interessante dell'incrocio. In esso sono coinvolte due code diverse aventi obiettivi contrastanti fra loro. Si capisce dunque come il problema del controllo dei comandi semaforici diventi una questione complessa e delicata.

3. Modello dell'Incrocio con Strategie Periodiche

3.1 Descrizione del Modello e degli Obiettivi

Si consideri ora la situazione descritta da un incrocio che separa perpendicolarmente due strade a senso unico. Responsabile del corretto smaltimento del traffico all'incrocio è un impianto semaforico che coordina gli intervalli di verde di una strada con quelli di rosso dell'altra.

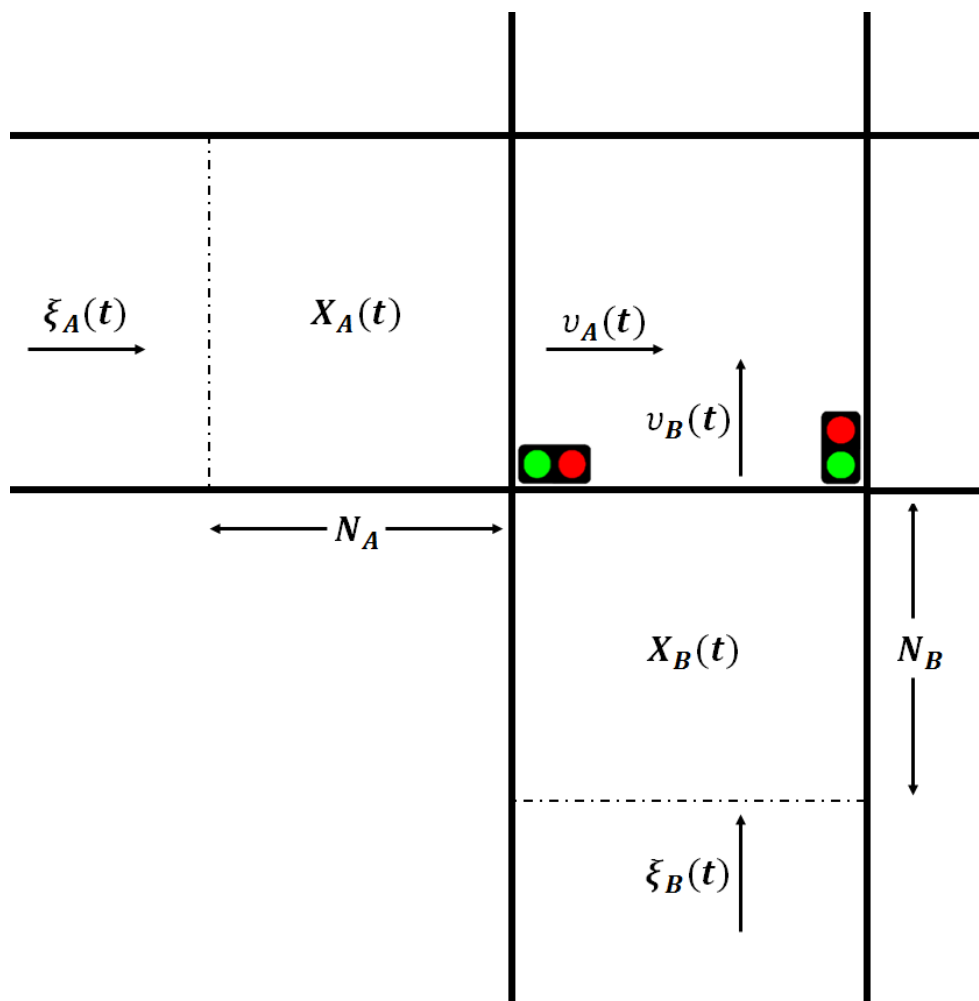


Figura 27: Incrocio, variabili di flusso

Come nel capitolo precedente, t è una variabile discreta che rappresenta l'indice dell'intervallo elementare, avendo suddiviso allo stesso modo l'asse dei tempi. Per comodità le due strade saranno identificate nel seguito come “strada A” e “strada B”. In figura 27 si osservano le variabili di flusso delle due strade:

- $X_A(t), X_B(t)$ rappresentano lo stato corrente delle code delle strade A e B, ovvero specificano il numero di veicoli in coda nelle singole strade all'inizio dell'intervallo t
- $\xi_A(t), \xi_B(t)$ rappresentano il numero di veicoli in ingresso nelle strade A e B nell'intervallo t
- $v_A(t), v_B(t)$ rappresentano il numero di veicoli in uscita dalle strade A e B nell'intervallo t

N_A, N_B rappresentano infine la capacità massima delle strade A e B, ovvero il massimo numero consentito di veicoli che le singole strade possono ospitare.

Si estendano al caso attuale tutte le ipotesi del caso della singola strada. In aggiunta:

- Quando vige il segnale verde per la strada A, necessariamente si ha il rosso per la strada B, e viceversa. Più in particolare, è garantita una perfetta alternanza dei segnali rosso-verde per le due strade. In caso contrario i due flussi in uscita si scontrerebbero al centro dell'incrocio.

È lecito assumere che i flussi in ingresso e in uscita delle due strade siano descritti come i relativi flussi della singola strada. Per cui, per quanto riguarda i flussi in ingresso:

$$\xi_A(t) \sim P(\lambda_A)$$

$$\xi_B(t) \sim P(\lambda_B)$$

Dove con λ_A e λ_B si intende il numero medio di arrivi nell'unità di tempo rispettivamente per la strada A e per la strada B.

Fissati η_A e η_B come i valori medi delle vetture in uscita ad ogni intervallo di tempo, le distribuzioni "quasi impulsive" dei due flussi si presentano nel modo seguente:

$$P\{v_A(t) = \eta_A - 1\} = 0.1$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B - 1\} = 0.1$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A\} = 0.8$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B\} = 0.8$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A + 1\} = 0.1$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B + 1\} = 0.1$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A \pm k, k > 1\} = 0$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B \pm k, k > 1\} = 0$$

Si ricordi la validità della relazione:

$$0 < \eta_A < N_A$$

$$0 < \eta_B < N_B$$

Come stabilito nel capitolo 2, il modello cambia in presenza dei diversi segnali luminosi. La dinamica dei due sistemi, in caso di semaforo rosso, può essere espressa nel modo seguente:

$$X_A(t+1) = \begin{cases} N_A & \text{se } \xi_A(t) + X_A(t) \geq N_A \\ \xi_A(t) + X_A(t) & \text{se } \xi_A(t) + X_A(t) < N_A \end{cases}$$

$$X_B(t+1) = \begin{cases} N_B & \text{se } \xi_B(t) + X_B(t) \geq N_B \\ \xi_B(t) + X_B(t) & \text{se } \xi_B(t) + X_B(t) < N_B \end{cases}$$

Allo stesso modo si possono costruire le relative matrici di transizione, che chiameremo R_A e R_B , di dimensione, rispettivamente $(N_A + 1, N_A + 1)$ e $(N_B + 1, N_B + 1)$:

$$R_A = (r_{A,ij})_{i,j \in \mathbb{N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i = j = N_A \\ \frac{e^{-\lambda_A} \cdot \lambda_A^{j-i}}{(j-i)!} & \text{se } i \leq j < N_A \\ 1 - \sum_{s=0}^{N_A-i-1} \frac{e^{-\lambda_A} \cdot \lambda_A^s}{s!} & \text{se } i < j = N_A \end{cases}$$

$$R_B = (r_{B,ij})_{i,j \in \mathbb{N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i = j = N_B \\ \frac{e^{-\lambda_B} \cdot \lambda_B^{j-i}}{(j-i)!} & \text{se } i \leq j < N_B \\ 1 - \sum_{s=0}^{N_B-i-1} \frac{e^{-\lambda_B} \cdot \lambda_B^s}{s!} & \text{se } i < j = N_B \end{cases}$$

Quando termina il rosso e inizia il verde, la dinamica dei sistemi cambia nel modo seguente:

$$X_A(t+1) = \begin{cases} N_A & \text{se } \xi_A(t) + X_A - v_A(t) \geq N_A \\ \xi_A(t) + X_A - v_A(t) & \text{se } \xi_A(t) + X_A - v_A(t) < N_A \end{cases}$$

$$X_B(t+1) = \begin{cases} N_B & \text{se } \xi_B(t) + X_B - v_B(t) \geq N_B \\ \xi_B(t) + X_B - v_B(t) & \text{se } \xi_B(t) + X_B - v_B(t) < N_B \end{cases}$$

Per costruire le relative matrici di transizione del semaforo verde V_A e V_B , anch'esse di dimensione rispettivamente $(N_A + 1, N_A + 1)$ e $(N_B + 1, N_B + 1)$, procederemo come ipotizzato nel capitolo precedente.

Strada A:

Per $j \neq 0, N_A$

$$v_{A,ij} = \sum_{k=0}^{v_{Amax}} \frac{e^{-\lambda_A} \cdot \lambda_A^{j-i+k}}{(j-i+k)!} \cdot H(j-i+k) \cdot P\{v_A(t) = k\}$$

Per $j = 0$

$$v_{A,i0} = \sum_{k=0}^{v_{Amax}} \sum_{s=0}^k \frac{e^{-\lambda_A} \cdot \lambda_A^{-i+s}}{(-i+s)!} \cdot H(-i+s) \cdot P\{v_A(t) = k\}$$

Per $j = N_A$

$$v_{A,iN_A} = \sum_{k=0}^{v_{Amax}} \left(1 - \sum_{s=0}^{k-i+N_A-1} \frac{e^{-\lambda_A} \cdot \lambda_A^s}{s!} \cdot H(k-i+N_A-1) \right) \cdot P\{v_A(t) = k\}$$

Strada B:

Per $j \neq 0, N_B$

$$v_{B,ij} = \sum_{k=0}^{v_{Bmax}} \frac{e^{-\lambda_B} \cdot \lambda_B^{j-i+k}}{(j-i+k)!} \cdot H(j-i+k) \cdot P\{v_B(t) = k\}$$

Per $j = 0$

$$v_{B,i0} = \sum_{k=0}^{v_{Bmax}} \sum_{s=0}^k \frac{e^{-\lambda_B} \cdot \lambda_B^{-i+s}}{(-i+s)!} \cdot H(-i+s) \cdot P\{v_B(t) = k\}$$

Per $j = N_B$

$$v_{B,iN_B} = \sum_{k=0}^{v_{Bmax}} \left(1 - \sum_{s=0}^{k-i+N_B-1} \frac{e^{-\lambda_B} \cdot \lambda_B^s}{s!} \cdot H(k-i+N_B-1) \right) \cdot P\{v_B(t) = k\}$$

Ogni considerazione espressa per i modelli della singola strada vale ancora per i modelli sopracitati.

Si introducono le rispettive distribuzioni di probabilità:

$$\mu_A(t) = \begin{bmatrix} \mu_{A,0}(t) \\ \vdots \\ \mu_{A,N_A}(t) \end{bmatrix} \quad \mu_B(t) = \begin{bmatrix} \mu_{B,0}(t) \\ \vdots \\ \mu_{B,N_B}(t) \end{bmatrix},$$

dove $\mu_A(t)$ e $\mu_B(t)$ sono dei vettori colonna di dimensione rispettivamente $N_A + 1$ e $N_B + 1$.

Per entrambe le code viene stabilita una distribuzione di probabilità iniziale, in $t = 0$:

$$\mu_A(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \mu_B(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

dove $\alpha = \frac{1}{N_A+1}$ e $\beta = \frac{1}{N_B+1}$, in virtù del fatto che possiamo supporre che le due catene di Markov si trovino inizialmente in uno qualsiasi degli $N_A + 1$ stati della strada A, e in uno qualsiasi degli $N_B + 1$ stati della strada B, rispettivamente.

Le distribuzioni di probabilità evolvono nel tempo secondo le formule:

$$\mu_A(t+1) = P'_{A,\sigma_A(t)} \cdot \mu_A(t) \quad \mu_B(t+1) = P'_{B,\sigma_B(t)} \cdot \mu_B(t),$$

dove:

$$P_{A,\sigma_A(t)} = \begin{cases} R_A & \text{se } \sigma_A(t)=1 \\ V_A & \text{se } \sigma_A(t)=2 \end{cases} \quad P_{B,\sigma_B(t)} = \begin{cases} R_B & \text{se } \sigma_B(t)=1 \\ V_B & \text{se } \sigma_B(t)=2 \end{cases}$$

L'ipotesi introdotta per il caso dell'incrocio implica che quando $\sigma_A(t) = 1$, sia $\sigma_B(t) = 2$, ovvero il semaforo dia il comando rosso alla strada A e quello verde alla strada B nello stesso intervallo t . Viceversa, finché si ha $\sigma_B(t) = 1$, deve valere $\sigma_A(t) = 2$.

Per quanto riguarda gli indici di prestazione, avremo i valori attesi delle singole code:

$$n_A(t) = E[X_A(t)] = \sum_{i=0}^{N_A} i \cdot \mu_{A,i}(t)$$

$$n_B(t) = E[X_B(t)] = \sum_{i=0}^{N_B} i \cdot \mu_{B,i}(t)$$

Si può ricavare anche il valore atteso della coda complessiva, data dalla somma delle due code. Se identifichiamo con $X(t)$ la coda complessiva ad un generico intervallo t , essa risulterà essere:

$$X(t) = X_A(t) + X_B(t)$$

Per trovare $n(t)$, valore atteso di $X(t)$, si ricordi la proprietà di linearità del valore atteso:

$$n(t) = E[X(t)] = E[X_A(t)] + E[X_B(t)] = n_A(t) + n_B(t)$$

Noti i valori attesi, determiniamo le deviazioni standard delle singole code:

$$\sigma_{X_A(t)} = \sqrt{\sigma_{X_A(t)}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_A} (i - n_A(t))^2 \cdot \mu_{A,i}(t)}$$

$$\sigma_{X_B(t)} = \sqrt{\sigma_{X_B(t)}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_B} (i - n_B(t))^2 \cdot \mu_{B,i}(t)}$$

Non godendo della proprietà di linearità, il calcolo dello scarto quadratico medio della coda complessiva è leggermente più laborioso:

$$\sigma_{X(t)} = \sqrt{\sigma_{X(t)}^2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N_A} \sum_{k=0}^{N_B} \mu_{A,j}(t) * \mu_{B,k}(t) * ((j + k) - n(t))^2}$$

Indicheremo con $q_{A,s}(t)$ e $q_{B,s}(t)$ le probabilità per le due strade di superare nell'intervallo t le rispettive soglie critiche s_A e s_B ⁷:

$$q_{A,s}(t) = \sum_{i=s_A}^{N_A} \mu_{A,i}(t)$$

$$q_{B,s}(t) = \sum_{i=s_B}^{N_B} \mu_{B,i}(t)$$

Le soglie critiche saranno considerate costanti e pari a:

$$s_A = \lfloor 0.8 * N_A \rfloor$$

$$s_B = \lfloor 0.8 * N_B \rfloor$$

⁷ Se si volesse considerare un indice di prestazione simile, relativo alla coda complessiva, sarebbe necessario avere a disposizione la distribuzione di probabilità congiunta per le due strade.

Il problema di controllo consiste nello stabilire la corretta alternanza dei comandi semaforici per le due strade, per:

- Evitare che sia inviato lo stesso segnale a entrambe: se nelle due direzioni vigesse contemporaneamente il verde, le vetture uscenti dalle strade si scontrerebbero; se invece fosse simultaneamente in vigore il rosso, in entrambe le strade la coda si accumulerebbe.
- Evitare code eccessive per ambedue le strade.

Se considerassimo due ipotetici “gestori” della strada, ognuno si porrebbe come obiettivo, quello di minimizzare la propria coda, ad ogni t .

Funzione obiettivo gestore A:

$$\min X_A(t), \forall t$$

Funzione obiettivo gestore B:

$$\min X_B(t), \forall t$$

L’obiettivo di un gestore è in evidente contrasto con quello dell’altro, poiché ogni coda può svuotarsi solo in corrispondenza del semaforo verde, ma quando una strada gode del verde, l’altra di conseguenza avrà il rosso.

Trovare una strategia che permetta di soddisfare entrambi i gestori non è semplice. Per questo motivo sono stati introdotti degli indici di prestazione globali, tesi a minimizzare la coda complessiva, senza dunque favorire una strada rispetto all’altra. Tuttavia, se gli andamenti della lunghezza media e della deviazione standard della coda complessiva fossero soddisfacenti, non vi è la certezza che una delle due code non saturi alla capacità massima. È quindi importante tenere in grande considerazione gli indici di prestazione delle singole strade, per assicurarsi che nessuna delle due si ritrovi in una situazione di alta congestione del traffico.

Dato che gli obiettivi di minimizzare le singole code sono contrastanti fra loro, una soluzione di compromesso si può ottenere garantendo che ad ogni intervallo nessuna delle due raggiunga la rispettiva capacità massima. Facendo invece uso di $q_{A,s}(t)$ e di $q_{B,s}(t)$, si può sperare di mantenere le probabilità di superare le soglie critiche il più basso possibile.

3.2 *Analisi delle Prestazioni*

Nel capitolo precedente, è stata attuata una strategia periodica di attivazione del semaforo nel caso di una singola strada. Si ripete ora la medesima strategia adeguata alla situazione attuale: si consideri un certo lasso di tempo e lo si scomponga in M intervalli caratterizzati dalla stessa durata. Per una frazione degli M intervalli il semaforo assegnerà il rosso ad una strada, e il verde all'altra; nel tempo rimanente i segnali si invertiranno. Tale ciclo sarà poi ripetuto allo stesso modo per i successivi, periodicamente.

Introduciamo la notazione:

$T_{A,v}$ = Tempo di verde nel ciclo per la strada A

$T_{A,r}$ = Tempo di rosso nel ciclo per la strada A

$T_{B,v}$ = Tempo di verde nel ciclo per la strada B

$T_{B,r}$ = Tempo di rosso nel ciclo per la strada B

Varranno le relazioni:

$$T_{A,r} = M - T_{A,v}$$

$$T_{B,r} = M - T_{B,v}$$

$$T_{A,v} = T_{B,r}$$

$$T_{A,r} = T_{B,v}$$

Le prime due assicurano che i tempi di verde e rosso siano complementari all'interno del ciclo, per ciascuna delle due strade. Le ultime due forniscono il vincolo per cui il tempo di rosso di una strada coincida con il tempo di verde dell'altra, e viceversa.

Se imponiamo che il semaforo inizi dando il rosso alla strada A, avremo:

Per $0 < T_{A,v} < M$

$$\sigma_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [k \cdot M, (k+1)M - T_{A,v} - 1] \\ 2 & \text{se } t \in [(k+1)M - T_{A,v}, (k+1)M - 1] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_B(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [k \cdot M, (k+1)M - T_{A,v} - 1] \\ 1 & \text{se } t \in [(k+1)M - T_{A,v}, (k+1)M - 1] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Per $T_{A,v} = 0$

$$\sigma_A(t) = 1, \forall t$$

$$\sigma_B(t) = 2, \forall t$$

Per $T_{A,v} = M$

$$\sigma_A(t) = 2, \forall t$$

$$\sigma_B(t) = 1, \forall t$$

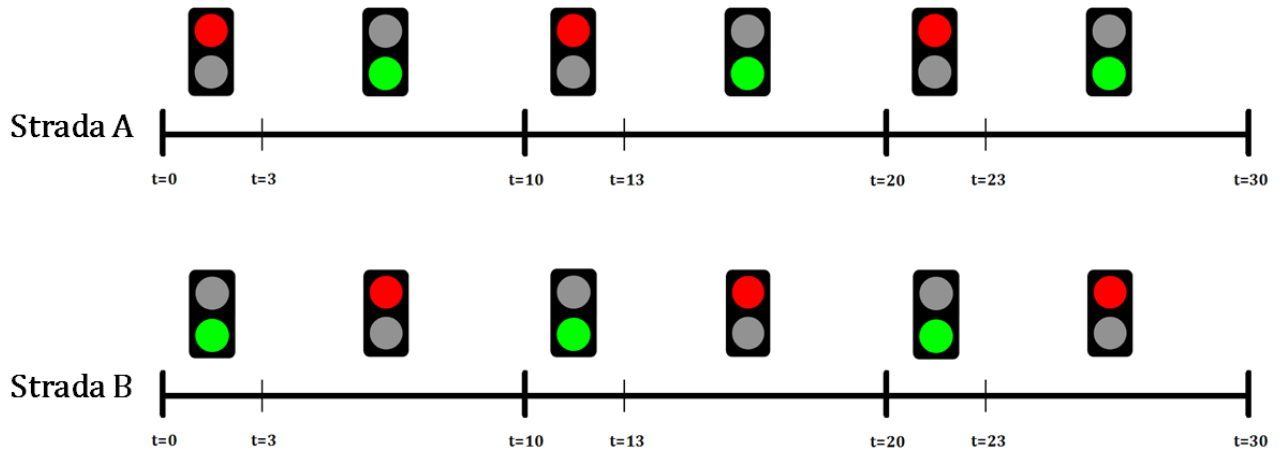


Figura 28: Esempio di strategia periodica per il modello di un incrocio. Tre cicli, $M=10$, $T_{A,v}=7$

In figura 28 è riportato un esempio di una possibile strategia periodica ad un incrocio: il ciclo è composto da $M = 10$ intervalli e si ripete tre volte periodicamente. Il semaforo assegna inizialmente il segnale verde alla strada B e lo mantiene per 3 intervalli di tempo; contemporaneamente le vetture in coda nella strada A avranno il divieto di transito. Allo scadere del tempo di verde per la strada B, le vetture in coda nella strada A potranno ora e per 7 intervalli di tempo, uscire dalla strada; nello stesso lasso di tempo il semaforo assegnerà alla strada B il segnale rosso, bloccandone il traffico. Si ripete poi la stessa scansione del ciclo per i due successivi.

Si considerino ora due strade contraddistinte dai parametri:

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 15 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

Si assume che il valore medio dei veicoli in uscita dalle due strade in ogni intervallo sia lo stesso: è ragionevole infatti supporre che le vetture defluiscano allo stesso modo da due strade diverse, se ipotizziamo che esse siano composte dallo stesso numero di corsie. La strada A risulta essere più lunga e più trafficata, in quanto, a parità di η , è il parametro λ a determinarne un traffico più intenso.

Inoltre si è assunto, da qui e per il prosieguo della trattazione, che un ciclo sia composto esattamente da $M = 10$ intervalli. L'analisi delle prestazioni è confinata negli intervalli compresi fra $t = 0$ e $t = 100$, sufficienti a stabilire i diversi andamenti periodici e a constatare le peculiarità espresse dai grafici.

Si osservi prima l'andamento degli indici di prestazione nei casi limite in cui il semaforo dia sempre il verde ad una delle due strade e il rosso all'altra:

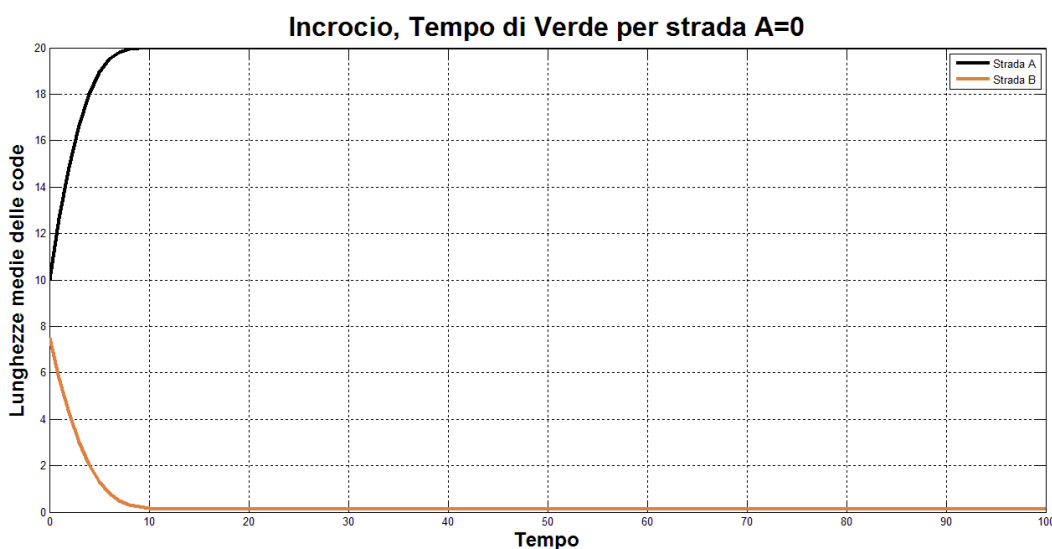


Figura 29: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=0$, lunghezze medie delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

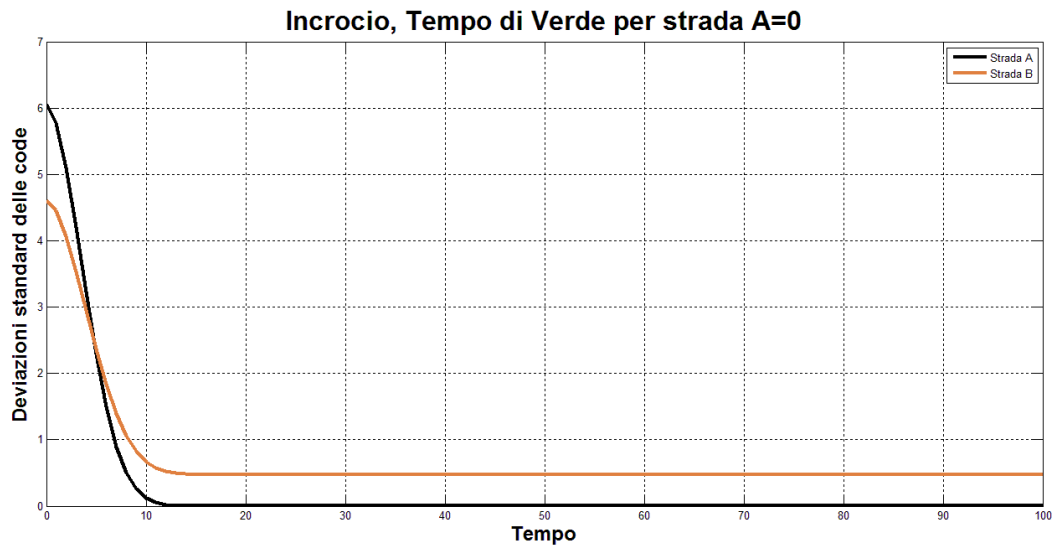


Figura 30: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=0$, deviazioni standard delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

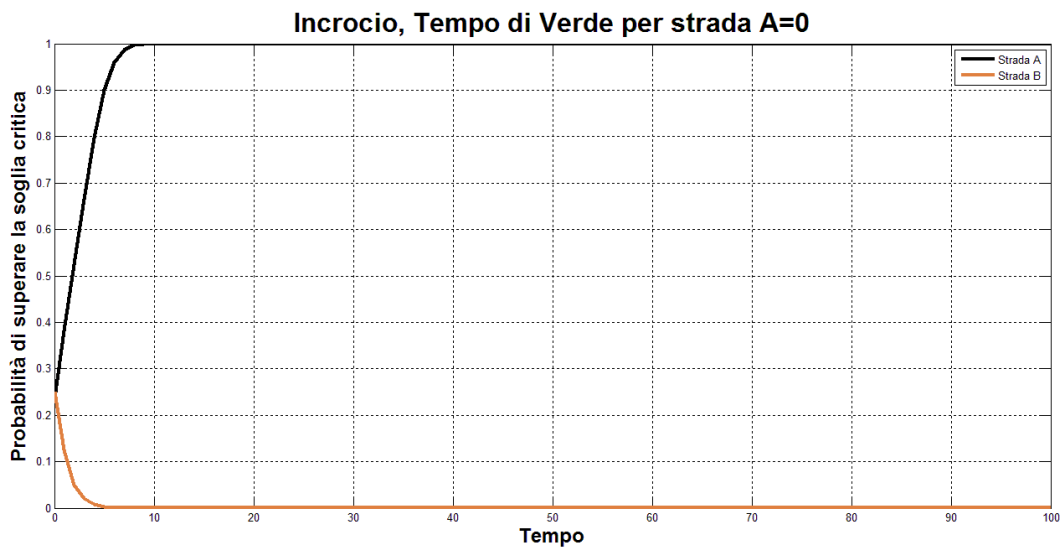


Figura 31: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=0$, probabilità di superare la soglia critica, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

In questo caso il tempo di verde nel ciclo per la strada A è nullo, per cui la sua lunghezza media è destinata a crescere e a saturare presto, mentre alla strada B il semaforo verde permette di svuotare la propria coda e ad assestarsi ad un valore prossimo allo 0. I valori costanti a cui si stabilizzano fanno sì che le relative deviazioni standard siano molto basse. Le lunghezze medie rappresentate in figura 29 suggeriscono come a regime siano certe e nulle le probabilità, rispettivamente, che la strada A e la strada B oltrepassino le loro soglie critiche.

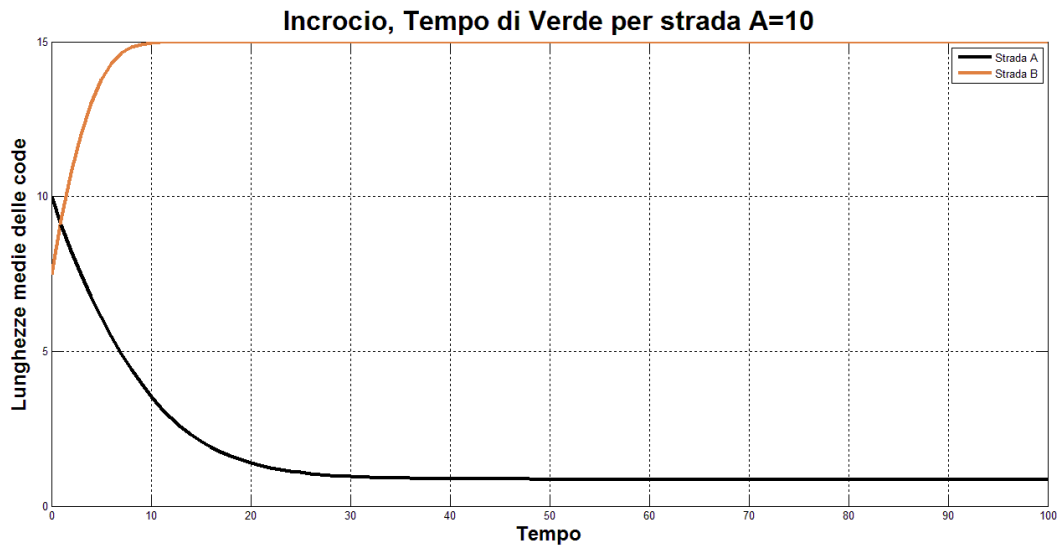


Figura 32: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 10$, lunghezze medie delle code, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

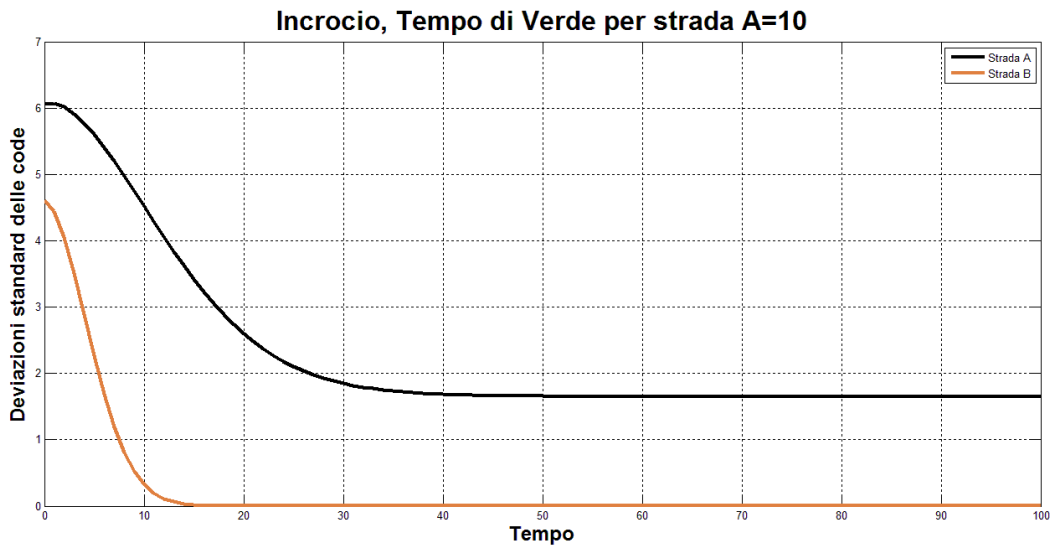


Figura 33: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 10$, deviazioni standard delle code, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

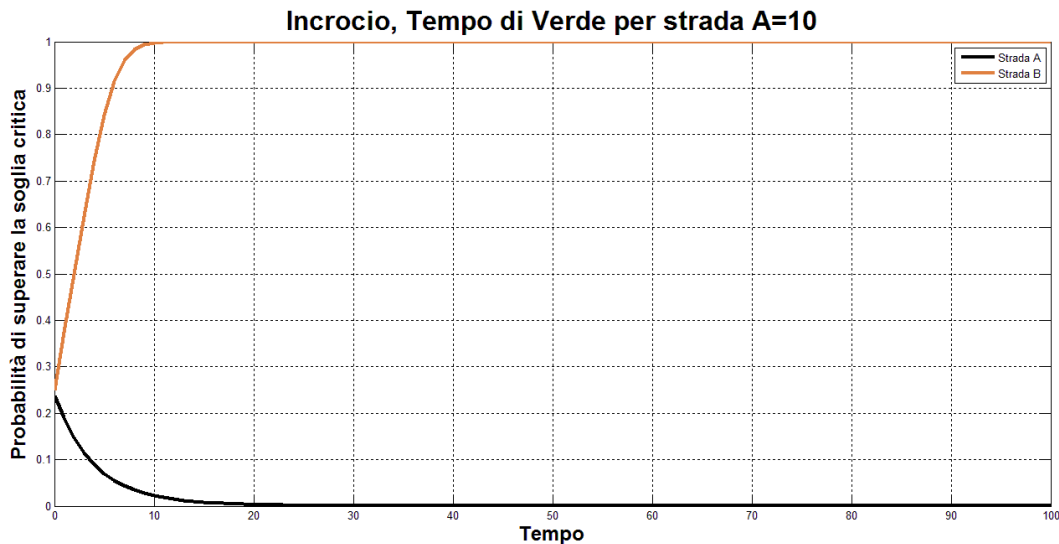


Figura 34: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 10$, probabilità di superare la soglia critica, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

Il caso opposto prevede che il semaforo sia indefinitamente verde per la strada A e rosso per la strada B. Gli andamenti dei grafici sono molto simili ai precedenti e valgono dunque le stesse considerazioni, previo scambio dei ruoli delle due strade.

Dovendo venire incontro alle esigenze dei conducenti delle vetture di ambedue le strade, una scelta che ne privilegi solo una sarà inappropriata. Fissiamo dunque:

$$0 < T_{A,v} < M = 10$$

Fatta tale assunzione, escludiamo dall'analisi i casi in cui la lunghezza media di una delle due strade saturi al suo valore massimo o stazioni a valori prossimi alla saturazione per più di un intervallo; tali casi saranno ritenuti inaccettabili. Di seguito si osservi, sotto tali condizioni, come cambia la situazione al progredire del tempo di verde nel ciclo per la strada A:

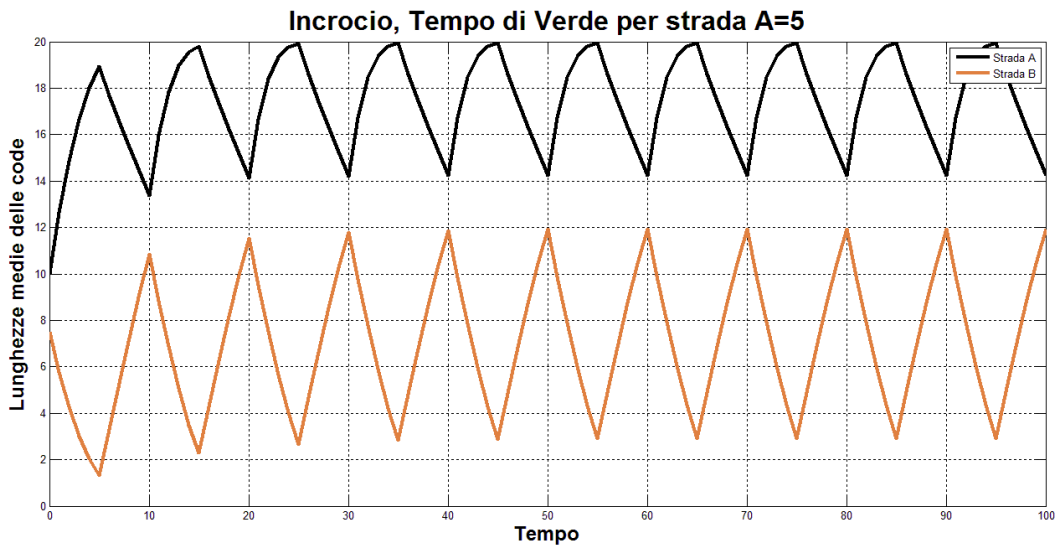


Figura 35: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 5$, lunghezze medie delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

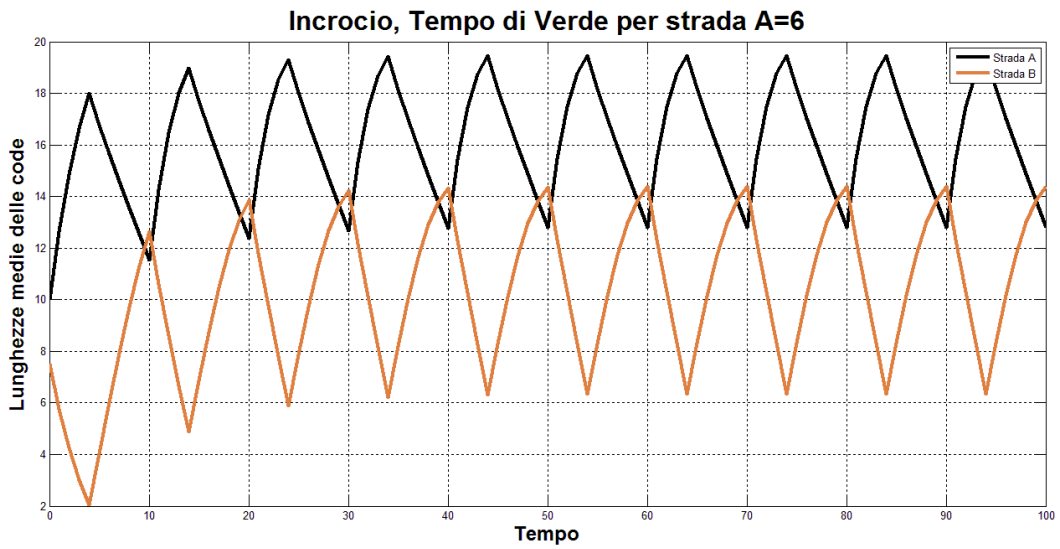


Figura 36: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 6$, lunghezze medie delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

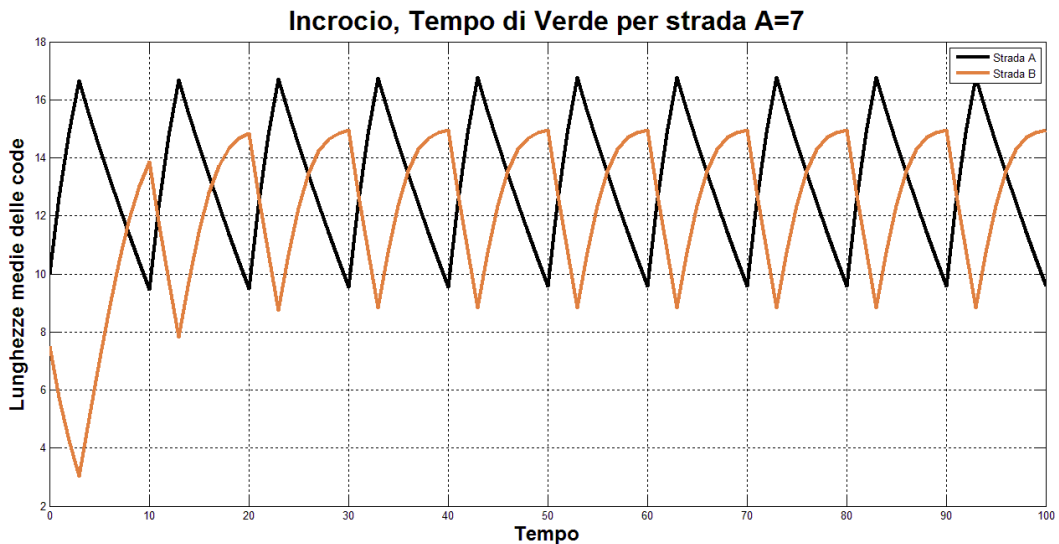


Figura 37: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 7$, lunghezze medie delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Assegnando la medesima quantità di intervalli di verde a ciascuna delle due strade, la strada A, caratterizzata da un traffico più intenso, accumulerà un maggior numero di veicoli in coda, oscillando, a regime, fra $n_A(t) \approx 14$ e $n_A(t) \approx 20 = N_A$; tale suddivisione mantiene invece la coda della strada B a livelli accettabili. Per $T_{A,v} = 7$ la situazione si capovolge, con la strada B più congestionata e la strada A sempre al di sotto della sua capacità massima. La scelta che potrebbe soddisfare entrambi i gestori, senza danneggiare nessuno, è dettata da $T_{A,v} = 6$, in cui nessuna coda raggiungerà il suo valore massimo in nessun intervallo.

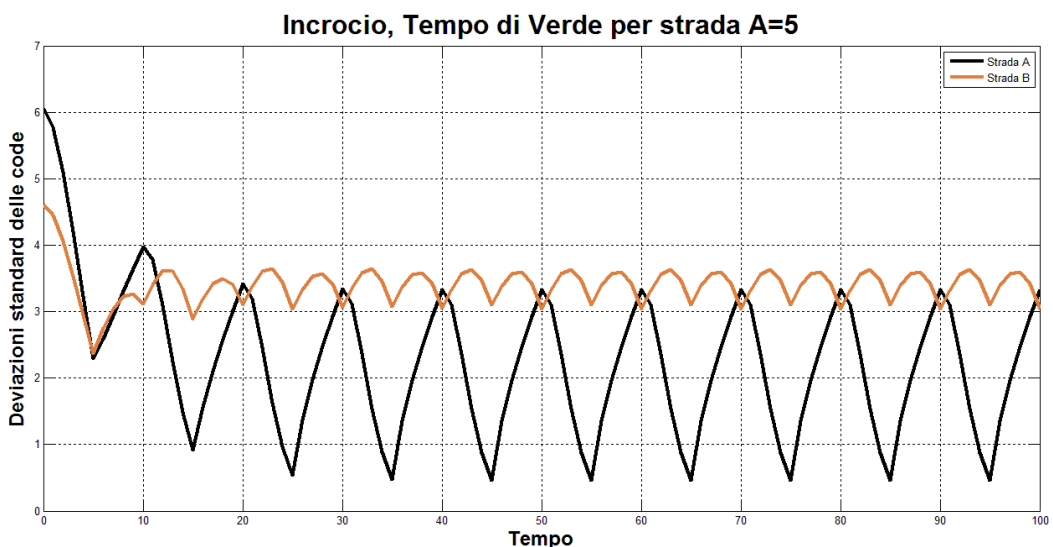


Figura 38: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 5$, deviazioni standard delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

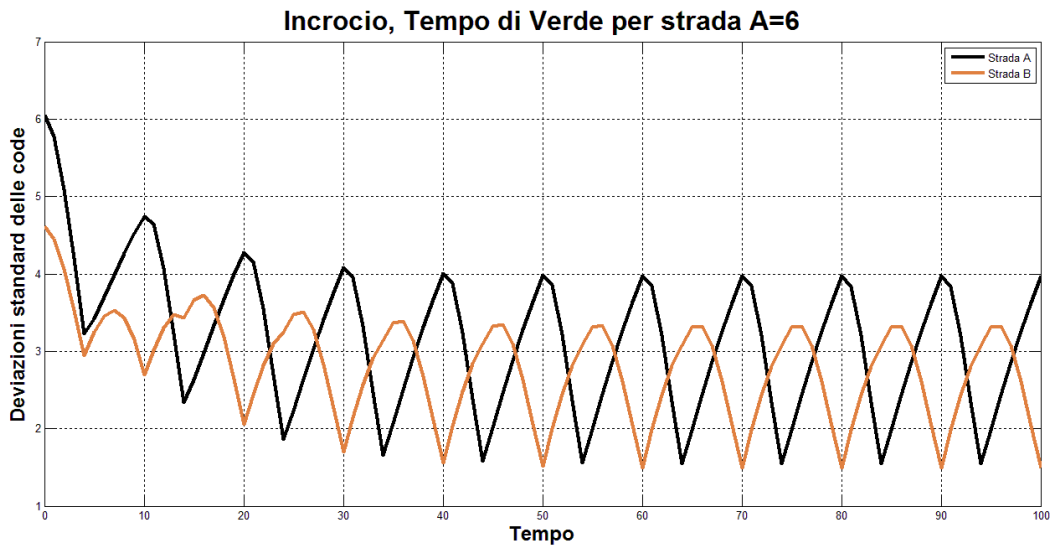


Figura 39: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 6$, deviazioni standard delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

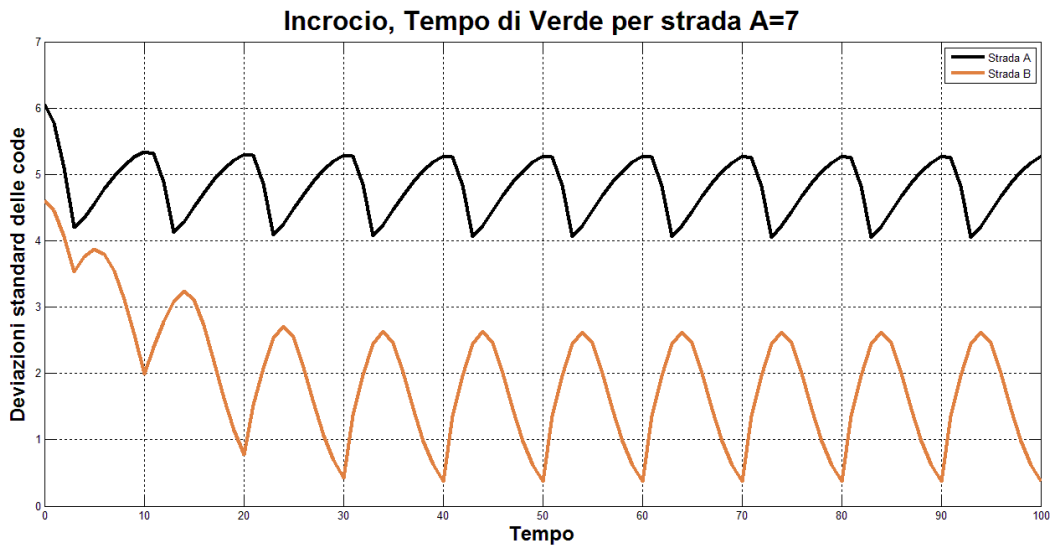


Figura 40: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 7$, deviazioni standard delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Gli andamenti degli scarti quadratici medi relativi ai casi $T_{A,v} = 5, 6, 7$ segnalano come incrementando il tempo di verde nel ciclo per la strada A, questa sia maggiormente soggetta a fenomeni di variabilità; viceversa per la strada B la situazione pare migliorare. Di nuovo la scansione dei segnali periodici imposta da $T_{A,v} = 6$ sembra essere appropriata per i nostri scopi.

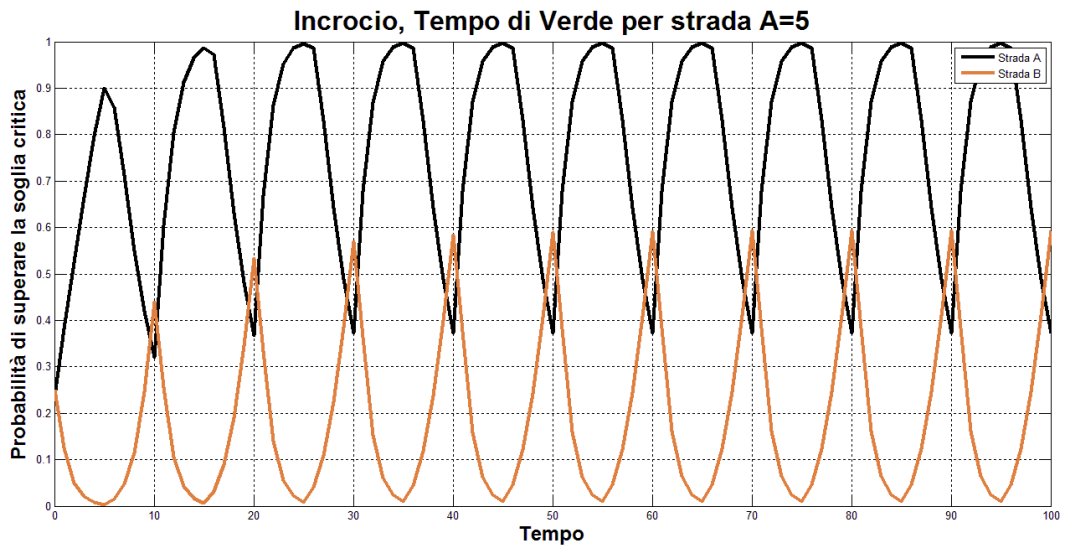


Figura 41: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=5$, probabilità di superare la soglia critica, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

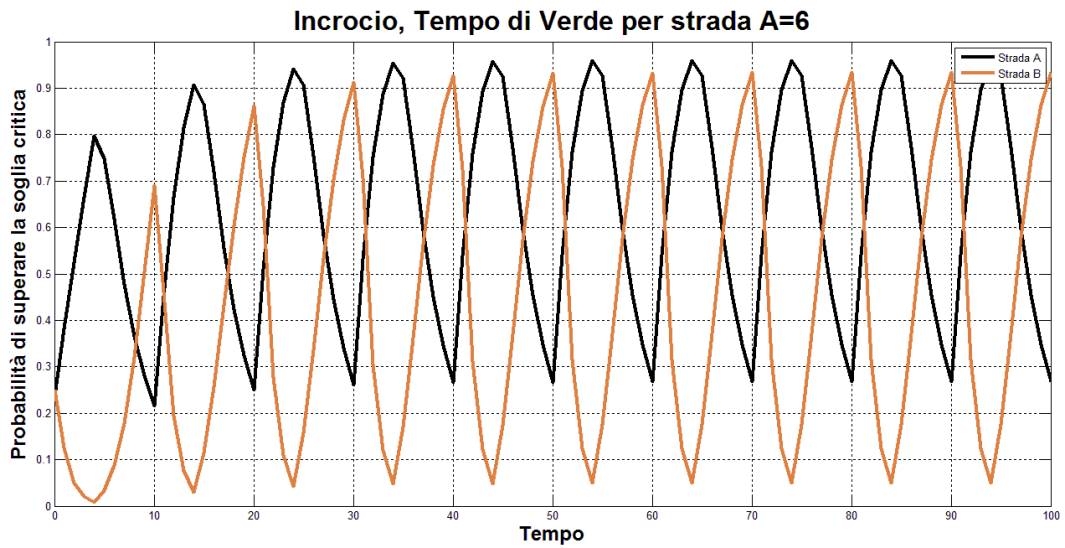


Figura 42: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=6$, probabilità di superare la soglia critica, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

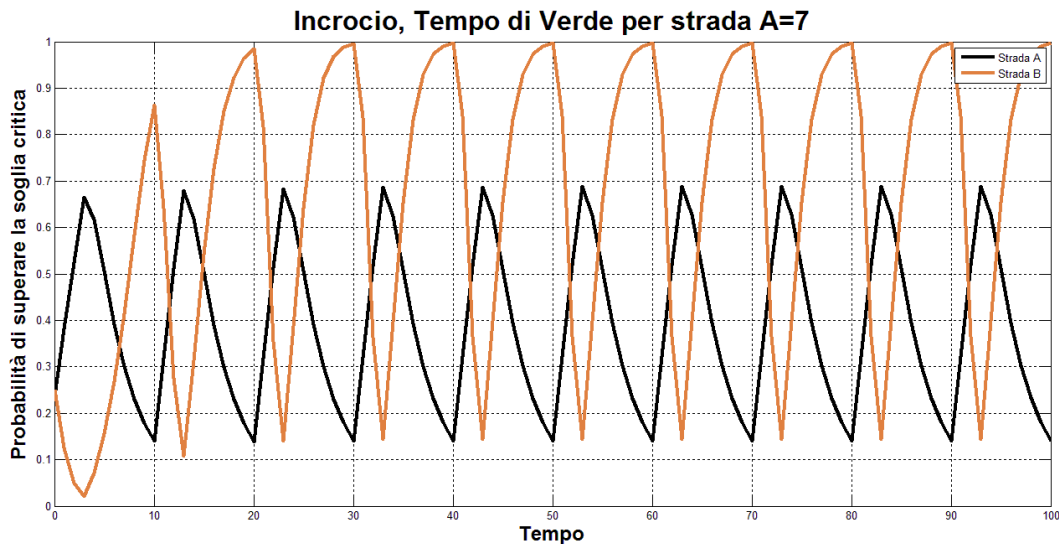


Figura 43: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=7$, probabilità di superare la soglia critica, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Gli andamenti di $q_{A,s}(t)$ e $q_{B,s}(t)$ suggeriscono immediatamente come l'unico criterio di suddivisione periodica dei segnali che garantisca di non avere probabilità certe di superare le soglie critiche, sia dato ancora una volta da $T_{A,v} = 6$: in esso, per entrambe le strade, si registrano per ogni ciclo dei picchi superiori a probabilità del 90% all'ultimo intervallo in cui vige il rosso, ma nella fase di verde queste probabilità si mantengono basse. Per $T_{A,v} = 5$ e $T_{A,v} = 7$ si manifestano invece intervalli in cui $n_A(t)$ e $n_B(t)$ varcheranno sicuramente le loro rispettive soglie critiche.

Assumendo di dover scegliere quanti intervalli di verde nel ciclo assegnare alla strada A, tra i tre proposti, si può pensare di optare per il numero di intervalli che minimizzi la lunghezza media $n(t)$ della coda complessiva:

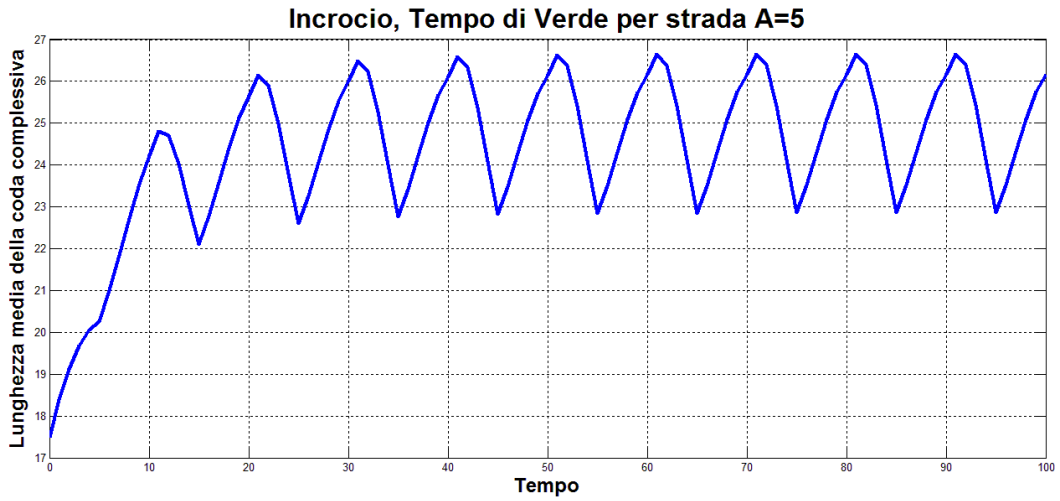


Figura 44: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=5$, lunghezza media della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

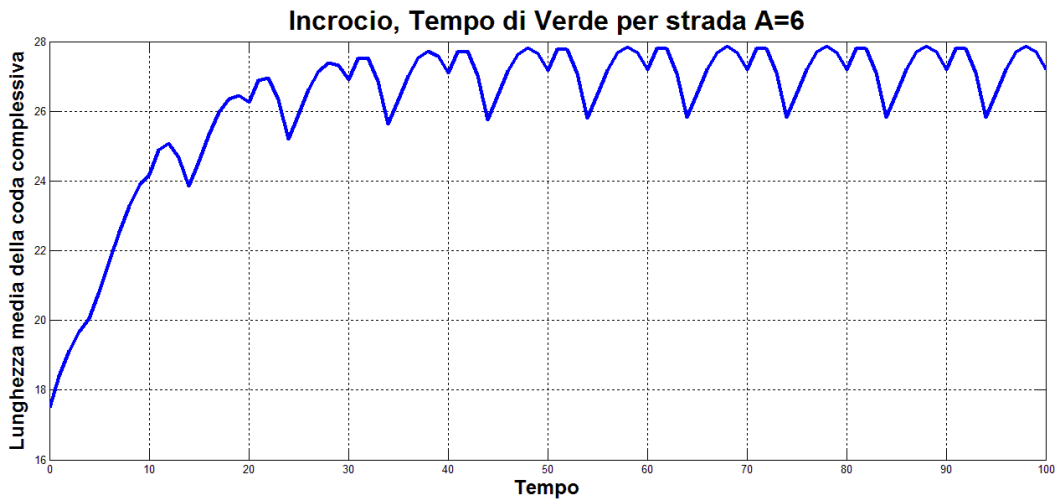


Figura 45: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=6$, lunghezza media della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

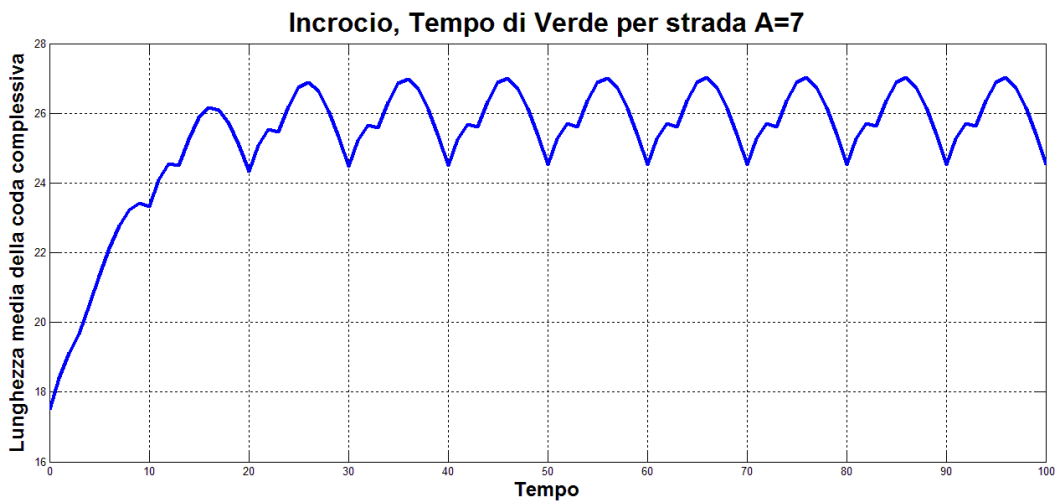


Figura 46: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=7$, lunghezza media della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Si noti come l'opzione $T_{A,v} = 6$, che aveva soddisfatto i criteri precedenti, ora sia la meno indicata, in quanto a regime $n(t)$ fa registrare massimi e minimi locali maggiori dei corrispettivi delle altre due soluzioni. L'equa suddivisione dei segnali per le due strade risulta essere l'alternativa migliore sotto questo punto di vista, garantendo complessivamente un numero di vetture in prossimità dell'incrocio più basso rispetto agli altri casi.

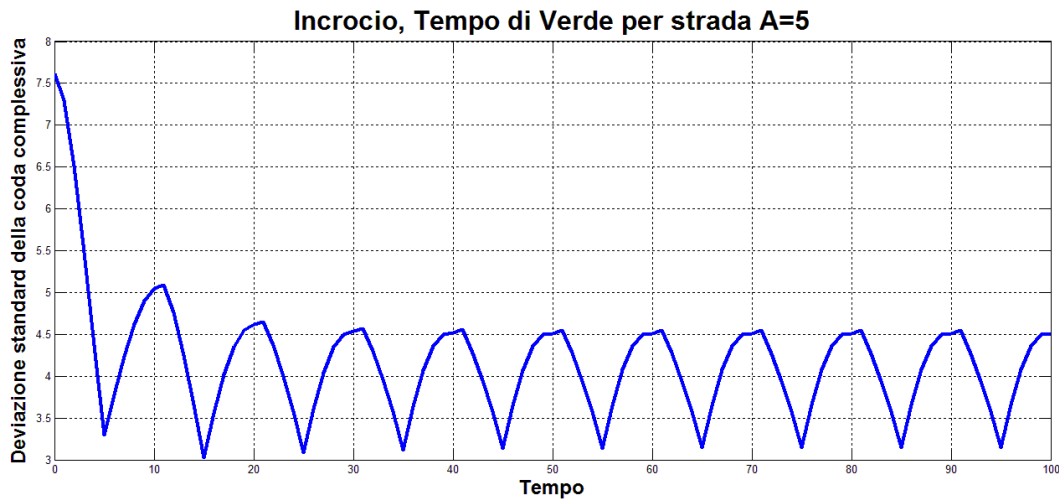


Figura 47: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=5$, deviazione standard della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

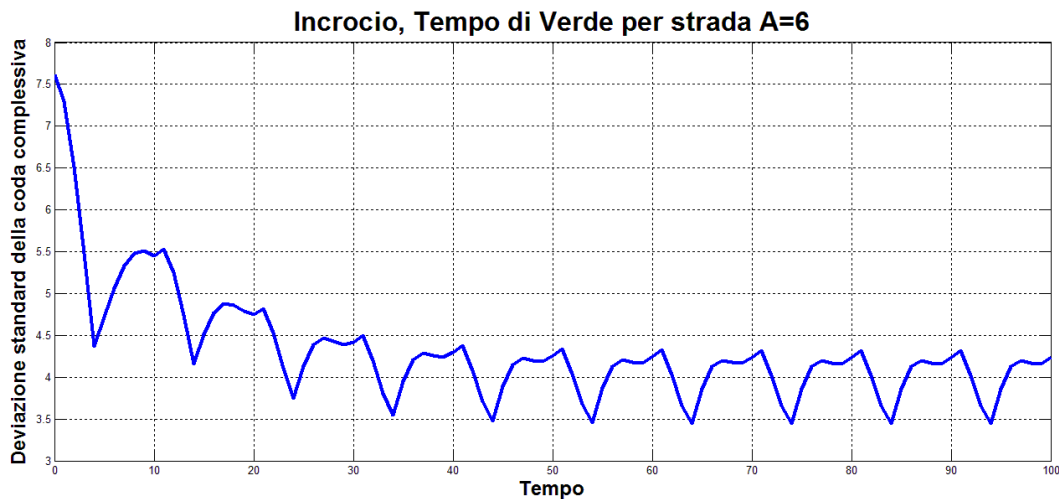


Figura 48: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=6$, deviazione standard della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

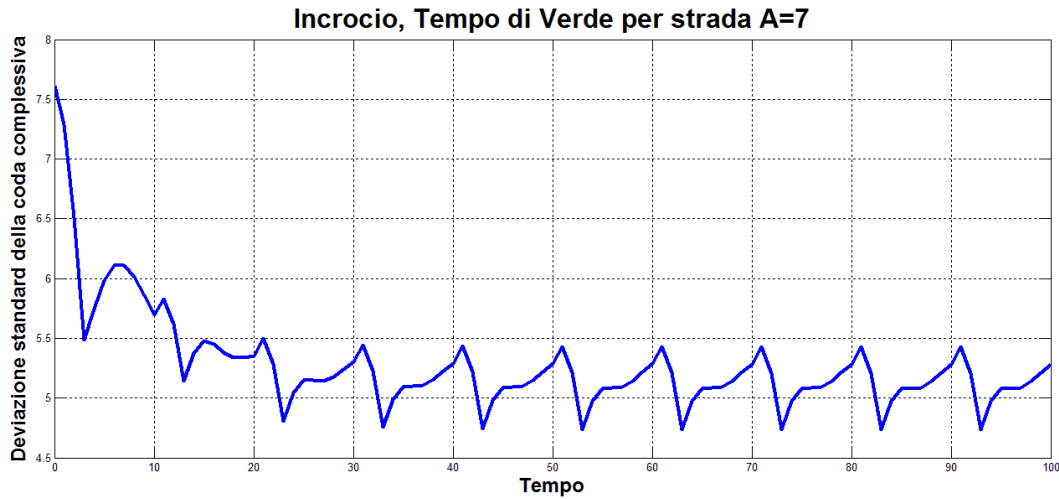


Figura 49: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 7$, deviazione standard della coda complessiva, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

Le deviazioni standard rappresentate nelle figure confermano quanto osservato nelle deviazioni standard delle singole code, rinvenendo un moderato fenomeno di variabilità, inizialmente (per i primi due cicli) distorto per via delle condizioni iniziali.

È importante però ricordare come l'osservazione esclusiva degli indici di prestazione della coda complessiva non è sempre affidabile. Si torni ad analizzare il caso limite $T_{A,v} = 0$:

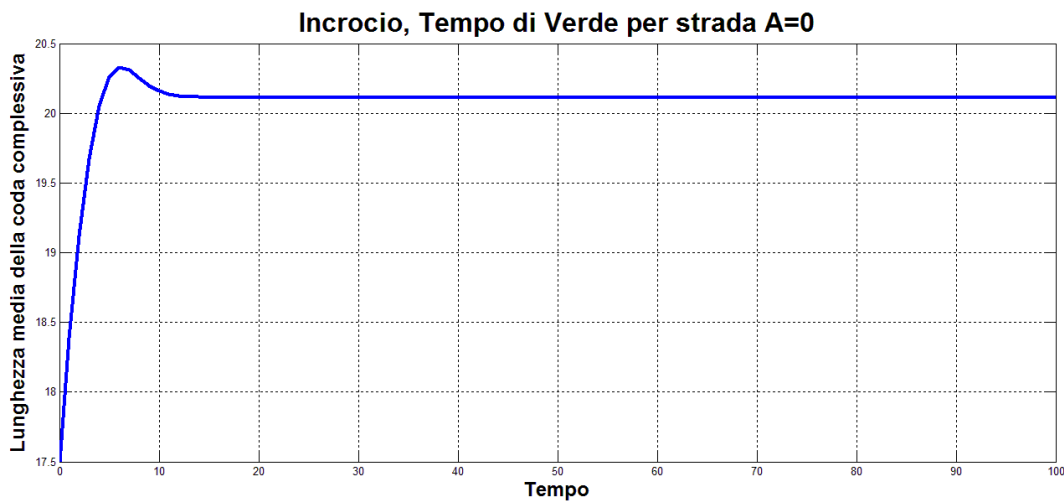


Figura 50: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 0$, lunghezza media della coda complessiva, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

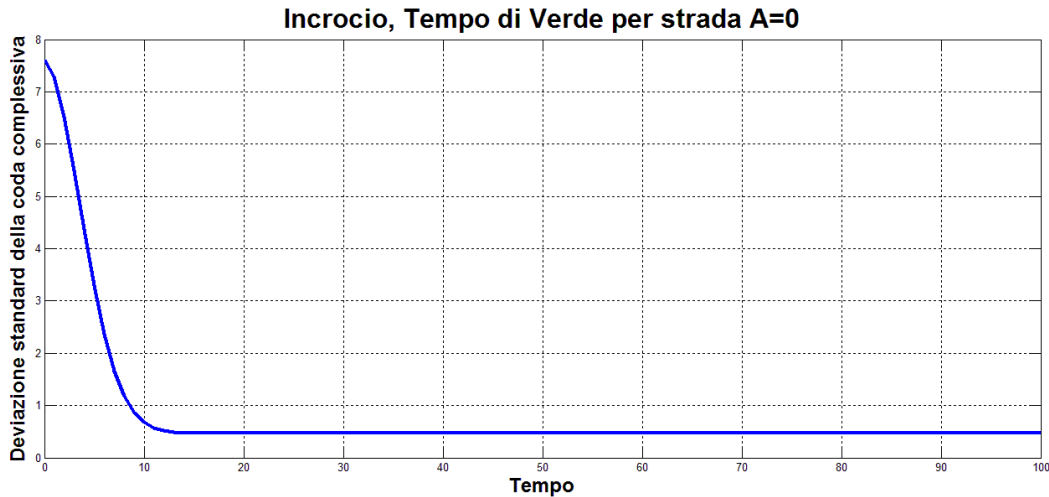


Figura 51: Modello incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 0$, deviazione standard della coda complessiva, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

$n(t)$ si assesta presto ad un valore notevolmente inferiore a quelli dei casi $T_{A,v} = 5, 6, 7$, e $\sigma_{X(t)}$ raggiunge quasi il valore costante 0. Tuttavia, come riportato in figura 29, $n_A(t)$ al termine del primo ciclo ha praticamente già raggiunto la sua capacità massima. Tale osservazione ci porta a dire che gli andamenti della coda complessiva non tengono in considerazione i cambiamenti delle singole code, e, nonostante restino un importante strumento per l'analisi, vanno sempre accompagnati a quelli specifici delle strade.

Si prendano ora in esame i valori medi delle lunghezze medie delle code sul ciclo, osservando come si modificano al variare del tempo di verde assegnato alla strada A. Nella tabella ai valori relativi al primo ciclo sono accostati quelli ottenuti a regime:

$T_{A,v}$	$L_{A,c1}$	$L_{A,cRegime}$	$L_{B,c1}$	$L_{B,cRegime}$	L_{c1}	$L_{cRegime}$
1	17.90	19.84	2.05	0.44	19.95	20.28
2	17.64	19.51	2.47	1.15	20.11	20.66
3	17.25	19.04	3.12	2.30	20.37	21.34
4	16.68	18.42	4.03	4.17	20.71	22.59
5	15.86	17.62	5.23	7.41	21.09	25.03
6	14.68	16.39	6.68	10.87	21.36	27.26
7	13.08	13.17	8.30	12.80	21.38	25.97
8	11.04	6.41	10.00	13.95	21.04	20.36
9	8.63	2.27	11.66	14.68	20.29	16.95

Tabella 2: Modello incrocio, strategia periodica, media delle lunghezze medie per ciclo, $N_A = 20$, $\lambda_A = 3$, $\eta_A = 4$, $N_B = 15$, $\lambda_B = 2$, $\eta_B = 4$

Per $T_{A,v}$ bassi $L_{A,cRegime}$ resta molto vicino a N_A , e diminuisce al crescere degli intervalli di verde, mentre per la strada B valgono le considerazioni inverse. Si noti come a partire dalla condizione iniziale, le strade necessitano rispettivamente almeno di 8 e 7 intervalli di verde sul ciclo per portare il valore di regime ad un livello inferiore a quello del primo ciclo: ciò è dovuto al fatto che la strada A ha un flusso in ingresso mediamente maggiore di quello della strada B. Inoltre lo stesso indicatore relativo alla coda complessiva, che non è altro che la somma di quelli delle singole strade, ci informa che proprio per $T_{A,v} = 5, 6, 7$ esso assume i valori più alti, mentre quelli più bassi sono ottenuti per scelte di suddivisione degli intervalli a netto vantaggio di una delle due strade.

Nel prossimo capitolo i risultati teorici raccolti finora verranno messi a confronto con un simulatore in grado di riprodurre possibili andamenti realistici delle code.

4. Simulatore

Si consideri nuovamente il caso dell'incrocio regolato da un impianto semaforico descritto nel capitolo precedente. Per le due strade (A e B) che si intersecano valgono gli stessi modelli a tempo discreto riportati in precedenza. Le variabili interessate saranno sempre:

- gli stati correnti delle code $X_A(t), X_B(t)$,
- il numero di veicoli in ingresso $\xi_A(t), \xi_B(t)$,
- il numero di veicoli in uscita $v_A(t), v_B(t)$.

Le capacità massime delle due strade sono invece indicate con N_A, N_B .

Assumeremo le medesime distribuzioni dei flussi. In particolare, per i flussi in ingresso:

$$\xi_A(t) \sim P(\lambda_A) \quad \xi_B(t) \sim P(\lambda_B)$$

Per i flussi in uscita:

$$P\{v_A(t) = \eta_A - 1\} = 0.1$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B - 1\} = 0.1$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A\} = 0.8$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B\} = 0.8$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A + 1\} = 0.1$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B + 1\} = 0.1$$

$$P\{v_A(t) = \eta_A \pm k, k > 1\} = 0$$

$$P\{v_B(t) = \eta_B \pm k, k > 1\} = 0$$

Dove con $\lambda_A, \lambda_B, \eta_A, \eta_B$ si intendono i valori medi delle relative distribuzioni.

Si riporta la dinamica dei due sistemi in caso di semaforo rosso:

$$X_A(t+1) = \begin{cases} N_A & \text{se } \xi_A(t) + X_A(t) \geq N_A \\ \xi_A(t) + X_A(t) & \text{se } \xi_A(t) + X_A(t) < N_A \end{cases}$$

$$X_B(t+1) = \begin{cases} N_B & \text{se } \xi_B(t) + X_B(t) \geq N_B \\ \xi_B(t) + X_B(t) & \text{se } \xi_B(t) + X_B(t) < N_B \end{cases}$$

In caso di semaforo verde, si ha invece:

$$X_A(t+1) = \begin{cases} N_A & \text{se } \xi_A(t) + X_A - v_A(t) \geq N_A \\ \xi_A(t) + X_A - v_A(t) & \text{se } \xi_A(t) + X_A - v_A(t) < N_A \end{cases}$$

$$X_B(t+1) = \begin{cases} N_B & \text{se } \xi_B(t) + X_B - v_B(t) \geq N_B \\ \xi_B(t) + X_B - v_B(t) & \text{se } \xi_B(t) + X_B - v_B(t) < N_B \end{cases}$$

Chiameremo ancora R_A, R_B, V_A, V_B le quattro matrici di transizione delle due strade, per i due diversi comandi del semaforo, costruite come spiegato in precedenza.

I risultati ottenuti finora sono esclusivamente di natura teorica: le lunghezze medie assumono il ruolo di stimatori degli andamenti effettivi delle code. È naturale pensare di estendere gli esiti degli studi a casi più realistici, nei quali si possano riprodurre diverse situazioni di code all'incrocio. Viene dunque costruito un simulatore, grazie al cui uso si potranno poi confrontare gli sviluppi del lavoro teorico con quello simulato.

Di seguito viene descritta la procedura per la costruzione del simulatore relativo alla strada A. Per quanto riguarda la strada B, possono essere fatte considerazioni analoghe, previ opportuni accorgimenti delle notazioni.

Per prima cosa viene stabilito il valore per la coda al primo intervallo, basato sulla distribuzione iniziale equiprobabile $\mu_A(0)$:

$$\mu_A(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix},$$

dove $\alpha = \frac{1}{N_A+1}$.

Si prenda in considerazione un numero reale $\gamma \in [0,1]$, scelto tramite estrazione casuale sull'intervallo. Si assume che il valore iniziale della coda dipenda da γ e da $\mu_A(0)$ nel modo che segue:

$$k * \alpha \leq \gamma < (k + 1) * \alpha \Rightarrow X_A(0) = k, \quad k = 0, 1, \dots, N_A$$

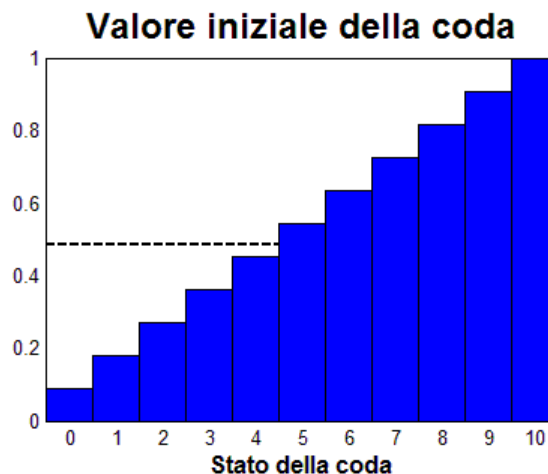


Figura 52: Estrazione casuale per definire il valore iniziale di una coda, $N_A=10$

La figura 52 offre un esempio per stabilire il valore iniziale della coda. Nel caso specifico, si è considerata una strada di capacità massima $N_A = 10$, tale per cui:

$$\mu_A(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix},$$

dove il vettore $\mu_A(0)$ è di dimensione $N_A + 1 = 11$ e $\alpha = \frac{1}{11}$. Il valore estratto casualmente è pari a $\gamma = 0.4854$ (in figura in linea tratteggiata), che risulta compreso tra $5 * \alpha$ e $6 * \alpha$. Per le assunzioni sopracitate, si è assegnato come valore iniziale della coda $X_A(0) = 5$.

Il procedimento per valutare come possa evolvere la coda nel tempo necessita ancora dell'uso dell'estrazione casuale, in quanto tale è la natura dei flussi veicolari in ingresso e in uscita. Ad ogni intervallo viene nuovamente effettuata un'estrazione casuale nello spazio $[0,1]$, che sovrascrive il valore assunto da γ al passo precedente. Se nell'intervallo considerato t^* vige il segnale rosso per la strada A, si osservi la matrice di transizione relativa R_A , e si valuti la i -esima riga, dove i corrisponde all'ultimo stato assunto dal sistema. Esso passerà dallo stato i allo stato k , secondo la regola:

$$\sum_{j=0}^k r_{A,ij} \leq \gamma < \sum_{j=0}^{k+1} r_{A,ij} \Rightarrow X_A(t^*) = k, \quad k = 0, 1, \dots, N_A$$

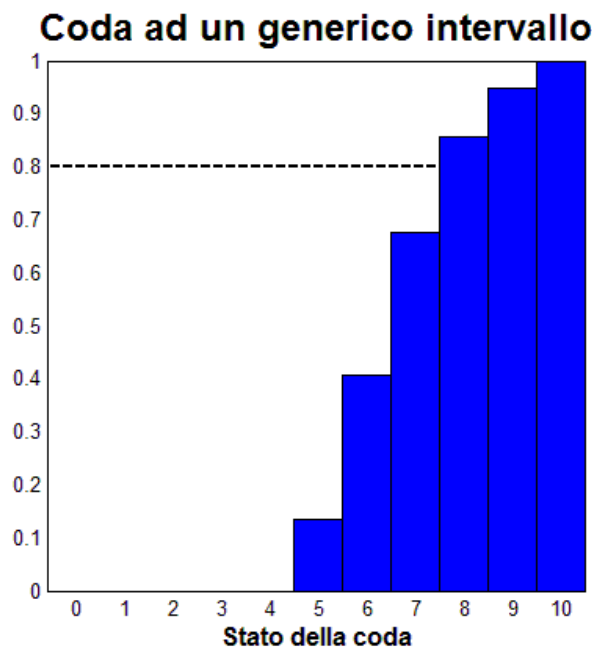


Figura 53: Estrazione casuale per definire l'evoluzione di una coda ad un generico intervallo, semaforo rosso, $N_A=10$, $\lambda_A=2$

In figura 53 si veda l'esempio di evoluzione della coda all'intervallo successivo a quello considerato in figura 52, qualora il semaforo fosse rosso. La capacità massima della strada è rimasta ovviamente $N_A = 10$, mentre è stato definito il parametro $\lambda_A = 2$, indispensabile per costruire la matrice di transizione R_A . Essendo $i = 5$ l'ultimo stato visitato dal sistema, si considerino gli elementi della corrispondente riga della matrice, $r_{A,5j}$. Dall'estrazione casuale risulta $\gamma = 0.8003$ (in figura in linea tratteggiata), compreso tra $\sum_{j=0}^8 r_{A,5j}$ e $\sum_{j=0}^9 r_{A,5j}$. La coda all'intervallo $t = 1$ conterà dunque un numero di vetture pari a $X_A(1) = 8$. Si noti come dalla figura è evidente che la coda non possa svuotarsi, coerentemente con le ipotesi effettuate per il regime di semaforo rosso.

In presenza del verde, il procedimento del simulatore segue gli stessi criteri: si estragga casualmente un numero $\gamma \in [0,1]$ (che sostituirà il γ precedente) e si consideri per l'intervallo di studio t^{**} la matrice di transizione V_A . Si valuti, similmente a prima, la i -esima riga della matrice, dove i corrisponde all'ultimo stato assunto dal sistema. Il suo passaggio dallo stato i allo stato k è regolato nel modo seguente:

$$\sum_{j=0}^k v_{A,ij} \leq \gamma < \sum_{j=0}^{k+1} v_{A,ij} \Rightarrow X_A(t^{**}) = k, \quad k = 0, 1, \dots, N_A$$

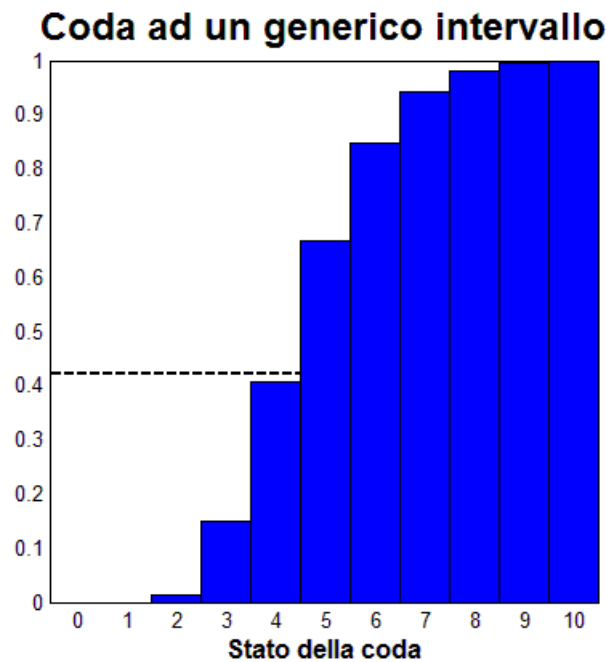


Figura 54: Estrazione casuale per definire l'evoluzione di una coda ad un generico intervallo, semaforo rosso, $N_A=10$, $\lambda_A=2$, $\eta_A=4$

L'evoluzione della coda mostrata nelle figure 52 e 53, può essere sviluppata attraverso l'esempio di figura 54: si consideri la stessa strada, caratterizzata da $N_A = 10$, $\lambda_A = 2$ e da $\eta_A = 4$, valore, quest'ultimo, necessario per costruire la matrice di transizione V_A . Si assume che all'inizio dell'intervallo $t = 2$ il semaforo passi dal rosso al verde; dunque si andranno a considerare gli elementi $v_{A,8j}$ della i -esima riga di V_A , dove $i = 8$, ovvero l'ultimo stato visitato dal sistema. L'estrazione casuale aggiorna γ al valore 0.4218 (in figura in linea tratteggiata), compreso tra $\sum_{j=0}^5 v_{A,8j}$ e $\sum_{j=0}^6 v_{A,8j}$, che indica per l'intervallo $t = 2$ un numero di vetture in coda pari a $X_A(2) = 5$. Dalla figura si può osservare come ora la coda possa parzialmente svuotarsi, in linea con le ipotesi formulate per il modello relativo al semaforo verde.

Definite le procedure per ipotizzare un possibile andamento della coda per il primo istante di osservazione, in presenza del segnale rosso, e in presenza del segnale verde, si intuisce come si possa prevedere, intervallo per intervallo, un realistico andamento futuro in base alle strategie adottate per l'assegnamento dei segnali all'incrocio. Nel prossimo paragrafo si affronterà la stessa strategia periodica descritta nel capitolo 3; successivamente verrà impostata una nuova strategia, di tipo prioritario, che sarà infine messa a confronto con la prima.

4.1 Strategie Periodiche

Si torni a considerare un ciclo composto da M intervalli della stessa durata. La strategia periodica prevede che per una parte definita degli intervalli il semaforo assegni il segnale rosso ad una strada e il verde all'altra, e che per gli intervalli rimanenti i segnali si invertano; terminato il primo ciclo, questo si ripeterà poi periodicamente per quelli successivi.

Si riutilizzano le stesse notazioni del capitolo precedente:

$T_{A,v}$ = Tempo di verde nel ciclo per la strada A

$T_{A,r}$ = Tempo di rosso nel ciclo per la strada A

$T_{B,v}$ = Tempo di verde nel ciclo per la strada B

$T_{B,r}$ = Tempo di rosso nel ciclo per la strada B

Varranno sempre i vincoli imposti da:

$$T_{A,r} = M - T_{A,v}$$

$$T_{B,r} = M - T_{B,v}$$

$$T_{A,v} = T_{B,r}$$

$$T_{A,r} = T_{B,v}$$

Supponendo che per $t = 0$ il segnale rosso spetti alla strada A, si avrà ancora:

Per $0 < T_{A,v} < M$

$$\sigma_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [k \cdot M, (k+1)M - T_{A,v} - 1] \\ 2 & \text{se } t \in [(k+1)M - T_{A,v}, (k+1)M - 1] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_B(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [k \cdot M, (k+1)M - T_{A,v} - 1] \\ 1 & \text{se } t \in [(k+1)M - T_{A,v}, (k+1)M - 1] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Per $T_{A,v} = 0$

$$\sigma_A(t) = 1, \forall t$$

$$\sigma_B(t) = 2, \forall t$$

Per $T_{A,v} = M$

$$\sigma_A(t) = 2, \forall t$$

$$\sigma_B(t) = 1, \forall t$$

Dove quando $\sigma_j(t) = 1$ si intende che alla strada j in questione è assegnato il semaforo rosso, mentre per $\sigma_j(t) = 2$ per la stessa strada vige il verde.

Si assume che il numero di intervalli che compongono il ciclo sia esattamente $M = 10$, in modo da poter confrontare i risultati con quelli relativi al capitolo 3. Per lo stesso motivo

arresteremo l'analisi al termine dell'intervallo $t = 100$, sufficiente per poter trarre le opportune conclusioni. Similmente tratteremo strade caratterizzate dai medesimi parametri.

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 15 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

Si introducono due indici di prestazione adattati alle simulazioni:

- Media della coda sui 100 intervalli di tempo
- Numero di sforamenti della coda rispetto a una soglia prefissata

Il primo indice sintetizza in un unico numero il valore che la coda assume su tutto l'arco di tempo considerato; nel secondo caso si conta il numero di intervalli in cui vengono superate le seguenti soglie critiche già introdotte nello scorso capitolo:

$$s_A = \lfloor 0.8 * N_A \rfloor$$

$$s_B = \lfloor 0.8 * N_B \rfloor$$

Per una più agevole comprensione del grafico, è stata posta sull'asse dei tempi una segnalazione relativa al colore del semaforo per la strada A nei rispettivi intervalli. Si osservi inizialmente il caso limite relativo a $T_{A,v} = 0$:

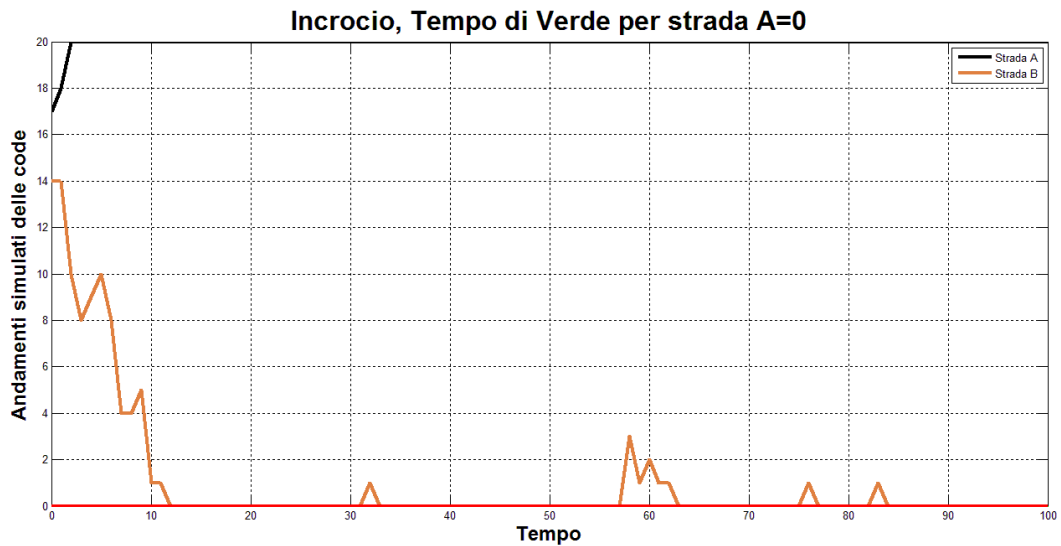


Figura 55: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=0$, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

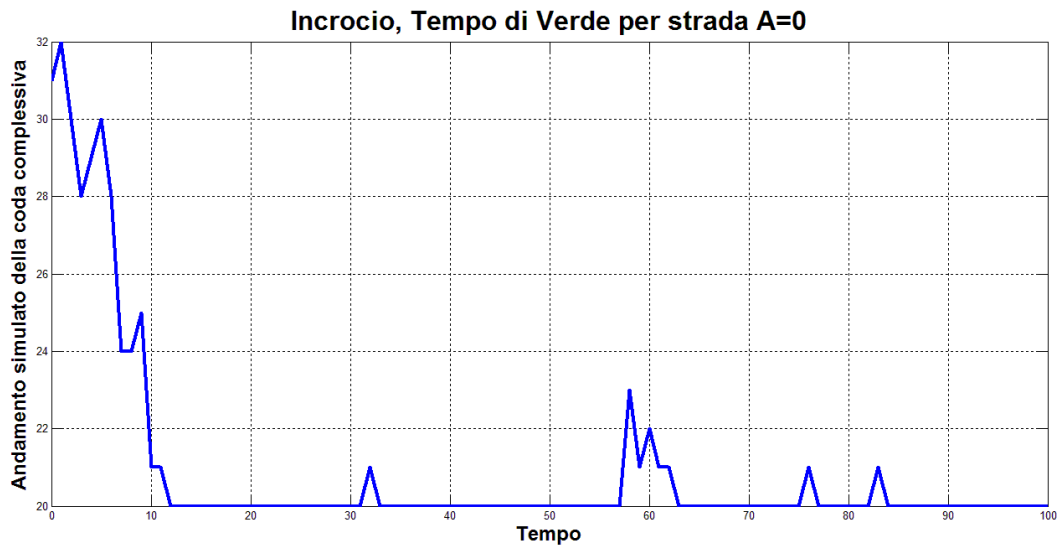


Figura 56: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=0$, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

La simulazione prevede che al primo istante di osservazione entrambe le code si trovino a valori prossimi alle loro rispettive capacità massime. Tuttavia il semaforo rosso blocca l'uscita delle vetture della strada A, che dunque crescono in numero fino a saturare; parallelamente la coda della strada B può gradualmente svuotarsi, facendo comunque registrare dei moderati aumenti in alcuni intervalli, dovuti alla natura casuale dei flussi. L'andamento della coda complessiva rispecchia quello della coda della strada B, traslato di 20: esclusi infatti i primi intervalli, la strada A può ritenersi costante e pari al suo valore massimo.

Si veda ora la situazione opposta, definita da $T_{A,v} = 10$:

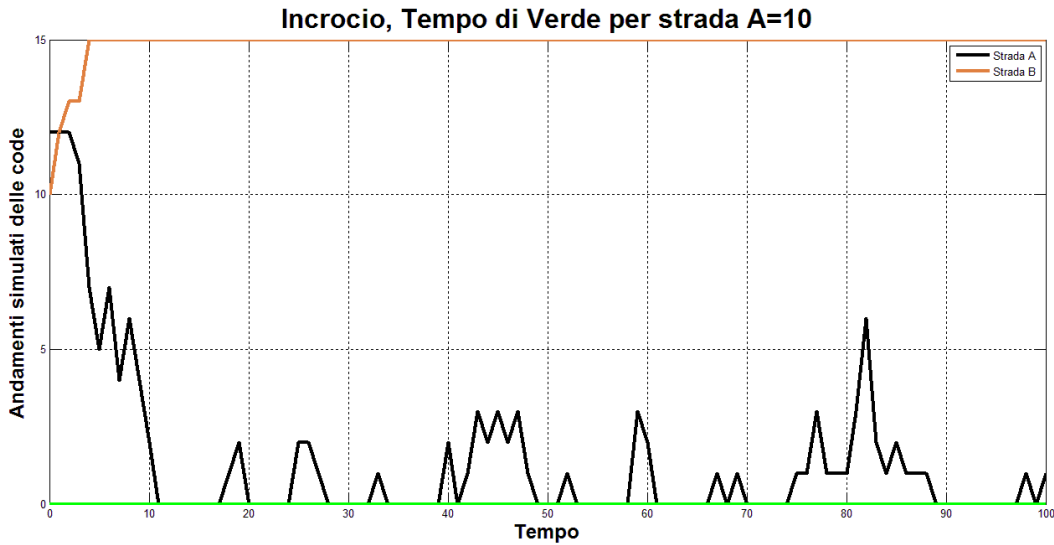


Figura 57: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=10$, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

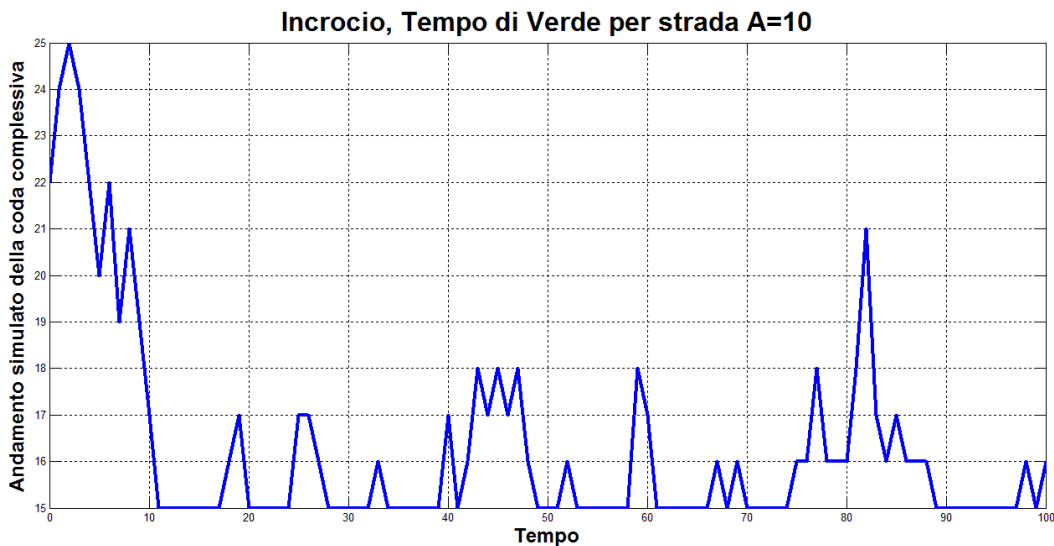


Figura 58: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 10$, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Il contesto è lo stesso di quello discusso sopra, ma il segnale costante di rosso viene ora invertito e girato alla strada B, che dunque partendo da una condizione iniziale casuale di 10 vetture, raggiunge l'apice in pochi intervalli e vi rimane. La coda della strada A, a partire da $X_A(0) = 12$, si svuota in tempi rapidi. I picchi registrati in figura, più alti dei precedenti, sono dovuti alla distribuzione del flusso in ingresso, caratterizzata da un valore medio di vetture entranti $\lambda_A > \lambda_B$. Come appurato in precedenza, anche in questo caso la somma delle due code dà come risultato un andamento molto simile a quello della strada che gode del verde

(traslato di 15), essendo costante (eccetto i primi 4 intervalli) l'andamento della strada a cui è assegnato il rosso.

Se confrontiamo tali risultati con quelli derivanti dai casi limite della teoria (figure 29, 32), si noti soprattutto come le lunghezze medie non potevano tenere conto di fisiologici aumenti delle code in regime di verde, in realtà plausibili se ipotizziamo che in un certo intervallo di tempo entri un elevato numero di veicoli nella strada rispetto a quanti ne escono. A livello macroscopico si veda la differenza delle curve: ora risultano un insieme di linee spezzate, in quanto la coda può assumere esclusivamente valori interi, mentre considerando le espressioni delle lunghezze medie, incorrevamo in valori intermedi.

Con riferimento alle figure 35-37, si metta ora in pratica la strategia periodica per l'incrocio preso in considerazione, tramite un esempio simulato. Dalla teoria si apprende come certe scelte di $T_{A,v}$ risultino inefficaci per una delle due strade. Precisamente, in effetti, per valori di $T_{A,v} < 5$ la strada A, di per sé più trafficata per i parametri considerati, stazionerebbe alla sua capacità massima per larga parte dei 100 intervalli di tempo studiati; mentre per $T_{A,v} > 8$ si avrebbe la strada B quasi sempre satura. Dovendo evitare di rientrare in una delle due circostanze, si faccia dunque variare $T_{A,v}$ tra i valori 5 e 7:

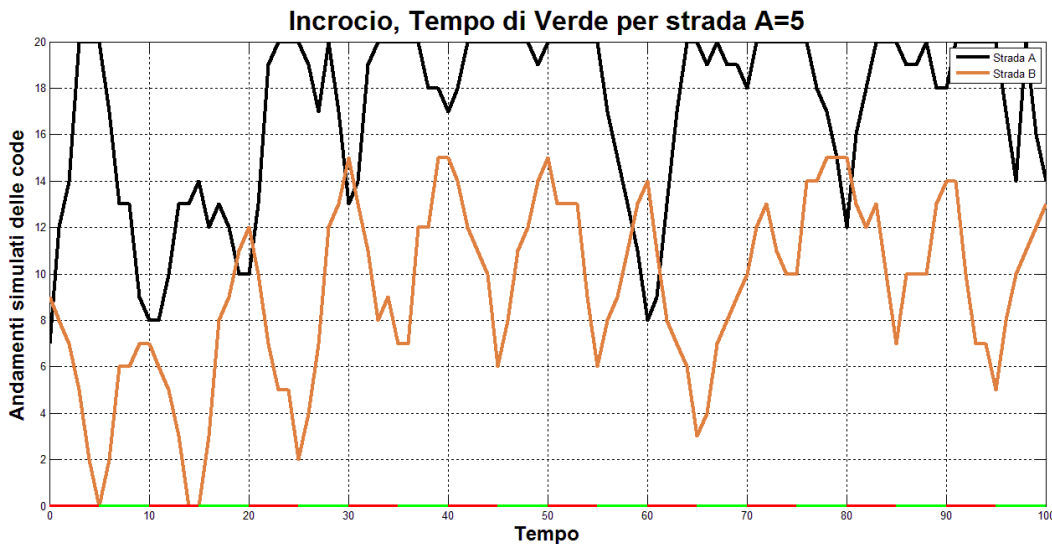


Figura 59: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=5$, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

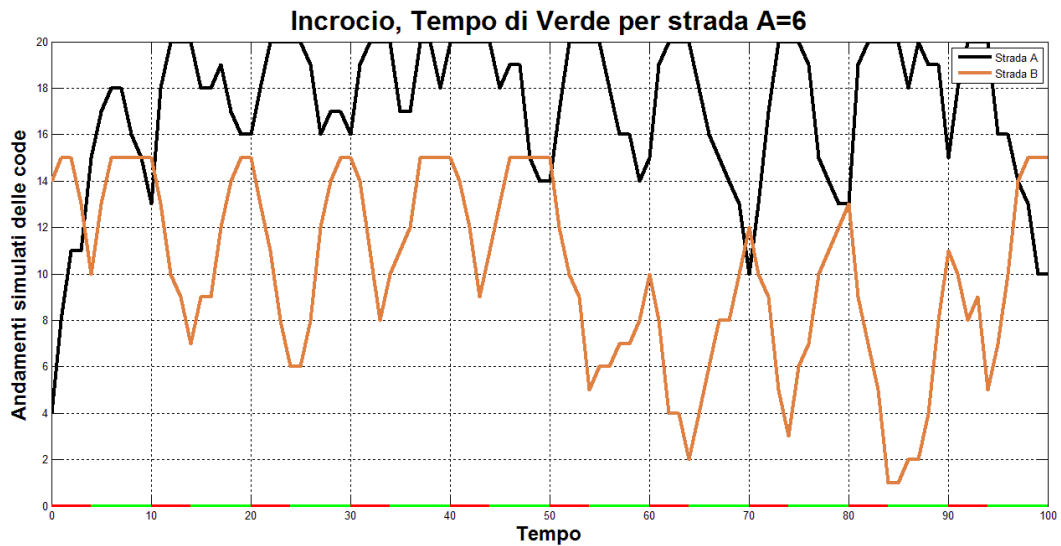


Figura 60: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=6$, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

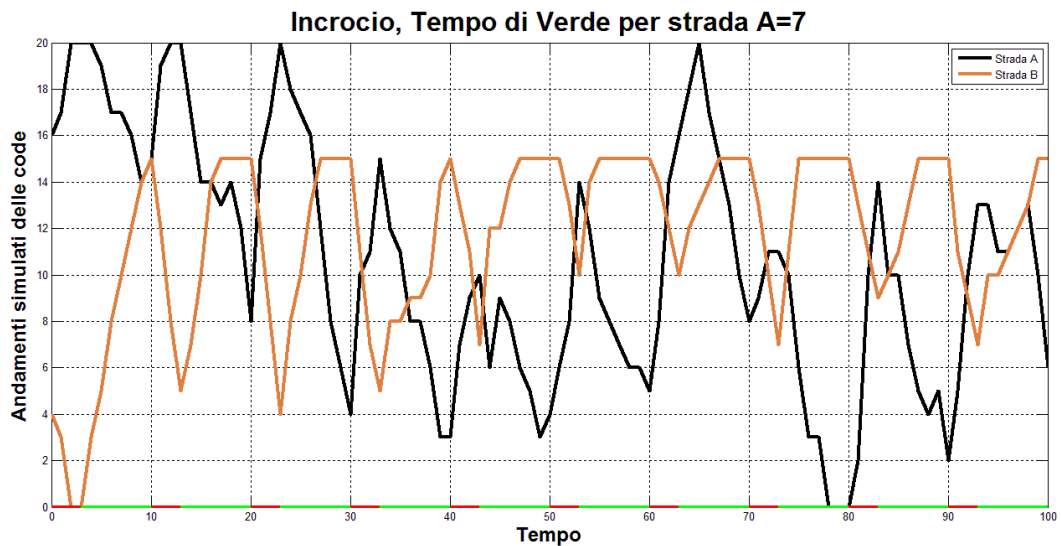


Figura 61: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v}=7$, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Nelle simulazioni capita spesso che una strada raggiunga la sua capacità massima, diversamente dalla teoria. Naturalmente al crescere di $T_{A,v}$ la situazione migliora per la strada A e peggiora per la strada B, ma osservando esclusivamente tali grafici è difficile stabilire quale sia la scelta più opportuna. Analizzando la coda complessiva, la situazione resta comunque di difficile interpretazione:

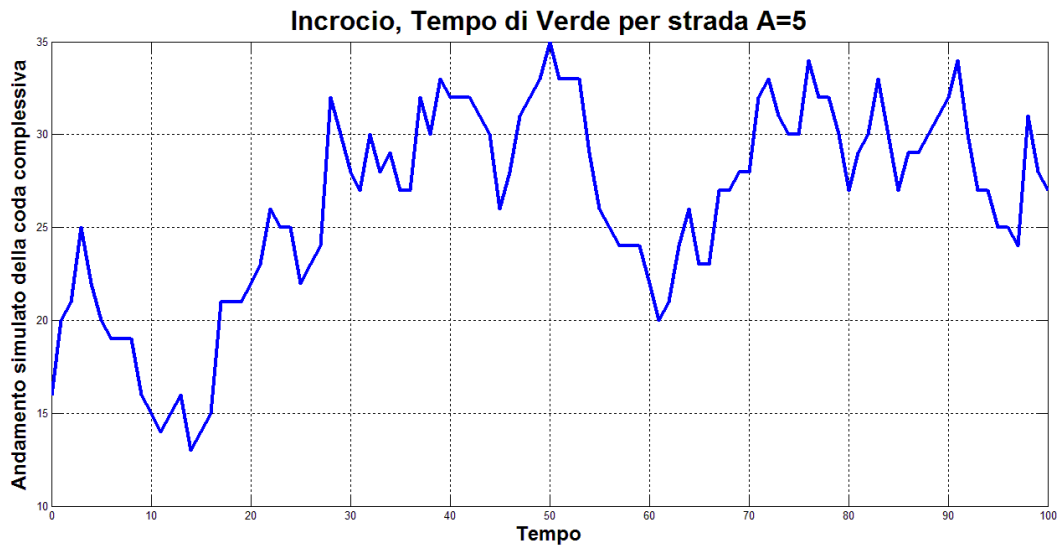


Figura 62: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 5$, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

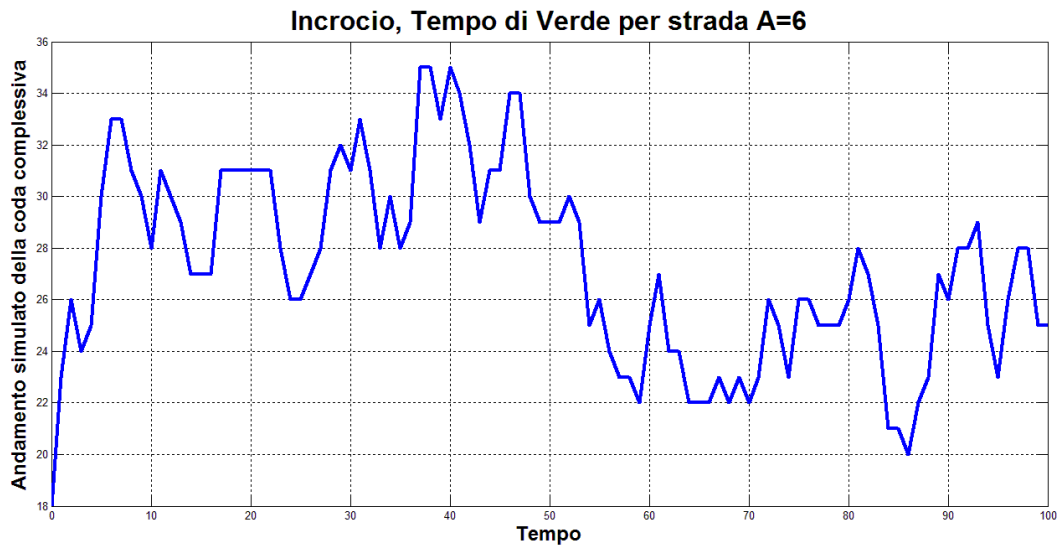


Figura 63: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 6$, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

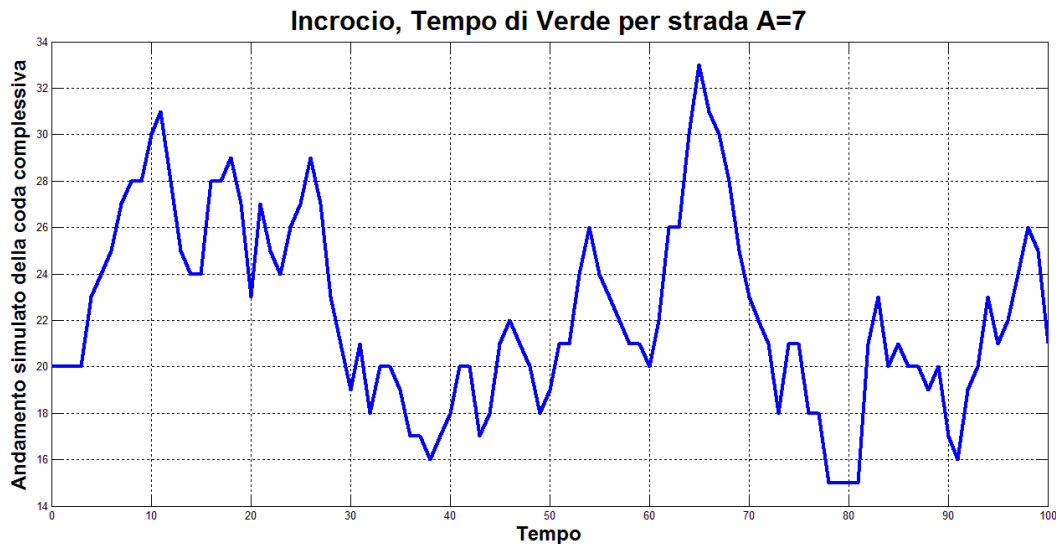


Figura 64: Incrocio, strategia periodica, $T_{A,v} = 7$, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Per avere una misura dell'opzione più conveniente, bisogna valersi degli indici di prestazione descritti in precedenza. Si tenga presente, però, che le valutazioni delle prestazioni varranno per la singola simulazione presa in considerazione, che sarà diversa da ogni altra simulazione effettuata. Per un'analisi più efficace occorre mediare un elevato numero di simulazioni per identificare un andamento generale delle code.

Di seguito vengono riportati in tabella i valori medi derivanti da un numero di simulazioni pari a $N_S = 100$, effettuate con gli stessi parametri:

$T_{A,v}$	M_A	M_B	M_C	$N_{sf.A}$	$N_{sf.B}$
1	19.55	0.70	20.25	98.48	0.42
2	19.24	1.33	20.57	96.56	0.46
3	18.74	2.40	21.14	91.83	1
4	18.13	4.27	22.40	85.21	4.59
5	17.32	7.14	24.46	76.60	19.56
6	16.09	9.96	26.05	63.05	42.52
7	13.14	12.16	25.30	40.24	66.18
8	7.52	13.50	21.02	11.76	83.84
9	3.38	14.38	17.76	2.91	95.58

Tabella 3: Incrocio, strategia periodica, media di $N_S=100$ simulazioni, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Dove si è fatto uso della notazione:

- M_A = Media totale della coda A sulle 100 simulazioni
- M_B = Media totale della coda B sulle 100 simulazioni
- M_C = Media totale della coda complessiva sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.A}$ = Numero medio di sforamenti della coda A rispetto a s_A sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.B}$ = Numero medio di sforamenti della coda B rispetto a s_B sulle 100 simulazioni

Escludiamo i risultati relativi ai casi $T_{A,v} < 5$ e $T_{A,v} > 8$, che come la teoria aveva predetto, portano a situazioni critiche, tali per cui il numero di sforamenti di una delle due strade supera quota 80: significherebbe accettare una situazione in cui la strada a cui spetta una maggiore frazione di rosso sul ciclo, superi la soglia critica in più di 80 intervalli sui 100 considerati.

Analizzando i casi rimanenti, evidenziati in tabella, l'opzione di garantire la stessa durata del verde a entrambe le strade porterebbe alla media totale inferiore, spiegata dalla media totale della strada B, la meno trafficata, decisamente bassa; questa soluzione però spingerebbe la strada A, la più trafficata, a superare la soglia critica circa ogni tre intervalli su quattro. Per $T_{A,v} = 6$ e $T_{A,v} = 7$, la situazione generale non si discosta particolarmente, avvantaggiando la strada B nel primo caso, la strada A nel secondo. Se si volesse adottare la scelta più imparziale possibile, ci si potrebbe orientare verso quella regolata da una media totale della coda complessiva più bassa, ovvero $T_{A,v} = 7$.

4.2 Strategie di Tipo Prioritario

L'ultimo caso analizzato ha messo in luce una componente fondamentale dietro la scelta di assegnare il semaforo verde per una durata maggiore ad una strada rispetto all'altra, il concetto di priorità. Si può dunque pensare di estendere tale concetto ad una vera e propria strategia per la distribuzione dei segnali luminosi all'incrocio.

Nello specifico, si supponga di disporre di determinati sensori lungo le strade in questione, in grado di stabilire con sufficiente precisione il numero di veicoli presenti nelle due corsie. In base al numero registrato il semaforo stabilisce secondo una ben definita logica a chi assegnare il segnale rosso e a chi il verde, tenendo a mente quale delle due strade è di norma più trafficata, al fine di migliorarne la viabilità. Si noti come nella nuova strategia (controllo in anello chiuso) la misura che viene effettuata sulle uscite del sistema (le vetture in coda) influenzi il sistema stesso (la scelta di assegnamento), fatto che precedentemente non avveniva (controllo in anello aperto).

Ipotizziamo che ad un incrocio si intersechino due strade caratterizzate da flussi in ingresso particolarmente sbilanciati:

$$\lambda_A = 3$$

$$\lambda_B = 1$$

È ragionevole assumere, se si considerano strade di uguale larghezza, che i flussi in uscita siano analoghi:

$$\eta_A = 4$$

$$\eta_B = 4$$

Questo significa che la strada A mediamente accoglie in ingresso 3 vetture ad ogni intervallo, smaltendone 4 in caso di semaforo verde. La strada B risulta meno trafficata, in quanto, registrando lo stesso numero medio di vetture in uscita nel singolo intervallo di verde, mediamente è caratterizzata da una sola in entrata ad ogni intervallo.

Spesso ad un incrocio le strade più trafficate coincidono con quelle a lunghezza maggiore, per cui possiamo assumere, ad esempio:

$$N_A = 20$$

$$N_B = 12$$

Con i parametri considerati, è naturale pensare di dare la precedenza alla strada A, che in caso di semaforo rosso raggiungerebbe la propria saturazione in tempi più brevi di quelli che impiegherebbe per farlo la strada B.

Più in generale si può ipotizzare un algoritmo che, basato sui parametri delle strade, definisca a quale delle due spetti la priorità sull'altra:

- $\eta_A - \lambda_A < \eta_B - \lambda_B \Rightarrow$ Priorità alla strada A
- $\eta_B - \lambda_B < \eta_A - \lambda_A \Rightarrow$ Priorità alla strada B
- $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B \wedge N_A > N_B \Rightarrow$ Priorità alla strada A
- $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B \wedge N_B > N_A \Rightarrow$ Priorità alla strada B
- $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B \wedge N_A = N_B \wedge X_A(0) > X_B(0) \Rightarrow$ Priorità alla strada A
- $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B \wedge N_A = N_B \wedge X_B(0) > X_A(0) \Rightarrow$ Priorità alla strada B
- $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B \wedge N_A = N_B \wedge X_A(0) = X_B(0) \Rightarrow$ Priorità alla strada A

In pratica l'algoritmo individua la strada più trafficata, valutando inizialmente la differenza fra la media delle vetture in uscita e di quelle in ingresso per intervallo; la strada con differenza minore è maggiormente soggetta a congestionamento e gode della priorità sull'altra. A parità di condizioni la priorità viene concessa alla strada con capacità massima maggiore, in quanto in condizioni di saturazione, è preferibile avere una coda composta da un numero quanto più limitato possibile di vetture. Se tutti e tre i parametri delle due strade coincidono, stiamo dunque trattando il caso di un incrocio che separa due strade identiche; il concetto di priorità viene meno, ma dovendo gestire tale caso limite, l'algoritmo assegna la priorità alla strada che al primo istante di osservazione ospita una coda più lunga. Se infine anche le due code iniziali fossero le stesse, la priorità verrebbe assegnata arbitrariamente alla strada A.

I limiti dell'algoritmo si verificano qualora dovessimo gestire situazioni di strade caratterizzate dagli stessi parametri: è preferibile, in tal caso, non ricorrere a questa strategia, in quanto si danneggerebbe il flusso di una delle due strade immotivatamente. La scelta più ragionevole potrebbe consistere in una strategia periodica in cui la durata di verde per ciclo sia uguale per entrambe le strade.

Una volta definita la priorità all'incrocio, chiariamo come questa si possa effettivamente mettere in pratica. Si introducano le soglie di contenimento:

$$s_{A,c} = \lfloor 0.3 * N_A \rfloor$$

$$s_{B,c} = \lfloor 0.3 * N_B \rfloor$$

Supponiamo che sia la strada A a godere della precedenza⁸. L'idea ipotizzata è che non appena la coda della strada A raggiunge la sua soglia di contenimento, il semaforo le assegni il verde per un numero minimo di intervalli prefissato N_t , così stabilito:

$$N_t = 3 + c,$$

dove

$$c = |\eta_A - \lambda_A - (\eta_B - \lambda_B)|$$

La componente fissa dei 3 intervalli garantisce un lasso di tempo sufficiente a far svuotare la coda con l'obiettivo di farla tornare ad una condizione al di sotto della soglia di contenimento. Il termine correttivo c pesa tanto più quanto è netta la differenza tra i flussi delle due strade, ed è eventualmente pari a 0, qualora $\eta_A - \lambda_A = \eta_B - \lambda_B$.

Se al termine degli N_t intervalli la coda della strada A è ancora al di sopra della sua soglia di contenimento, persisterà il segnale verde finché la coda non scenderà al di sotto di tale limite; nel momento in cui si troverà al di sotto, i segnali si invertiranno e verrà fissato il rosso per la strada A, mentre il verde passerà alla strada B. Tale situazione durerà fino al nuovo raggiungimento della soglia di contenimento della coda della strada A.

Più sinteticamente:

- $X_A(t_0) \geq s_{A,c} \wedge \sigma_A(t_0 - 1) = 1 \Rightarrow \sigma_A(t) = 2, \text{ per ogni } t \in [t_0, t_0 + N_t)$
- $X_A(t_1) \geq s_{A,c} \wedge \sigma_A(t) = 2, \text{ per ogni } t \in [t_1 - N_t, t_1) \Rightarrow \sigma_A(t_1) = 2$
- $X_A(t_2) < s_{A,c} \wedge \sigma_A(t) = 2, \text{ per ogni } t \in [t_2 - N_t, t_2) \Rightarrow \sigma_A(t_2) = 1$
- $X_A(t_3) < s_{A,c} \wedge \sigma_A(t_3 - 1) = 1 \Rightarrow \sigma_A(t_3) = 1$

⁸ Le considerazioni espresse di seguito valgono anche in riferimento alla strada B, previo opportuno cambio di notazione.

Si tenga sempre a mente che quando $\sigma_A(t) = 2$ (semaforo verde per la strada A), deve valere per forza $\sigma_B(t) = 1$ (semaforo rosso per la strada B), e viceversa.

La formulazione logica descritta di sopra necessita di un punto di partenza, in quanto fa ricorsivamente riferimento a ciò che accade nel passato. È indispensabile imporre una condizione iniziale per $t = 0$: nello specifico, la strada B godrà del verde solo nel caso in cui la sua coda sia oltre $s_{B,c}$ e contemporaneamente la coda della strada A sia al di sotto di $s_{A,c}$; il verde cesserà poi nel momento in cui la coda della strada B scenderà sotto la propria soglia o quella della strada A varcherà la sua corrispondente. Negli altri casi, il verde vigerà per la strada A e sarà mantenuto per N_t intervalli e comunque fino a che la coda della strada A non scenderà al di sotto di $s_{A,c}$. Più sinteticamente:

- $X_A(0) < s_{A,c} \wedge X_B(0) \geq s_{B,c} \Rightarrow \sigma_A(0) = 1$
- $X_A(0) \geq s_{A,c} \vee X_B(0) < s_{B,c} \Rightarrow \sigma_A(t) = 2, \text{ per ogni } t \in [0, 0 + N_t)$

Unendo le condizioni iniziali con quelle a regime, il semaforo all'inizio di ogni intervallo riconosce in modo univoco a quale strada assegnare il verde, seguendo tale strategia.

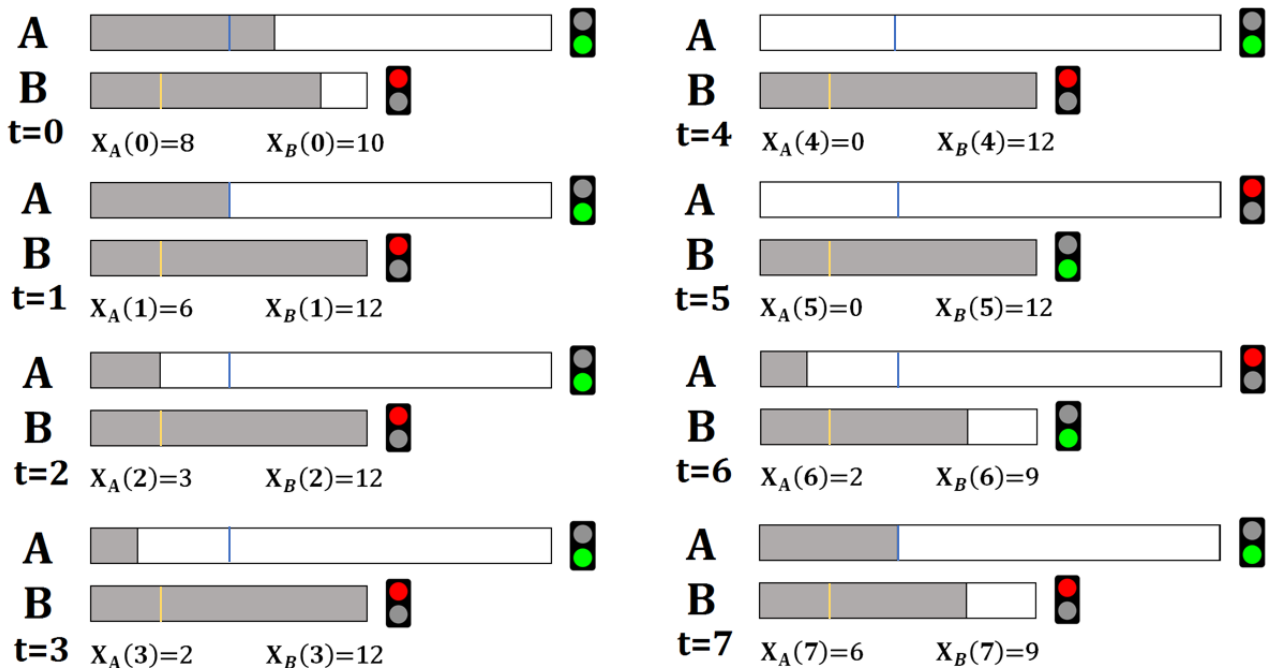


Figura 65: Esempio di applicazione della strategia di tipo prioritario ad un incrocio, $N_A=20, \lambda_A=3, \eta_A=4, N_B=12, \lambda_B=1, \eta_B=4$

In figura 65 viene mostrata l'applicazione della nuova strategia per i primi otto intervalli, relativi ad un possibile sviluppo del traffico in caso di un incrocio, caratterizzato da determinati parametri prefissati.

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 12 \quad \lambda_B = 1 \quad \eta_B = 4$$

Poiché

$$\eta_A - \lambda_A = 1 < 3 = \eta_B - \lambda_B,$$

la strada A gode della precedenza rispetto alla strada B. Al primo istante di osservazione entrambe si trovano al di sopra delle proprie soglie di contenimento (indicate in figura in blu e in giallo):

$$X_A(0) = 8 > 6 = s_{A,c} \quad X_B(0) = 10 > 3 = s_{B,c}$$

Per cui seguendo la logica proposta, il semaforo assegna il verde alla strada A, e contemporaneamente il rosso alla strada B; tale assegnamento perdura per $N_t = 5$, in quanto

$$N_t = 3 + c, \text{ con } c = |\eta_A - \lambda_A - (\eta_B - \lambda_B)| = 2$$

Al termine degli N_t intervalli i sensori rilevano 0 vetture in coda nella strada A e 12 nella strada B, che nel frattempo è saturata al suo valore massimo. Essendo:

$$X_A(5) < s_{A,c},$$

il semaforo può ora invertire i segnali e consentire alla coda della strada B di iniziare a svuotarsi; ciò è possibile per due intervalli di tempo, perché per $t = 7$ la coda della strada A è nuovamente al di sopra della propria soglia e necessita del verde per tornare al di sotto. Di nuovo si avrà un verde fisso sulla strada A per N_t intervalli, al termine dei quali si valuterà come procedere secondo le logiche proposte.

Si mettono ora in pratica le direttive della strategia applicandole a delle effettive prove simulate. Si veda inizialmente come la strategia di tipo prioritario risulti inefficace nel caso già sconsigliato in cui i parametri delle due strade siano uguali fra loro.

Strada A:

$$N_A = 15 \quad \lambda_A = 2 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 15 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

Nuovamente sull'asse dei tempi è riportato il colore della segnalazione che il semaforo assegna alla strada A ad ogni intervallo. Allo stesso modo l'analisi sarà nuovamente arrestata al tempo $t = 100$, sufficiente a rilevare gli aspetti più salienti delle code.

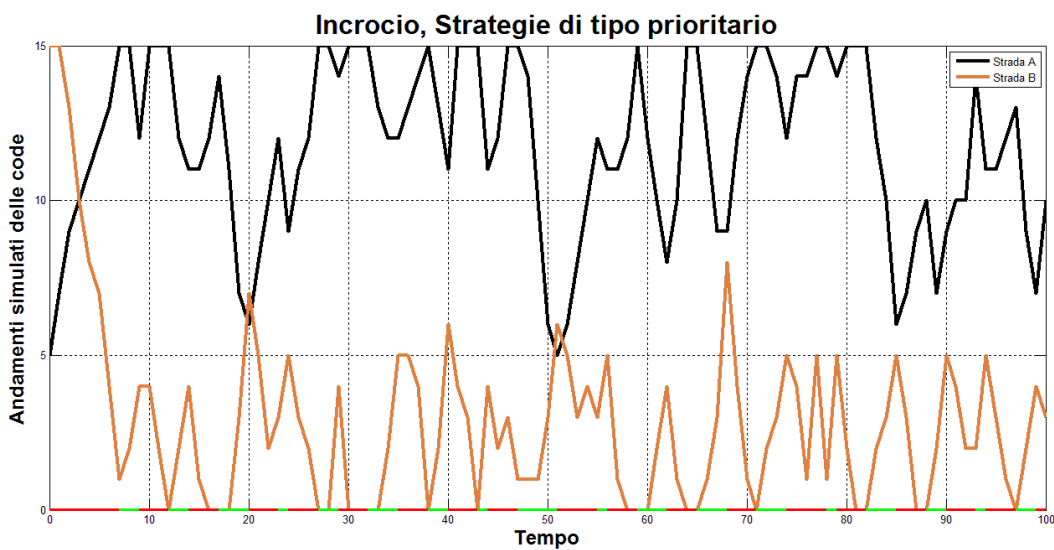


Figura 66: Incrocio, strategia di tipo prioritario, andamenti simulati delle code, $N_A=15$, $\lambda_A=2$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

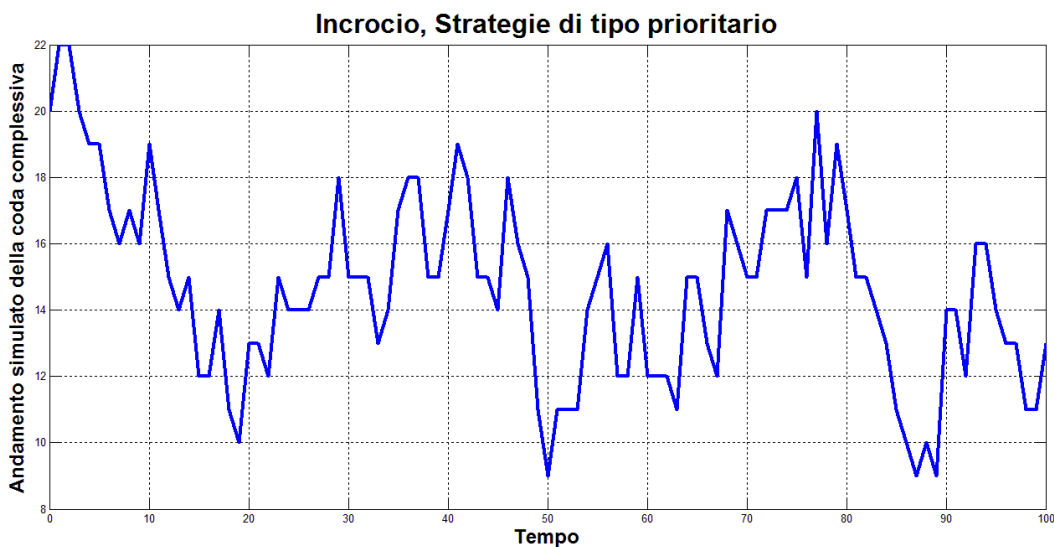


Figura 67: Incrocio, strategia di tipo prioritario, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=15$, $\lambda_A=2$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Essendo le due strade dotate degli stessi parametri, gode della precedenza sull'altra quella che in $t = 0$ ha una coda maggiore, la strada B, la quale avrà il verde finché rimarrà al di sopra della sua soglia di contenimento, ovvero fino a $t = 7$. In questo lasso di tempo la coda della strada A è cresciuta dalle 5 vetture di partenza al suo numero massimo; poiché i suoi intervalli di verde durano mediamente meno dei suoi intervalli di rosso, difficilmente la sua coda riuscirà a svuotarsi in maniera significativa. Tale considerazione comporta che mentre la coda della strada B rimarrà sempre confinata entro valori accettabili, la coda della strada A sarà sempre molto piena, fatto che non soddisfa tutte le vetture coinvolte, dal momento che per le caratteristiche dell'incrocio, nessuna delle due strade dovrebbe risultare agevolata sull'altra.

Si prenda ora in considerazione un esempio più consono all'utilizzo della strategia di tipo prioritario. Nello specifico, riconsideriamo nuovamente il caso introdotto a inizio paragrafo.

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 12 \quad \lambda_B = 1 \quad \eta_B = 4$$

Si è già precisato che la precedenza spetti alla strada A, in quanto accoglie mediamente un numero di vetture pari a 3, contro la sola della strada B. Ci si aspetta dunque dalla simulazione che la strada A sia efficacemente controllata al di sotto di una certa soglia, anche a scapito del traffico della strada B:

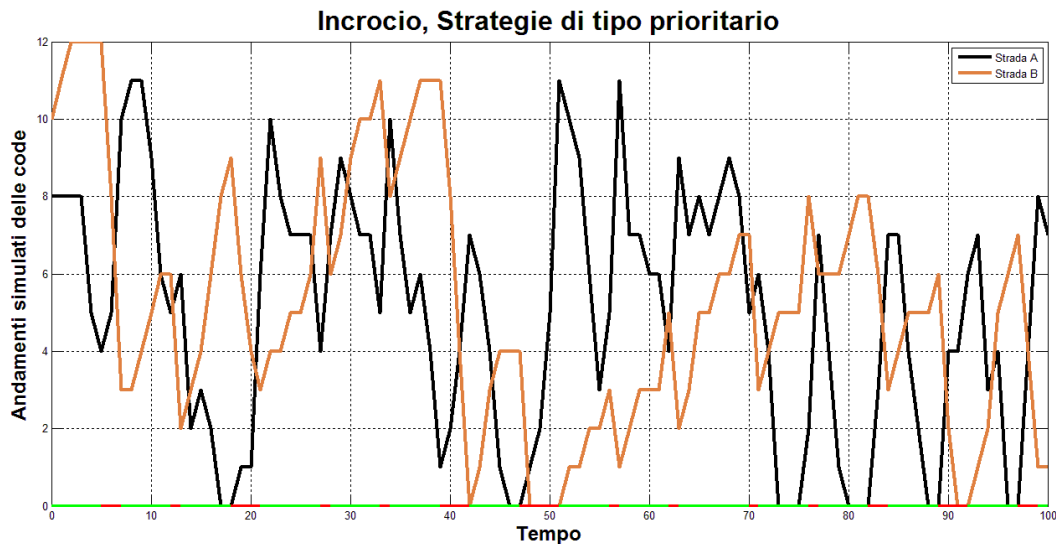


Figura 68: Incrocio, strategia di tipo prioritario, andamenti simulati delle code, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=12$, $\lambda_B=1$, $\eta_B=4$

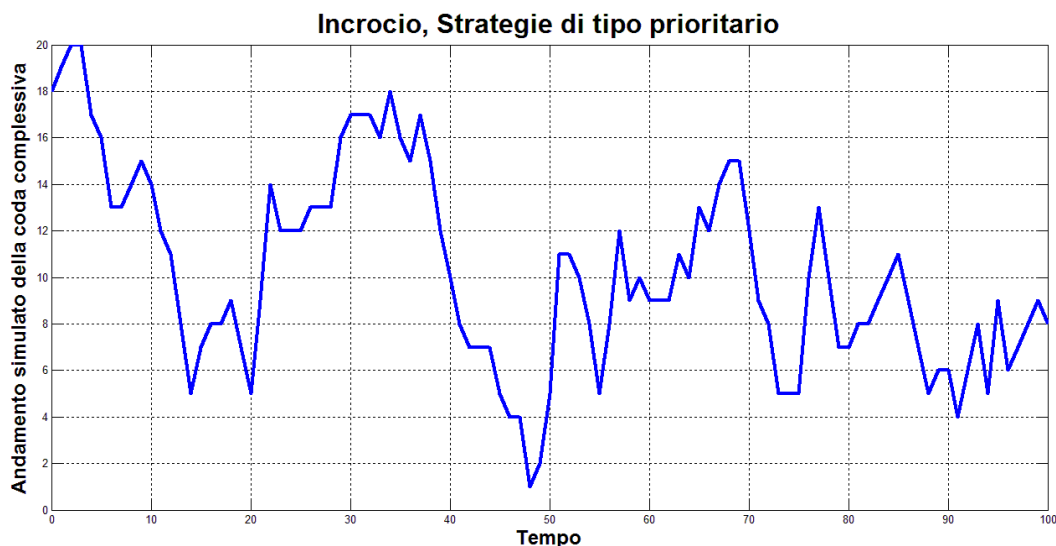


Figura 69: Incrocio, strategia di tipo prioritario, andamento simulato della coda complessiva, $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=12$, $\lambda_B=1$, $\eta_B=4$

Dalla prova simulata si può osservare come la coda della strada A sia quasi sempre al di sotto della metà della sua capacità massima; ciò è ovviamente dovuto al prolungato segnale verde di cui essa beneficia. Parallelamente la strada B satura al suo valore massimo solamente per 3 intervalli consecutivi sui 100 esaminati; non è un caso che anche la coda della strada B sia piuttosto contenuta, in quanto i parametri inseriti ad hoc garantiscono un flusso in ingresso relativamente basso, che non necessita dunque di lunghi tempi di verde.

Naturalmente per poter operare un'analisi più completa, va analizzato un ampio numero di simulazioni (nel nostro caso $N_S = 100$), che definiscano un andamento medio, più affidabile

della singola osservazione. Come effettuato nel paragrafo precedente, ci avvarremo dei medesimi indici di prestazione:

- Media della coda sui 100 intervalli di tempo
- Numero di sforamenti della coda rispetto a una soglia prefissata

Si ricordi l'espressione delle due soglie da considerare:

$$s_A = \lfloor 0.8 * N_A \rfloor$$

$$s_B = \lfloor 0.8 * N_B \rfloor$$

Nella tabella 4 si riportano i risultati di due diversi casi analizzati.

CASO I

Strada A:

$$N_A = 16 \quad \lambda_A = 2 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 15 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

CASO II

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 12 \quad \lambda_B = 1 \quad \eta_B = 4$$

Si noti come il primo si basa su parametri delle due strade confrontabili fra loro; per l'esattezza sono state utilizzate le stesse medie dei flussi impiegate nella prima simulazione, con un piccolo accorgimento relativo alle capacità massime. N_A è stato infatti incrementato di un'unità rispetto a N_B , in modo da avere ad ogni simulazione la priorità garantita per la strada A. Se avessimo mantenuto inalterati i valori impostati in precedenza, essendo casuali le due code al tempo $t = 0$, non si sarebbe riuscita a distinguere nitidamente la strada più svantaggiata dalla strategia in uso; ciò è dovuto al fatto che a parità di parametri, l'algoritmo

che stabilisce a chi assegnare la precedenza valuta il numero di vetture inizialmente presenti nelle due corsie.

Il secondo caso coincide con i valori ipotizzati per la seconda simulazione, definendo un chiaro sbilanciamento tra le due strade.

CASO	M_A	M_B	M_C	$N_{sf.A}$	$N_{sf.B}$
I	2.58	10.61	13.19	0.57	49.66
II	5.87	7.19	13.06	1.74	43.56

Tabella 4: Incrocio, strategia di tipo prioritario, media di $N_S=100$ simulazioni, Caso (I): $N_A=16$, $\lambda_A=2$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$, Caso (II): $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=12$, $\lambda_B=1$, $\eta_B=4$

Si tenga sempre a mente la notazione introdotta in precedenza:

- M_A = Media totale della coda A sulle 100 simulazioni
- M_B = Media totale della coda B sulle 100 simulazioni
- M_C = Media totale della coda complessiva sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.A}$ = Numero medio di sforamenti della coda A rispetto a s_A sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.B}$ = Numero medio di sforamenti della coda B rispetto a s_B sulle 100 simulazioni

Il primo caso mostra come la strategia impiegata in incroci che tagliano strade confrontabili fra loro per capacità massime e medie dei flussi, risulti decisamente svantaggiosa per una delle due strade: un intervallo su due essa oltrepassa la propria soglia critica, mentre la strada che gode della precedenza mediamente conta in coda meno di 3 vetture.

Ha più senso adottare una strategia simile in casi come il secondo, in cui è ragionevole assumere di dare la precedenza alla strada di norma più trafficata: essa sarà contenuta in valori accettabili, spesso a discapito dell'altra strada, la quale tuttavia (per via del valore piuttosto basso associato a λ_B) presenta un numero medio di sforamenti più basso del caso precedente.

Nel prossimo capitolo vengono messe a confronto le due strategie, chiarendo in quali contesti sia preferibile appoggiarsi a ciascuna di esse.

5. Conclusioni

Dopo aver esposto le diverse strategie di controllo di un semaforo all'incrocio e averle sperimentate attraverso l'ausilio di un simulatore, si analizzi ora in quali casi sia più conveniente adottare una strategia o alternativamente l'altra⁹.

Intuitivamente si può ipotizzare che in caso di strade simili fra loro, la strategia migliore sia di tipo periodico, tale per cui il tempo di verde ad ogni ciclo sia lo stesso per le due strade in questione. Quando però i parametri che determinano il flusso veicolare non sono più paragonabili fra loro, all'interno della strategia periodica si può fissare una durata del semaforo verde più lunga, per ogni singolo ciclo, per la strada più trafficata delle due. Tuttavia quando una delle due strade risulta notevolmente più trafficata dell'altra, può essere utile controllare ad ogni passo la sua coda e assicurarsi di limitarla al di sotto di una ben definita soglia.

Si tornino ora a considerare i casi analizzati nel paragrafo 4.2, confrontando fra loro i risultati derivanti dall'applicazione di entrambe le strategie a un numero $N_S = 100$ di simulazioni.

CASO I

Strada A:

$$N_A = 16 \quad \lambda_A = 2 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 15 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

CASO II

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 12 \quad \lambda_B = 1 \quad \eta_B = 4$$

⁹ Di seguito verrà utilizzata la medesima notazione introdotta nei capitoli precedenti.

Per operare un confronto, faremo uso degli stessi indici di prestazioni adottati in precedenza:

- M_A = Media totale della coda A sulle 100 simulazioni
- M_B = Media totale della coda B sulle 100 simulazioni
- M_C = Media totale della coda complessiva sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.A}$ = Numero medio di sforamenti della coda A rispetto a s_A sulle 100 simulazioni
- $N_{sf.B}$ = Numero medio di sforamenti della coda B rispetto a s_B sulle 100 simulazioni

CASO I

STRATEGIA	M_A	M_B	M_C	$N_{sf.A}$	$N_{sf.B}$
DI TIPO PRIORITARIO	2.58	10.61	13.19	0.57	49.66
PERIODICA $T_{A,v} = 1$	15.43	0.65	16.08	98.24	0.42
PERIODICA $T_{A,v} = 2$	14.70	1.31	16.01	91.36	0.56
PERIODICA $T_{A,v} = 3$	13.58	2.46	16.04	77.70	1.11
PERIODICA $T_{A,v} = 4$	11.81	4.35	16.16	58.12	5.64
PERIODICA $T_{A,v} = 5$	8.36	7.03	15.39	29.07	18.76
PERIODICA $T_{A,v} = 6$	4.83	10.25	15.08	8.90	44.79
PERIODICA $T_{A,v} = 7$	2.99	12.24	15.23	3.86	66.82
PERIODICA $T_{A,v} = 8$	1.61	13.49	15.10	1.85	84.42
PERIODICA $T_{A,v} = 9$	0.84	14.30	15.14	1.06	94.89

Tabella 5: Incrocio, strategie a confronto, media di $N_S=100$ simulazioni, Caso (I): $N_A=16$, $\lambda_A=2$, $\eta_A=4$, $N_B=15$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Nel primo caso si è scelto di considerare un incrocio che taglia due strade praticamente identiche, con la sola differenza che la capacità massima della strada A misura una vettura in più di quella della strada B. La strategia di tipo prioritario consente di avere una coda media per la strada A, nell'arco di tempo considerato, inferiore a quella che si avrebbe tramite strategia periodica imponendo $T_{A,v} \leq 7$. Inoltre la media della coda complessiva risulta nettamente inferiore a quella che si otterrebbe tramite strategia periodica per qualunque scelta

di $T_{A,v}$. Tuttavia tale criterio soddisferebbe solamente le vetture che circolano sulla strada A: in questo modo infatti ogni due intervalli trascorsi, la coda della strada B supera la sua soglia critica. Per tale motivo pare più indicata una soluzione periodica, in cui non venga danneggiato eccessivamente il traffico di nessuna delle due strade; essendo esse molto simili fra loro, assegnarle la stessa durata di verde sul singolo ciclo sembra la decisione migliore (evidenziata in tabella): con essa mediamente nessuna delle due code sale sopra le 9 vetture e gli sforamenti restano ben confinati entro il 30% degli intervalli.

Tenendo a mente il caso I, si verifichi ora come cambia la situazione variando sensibilmente i parametri.

CASO II

STRATEGIA	M_A	M_B	M_C	$N_{sf.A}$	$N_{sf.B}$
DI TIPO PRIORITARIO	5.87	7.19	13.06	1.74	43.56
PERIODICA $T_{A,v} = 1$	19.55	0.23	19.78	98.53	0.39
PERIODICA $T_{A,v} = 2$	19.22	0.46	19.68	96.61	0.41
PERIODICA $T_{A,v} = 3$	18.77	0.81	19.58	91.73	0.48
PERIODICA $T_{A,v} = 4$	18.15	1.29	19.44	85.23	0.56
PERIODICA $T_{A,v} = 5$	17.32	1.89	19.21	76.24	1.46
PERIODICA $T_{A,v} = 6$	16.01	2.68	18.69	62.53	3.47
PERIODICA $T_{A,v} = 7$	13.16	4.25	17.41	39.62	11.92
PERIODICA $T_{A,v} = 8$	8.36	7.72	16.08	15.37	44.22
PERIODICA $T_{A,v} = 9$	3.42	10.53	13.95	3.43	86.08

Tabella 6: Incrocio, strategie a confronto, media di $N_S=100$ simulazioni, Caso (II): $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=12$, $\lambda_B=1$, $\eta_B=4$

In questo secondo caso, i parametri considerati, tali da avere una significativa differenza di traffico fra le due strade, definiscono una strada principale, la strada A, e una secondaria, la strada B. In effetti, se si volesse adottare una strategia periodica per l'assegnamento del verde,

una scelta di $T_{A,v}$ inferiore ai 7 intervalli sul ciclo, risulterebbe deleteria per la strada A, poiché le comporterebbe una coda media decisamente elevata e prossima alla sua capacità massima. Probabilmente la scelta migliore ricadrebbe su $T_{A,v} = 8$, che conterrebbe entrambe le medie delle code entro range accettabili. Si confrontino allora tali due possibilità, evidenziate in tabella: l'applicazione di una qualsiasi delle due strategie è indifferente ai veicoli che percorrono la strada secondaria, in quanto sia i valori di M_B che quelli di $N_{sf.B}$ sono comparabili fra loro. Si osservino dunque le prestazioni relative alla strada principale: nella strategia periodica si conta una media superiore alle 8 vetture ad ogni intervallo, contro nemmeno 6 riscontrabili nella strategia di tipo prioritario; quest'ultima ha poi l'indubbio vantaggio di considerare irrilevante il numero di sforamenti rispetto alla soglia critica, mediamente inferiori a 2 (contando che un certo numero di simulazioni potrebbe partire da una condizione iniziale $X_A(0) \geq s_A$), mentre nella strategia periodica se ne verifica mediamente un numero superiore a 15. Optando per una soluzione di tipo prioritario, ne risente anche la media totale, che si abbassa in media di 3 vetture ad ogni intervallo.

Si introduca un terzo caso, che si inserisca fra i due appena studiati:

CASO III

Strada A:

$$N_A = 20 \quad \lambda_A = 3 \quad \eta_A = 4$$

Strada B:

$$N_B = 18 \quad \lambda_B = 2 \quad \eta_B = 4$$

Se il primo caso prevedeva un incrocio che tagliava strade simili fra loro e il secondo strade parecchio sbilanciate, quest'ultimo si pone come proposito l'analisi di una situazione intermedia. Nuovamente ammettiamo che le due distribuzioni di uscita delle vetture siano incentrate sullo stesso valore, $\eta_A = \eta_B = 4$; le due capacità massime sono leggermente diverse fra loro, per dare maggior peso alla strada più trafficata, la strada A. Essa registra un numero medio di vetture in ingresso pari a 3, contrapposto alle 2 vetture della strada B.

CASO III

STRATEGIA	M_A	M_B	M_C	$N_{sf.A}$	$N_{sf.B}$
DI TIPO PRIORITARIO	6.20	16.22	22.42	1.63	87.21
PERIODICA $T_{A,v} = 1$	19.53	0.77	20.30	98.29	0.47
PERIODICA $T_{A,v} = 2$	19.16	1.46	20.62	95.89	0.61
PERIODICA $T_{A,v} = 3$	18.76	2.55	21.31	92.10	0.55
PERIODICA $T_{A,v} = 4$	18.18	4.48	22.66	85.56	3.14
PERIODICA $T_{A,v} = 5$	17.33	8.46	25.79	76.29	19.01
PERIODICA $T_{A,v} = 6$	15.85	12.61	28.46	61.39	48.84
PERIODICA $T_{A,v} = 7$	13.11	15.00	28.11	40.14	73.35
PERIODICA $T_{A,v} = 8$	7.71	16.29	24.00	12.97	88.29
PERIODICA $T_{A,v} = 9$	3.24	17.17	20.41	2.41	96.09

Tabella 7: Incrocio, strategie a confronto, media di $N_S=100$ simulazioni, Caso (III): $N_A=20$, $\lambda_A=3$, $\eta_A=4$, $N_B=18$, $\lambda_B=2$, $\eta_B=4$

Si veda come un caso del genere renda critica ogni genere di soluzione: la strategia di tipo prioritario non è più efficace come nel caso II, sebbene le prestazioni della strada A siano confrontabili (questo perché il controllo in anello chiuso è basato in entrambi i casi sulla coda della strada A, che conserva gli stessi parametri). λ_B condiziona ora fortemente l'andamento della coda della strada secondaria, poiché il flusso in ingresso inizia ad avere una portata di un certo spessore. In queste condizioni sarebbe difficile accettare di avere una media della coda pari al 90% della sua capacità massima, per cui è preferibile appoggiarsi ad una strategia periodica. Tuttavia anche la strategia periodica garantisce performance ben inferiori a quelle degli altri casi: all'interno di tale strategia, la scelta migliore potrebbe ricadere su $T_{A,v} = 6$ (evidenziata in tabella), l'unica suddivisione dei segnali che manterrebbe una percentuale di sforamenti oltre le soglie critiche al di sotto del 70%, per entrambe le strade. Proprio in virtù di questo fatto si potrebbe optare per tale strategia e non per quella di tipo prioritario, nonostante la sensibile differenza della media della coda complessiva.

Si può concludere che la scelta della legge che regola l'attivazione dei segnali semaforici ad un incrocio, dipenda fortemente a seconda del caso che si sta analizzando. In particolare si è visto come il numero medio di vetture in ingresso influenzi in modo decisivo tale scelta.

Si suggerisce di procedere con una strategia di tipo prioritario nel caso in cui i flussi in ingresso siano nettamente sbilanciati fra loro, e tali per cui uno dei due sia caratterizzato da un numero medio di arrivi moderatamente basso. Al di fuori delle analisi effettuate finora, si può pensare di estendere tale soluzione ai casi in cui una delle due strade sia molto più lunga dell'altra, abbassando opportunamente la sua soglia di contenimento¹⁰.

Diversamente, per i casi in cui non è possibile definire una strada principale e una secondaria, essendo i parametri confrontabili fra loro, la strategia periodica può risultare più performante di quella di tipo prioritario. Allo stesso modo, per casi più complessi di incroci particolarmente trafficati in entrambe le direzioni, la strategia periodica pare gestire meglio il deflusso veicolare.

¹⁰ Si consideri il caso estremo in cui $N_A=100$: una coda ben al di sotto della sua capacità massima, ad esempio composta da 45 vetture, tramite strategia periodica potrebbe impiegare molti cicli prima di esaurirsi.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professore Paolo Bolzern: nel suo ufficio due anni fa decisi di intraprendere questo corso di laurea magistrale e qualche mese dopo mi affidai alla sua proposta di tesi. Considerando la serenità con cui ho affrontato gli anni della magistrale, in generale, e il lavoro di tesi, più in particolare, la sua presenza e la sua disponibilità hanno giocato fin da subito un ruolo fondamentale.

Un grazie al Politecnico di Milano, che è stato a tutti gli effetti una palestra di vita, temprando il mio carattere e spingendomi spesse volte oltre quelli che credevo fossero i miei limiti.

Il grazie maggiore va alla mia famiglia, che mi ha portato fin qua: ai miei genitori, i quali hanno investito su di me, credendo in me sempre più di quanto l'abbia fatto io stesso. Per i sacrifici fatti e la partecipazione ai vari successi e insuccessi, dovrei scontare un enorme debito, ma sono certo che ogni loro sacrificio è stato fatto volentieri, solo per vedermi realizzato. Per la stima e il continuo sprono a tirar fuori il meglio di me, non potevano esserci supporters migliori.

Al pari di mamma e papà va ringraziato mio fratello Aldo: fonte costante di incoraggiamento nei momenti più scuri, esempio da seguire per dedizione e professionalità, compagno entusiasta di ogni mia gioia. Fra gli highlights della mia carriera universitaria, l'abbraccio scambiato al superamento di un esame chiave, sintetizza il bene, più profondo, che gli voglio. Un grazie anche a Stefania, presente come se fosse una sorella, sostenitrice nel mio cammino dall'inizio alla fine.

Ringrazio tutta la famiglia più estesa, dal gruppo dei Cugis, a quello degli zii, ai miei nonni che vegliano sempre su di me. Un grazie particolare a Tiziana e Alberto, che non hanno mai mancato di mostrare il loro orgoglio anche per i miei più piccoli successi. L'importanza che hanno rivestito in questi anni è indecifrabile, come il sentimento che mi lega a loro.

Un grazie, grande, a Giusy: l'ho conosciuta durante il cammino universitario e da quel momento è riuscita a infondermi l'affetto, la solidità e la serenità di cui avevo bisogno. Con i suoi modi tanto gentili e tanti onesti, mi è sempre stata accanto, trasmettendomi un'incondizionata fiducia ad ogni momento, *che 'ntender no la può chi no la prova*.

Se ho raggiunto il traguardo, un gran merito va ai miei compagni di viaggio, che lo hanno alleggerito rendendo piacevoli le tappe percorse insieme: dagli intensi pomeriggi di studio, ai meno intensi, dalle partite a calcetto con la Ruggiu FC, alle partite al quizzettone con la Ruggiu FC, e soprattutto per la loro amicizia, grazie ad Alessandro e Michele. Un grazie a Gilda, con la quale in tante occasioni ci siamo fatti forza a vicenda, riuscendo sempre a uscirne. Grazie anche a Bas, Cecio, David, Jesus, Mala, Marta, Marta, Mons, Raffa, e il presidente Rugg, anch'essi colleghi di libri e indiscussi amici.

Grazie ai nuovi amici "dell'automazione", Diana, Eugenio, Federico, Mauro e Nunzio. Aver trovato fra i tanti volti sconosciuti questi volti sorridenti, è stata una benedizione, che mi ha permesso di affrontare nel modo migliore gli ostacoli prima della laurea.

Grazie all'oratorio SS. Redentore, e alle persone che lo hanno reso un luogo speciale per la mia crescita. Fra di esse, gli amici di sempre, Alberto, Federica, Mattia, Monia e Riccardo, che, dopo tanti anni, ho ancora la fortuna di avere al mio fianco.

Un grazie a tutti i ragazzi che mi hanno permesso di dedicarmi a loro, diventando inconsapevolmente un punto di riferimento per me, spesso educandomi meglio di come l'abbia fatto io con loro. Fra tutti, grazie ad Annalisa, Chiara, Corrado, Daniele, Gaia, Giovanni, Ludovica, Martino, Michele, Nicola, Sidney, Silvia, Sonia, Tommaso e Veronica.

Un grazie al mio amico Michele, che da sempre mi dispensa sorrisi e mi insegna come apprezzare le più piccole gioie quotidiane.

Un grazie ad Ariel ed Emanuele, figure centrali della mia vita, che da sempre contano su di me e che ogni giorno mi regalano motivi di orgoglio per il loro invidiabile lato umano.

Il cammino universitario è iniziato quando è terminato quello liceale. Non posso non ringraziare chi mi ha accompagnato in quegli anni, chi continua a ricordarmi, mentre si cresce verso il futuro, di voltarmi ogni tanto al passato verso le amicizie che rimarranno scolpite per sempre: Alessandro, Giulia, Riccardo e Tommaso.

Grazie al Faro, quel luogo, quella valvola di sfogo, quel gruppo di amici, e quella passione, che hanno colorato gli anni universitari. Grazie a chi mi ha guidato, Giulia, facendomi sentire importante e fidandosi sempre ciecamente delle mie intuizioni. Grazie a chi con me ha condiviso lo stesso palco, le stesse emozioni, le stesse lezioni, di tecnica, e di vita. Grazie ad Alessandro, Iacopo e Lorenzo, quella *rete di fiammante pazzia* teatrale, gruppo unico nel suo genere per fusione di dinamismo e affiatamento.

Grazie agli amici della Piccola Accademia di Cascina Biblioteca, che in un anno mi hanno progressivamente conquistato, rammentandomi con la loro allegria il valore della riconoscenza e della gratitudine.

Grazie a chi nel tempo di scrittura della tesi mi ha sostenuto, sgravandomi dalle ansie che inevitabilmente avrei incontrato, pur spronandomi a correre verso l'obiettivo. Grazie dunque agli amici di Varigotti, a chi ha speso una parola di conforto nei momenti più difficili, a chi ha avuto tempo per una birra, per un'uscita, o anche solo per una chiacchierata insieme.

Grazie infine a tutti coloro che non hanno mai smesso di confidare in me, a chi ha rivolto una preghiera o anche solo un pensiero per questo mio importante traguardo.

Bibliografia

- [1] R. B. ALLSOP, *Sigset: A computer program for calculating traffic capacity of signal-controlled road junctions*, «Traffic, Engineering and Control», vol. 12, 1971, pp. 58-60.
- [2] I. ALVAREZ, A. POZNYAK, A. MALO, *Urban Traffic Control Problem a Game Theory Approach*, Decision and Control 47th IEEE Conference on (Cancun, Mexico, 9-11 Dicembre 2008).
- [3] F. BOILLOT, J. M. BLOSSEVILLE, J. B. LESORT, M. PAPAGEORGIU, N. SELLAM, *Optimal signal control of urban traffic networks*, Proc. 6th IEEE International Conference Road Traffic Monitoring and Control, 1992, pp. 75-79.
- [4] P. B. HUNT, D. I. ROBERTSON, R. D. BRETHERTON, *The scoot on-line traffic signal optimization technique*, «Traffic, Engineering and Control», vol. 23, 1982, pp. 190-192.
- [5] G. IMPOTRA, *Signal control at individual junctions: Phase-based approach*, in *Consice Encyclopedia of Traffic and Transportation Systems*, 2002, pp. 437-478.
- [6] G. IMPOTRA, G. E. CANTARELLA, *Control systems design for an individual signalised junction*, «Transp. Res. B», vol.18, 1984, pp. 147-167.
- [7] D. C. LITTLE, *The synchronization of traffic signal by mixed-integerlinear-programming*, «Operations Research», vol. 14, 1966, pp. 568-594.
- [8] D. C. LITTLE, M. D. KELSON, N. H. GARTNER, *Maxband: A program for setting signals on arteries and triangular networks*, U. S. Dept. Transport of Washington DC Transport Research Record, no. 795, 1981.
- [9] E. M. McDONALD, N. B. HOUNSELL, *Road traffic control: Transyt and scoot*, in *Consice Encyclopedia of Traffic and Transportation Systems*, 1991, pp. 386-391.
- [10] D. C. MONTGOMERY, G. C. RUNGER, N. F. HUBELE, *Statistica per ingegneria*, ed. italiana a cura di A. BARCHIELLI - M. VERRI, Milano, Egea, 2004, pp. 89-93.
- [11] M. PAPAGEORGIU, *Handbook of Transportation Science*, Springer US, 2003, pp. 243-277.
- [12] N. PINTACUDA, *Catene di Markov*, Pisa, ETS Editrice, 2000, pp. 30-38: 129-130.
- [13] D. I. ROBERTSON, *Transyt method for area traffic control*, «Traffic, Engineering and Control», vol. 10, 1969, pp. 276-281.
- [14] D. I. ROBERTSON, R. D. BRETHERTON, "Optimizing networks of traffic signals in real time - the scoot method," «IEEE Transactions on Vehicular Technology. IEEE Vehicular Technology Society», 1991, vol. 40, no. 1, pp. 11-15.

- [15] S. SEN, L. HEAD, *Controlled optimization of phases at an intersection*, «Transp. Sci.», vol. 31, 1997, pp. 5-17.