

POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE e TERRITORIALE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile



POLITECNICO
MILANO 1863

**MODELLI NUMERICI PER LA
SIMULAZIONE DI PROCESSI DI
DELAMINAZIONE**

Relatore: Prof. UMBERTO PEREGO
Correlatore: Dott. FEDERICA CONFALONIERI

Tesi di laurea di:
FEDERICO BUSSOLATI
Matr. 818850

Anno Accademico 2014 - 2015



A nonna Niobe, ai miei genitori e ai miei fratelli

Sommario

La presente tesi si concentra sulla simulazione numerica di fenomeni di delaminazione, i quali consistono nel distacco tra due corpi inizialmente legati tra loro. A tal fine è stata introdotta in un codice numerico scritto in linguaggio Fortran 90 la possibilità di inserire elementi coesivi in corrispondenza della superficie di separazione tra i corpi, la quale è sede della potenziale delaminazione. Alla modifica del codice, è seguita la procedura di validazione dello stesso, attraverso la simulazione di test di delaminazione in modo puro, per i quali sono disponibili soluzioni analitiche. Una volta validato il codice, si è scelto di simulare fenomeni di maggiore rilevanza dal punto di vista ingegneristico, quali il distacco di una striscia di rinforzo dalla superficie esterna di una trave soggetta a flessione ed una prova di trazione di un ancoraggio acciaio-CFRP.

Indice

1	Introduzione	11
1.1	Cosa si intende per delaminazione	11
1.2	Obbiettivi	12
2	Implementazione	13
2.1	Problema al contorno	13
2.1.1	Processi di decoesione	15
2.2	Il codice <code>ttappo</code>	16
2.2.1	Costruzione della mesh	16
2.2.2	Introduzione degli elementi coesivi	17
2.2.3	Integrazione della legge coesiva	18
3	Leggi coesive	21
3.1	Aspetti fondamentali	22
3.1.1	Comportamento elastico iniziale	22
3.1.2	Anisotropia della risposta	23
3.1.3	Accoppiamento tra i modi	23
3.1.4	Ramo di softening	24
3.1.5	Irreversibilità	26
3.1.6	Effetto unilaterale	26
3.1.7	Dipendenza dalla velocità di deformazione	27
3.2	Leggi implementate nel codice	27
3.2.1	Legge bilineare	27
3.2.2	Legge Camanho-Davila	28
3.2.3	Legge Corigliano-Allix-Ladeveze	32
3.2.4	Legge Alfano-Crisfield	34
3.2.5	Legge Park-Paulino-Roesler	36
3.2.6	Legge Xu-Needleman	42
3.2.7	Legge van den Bosch-Schreurs-Geers	45
4	Determinazione dei parametri	51
4.1	Energia di frattura	51
4.2	Rigidezza iniziale	54
4.3	Sforzi massimi	55
4.4	Prove di delaminazione	55
4.4.1	Double Cantilever Beam (DCB)	55
4.4.2	End Notch Flexure (ENF)	58
4.4.3	Mixed-Mode Bending (MMB)	61
4.4.4	Peel test	62

5	Modellazione	65
5.1	Elementi solid-shell	65
5.1.1	Elementi Q1STs	66
5.2	Elementi coesivi	67
5.3	Algoritmo esplicito	67
5.3.1	Metodo delle differenze centrali	68
5.3.2	Equazione del moto	68
5.3.3	Passo temporale stabile	69
5.3.4	Bilancio dell'energia	70
5.4	Mass scaling selettivo	70
5.4.1	Scelta del parametro di mass scaling	74
5.5	Tecniche di smorzamento	75
5.5.1	Velocity smoothing	75
5.5.2	Smorzamento alla Rayleigh	76
5.6	Scelta della mesh	77
5.6.1	Lunghezza della zona coesiva	77
5.6.2	Riduzione degli sforzi massimi	79
6	Risultati numerici: test di delaminazione in modo puro	81
6.1	Obbiettivi e procedimento seguito	81
6.2	Risultati ottenuti	83
6.2.1	Scelta ottimale dei parametri di forma	90
6.2.2	Distribuzione degli sforzi	90
7	Risultati numerici: travi rinforzate con CFRP	93
7.1	Modi di delaminazione	94
7.2	Tensioni di interfaccia	94
7.2.1	Sforzi di taglio	95
7.2.2	Sforzi normali	97
7.2.3	Soluzioni in forma chiusa	98
7.3	Modelli utilizzati	99
7.4	Trave di calcestruzzo rinforzata	100
7.4.1	Stima della lunghezza coesiva	102
7.4.2	Mesh utilizzate	102
7.4.3	Risultati ottenuti	102
7.5	Trave di acciaio rinforzata - confronto numerico-sperimentale	109
7.5.1	Risultati ottenuti	112
7.6	Trave di acciaio rinforzata - studio parametrico	112
7.6.1	Risultati ottenuti	114
8	Risultati numerici: ancoraggi acciaio-CFRP	115
8.1	Prove sperimentali	115
8.2	Modalità di collasso delle unioni	117
8.3	Unioni di tipologia 2 e 3	118

8.3.1	Formulazione analitica	118
8.4	Ancoraggio di tipologia 2	123
8.4.1	Materiali e modalità della prova	123
8.4.2	Stima della lunghezza coesiva	125
8.4.3	Risultati ottenuti	126
9	Conclusioni	129
	Bibliografia	131

1

Introduzione

1.1 Cosa si intende per delaminazione

Per delaminazione si intende un qualsiasi fenomeno di decoesione, ovvero di distacco tra superfici inizialmente legate tra loro. È immediato constatare come questa tipologia di eventi si verifichi in un'ampia gamma di situazioni, anche molto diverse tra loro, sia come ambito che come scala dimensionale: oltre alle applicazioni più propriamente ingegneristiche, come quella che riguarda la delaminazione nei laminati, si verifica un evento di delaminazione anche quando si apre una vaschetta di alimenti, in cui si deve staccare la pellicola protettiva dal bordo della vaschetta.

La caratterizzazione dell'aderenza tra due componenti è un compito molto complesso, in quanto essa è tipicamente regolata da diversi fattori, quali i legami chimico-fisici che si instaurano nelle fase di incollaggio, il tipo di preparazione delle superfici, resistenze e rigidità dei singoli componenti, condizioni di temperatura ed umidità, ecc... Ne consegue la necessità di possedere strumenti affidabili per quantificare le grandezze che definiscono la resistenza di un'adesione: in tal senso sono state elaborate una serie di prove sperimentali, le più importanti tra le quali saranno descritte nel capitolo 4.

La delaminazione è una delle principali cause di collasso di strutture in laminato composito, soprattutto quando non è presente alcun rinforzo nella direzione dello spessore, e può portare ad un collasso strutturale improvviso. Il fenomeno può originarsi da effetti di bordo, impatti, imperfezioni di fabbrica ed altre cause che provocano importanti sforzi a livello della superficie di separazione tra i componenti (la cosiddetta interfaccia), ed è spesso accompagnato da altri fenomeni di danneggiamento nelle lamine, come fessurazione della matrice, rottura delle fibre, scorrimento fibra-matrice ed instabilità delle fibre.

Nell'industria aeronautica il fenomeno riveste un ruolo importante. Ad esempio, può accadere che a causa delle cricche interlaminari originatesi da un impatto, carichi di compressione possano causare l'instabilità delle

lamine, la quale a sua volta sviluppa una rapida propagazione della delaminazione, con un carico ultimo di gran lunga inferiore rispetto a quello della struttura non danneggiata [47].

Un altro importante fenomeno di delaminazione è quello che riguarda il rivestimento polimerico di componenti metallici. Ciò che accade in questo caso è che il sottile strato di rivestimento è soggetto agli stessi processi deformativi del substrato metallico. Durante questi processi è possibile che il rivestimento si stacchi dal substrato, con la conseguente perdita della protezione che offriva il rivestimento.

Per quanto riguarda l'ingegneria civile, è ormai una pratica consolidata quella di riabilitare strutture esistenti mediante incollaggio di piastre di rinforzo sulla superficie degli elementi strutturali. Sotto determinate condizioni di carico, si può verificare il distacco del rinforzo esterno, spesso costituito da strisce in fibra di carbonio (CFRP), dal componente strutturale al quale era incollato. Questo è un fenomeno di delaminazione e verrà descritto ed analizzato ampiamente nel capitolo 7.

1.2 Obiettivi

La rilevanza dei fenomeni di delaminazione in svariati campi d'applicazione ha spinto diversi autori a studiare ed a caratterizzare il fenomeno, per cercare di capirne le cause e studiare soluzioni per evitarne l'insorgere. Allo stesso modo, questo lavoro di tesi ha come obiettivo quello di introdurre in un codice di calcolo la possibilità di modellare fenomeni di delaminazione. Prima della modifica apportata, il codice, sviluppato nel Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale (DICA) del Politecnico di Milano, era in grado di modellare fenomeni di frattura e taglio di strutture sottili; la possibilità di analizzare la delaminazione può essere quindi vista come un completamento del codice, che diviene capace non solo di caratterizzare processi di frattura perpendicolari al piano della struttura, ma anche di fratturare il materiale nel suo piano, tra le lamine che lo compongono.

2

Implementazione

In questo capitolo verrà descritto brevemente il codice di calcolo, denominato `ttappo`. In tal senso, verrà spiegato come il codice crea la struttura da analizzare ed in che modo è stato scelto di introdurre nel modello numerico una superficie coesiva, ovvero un'interfaccia alla quale viene associata una legge costitutiva che modella l'interazione tra i due corpi.

Per caratterizzare meglio quali sono gli aspetti da dover introdurre nel modello, nel seguente paragrafo verrà illustrato il problema meccanico di un corpo continuo, genericamente vincolato e caricato, nel quale sono presenti superfici di discontinuità.

2.1 Problema al contorno

Si consideri un corpo elastico Ω e siano Γ_i ($i = 1, \dots, n$) delle superfici all'interno del corpo che lo dividono in più parti. Sia Ω_i la generica porzione di Ω compresa tra le superfici Γ_{i-1} e Γ_i .

Le superfici Γ_i sono sede di possibili discontinuità del campo degli spostamenti e verranno d'ora in poi denominate interfacce.

Si fissi un punto P su una delle interfacce Γ_i e si consideri un sistema di riferimento locale (1,2,3) centrato in P , con l'asse 3 coincidente con la normale in P e diretta verso Ω_i e gli assi 1 e 2 tangenti a Γ_i in P (figura 2.1). Sia \mathbf{t} il vettore degli sforzi in P , espresso secondo le componenti del sistema di riferimento locale:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

Essendo il punto P appartenente all'interfaccia, si ha che in sua corrispondenza si può sviluppare una discontinuità tra gli spostamenti \mathbf{u}_{i-1} della porzione di corpo Ω_{i-1} e gli spostamenti \mathbf{u}_i della porzione Ω_i . Si esprime

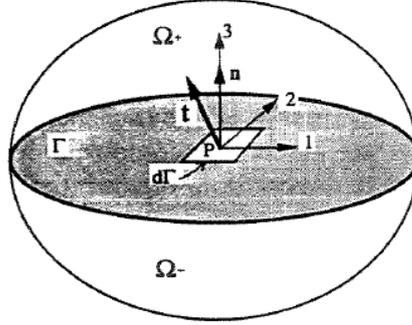


Figura 2.1: Interfaccia all'interno di un corpo continuo e sistema di riferimento locale centrato in P [22].

dunque la discontinuità degli spostamenti nel punto P come

$$\Delta = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

All'interfaccia viene assegnata una legge costitutiva di tipo coesivo, ovvero una funzione che lega il vettore delle trazioni alle discontinuità di spostamento:

$$\mathbf{t} = A(\Delta, \mathbf{h}) \quad (2.2)$$

in cui \mathbf{h} è un vettore di variabili interne.

Le leggi coesive devono possedere alcune caratteristiche, che verranno illustrate e discusse nel capitolo 3; ciò che accomuna tutte queste leggi è l'aver come obiettivo quello di descrivere e modellare un processo di decoesione, ovvero la perdita progressiva di aderenza tra due superfici inizialmente legate tra loro. Fisicamente la zona coesiva modella infatti la coalescenza di incrinature/cricche e rispecchia il modo in cui il materiale (in questo caso l'interfaccia) perde capacità portante.

Il problema oggetto di studio è l'analisi della risposta meccanica del corpo Ω soggetto ad un dato processo di carico (figura 2.2). Si consideri quindi che esso sia soggetto a forze di volume \mathbf{F} in Ω ed a forze di superficie \mathbf{f} sulla parte $\partial_f \Omega$ della sua superficie esterna. Infine siano $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ gli spostamenti imposti sulla porzione di superficie $\partial_u \Omega$.

Si definisce Γ' l'insieme costituito da tutte le interfacce Γ_i , $\Omega' = \Omega - \Gamma'$ e viene denominata \mathbb{U} la classe di spostamenti virtuali \mathbf{u}^* , che sono nulli su $\partial_u \Omega$ e regolari in Ω' , mentre possono essere discontinui su Γ' .

Il problema ai valori al contorno consiste nel determinare il campo di spostamenti \mathbf{u} ed il campo di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ tali che:

- \mathbf{u} sia regolare in Ω' e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ su $\partial_u \Omega$;

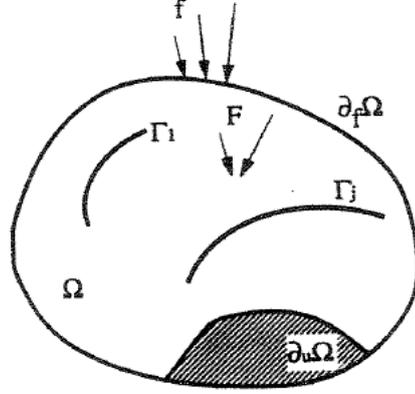


Figura 2.2: Un continuo Ω sul quale sono presenti interfacce Γ_j [24].

- $\forall \mathbf{u}^* \in \mathbb{U}$:

$$\int_{\Omega'} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Gamma'} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Delta}^* d\Gamma = \int_{\Omega'} \mathbf{F}^T \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u}^* d\Sigma \quad (2.3)$$

-

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) & \text{in } \Omega' \\ \mathbf{t} &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}) & \text{su } \Gamma' \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.1 Processi di decoesione

Con riferimento al problema descritto in precedenza, si consideri una superficie infinitesima $d\Gamma$ centrata nel punto P . Si definisce *processo di decoesione* una storia di spostamenti relativi $\boldsymbol{\Delta}$ in P che porta al completo distacco tra le due superfici inizialmente a contatto in quel punto.

Una volta assegnati una legge coesiva all'interfaccia ed un processo di decoesione DP, il lavoro necessario per separare le superfici è dato da:

$$\phi d\Gamma = \left(\int_{DP} \sum_{i=1}^3 t_i d\Delta \right) d\Gamma \quad (2.5)$$

nella quale ϕ è il lavoro di decoesione per unità di superficie, e rappresenta perciò l'energia di frattura; ϕ dipende dal modello assegnato all'interfaccia e dal processo di decoesione seguito.

In generale, per caratterizzare un processo di frattura dal punto di vista energetico si considerano tre particolari processi di decoesione, in ciascuno dei quali si incrementa la discontinuità di spostamento unicamente in una direzione, mentre nelle altre rimane pari a zero. In questo modo si definiscono l'energia di frattura in modo I, per la quale si ha discontinuità di spostamento unicamente in direzione normale all'interfaccia (direzione 3),

e le energie di frattura nei modi II e III, per le quali le discontinuità di spostamento sono rispettivamente nelle direzioni 1 e 2:

$$\phi_I = \int_0^{\Delta_n^f} \sigma d\Delta_n \quad \phi_{II} = \int_0^{\Delta_1^f} \tau_1 d\Delta_1 \quad \phi_{III} = \int_0^{\Delta_2^f} \tau_2 d\Delta_2 \quad (2.6)$$

Nelle (2.6) sono state introdotte le quantità Δ_n^f , Δ_1^f e Δ_2^f , che sono gli spostamenti relativi limite rispettivamente nelle direzioni 3, 1 e 2 per i quali si annullano i rispettivi sforzi. Da queste equazioni si nota come le energie di frattura in modo puro siano rappresentate dall'area sottesa al grafico delle curve uniassiali che definiscono il legame coesivo.

Spesso nel seguito verranno assegnate all'interfaccia delle leggi coesive per le quali il comportamento a taglio è lo stesso in tutte le direzioni. In tal caso si ha $\phi_{II} = \phi_{III}$ e l'energia di frattura a taglio verrà indicata con il simbolo ϕ_t ; inoltre sarà considerata un'unica componente di spostamento tangenziale Δ_t , data dalla somma vettoriale di Δ_1 e Δ_2 :

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \quad (2.7)$$

2.2 Il codice ttappo

Come anticipato al paragrafo 1.2, il codice di calcolo **ttappo** risolve problemi meccanici tridimensionali in cui i corpi possono essere soggetti a processi di frattura. Essi vengono discretizzati mediante strati di elementi di tipo solid-shell a 8 nodi e l'equazione del moto è integrata nel tempo in modo esplicito. Questi aspetti saranno analizzati e discussi ampiamente nel capitolo 5. In questo paragrafo, sarà invece spiegato il modo con cui il codice è stato modificato, al fine di rendere possibile la simulazione di fenomeni di delaminazione.

2.2.1 Costruzione della mesh

Il codice costruisce un modello tridimensionale partendo da una discretizzazione bidimensionale che viene estrusa lungo la normale agli elementi.

Per la costruzione di una struttura tridimensionale, il codice richiede quindi in fase di input:

1. le (tre) coordinate nodali di ciascun nodo dello strato;
2. le connettività degli elementi;
3. lo spessore di ciascuno strato della struttura.

La normale agli elementi viene determinata facendo il prodotto vettoriale tra due diagonali dell'elemento stesso. Una volta stabilita la direzione dell'estrusione, vengono quindi creati gli strati di elementi, di numero e spessore specificato nella fase di input.

2.2.2 Introduzione degli elementi coesivi

Ad ogni strato di elementi va ovviamente assegnato un materiale con le relative proprietà meccaniche e la densità; l'idea è stata quindi quella di introdurre un'interfaccia laddove i materiali di due strati adiacenti sono differenti. Dal punto di vista della lettura di queste informazioni da parte del codice, ciò si traduce nella costruzione del vettore `mat2layer`, nel quale l'indice di riga corrisponde al numero dello strato, mentre il valore assegna il materiale (al primo materiale definito in input è assegnato il valore 1, al secondo 2, ecc...). Rimane in ogni caso possibile inserire un'interfaccia tra due strati di uno stesso materiale, a patto di definire per due volte lo stesso materiale in fase di input.

Dopo aver costruito la struttura tridimensionale viene quindi chiamata la subroutine `ttappo_mesh_interface`, che ha la funzione di duplicare i nodi che separano due strati costituiti da materiali con numero diverso. La duplicazione riguarda tutti i nodi sulle interfacce ed avviene a monte del ciclo temporale. Verificata la condizione `mat2layer(i) ≠ mat2layer(i+1)` il codice individua la necessità di introdurre un'interfaccia: il codice riconosce l'intervallo dei nodi da duplicare in base alla posizione dei nodi sulla fibra (per fibra si intende il segmento che congiunge una fila di nodi lungo lo spessore) ed aggiunge per ciascuno un nodo, con numerazione crescente (se il numero dei nodi prima della duplicazione è n , gli indici dei primi nodi duplicati saranno $n+1$, $n+2$, ecc...). Ai nuovi nodi si assegnano le coordinate dei nodi duplicati, ottenendo in questo modo un'interfaccia di spessore nullo.

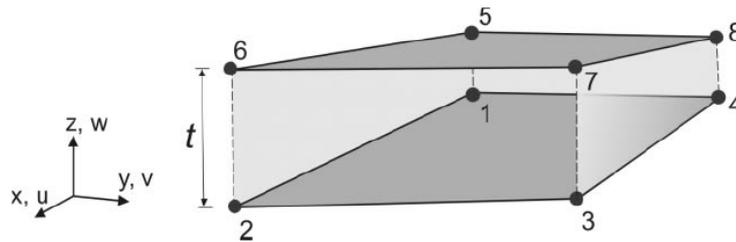


Figura 2.3: Elemento coesivo a 8 nodi; lo spessore iniziale dell'elemento è $t = 0$ [12].

Una volta duplicati i nodi, si creano gli elementi coesivi, per i quali si crea una nuova numerazione e una matrice di connettività a parte rispetto a quella degli elementi degli strati. Gli elementi coesivi sono elementi a 8

nodi (figura 2.3) la cui superficie media costituisce quella che viene denominata interfaccia, ovvero una superficie posizionata a metà tra altre due, una inferiore ed una superiore, che essa lega per mezzo di una legge coesiva.

Nell'implementazione è stato scelto arbitrariamente di porre i nuovi nodi derivati dalla duplicazione sulla superficie superiore. Si aggiornano poi anche le connettività degli altri elementi, precisamente quelli al di sopra dell'interfaccia, per i quali sono stati modificati i nodi inferiori.

Ai diversi strati di elementi coesivi, e quindi a ciascuna interfaccia, è possibile assegnare una legge costitutiva di tipo coesivo (vedi capitolo 3) con parametri differenti.

La procedura di duplicazione si conclude aggiornando altre matrici e vettori che definiscono la topologia del sistema.

La posizione dei nodi nel piano medio degli elementi coesivi dipende dalla posizione dei nodi sulle superfici inferiore e superiore nel seguente modo: denotando con gli indici $i = 1, 4$ i nodi inferiori e con $i = 5, 8$ i nodi superiori, le posizioni dei quattro nodi i^* nel piano medio dell'elemento coesivo sono date da

$$\mathbf{x}_{i^*} = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+4}}{2} \quad (2.8)$$

2.2.3 Integrazione della legge coesiva

Calcolo delle discontinuità di spostamento

Si consideri un elemento coesivo come quello rappresentato in figura 2.3. Siano \mathbf{U}_e^+ e \mathbf{U}_e^- i vettori che contengono gli spostamenti nodali dei nodi della superficie superiore e di quella inferiore. Si definisce

$$\mathbf{U}_e^{int} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_e^- \\ \mathbf{U}_e^+ \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento coesivo. Sia \mathbf{N} la matrice delle funzioni di forma per l'elemento isoparametrico a 4 nodi:

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

essendo

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \quad i = 1, 4 \quad (2.11)$$

Il vettore delle discontinuità di spostamento nodali $[\mathbf{U}]$ è dato da:

$$[\mathbf{U}(\xi, \eta)] = \mathbf{N}\mathbf{U}_e^+ - \mathbf{N}\mathbf{U}_e^- = \begin{pmatrix} -\mathbf{N} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_e^- \\ \mathbf{U}_e^+ \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{int}(\xi, \eta)\mathbf{U}_e^{int} \quad (2.12)$$

Calcolo delle forze coesive

Il contributo al lavoro interno (virtuale) dell'elemento di interfaccia si ottiene dalla formulazione debole del problema (vedi paragrafo 2.1) ed è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{coh} \delta \mathbf{U}_e^{int} &= \int_{A^*} \mathbf{t}^T(x^*, y^*) \delta[\boldsymbol{\Delta}(x^*, y^*)] dA \cdot \delta \mathbf{U}_e^{int} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{t}^T(\xi, \eta) \mathbf{B}^{int}(\xi, \eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \cdot \delta \mathbf{U}_e^{int} \end{aligned} \quad (2.13)$$

in cui (x^*, y^*) sono una coppia di coordinate cartesiane che giace nel piano dell'elemento coesivo, mentre (ξ, η) sono le coordinate dell'elemento genitore.

L'integrale può essere calcolato numericamente. In [1], [52] e [58] viene preferita l'integrazione numerica con il metodo di Newton-Cotes, in quanto consente di ottenere risultati più stabili rispetto ad un'integrazione di Gauss, a meno che gli elementi coesivi siano particolarmente distorti. Ciononostante, in questo lavoro di tesi si è preferito implementare l'integrazione di Gauss, questo perché risulterebbe più agevole duplicare i nodi durante l'analisi nel caso di inserimento degli elementi coesivi in run time.

Le forze nodali coesive vengono quindi calcolate nel seguente modo:

$$\mathbf{f}_{coh}^T = \sum_{k=1}^{NGP} \mathbf{t}_k^T(\xi_k, \eta_k) \mathbf{B}^{int}(\xi_k, \eta_k) \det \mathbf{J} w_k \quad (2.14)$$

in cui \mathbf{t}_k è il vettore che raccoglie le componenti degli sforzi all'interfaccia, NGP è il numero di punti Gauss, mentre i coefficienti w_k sono i cosiddetti pesi di Gauss. Nel codice è stata introdotta la possibilità di utilizzare 1 o 4 punti di Gauss per elemento.

Per ogni punto di Gauss, è necessario procedere alla risoluzione della legge coesiva, così da ottenere \mathbf{t}_k all'istante corrente.

Una volta ricavate le coordinate dell'elemento coesivo, si individuano la direzione normale e quelle tangenziali al suo piano medio, dopodiché le discontinuità di spostamento nodali vengono proiettate in questo sistema di riferimento locale. Gli spostamenti relativi ai punti di Gauss vengono ottenuti per mezzo dell'equazione (2.12): una volta che questi sono noti, dall'applicazione della legge coesiva vengono ricavati gli sforzi e mediante la (2.14) si ottengono le forze nodali coesive, che vengono assemblate nel sistema risolvente globale.

È bene sottolineare che essendo implementato nel codice uno schema di integrazione esplicito, gli spostamenti nodali all'istante temporale $n + 1$ dipendono solo dalla soluzione all'istante temporale n e non è dunque necessario iterare nel calcolo delle forze coesive.

3

Leggi coesive

L'utilizzo di modelli coesivi per lo studio di processi di frattura cominciò con i lavori di Barrenblatt [6] e Dugdale [25], modelli che vennero in seguito utilizzati per lo studio di problemi di frattura nel calcestruzzo ed in altri materiali fragili (figure 3.1 e 3.2).

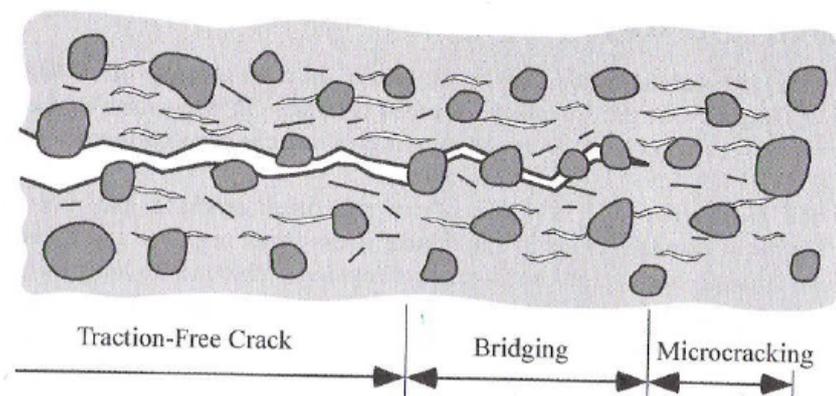


Figura 3.1: Fessura all'interno del calcestruzzo: si può notare la presenza di una zona intermedia nella quale gli aggregati svolgono un'azione di collegamento (*bridging*) tra le superfici fessurate, consentendo il trasferimento degli sforzi [4].

A seguito di questi lavori pionieristici, sono stati sviluppati diversi modelli coesivi, i quali stabiliscono una relazione tra sforzi e spostamenti relativi.

L'utilizzo delle leggi coesive ha due principali conseguenze: la singolarità degli sforzi tipica della meccanica della frattura tradizionale, impossibile dal punto di vista fisico, scompare e si forma oltre all'estremità della cricca una zona di processo che può essere considerata come la zona in cui si concentrano i fenomeni dissipativi.

Dopo aver illustrato i principali aspetti che contraddistinguono i modelli coesivi, verranno caratterizzati quelli che sono stati implementati nel codice.

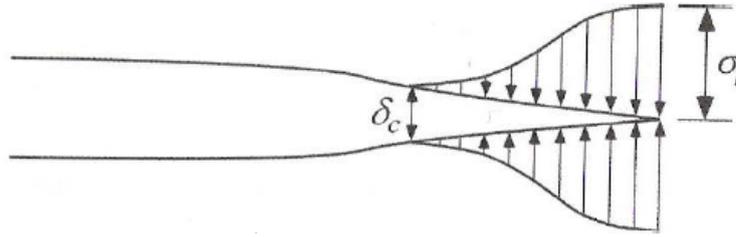


Figura 3.2: Modello coesivo di una fessura all'interno del calcestruzzo, rappresentata in figura 3.1. Gli sforzi trasferiti dall'azione di collegamento degli aggregati vengono espressi in funzione della distanza tra le superfici fessurate; quando questa distanza raggiunge un valore critico, questi sforzi si annullano [4].

3.1 Aspetti fondamentali

3.1.1 Comportamento elastico iniziale

L'interfaccia viene modellata come uno strato di materiale di spessore nullo, con comportamento iniziale elastico. Esistono anche modelli (meno comuni) in cui essa assume uno spessore finito. Una legge coesiva deve essere in grado di modellare correttamente la fase elastica, in cui nell'interfaccia non è ancora stato raggiunto il picco di sforzo e non avviene alcun tipo di dissipazione. Ciò significa che il modello deve essere in grado di simulare la perfetta adesione tra le superfici, rendendole sostanzialmente coincidenti fino all'innesco della delaminazione. In altre parole, nel tratto elastico nessuna deformazione significativa deve essere dovuta alla presenza degli elementi coesivi nel modello numerico. Questo è infatti il comportamento che si osserva sperimentalmente nella maggioranza dei casi, ma possono fare eccezione situazioni in cui lo strato di adesivo utilizzato sia particolarmente deformabile, il che può accadere quando esso assume uno spessore consistente.

Occorre a questo punto fare una distinzione tra due diversi tipi di modelli coesivi, che si possono suddividere in estrinseci ed intrinseci.

In un modello di tipo estrinseco, lo sdoppiamento dei nodi e l'inserimento degli elementi coesivi a livello dell'interfaccia (vedi paragrafo 2.2.2) avviene in run time qualora un nodo superi un test di attivazione, che in [11] è formulato in termini di sforzi, mentre in [28] è formulato in termini di una deformazione plastica equivalente. Questi modelli sono pertanto di tipo rigido-softening ed offrono il vantaggio di ottenere una perfetta adesione nella fase non fratturata e di minimizzare il numero di nodi e conseguentemente il numero di gradi di libertà, il che porta ad un minore costo computazionale. Tuttavia la formulazione del modello è più complessa, in quanto lo sdoppia-

mento dei nodi durante l'analisi comporta il dover aggiornare la mesh e le connettività degli elementi in maniera progressiva. Nei modelli estrinseci il comportamento elastico è quindi trattato nel modo più coerente possibile dal punto di vista fisico, siccome si ha una perfetta adesione iniziale tra le superfici.

In un modello intrinseco invece l'inserimento degli elementi coesivi avviene all'inizio dell'analisi, il che comporta sin da subito un maggior numero di gradi di libertà, ma la formulazione del problema risulta più semplice. In questi modelli, al fine di simulare correttamente il comportamento elastico, occorre introdurre una rigidità iniziale che sia sufficientemente elevata da simulare un'adesione (quasi) perfetta, ma d'altra parte un valore troppo grande causerebbe problemi di carattere numerico. È bene sottolineare che l'approccio intrinseco è possibile siccome il percorso di frattura è noto a priori (la zona di potenziale frattura è l'interfaccia).

Le leggi coesive considerate in questo lavoro sono tutte di tipo intrinseco. Per questo motivo nel paragrafo 4.2 si indicheranno i criteri che devono essere seguiti per assegnare un valore opportuno alla rigidità nel tratto iniziale della legge coesiva.

3.1.2 Anisotropia della risposta

In un modello coesivo deve essere possibile assegnare parametri meccanici differenti in direzione normale e tangenziale; i risultati sperimentali condotti sui laminati mostrano infatti come l'energia di frattura in modo II sia maggiore rispetto a quella in modo I.

Alcuni autori, con riferimento al comportamento dei laminati, ritengono che le proprietà meccaniche a taglio dell'interfaccia dipendano dalla disposizione delle fibre nelle lamine adiacenti [21]. Per tener conto di questo fatto, occorre che anche nel piano dell'interfaccia la risposta sia di tipo anisotropo.

3.1.3 Accoppiamento tra i modi

In generale, le leggi coesive possono essere accoppiate o disaccoppiate: in queste ultime gli sforzi normali non dipendono dagli spostamenti tangenziali e, allo stesso modo, gli sforzi di taglio non dipendono dall'apertura in direzione normale; al contrario, nelle leggi accoppiate ciascuna componente di sforzo dipende sia dagli spostamenti normali che da quelli tangenziali.

Le leggi disaccoppiate sono formulate per essere utilizzate quando il processo di decoesione si verifica in modo puro o quando uno dei modi è largamente predominante rispetto agli altri.

È però importante sottolineare come i fenomeni di delaminazione avvengano sempre in modo misto, a meno che non sia stia analizzando un test in modo puro del tipo DCB (*Double Cantilever Beam*) o ENF (*End Notch Flexure*); ciò è conseguenza del fatto che la propagazione della frattura è

vincolata ad avvenire tra le lamine. Per questo motivo, è fondamentale introdurre l'accoppiamento tra i modi, nel senso che occorre che ciascuna componente degli sforzi coesivi all'interfaccia dipenda da tutte le componenti di spostamento.

L'accoppiamento può essere ottenuto in due modi:

- introducendo uno spostamento relativo efficace, come ad esempio in [13] e [11], assieme a dei criteri di attivazione, solitamente basati sugli sforzi, e di propagazione, spesso riferiti all'energia di frattura;
- rendendo esplicita la dipendenza tra gli sforzi e gli spostamenti in tutte le direzioni, come accade per le leggi coesive che sono derivate da un potenziale, quali ad esempio quelle proposte in [65] e [44].

L'accoppiamento dei modi nella legge coesiva è un aspetto di fondamentale importanza ed è stato oggetto di studio di numerose ricerche nel corso degli anni.

3.1.4 Ramo di softening

Per modellare la perdita di resistenza che precede la rottura, e quindi la delaminazione, occorre che nella legge coesiva vi sia un ramo di softening, che segue il raggiungimento del picco di sforzo.

Il rilascio graduale dell'energia nel modello è di fondamentale importanza se si vogliono ottenere risultati stabili. In [1] si fa riferimento a due tipi di modelli: un modello *non-smooth* (figura 3.3), nel quale la caduta di sforzo a rottura avviene in maniera repentina, ed un modello *smooth*, nel quale è invece presente il ramo di softening; il modello *non smooth* richiede l'utilizzo di speciali elementi finiti e operazioni di remeshing che lo rendono computazionalmente non efficiente. Nel modello "regolarizzato" (*smooth*, in cui la forma del legame è bilineare) l'energia non viene dissipata istantaneamente, ma gradualmente, e ciò comporta una maggiore stabilità dei risultati numerici. Inoltre, la correlazione tra i risultati ottenuti con la meccanica della frattura elastica lineare (LEFM, *Linear Elastic Fracture Mechanics*) e il modello *smooth* è buona se i valori di sforzo massimi vengono scelti sufficientemente elevati, come è stato osservato nei risultati ottenuti nel capitolo 6.

A seconda della forma del legame tra sforzi e spostamenti relativi si possono distinguere diversi tipi di leggi coesive, rappresentate in figura 3.4:

- leggi polinomiali;
- leggi lineari a tratti;
- leggi esponenziali.

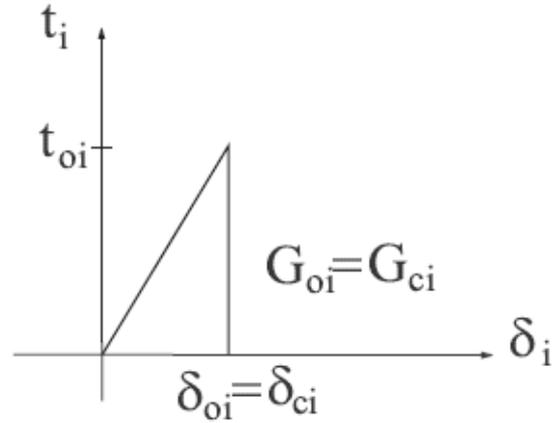


Figura 3.3: Modello di tipo *non smooth* [1].

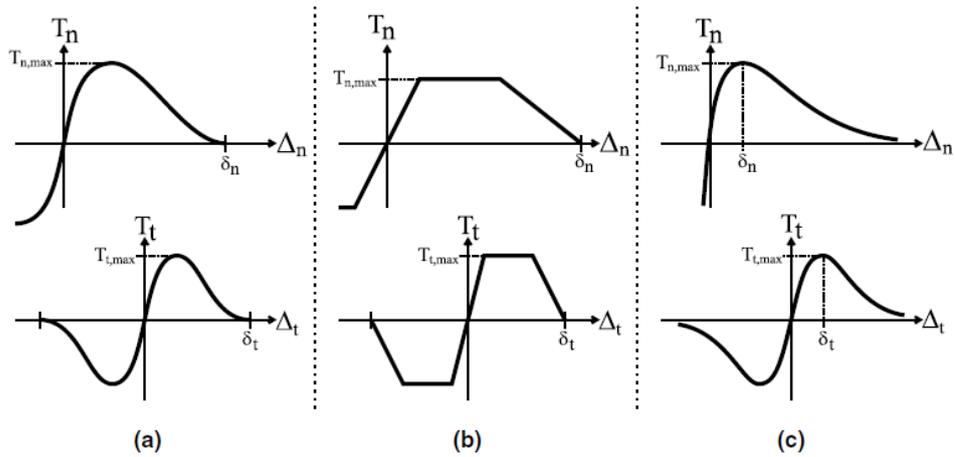


Figura 3.4: Possibili forme per le leggi coesive: (a) polinomiale, (b) lineare a tratti e (c) esponenziale [59].

In [2] si presenta uno studio sull'influenza della forma del legame costitutivo sui risultati del modello numerico; si conclude che le forme che forniscono risultati numericamente più stabili sono quelle che presentano minori discontinuità, mentre la specifica forma del legame costitutivo è un parametro importante solo nei casi in cui i materiali che costituiscono i corpi legati dall'interfaccia sono molto rigidi. Nei casi restanti, la forma del legame è sostanzialmente ininfluenza sui risultati, a patto che si conservino l'energia di frattura e lo sforzo massimo.

3.1.5 Irreversibilità

Ovviamente questo aspetto è di fondamentale importanza nei casi in cui durante la simulazione un punto che ha raggiunto il ramo di softening è soggetto a scarico. Il raggiungimento in un dato punto dello sforzo massimo e conseguentemente del ramo di softening implica che le proprietà meccaniche dell'interfaccia in quel punto si siano parzialmente degradate. Per questo motivo la legge coesiva deve prevenire la possibilità che avvenga il cosiddetto *healing*, cioè il completo o parziale recupero delle proprietà meccaniche originali.

In [19] vengono presentate diverse classi di leggi coesive, formulate in maniera termodinamicamente coerente e basate sui formalismi di plasticità, della meccanica del danneggiamento o di entrambi. Tra queste, le leggi più utilizzate per la simulazione di fenomeni di delaminazione sono quelle basate sulla meccanica del danneggiamento, siccome la loro implementazione risulta essere più semplice.

La meccanica di danneggiamento del continuo (CDM, *Continuum Damage Mechanics*) nacque con i lavori di Kachanov [35] e Rabotnov [50]. Questo approccio cerca di modellare il progressivo sviluppo di fenomeni di danneggiamento in un solido per mezzo di una diminuzione della rigidezza elastica e della resistenza. Si introduce a tal fine una misura del danneggiamento, espressa mediante una o più variabili di stato interne, che vengono incluse nel legame costitutivo del materiale. Nel caso più semplice, questa misura è rappresentata da un unico parametro scalare d (variabile di danneggiamento) con valore che può variare da 0 (assenza di danno) ad 1 (totale rottura). Una legge costitutiva di danneggiamento monodimensionale assume la seguente forma:

$$\sigma = (1 - d)E\epsilon \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (3.1)$$

Al fine di completare la formulazione della legge, occorre un'equazione che governi l'evoluzione della variabile di danneggiamento [18].

Un modello di questo tipo, utilizzato per descrivere il fenomeno della delaminazione, mira a dare una misura macroscopica del danneggiamento medio, non andando perciò a modellare ogni microfessura che si unisce in una macrofessura, approccio che sarebbe peraltro irrealizzabile [33].

Per altre leggi, non formulate in maniera termodinamicamente consistenti, occorre trattare i casi di carico e scarico in maniera separata, garantendo l'irreversibilità del degrado dell'interfaccia.

3.1.6 Effetto unilaterale

Per *effetto unilaterale* si intende la differenza di comportamento a trazione e compressione in direzione normale al piano dell'interfaccia. Si ha infatti che a trazione è possibile raggiungere la rottura dell'interfaccia, mentre a

compressione non avviene la rottura ma occorre invece simulare il contatto tra le due superfici per prevenire la compenetrazione tra le stesse.

Una buona simulazione del contatto può essere ottenuta per mezzo di una rigidità a compressione sufficientemente elevata: per le leggi bilineari, ad esempio, si sceglie spesso per la rigidità a compressione lo stesso valore della rigidità a trazione.

3.1.7 Dipendenza dalla velocità di deformazione

Nell'ambito della meccanica della frattura, la velocità di propagazione delle fessure gioca un ruolo importante. Dai risultati sperimentali, si evince infatti come le energie di frattura aumentino al crescere della velocità di propagazione [23]. Ciò accade perché l'elevata velocità di propagazione della frattura fa sì che anche le deformazioni siano veloci e che si inneschino fenomeni di incrudimento e di plasticizzazione, con un conseguente aumento di energia dissipata e quindi di tenacità [54].

Tuttavia, molti modelli utilizzati in letteratura sono stati elaborati partendo da prove quasi statiche, non andando perciò a considerare gli effetti dinamici. I modelli coesivi implementati nel codice fanno parte di questa categoria.

3.2 Leggi implementate nel codice

3.2.1 Legge bilineare

Tra quelle implementate, questa è la legge più semplice: vi è infatti un totale disaccoppiamento tra i modi, ovvero gli sforzi normali dipendono unicamente dagli spostamenti relativi normali, mentre gli sforzi tangenziali dipendono soltanto dagli spostamenti relativi in direzione tangenziale; l'unico parziale accoppiamento, introdotto al fine di rispettare ciò che si osserva sperimentalmente, riguarda il fatto che la completa rottura in una direzione comporta la rottura anche nell'altra.

Ne consegue perciò che questa legge possa essere utilizzata unicamente nei casi in cui un modo di frattura sia largamente prevalente sull'altro, come nei test DCB e ENF (paragrafi 4.4.1 e 4.4.2). Il disaccoppiamento tra i modi è infatti contrario alle evidenze sperimentali e perciò nei casi più generali i risultati forniti applicando questa legge coesiva non sarebbero accettabili.

La forma del legame tra sforzi e spostamenti relativi è di tipo bilineare sia in direzione normale che a taglio, con scarico verso l'origine.

I dati necessari in fase di input sono:

- le rigidità elastiche K_n^- (compressione), K_n^+ (trazione) e K_t (taglio), le quali possono in generale avere valori differenti;
- gli sforzi massimi di trazione e taglio σ_{max} e τ_{max} ;

- le energie di frattura in modo I ϕ_n e II/III $\phi_{II} = \phi_{III} = \phi_t$.

Considerando il fatto che il valore dell'energia di frattura è pari all'area sottesa al grafico del legame costitutivo dell'interfaccia, mediante banali considerazioni di carattere geometrico è facile ottenere i valori degli spostamenti al limite elastico ed a rottura.

$$\delta_n^0 = \frac{\sigma_{max}}{K_n^+}, \quad \delta_t^0 = \frac{\tau_{max}}{K_t} \quad (3.2)$$

$$\delta_n^f = \frac{2\phi_n}{\sigma_{max}}, \quad \delta_t^f = \frac{2\phi_t}{\tau_{max}} \quad (3.3)$$

A questo punto è possibile formulare la legge costitutiva.

$$\sigma(\Delta_n) = \begin{cases} K_n^- \Delta_n & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ K_n^+ \Delta_n & \leftarrow 0 < \Delta_n \leq \delta_n^0 \\ \frac{\sigma_{max}}{\delta_n^f - \delta_n^0} (\delta_n^f - \Delta_n) & \leftarrow \delta_n^0 < \Delta_n < \delta_n^f \\ 0 & \leftarrow \Delta_n \geq \delta_n^f \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\tau(\Delta_t) = \begin{cases} K_t \Delta_t & \leftarrow |\Delta_t| \leq \delta_t^0 \\ \text{sign}(\Delta_t) \frac{\tau_{max}}{\delta_t^f - \delta_t^0} (\delta_t^f - |\Delta_t|) & \leftarrow \delta_t^0 < |\Delta_t| < \delta_t^f \\ 0 & \leftarrow |\Delta_t| \geq \delta_t^f \end{cases} \quad (3.5)$$

in cui la quantità Δ_t è definita dall'equazione 2.7.

Come già detto, lo scarico avviene linearmente verso l'origine; l'implementazione di questo aspetto, piuttosto agevole, si basa sulla memorizzazione dei massimi spostamenti relativi in direzione normale e tangenziale.

3.2.2 Legge Camanho-Davila

Questa legge coesiva è tratta dagli articoli [13], [12] e [45].

Come accadeva per la legge bilineare, anche in questo caso il comportamento dell'interfaccia viene definito in modo I ed a taglio, combinando quindi tra loro i modi II e III, e la legge è in entrambe le direzioni di tipo bilineare. Tuttavia, nella legge Camanho-Davila le rigidzze elastiche nelle due direzioni sono identiche (ovvero $K_n^+ = K_t = K$).

La differenza più importante è data dall'introduzione della quantità

$$\Delta^{eff} = \sqrt{\langle \Delta_n \rangle^2 + \Delta_t^2} \quad (3.6)$$

la quale rappresenta una sorta di spostamento relativo efficace; il simbolo $\langle x \rangle$ (parentesi di McCauley) sta ad indicare la parte positiva di x :

$$\langle x \rangle = \max\{0, |x|\} \quad (3.7)$$

Il valore dello spostamento relativo efficace va confrontato con le quantità Δ^0 e Δ^f , che verranno definite in seguito. Si ha infatti

$$\begin{aligned}\Delta^{eff} = \Delta^0 &\longrightarrow \text{Attivazione della delaminazione} \\ \Delta^{eff} = \Delta^f &\longrightarrow \text{Propagazione della delaminazione}\end{aligned}$$

Viene inoltre definito il parametro β , che quantifica il rapporto tra i modi, dato da

$$\beta = \max \left\{ 0, \frac{\Delta_t}{\Delta_n} \right\} \quad (3.8)$$

La legge Camanho-Davila ipotizza che il valore di β , una volta raggiunta l'iniziazione della delaminazione, rimanga costante fino alla eventuale rottura.

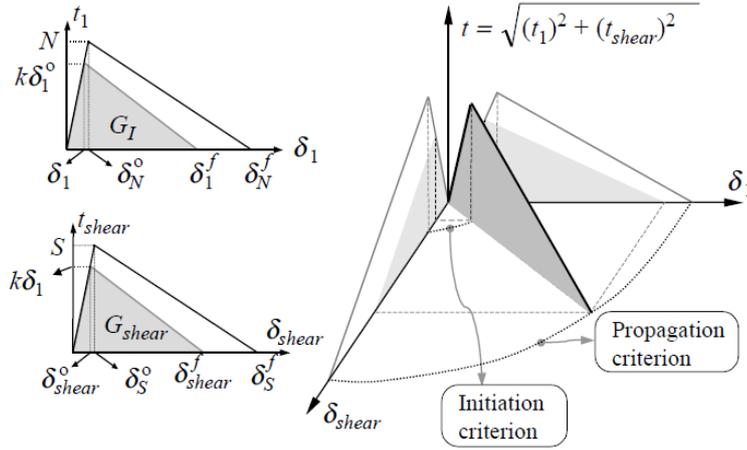


Figura 3.5: Rappresentazione grafica dell'accoppiamento dei modi nella legge Camanho-Davila: esso consiste nella definizione di un piano efficace [45]. Corrispondenze tra le quantità definite in figura e nel testo: $N = \sigma_{max}$, $S = \tau_{max}$, $t_1 = \sigma$, $t_{shear} = \tau$, $\delta_1 = \Delta_n$, $\delta_{shear} = \Delta_t$, $\delta_N^0 = \delta_n^0$, $\delta_{shear}^0 = \delta_t^0$, $\delta_N^f = \delta_n^f$, $\delta_{shear}^f = \delta_t^f$, $G_{shear} = G_t$; le quantità δ_1 e δ_{shear}^0 sono tali che $\sqrt{(\delta_1)^2 + (\delta_{shear}^0)^2} = \Delta^0$; le quantità δ_1^f e δ_{shear}^f sono tali che $\sqrt{(\delta_1^f)^2 + (\delta_{shear}^f)^2} = \Delta^f$.

La legge costitutiva è formulata come una legge di danneggiamento, con unico parametro di danno d che rappresenta lo stato di deterioramento dell'interfaccia sia in modo I che a taglio; ne consegue che la rottura avviene contemporaneamente in entrambe le direzioni, il che è in accordo con i risultati sperimentali.

I dati necessari in fase di input sono gli stessi della legge bilineare (ai quali si aggiungono i parametri che governano il comportamento in modo

misto) e mediante le equazioni (3.2) e (3.3) si ottengono rispettivamente gli spostamenti relativi al limite elastico ed a rottura in modo puro.

Occorre a questo punto definire i criteri di accoppiamento per l'attivazione e la propagazione della delaminazione. Questi definiscono le quantità Δ^0 e Δ^f , che rappresentano gli spostamenti al limite elastico e a rottura, da confrontare con Δ^{eff} (figura 3.5).

Sono stati implementati due diversi criteri:

- legge di potenza [66];
- criterio di Benzeggagh-Kenane (BK) [8].

In diversi studi viene mostrato come il criterio BK fornisca risultati che sono più vicini a quelli sperimentali rispetto a quelli ottenuti con la legge di potenza, nonostante quest'ultima sia la più popolare: per questo motivo si è scelto di implementarli entrambi.

Legge di potenza

Il criterio di attivazione, noto anche come *Criterio di Ye* [66], il quale secondo diversi autori è adatto per i materiali compositi, è il seguente:

$$\left(\frac{\langle\sigma\rangle}{\sigma_{max}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{max}}\right)^2 = 1 \quad (3.9)$$

Gli sforzi sono funzione degli spostamenti nelle rispettive direzioni ed a seguito di semplici passaggi algebrici si arriva alla definizione di uno spostamento relativo di attivazione, dato da

$$\Delta^0 = \begin{cases} \delta_t^0 & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ \delta_n^0 \delta_t^0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{(\delta_t^0)^2 + (\beta \delta_n^0)^2}} & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Il criterio di propagazione è il seguente:

$$\left(\frac{G_I}{\phi_n}\right)^\alpha + \left(\frac{G_t}{\phi_t}\right)^\alpha = 1 \quad (3.11)$$

essendo G_I e G_t i tassi di energia di energia rilasciati nelle direzioni normali e tangenziali.

Allo stesso modo degli sforzi, anche le quantità G_I e G_t possono essere espresse in funzione degli spostamenti relativi:

$$G_I = \frac{K \Delta_n^0 \Delta_n^f}{2} \quad G_t = \frac{K \Delta_t^0 \Delta_t^f}{2} \quad (3.12)$$

Introducendo le equazioni (3.12) in (3.11) si ottiene lo spostamento critico corrispondente alla completa decoesione dell'interfaccia.

$$\Delta^f = \begin{cases} \delta_t^f & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ \frac{2(1+\beta^2)}{K\Delta^0} \left[\left(\frac{1}{\phi_n} \right)^\alpha + \left(\frac{\beta^2}{\phi_t} \right)^\alpha \right]^{-1/\alpha} & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Il parametro α governa quindi la propagazione della delaminazione in modo misto e va definito in fase di input. Per la maggior parte dei compositi si ha $1 \leq \alpha \leq 2$. Considerando l'ipotesi di propagazione della delaminazione con rapporto tra i modi costante, in (3.13) il valore di β è quello raggiunto in fase di attivazione della delaminazione.

Criterio di Benzeggagh-Kenane

Questo criterio, proposto da Benzeggagh e Kenane nel 1996 [8], fu inizialmente formulato solamente per quanto riguardava la fase di propagazione della delaminazione, mentre l'attivazione della stessa veniva trattata separatamente. In [57] si applica il criterio BK anche per definire la fase di attivazione della delaminazione. Trattandosi di un processo di frattura, è possibile infatti proporre un criterio di attivazione che si formula partendo dal criterio di propagazione e dalla legge di evoluzione del danneggiamento: la legge di propagazione definisce un luogo di punti per il quale il parametro di danno assume valore unitario, mentre quello di attivazione definisce il confine per il quale esso rimane pari a zero.

Come accadeva per la legge di potenza, l'attivazione e la propagazione sono basate rispettivamente sugli sforzi e sui tassi di energia rilasciati, mediante le seguenti equazioni:

$$\sigma^2 + \tau^2 = (\sigma^0)^2 + [(\tau^0)^2 - (\sigma^0)^2] \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)^\eta \quad (3.14)$$

$$G_I + G_t = \phi_n + (\phi_t - \phi_n) \left(\frac{G_t}{G_I + G_t} \right)^\eta \quad (3.15)$$

Il parametro η governa quindi sia la propagazione che l'attivazione della delaminazione e va definito in fase di input. Esprimendo l'equazione (3.14) in termini di spostamenti relativi si ottiene il valore dello spostamento relativo ad attivazione della delaminazione.

$$\Delta^0 = \begin{cases} \delta_t^0 & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ \sqrt{(\delta_n^0)^2 + [(\delta_t^0)^2 - (\delta_n^0)^2] \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)^\eta} & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Mentre introducendo le equazioni (3.12) in (3.15) si ottiene

$$\Delta^f = \begin{cases} \delta_t^f & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ \frac{2}{K\Delta^0} \left[\phi_n + (\phi_t - \phi_n) \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)^\eta \right] & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Allo stesso modo della legge di potenza, in (3.17) il valore di β è quello raggiunto in fase di attivazione della delaminazione.

Una volta note le quantità Δ^0 e Δ^f , ricavate mediante uno dei due criteri proposti, si può definire il legame costitutivo.

Al fine di garantire l'irreversibilità, ad ogni passo temporale e per ogni punto di Gauss si memorizza il massimo valore di spostamento relativo efficace, che viene quindi definito in questo modo:

$$\Delta^{max} = \max_{t' \leq t} \Delta^{eff}(t') \quad (3.18)$$

Dal valore di Δ^{max} si ricava quello del parametro di danno:

$$d = \begin{cases} 0 & \leftarrow \Delta^{max} \leq \Delta^0 \\ \frac{\Delta^f(\Delta^{max} - \Delta^0)}{\Delta^{max}(\Delta^f - \Delta^0)} & \leftarrow \Delta^0 < \Delta^{max} < \Delta^f \\ 1 & \leftarrow \Delta^{max} \geq \Delta^f \end{cases} \quad (3.19)$$

Il legame tra sforzi e spostamenti relativi è quindi dato da

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{cases} K^- \Delta_n & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ K(1 - d)\Delta_n & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \\ \tau &= K(1 - d)\Delta_t \end{aligned} \quad (3.20)$$

in cui K^- è la rigidità a compressione.

3.2.3 Legge Corigliano-Allix-Ladeveze

Questa legge è tratta da [38], [20] e [3]. Questa legge coesiva è stata formulata per descrivere fenomeni di delaminazioni riguardanti i laminati, in cui singole lamine sono spesso costituite da materiali fibrosi. Secondo gli autori, il comportamento dell'interfaccia dipende dall'orientazione delle fibre negli strati adiacenti. Per questo motivo, mediante questa legge coesiva è possibile modellare un'interfaccia totalmente anisotropa (anche nella risposta a taglio), a differenza di tutte le altre implementate nel codice.

Questo da un lato consente una modellazione più accurata del comportamento dell'interfaccia, ma d'altro canto fa sì che i parametri da definire in fase di input siano molteplici e di non semplice derivazione.

Innanzitutto occorre definire le rigidezze elastiche nelle due direzioni nel piano, K_1 e K_2 , ed in direzione normale, K_n^+ e K_n^- .

La legge coesiva Corigliano-Allix-Ladeveze (CAL) è formulata in maniera termodinamicamente consistente. Si considera innanzitutto l'espressione dell'energia di deformazione dell'interfaccia:

$$E_D = \frac{1}{2}(1-d_1)K_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}(1-d_2)K_2\Delta_2^2 + \frac{1}{2}(1-d_3)K_n^+\langle\Delta_n\rangle^2 + \frac{1}{2}K_n^-\left[\min\{0, \Delta_n\}\right]^2 \quad (3.21)$$

in cui d_1 , d_2 e d_3 sono i parametri di danno rispettivamente per le direzioni tangenziali e per la direzione normale. Il significato delle parentesi $\langle \rangle$ è dato dall'espressione (3.7).

Gli sforzi che si sviluppano all'interfaccia sono dati dalle derivate dell'energia di deformazione E_D rispetto ai rispettivi spostamenti relativi; si ha perciò

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\partial E_D}{\partial \Delta_1} = (1-d_1)K_1\Delta_1 \\ \tau_2 &= \frac{\partial E_D}{\partial \Delta_2} = (1-d_2)K_2\Delta_2 \\ \sigma &= \frac{\partial E_D}{\partial \Delta_n} = (1-d_3)K_n^+\langle\Delta_n\rangle + K_n^-\min\{0, \Delta_n\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Si introducono poi le cosiddette forze termodinamiche, associate ai parametri di danno, che altro non sono che le energie di deformazione per unità di superficie rilasciate a seguito di un incremento unitario del danno per ciascuno dei tre modi:

$$Y_i = -\frac{\partial E_D}{\partial d_i} = \frac{1}{2}K_i\Delta_i^2 \quad (3.23)$$

Si può notare come le dissipazioni meccaniche ω siano sempre maggiori o uguali a zero:

$$\omega = Y_1\dot{d}_1 + Y_2\dot{d}_2 + Y_3\dot{d}_3 \geq 0 \quad (3.24)$$

L'evoluzione dei parametri di danno è governata da una forza termodinamica equivalente, che viene espressa come una combinazione delle tre Y_i :

$$Y(t) = \max_{t' \leq t} \{Y_3(t') + a_1Y_1(t') + a_2Y_2(t')\} \quad (3.25)$$

essendo a_1 e a_2 dei parametri di input che influiscono sia sull'attivazione che sulla propagazione del danneggiamento.

L'evoluzione dei parametri di danno è data dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{\langle\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}\rangle}{\sqrt{Y_c}} \leq 1 \\ d_1 &= \gamma_1 d_3 \leq 1 \\ d_2 &= \gamma_2 d_3 \leq 1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

nelle quali i parametri Y_0 e Y_c definiscono l'attivazione e l'evoluzione del danneggiamento, mentre γ_1 e γ_2 legano i danneggiamenti nella direzione del piano dell'interfaccia a quello in direzione normale. Questi parametri vanno definiti in fase di input. Si può notare che se uno tra γ_1 e γ_2 è scelto diverso dall'unità, la rottura non avviene contemporaneamente in tutte le direzioni, il che va contro le evidenze sperimentali.

Le energie di frattura in modo puro si ottengono dal calcolo dell'area sottesa al grafico delle curve uniassiali nelle tre direzioni; calcolando le aree nelle tre direzioni si ricavano le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\phi_n &= \frac{Y_c}{3} \left(3 \frac{Y_0}{Y_c} + 3 \sqrt{\frac{Y_0}{Y_c}} + 1 \right) \\ \phi_{II} &= \frac{Y_c}{3a_1\gamma_1^2} \left(3\gamma_1^2 \frac{Y_0}{Y_c} + 3\gamma_1 \sqrt{\frac{Y_0}{Y_c}} + 1 \right) \\ \phi_{III} &= \frac{Y_c}{3a_2\gamma_2^2} \left(3\gamma_2^2 \frac{Y_0}{Y_c} + 3\gamma_2 \sqrt{\frac{Y_0}{Y_c}} + 1 \right)\end{aligned}\tag{3.27}$$

È immediato verificare come la scelta dei parametri Y_0 e Y_c al fine di ottenere una data energia di frattura non sia univoca: in figura 3.6 si può notare in che modo una diversa scelta dei due parametri comporti una diversa forma del legame coesivo.

Il legame tra sforzi e deformazioni è quello definito dalle equazioni (3.22).

Al fine di tener conto dell'irreversibilità del danneggiamento, è sufficiente memorizzare ad ogni passo temporale il massimo valore raggiunto dal parametro d_3 .

3.2.4 Legge Alfano-Crisfield

Questa legge coesiva, tratta da [1], presenta diverse similitudini con la legge Camanho-Davila: si ha infatti che anche nella legge Alfano-Crisfield, la forma del legame tra sforzi e spostamenti relativi è bilineare ed è formulata con una legge di danneggiamento. A differenza di quanto proposto in [13], [12] e [45] sono però presenti due parametri di danno: d_t , che quantifica il danneggiamento nella direzione del piano dell'interfaccia, e d_n , che si riferisce invece alla direzione normale.

Il legame tra sforzi e spostamenti relativi è dato dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{cases} K_n^- \Delta_n & \leftarrow \Delta_n \leq 0 \\ K_n^+ (1 - d_n) \Delta_n & \leftarrow \Delta_n > 0 \end{cases} \\ \tau &= K_t (1 - d_t) \Delta_t\end{aligned}\tag{3.28}$$

La forma del legame coesivo è quindi bilineare.

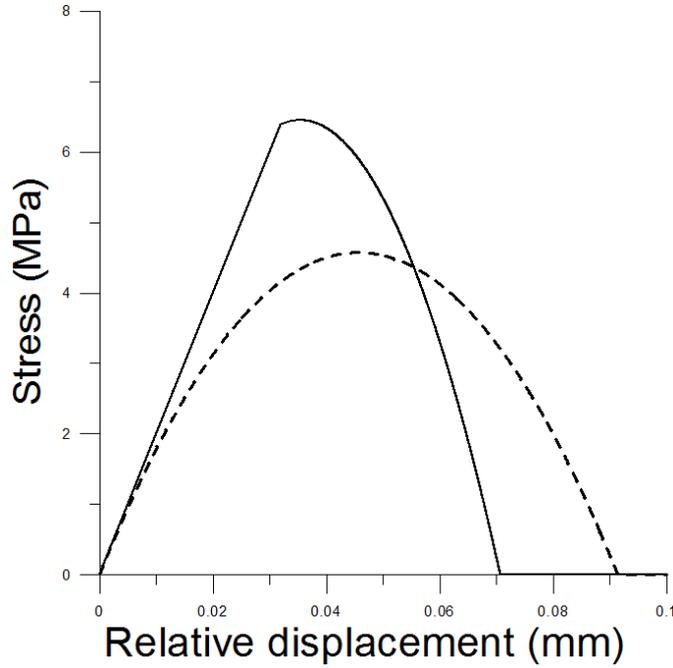


Figura 3.6: Forma della legge CAL variando i coefficienti Y_0 e Y_c : la linea tratteggiata è ottenuta scegliendo $Y_0 = 10^{-6}N/mm$ e $Y_c = 0.833N/mm$, mentre la linea continua è ottenuta con i valori $Y_0 = 0.102N/mm$ e $Y_c = 0.15N/mm$. In entrambi i casi si ha $\phi = 0.281N/mm$.

L'evoluzione del danneggiamento è governata dal parametro $\bar{\gamma}$, definito dalle seguenti espressioni:

$$\bar{\gamma}(t) = \max_{t' \leq t} \{0, \gamma(t')\}$$

$$\gamma(t') = \left[\left(\frac{\langle \Delta_n(t') \rangle}{\delta_n^0} \right)^\alpha + \left(\frac{|\Delta_t(t')|}{\delta_t^0} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} - 1 \quad (3.29)$$

I parametri di danno sono infatti legati a $\bar{\gamma}$:

$$d_n = \frac{\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} \frac{\delta_n^f}{\delta_n^f - \delta_n^0}$$

$$d_t = \frac{\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} \frac{\delta_t^f}{\delta_t^f - \delta_t^0} \quad (3.30)$$

A partire dalla legge di evoluzione del danneggiamento è possibile definire il criterio di attivazione, espresso in termini di sforzi

$$\left(\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma_{max}} \right)^\alpha + \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^\alpha = 1 \quad (3.31)$$

ed i criteri di propagazione, uno per la direzione normale ed uno per quella tangenziale, entrambi espressi in termini di spostamenti relativi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\langle \Delta_n \rangle}{\delta_n^0}\right)^\alpha + \left(\frac{\Delta_t}{\delta_t^0}\right)^\alpha &= \left(\frac{\delta_n^f}{\delta_n^0}\right)^\alpha \\ \left(\frac{\langle \Delta_n \rangle}{\delta_n^0}\right)^\alpha + \left(\frac{\Delta_t}{\delta_t^0}\right)^\alpha &= \left(\frac{\delta_t^f}{\delta_t^0}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (3.32)$$

essendo α il parametro di input che governa l'accoppiamento tra i modi, da scegliere nell'intervallo $1 \leq \alpha \leq 2$. Si può immediatamente constatare come, affinché la frattura propaghi contemporaneamente nelle due direzioni, occorre avere

$$\frac{\delta_n^f}{\delta_n^0} = \frac{\delta_t^f}{\delta_t^0}$$

Questa condizione non pone alcuna limitazione all'applicazione della legge, in quanto i valori degli spostamenti relativi a limite elastico dipendono dalle rigidità dei tratti elastici iniziali, il cui valore può essere modificato liberamente senza alterare in maniera significativa la risposta strutturale, a patto di mantenere lo stesso ordine di grandezza.

3.2.5 Legge Park-Paulino-Roesler

Questa legge coesiva è tratta da [44] ed è basata sulla definizione di un potenziale degli sforzi, denominato PPR dalle iniziali degli autori. La funzione potenziale consente di definire diversi valori di sforzo massimo normale e di taglio e diversi valori di energie di frattura. Come sarà mostrato, vengono definiti spostamenti relativi critici che causano la rottura dell'interfaccia; questo perché il potenziale, che è di tipo polinomiale, perde la sua validità quando questi spostamenti vengono superati. Gli spostamenti relativi critici definiscono perciò un dominio di validità del potenziale.

Il modello PPR è formulato a partire da una serie di condizioni.

- La completa rottura in direzione normale avviene quando l'apertura raggiunge il valore limite δ_n^f , detto apertura normale finale, oppure quando lo scorrimento raggiunge il valore $\bar{\delta}_t$, detto scorrimento tangenziale finale coniugato:

$$\sigma(\delta_n^f, \Delta_t) = 0 \quad \sigma(\Delta_n, \bar{\delta}_t) = 0 \quad (3.33)$$

- Allo stesso modo, la completa rottura in direzione tangenziale avviene quando l'apertura raggiunge il valore limite δ_t^f , detto scorrimento tangenziale finale, oppure quando l'apertura raggiunge il valore $\bar{\delta}_n$, detto apertura normale finale coniugata:

$$\tau(\Delta_n, \delta_t^f) = 0 \quad \tau(\bar{\delta}_n, \Delta_t) = 0 \quad (3.34)$$

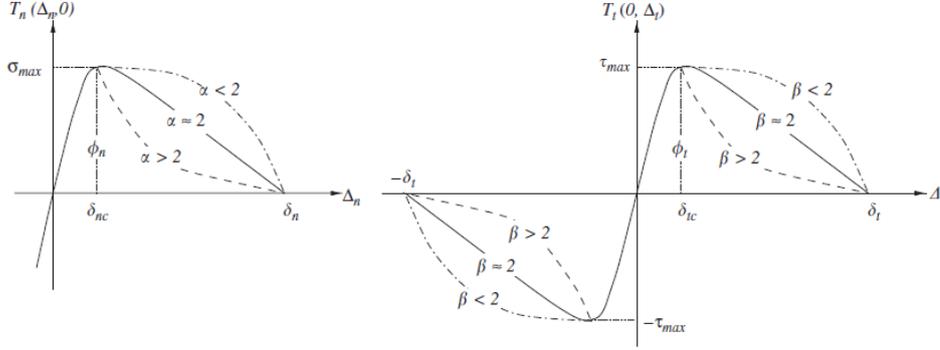


Figura 3.7: Variazione della forma del ramo di softening in base ai valori dei parametri α e β [44].

- Le energie di frattura sono date dalle aree sottese al grafico del legame costitutivo:

$$\phi_n = \int_0^{\delta_n^f} \sigma(\Delta_n, 0) d\Delta_n \quad \phi_t = \int_0^{\delta_t^f} \tau(0, \Delta_t) d\Delta_t \quad (3.35)$$

- Gli sforzi normali e tangenziali sono massimi quando gli spostamenti relativi raggiungono i valori δ_n^0 e δ_t^0 :

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta_n} \right|_{\Delta_n = \delta_n^0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \tau}{\partial \Delta_t} \right|_{\Delta_t = \delta_t^0} = 0 \quad (3.36)$$

- I valori degli sforzi massimi all'interfaccia sono σ_{max} e τ_{max} :

$$\sigma(\delta_n^0, 0) = \sigma_{max} \quad \tau(0, \delta_t^0) = \tau_{max} \quad (3.37)$$

Vengono inoltre introdotti i parametri di forma α e β , che definiscono la forma del legame costitutivo nel ramo di softening rispettivamente per lo sforzo normale e quello tangenziale, come mostrato in figura 3.7.

In molti studi (ad esempio in [2]) si è visto come la forma del legame costitutivo possa influire sui risultati delle analisi, nonostante l'energia di frattura e lo sforzo massimo rimangano gli stessi. Se i parametri α e β vengono scelti pari a 2, il potenziale è circa di ordine 2 e perciò il ramo di softening è costituito grossomodo da una funzione linearmente decrescente.

Il potenziale PPR, rappresentato in figura 3.8, è definito come

$$\begin{aligned} \Psi(\Delta_n, \Delta_t) = \min(\phi_n, \phi_t) + & \left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^m + \langle \phi_n - \phi_t \rangle \right] \\ & \cdot \left[\Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^n + \langle \phi_t - \phi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Derivando il potenziale per gli spostamenti relativi si ottengono quindi le seguenti espressioni per gli sforzi:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_n} = \frac{\Gamma_n}{\delta_n^f} & \left[m \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^{m-1} - \alpha \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^m \right] \\ & \cdot \left[\Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^n + \langle \phi_t - \phi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \tau(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_t} = \frac{\Gamma_t}{\delta_t^f} & \left[n \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^{n-1} - \beta \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^{\beta-1} \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^n \right] \\ & \cdot \left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\langle \Delta_n \rangle}{\delta_n^f} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\langle \Delta_n \rangle}{\delta_n^f} \right)^m + \langle \phi_n - \phi_t \rangle \right] \text{sign}(\Delta_t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

I parametri Γ_n , Γ_t , m , n , δ_n^f e δ_t^f nella funzione potenziale si determinano soddisfacendo le condizioni espresse dalle (3.33), (3.34), (3.35), (3.36) e (3.37).

Gli esponenti adimensionali m e n vengono valutati imponendo che siano soddisfatte le condizioni (3.36) ed una volta definito il valore dei coefficienti λ_n e λ_t , definiti come il rapporto tra gli spostamenti relativi critici e quelli finali:

$$\lambda_n = \frac{\delta_n^0}{\delta_n^f} \quad \lambda_t = \frac{\delta_t^0}{\delta_t^f} \quad (3.41)$$

Questi coefficienti vengono denominati *slope indicators*, siccome definiscono l'inclinazione del tratto iniziale e finale. Essi influenzano il comportamento sia in fase elastica che in quella di softening: si ha infatti che abbassando il loro valore la pendenza del tratto elastico aumenta, andando quindi a ridurre le deformazioni elastiche, mentre la pendenza media del ramo discendente della curva diminuisce, essendo cresciuto il divario tra $\delta_{n,t}^0$ e $\delta_{n,t}^f$.

Una volta stabiliti λ_n e λ_t , assieme ai coefficienti di forma α e β , gli esponenti m e n si ricavano con le seguenti espressioni:

$$m = \frac{\alpha(\alpha-1)\lambda_n^2}{(1-\alpha\lambda_n^2)} \quad n = \frac{\beta(\beta-1)\lambda_t^2}{(1-\beta\lambda_t^2)} \quad (3.42)$$

Γ_n e Γ_t sono due costanti il cui valore è correlato alle energie di frattura:

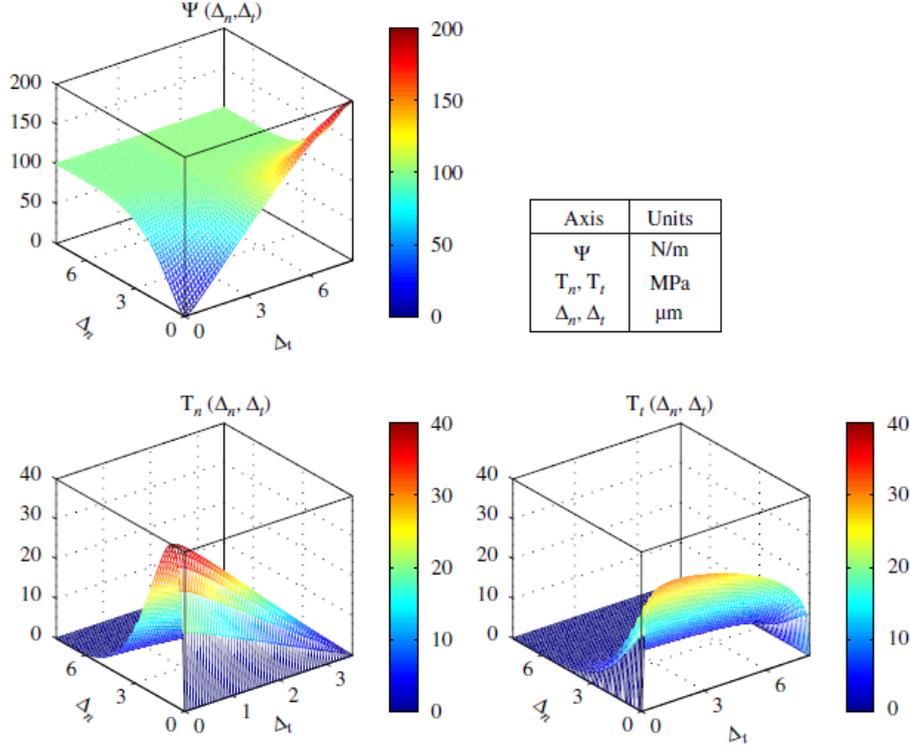


Figura 3.8: Rappresentazione grafica del potenziale e dei suoi gradienti (sforzi): $\phi_n = 100\text{N/m}$, $\phi_t = 200\text{N/m}$, $\sigma_{max} = 40\text{MPa}$, $\tau_{max} = 30\text{MPa}$, $\alpha = 5$, $\beta = 1.3$, $\lambda_n = 0.1$ e $\lambda_t = 0.2$. Con T_n e T_t si intendono rispettivamente gli sforzi normali e gli sforzi tangenziali [44].

- caso 1 $\longrightarrow \phi_n \neq \phi_t$

$$\Gamma_n = (-\phi_n)^{\langle \phi_n - \phi_t \rangle / (\phi_n - \phi_t)} \left(\frac{\alpha}{m} \right)^m \quad \Gamma_t = (-\phi_t)^{\langle \phi_t - \phi_n \rangle / (\phi_t - \phi_n)} \left(\frac{\beta}{n} \right)^n \quad (3.43)$$

- caso 2 $\longrightarrow \phi_n = \phi_t$

$$\Gamma_n = -\phi_n \left(\frac{\alpha}{m} \right)^m \quad \Gamma_t = \left(\frac{\beta}{n} \right)^n \quad (3.44)$$

Gli spostamenti relativi finali δ_n^f e δ_t^f soddisfano le condizioni espresse dalle (3.33) e (3.34) per mezzo dell'espressione del potenziale: se infatti si sostituisce $\Delta_n = \delta_n^f$ nell'espressione degli sforzi normali il valore di σ si annulla automaticamente. Un discorso analogo può essere fatto per gli sforzi tangenziali. I valori di δ_n^f e δ_t^f devono essere stimati per mezzo delle condizioni

(3.35) e (3.37), dalle quali si ricavano le seguenti espressioni:

$$\delta_n^f = \frac{\phi_n}{\sigma_{max}} \alpha \lambda_n (1 - \lambda_n)^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha}{m} + 1 \right) \left(\frac{\alpha}{m} \lambda_n + 1 \right)^{m-1} \quad (3.45)$$

$$\delta_t^f = \frac{\phi_t}{\tau_{max}} \beta \lambda_t (1 - \lambda_t)^{\beta-1} \left(\frac{\beta}{n} + 1 \right) \left(\frac{\beta}{n} \lambda_t + 1 \right)^{n-1} \quad (3.46)$$

Occorre a questo punto definire il dominio entro il quale il potenziale si mantiene valido (il potenziale fornirebbe sforzi non nulli anche quando gli spostamenti relativi superano quelli critici). A tale scopo, oltre ai valori limite δ_n^f e δ_t^f si rende necessaria la determinazione dello spostamento relativo tangenziale finale coniugato $\bar{\delta}_t$ e dell'apertura normale finale coniugata $\bar{\delta}_n$.

Al fine di ottenere le espressioni di $\bar{\delta}_t$ e $\bar{\delta}_n$ occorre che le condizioni $\sigma(\Delta_n, \bar{\delta}_t) = 0$ e $\tau(\bar{\delta}_n, \Delta_t) = 0$ siano rispettivamente soddisfatte. Ne consegue che $\bar{\delta}_t$ è il valore di Δ_t per il quale si ha che

$$f(\Delta_t) = \Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t^f} \right)^n + \langle \phi_t - \phi_n \rangle = 0 \quad (3.47)$$

mentre il valore di $\bar{\delta}_n$ è la soluzione dell'equazione

$$f(\Delta_n) = \Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n^f} \right)^m + \langle \phi_n - \phi_t \rangle = 0 \quad (3.48)$$

I casi di scarico e ricarico vanno affrontati indipendentemente dal potenziale: si è scelto come per le altre leggi di far avvenire lo scarico verso l'origine.

Comportamento in modo misto

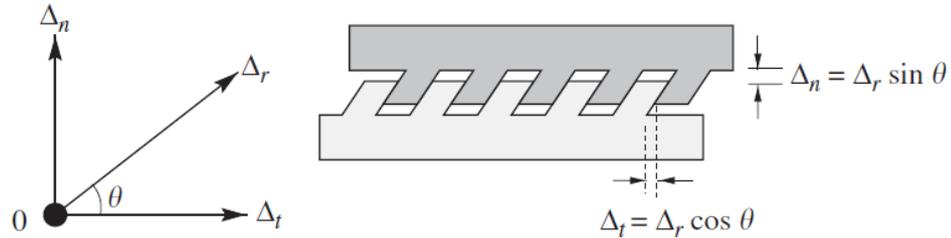


Figura 3.9: Storia di spostamento proporzionale: il parametro Δ_r cresce fino al raggiungimento della rottura [44].

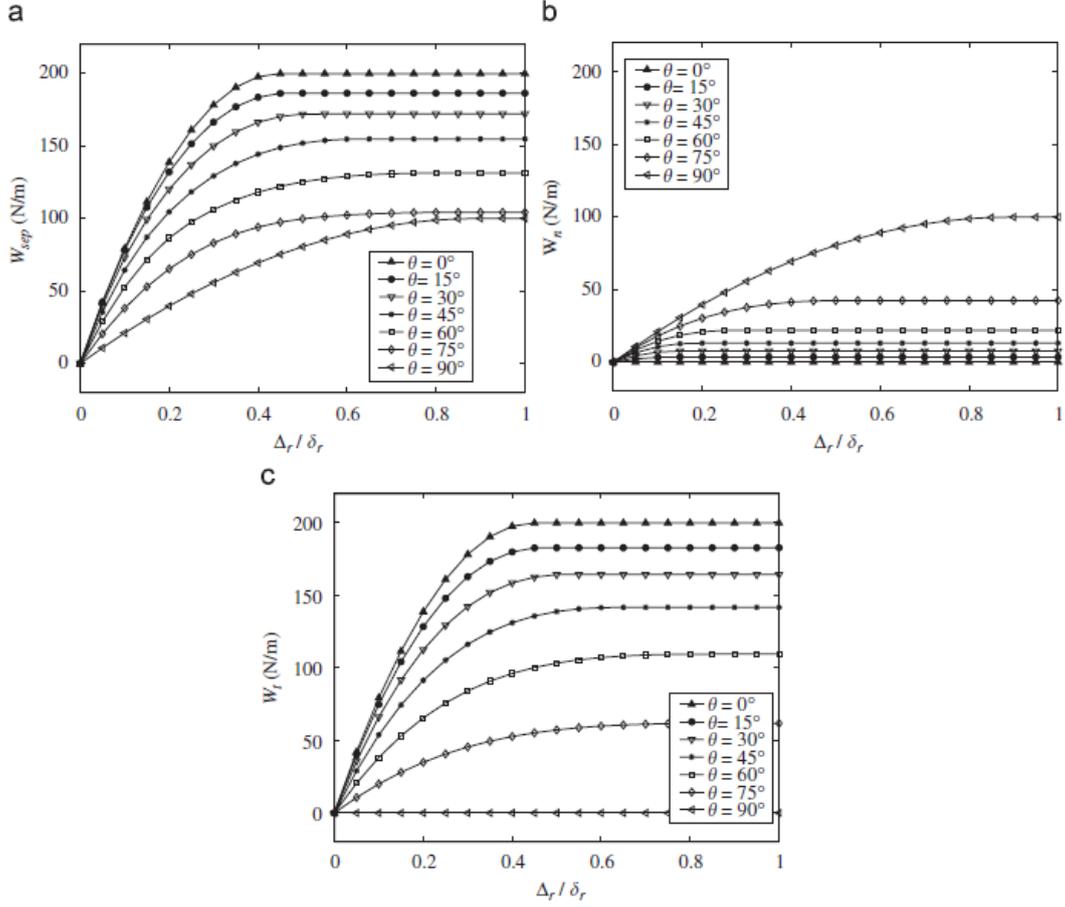


Figura 3.10: Legge PPR - (a) lavoro di separazione, (b) lavoro degli sforzi normali e (c) lavoro degli sforzi tangenziali al variare dell'angolo di separazione θ [44].

In [44] è presente un'analisi della legge PPR in modo misto dal punto di vista energetico: per una corretta modellazione del fenomeno è indispensabile che, nei casi in cui $\phi_n \neq \phi_t$, l'energia di frattura in modo misto, calcolata mediante la seguente espressione, sia sempre compresa tra le energie di frattura in modo puro.

$$W_{sep} = W_n + W_t = \int_{\Xi} \sigma(\Delta_n, \Delta_t) d\Delta_n + \int_{\Xi} \tau(\Delta_n, \Delta_t) d\Delta_t \quad (3.49)$$

In cui Ξ è la storia di spostamento che porta alla decoesione.

A tal fine, vengono considerate due possibili storie di spostamento:

- una di tipo proporzionale (figure 3.9 e 3.10), che viene definita dall'angolo di separazione θ rispetto al piano dell'interfaccia;

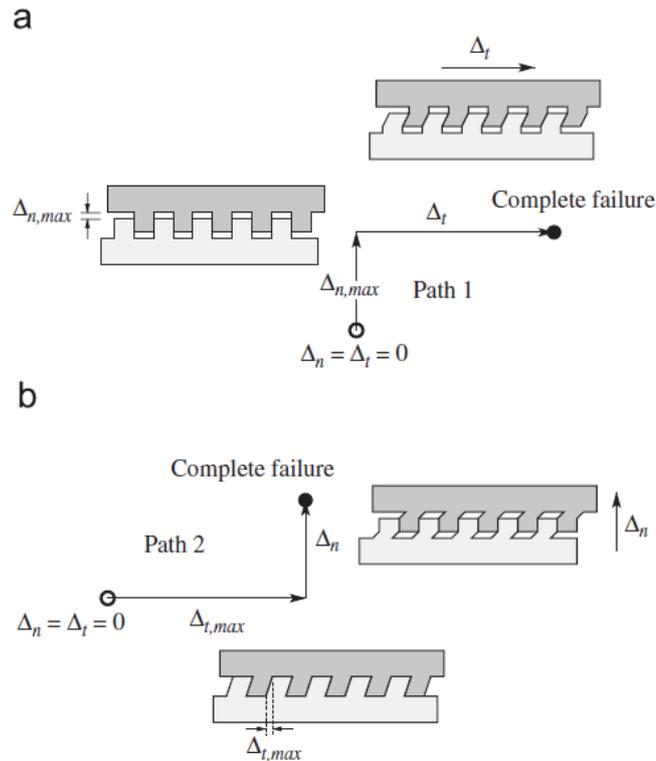


Figura 3.11: Storia di spostamento discontinuo: a) Δ_n cresce fino al raggiungimento del valore $\Delta_{n,max}$, dopodiché viene mantenuto costante mentre si attiva lo spostamento tangenziale Δ_t fino a rottura; b) Δ_t cresce fino al raggiungimento del valore $\Delta_{t,max}$, dopodiché viene mantenuto costante mentre si attiva lo spostamento normale Δ_n fino a rottura [44].

- una di tipo discontinuo (figure 3.11, 3.12 e 3.13), costituita da un iniziale spostamento in una direzione, seguito da uno spostamento nell'altra direzione che porta alla rottura.

È infatti possibile esprimere una qualsiasi storia di spostamento come combinazione di queste due particolari tipologie.

Dalle figure 3.10, 3.13 e 3.12, si nota come la legge dal punto di vista energetico sia fisicamente coerente per ogni storia di spostamento: l'energia di separazione è infatti sempre compresa tra le energie di frattura in modo puro.

3.2.6 Legge Xu-Needleman

In questo paragrafo verrà brevemente descritta la legge Xu-Needleman (XN) elaborata in [65]. Questa legge coesiva non è stata implementata nel codice

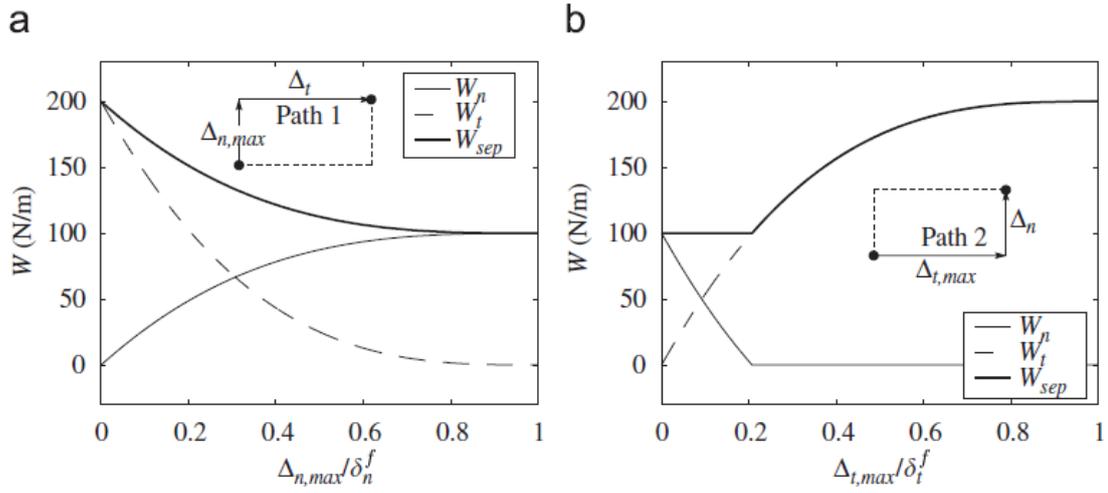


Figura 3.12: Legge PPR - Lavoro di separazione nel caso $\phi_t > \phi_n$ ($\phi_n = 100\text{N/m}$; $\phi_t = 200\text{N/m}$): (a) 'Path 1' al variare di $\Delta_{n,max}$ e (b) 'Path 2' al variare di $\Delta_{t,max}$ [44].

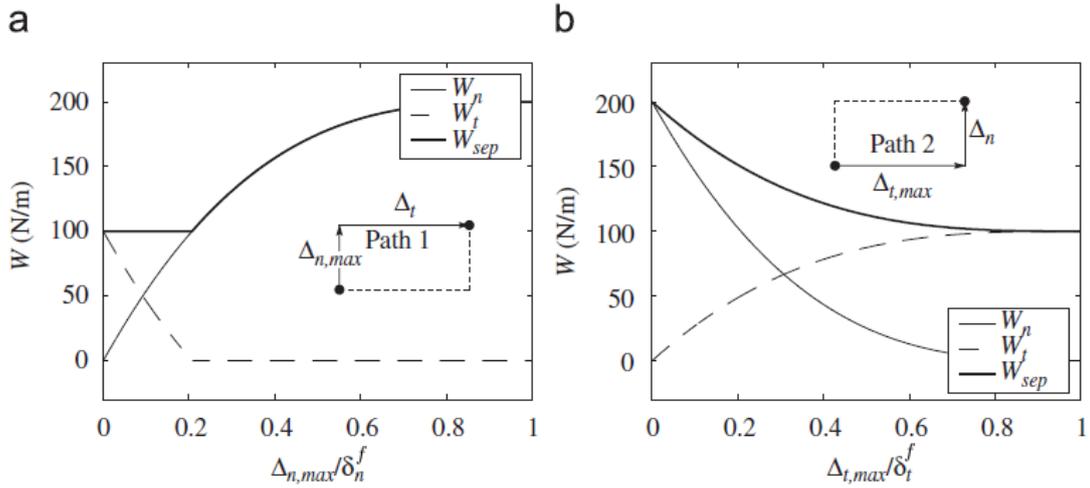


Figura 3.13: Legge PPR - Lavoro di separazione nel caso $\phi_t < \phi_n$ ($\phi_n = 200\text{N/m}$; $\phi_t = 100\text{N/m}$): (a) 'Path 1' al variare di $\Delta_{n,max}$ e (b) 'Path 2' al variare di $\Delta_{t,max}$ [44].

ma, essendo la legge descritta in 3.2.7 elaborata partendo da questa, si è scelto di riportarla per completezza.

Nella legge XN l'espressione degli sforzi è derivata dal seguente poten-

ziale:

$$\Psi(\Delta_n, \Delta_t) = \phi_n + \phi_n \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left[\left(1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left(\frac{1-q}{r-1}\right) - \left(q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right] \quad (3.50)$$

in cui:

- δ_n e δ_t sono due lunghezze caratteristiche del modello;
- $q = \phi_n / \phi_t$;
- r è un parametro di accoppiamento definito come $r = \Delta_n^* / \delta_n$, dove Δ_n^* è il valore di Δ_n dopo completa separazione tangenziale con σ nullo.

Differenziando l'equazione (3.50) si ottengono le espressioni degli sforzi:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) & \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1-q}{r-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)\right] \left(r - \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\tau(\Delta_n, \Delta_t) = 2 \frac{\phi_n \delta_n \Delta_t}{\delta_n (\delta_t)^2} \left(q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{(\delta_t)^2}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \quad (3.52)$$

Questa legge coesiva presenta alcuni problemi nell'accoppiamento tra i modi, come si può vedere dalle figure 3.14 e 3.15:

- il massimo sforzo di taglio (T_t^* in figura 3.14) può diventare negativo quando $r > q$ e $\Delta_n > 0$, il che non sembra fisicamente coerente;
- nel caso $r < q$ si manifesta un comportamento non realistico in caso di compressione normale, per la quale il massimo sforzo di taglio si riduce all'aumentare della compressione;
- la massima trazione normale (T_n^* in figura 3.14) a seguito di una completa rottura in direzione normale è data dall'espressione

$$T_n^* = (1-r)T_{n,max} \quad (\Delta \leftarrow \infty) \quad (3.53)$$

dalla quale si nota come nel caso $r \neq 1$ il massimo sforzo normale non svanisca anche dopo la rottura in direzione tangenziale.

Ne consegue che la legge descrive un accoppiamento tra i modi realistico solo nel caso $r = q = 1$.

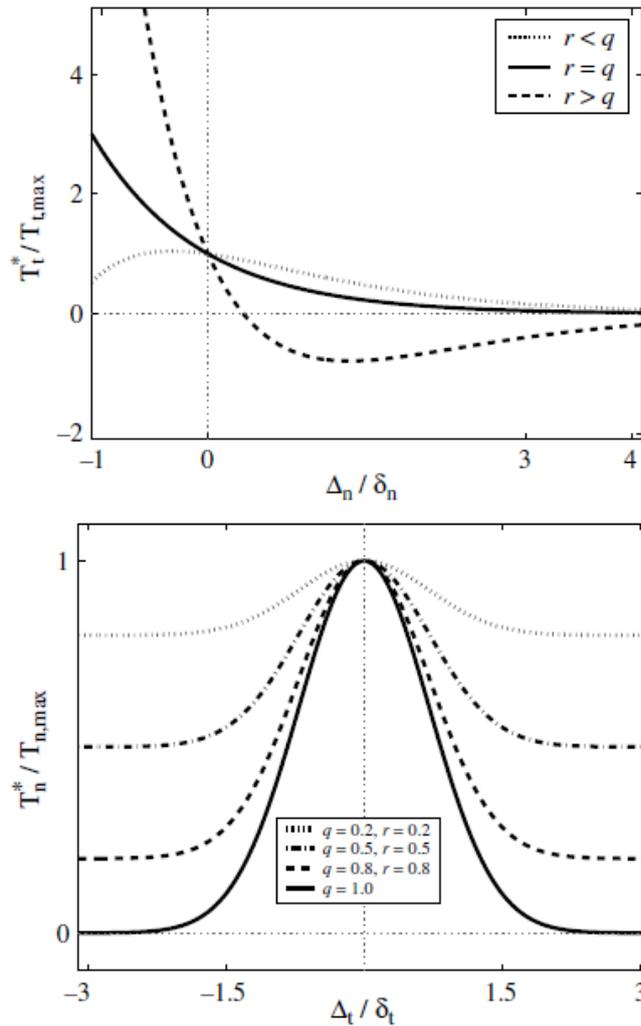


Figura 3.14: Legge XN - Sforzi normali e tangenziali massimi in funzione degli spostamenti relativi nelle direzioni opposte normalizzati per la legge XN; con $T_{t,max}$ e $T_{n,max}$ si intendono i valori degli sforzi massimi in situazione di modo puro. I coefficienti r e q sono parametri del modello [59].

3.2.7 Legge van den Bosch-Schreurs-Geers

Come nelle leggi PPR e XN, anche in questa viene definito un potenziale dal quale si ricavano gli sforzi all'interfaccia. Il potenziale è di tipo esponenziale: ciò significa che gli sforzi si annullano asintoticamente per spostamenti relativi sufficientemente grandi; inoltre l'effetto unilaterale in direzione normale è modellato dal potenziale stesso. Per questi due motivi il potenziale è valido ovunque sull'interfaccia.

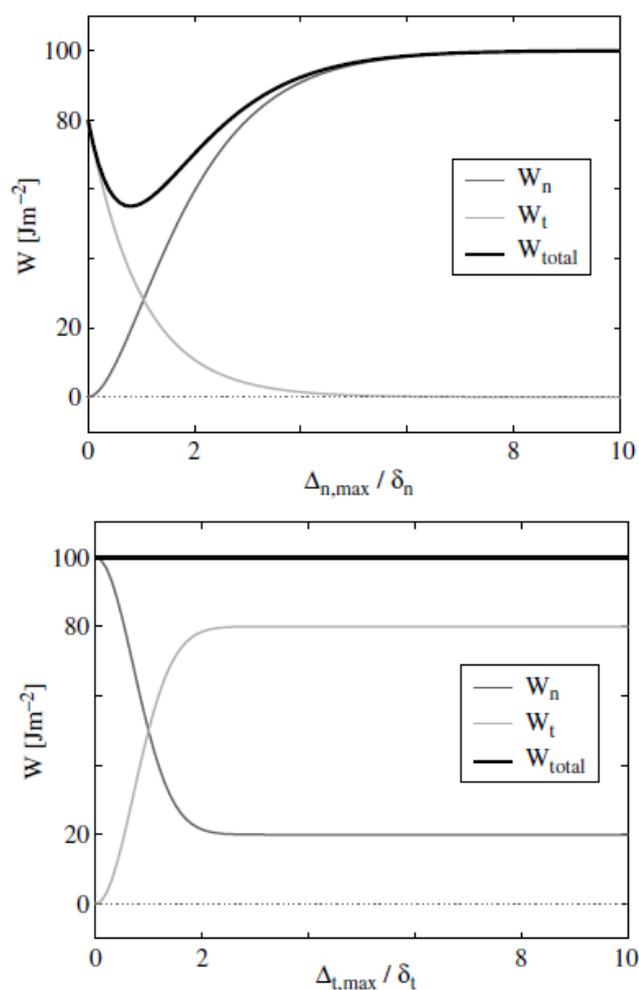


Figura 3.15: Legge XN - Storia di spostamento discontinuo: lavoro di separazione al variare dell'ampiezza dello spostamento relativo iniziale utilizzando la legge XN. Nel caso considerato in figura si ha $\phi_n = 100N/mm$ e $\phi_t = 80N/mm$. Si nota come, per entrambe le tipologie di spostamento discontinuo, la legge non sia fisicamente coerente [59].

Questa legge è tratta dall'articolo [59], come estensione della legge coesiva elaborata da Xu e Needleman (XN, [65]). Come è stato descritto nel paragrafo 3.2.6, la legge XN ha il problema di descrivere realisticamente il comportamento dell'interfaccia solo nel caso in cui le energie di frattura ϕ_n e ϕ_t si equivalgono.

Il fatto di dover porre $\phi_n = \phi_t$ comporta notevoli limitazioni, siccome solitamente si ha $\phi_t > \phi_n$ e ciò può dunque rendere la modellazione di fenomeni di propagazione della delaminazione in modo misto poco accurata.

Il potenziale elaborato in [59] assume la seguente espressione:

$$\Psi(\Delta_n, \Delta_t) = \phi_n \left[1 - \left(1 + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \exp \left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \exp \left(-\frac{\Delta_t^2}{(\delta_t)^2} \right) \right] \quad (3.54)$$

nella quale δ_n e δ_t sono gli spostamenti relativi normali e tangenziali caratteristici del modello.

Gli sforzi coesivi all'interfaccia si ottengono differenziando il potenziale Ψ come fatto in (3.39) e (3.40). L'energia di frattura in direzione tangenziale ϕ_t viene poi sostituita a ϕ_n quando il potenziale viene derivato rispetto agli spostamenti relativi tangenziali; questa sostituzione consente l'utilizzo di energie di frattura differenti.

Le espressioni degli sforzi coesivi sono quindi le seguenti:

$$\sigma(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\phi_n \Delta_n}{(\delta_n)^2} \exp \left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \exp \left(-\frac{\Delta_t^2}{(\delta_t)^2} \right) \quad (3.55)$$

$$\tau(\Delta_n, \Delta_t) = 2 \frac{\phi_t \Delta_t}{(\delta_t)^2} \left(1 + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \exp \left(-\frac{\Delta_t^2}{(\delta_t)^2} \right) \exp \left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \quad (3.56)$$

Questa legge coesiva, rappresentata in figura 3.16, ha quattro parametri indipendenti: le energie di frattura ϕ_n e ϕ_t ed i valori degli sforzi massimi σ_{max} e τ_{max} , dai quali si ottengono i valori di δ_n e δ_t ; si ha infatti

$$\delta_n = \frac{\phi_n}{\sigma_{max} \exp(1)} \quad \delta_t = \frac{\phi_t}{\tau_{max} \sqrt{\frac{1}{2} \exp(1)}} \quad (3.57)$$

Si può quindi notare come, una volta stabiliti gli sforzi massimi e le energie di frattura, non sia possibile modificare la rigidità iniziale.

Anche in questo caso, lo scarico deve essere trattato indipendentemente dal potenziale ed è stato implementato in modo tale che avvenga verso l'origine.

Come si può notare dalle equazioni (3.55) e (3.56), gli sforzi tendono a zero per valori degli spostamenti relativi sufficientemente elevati, ma non si annullano mai esattamente. Questo comporta principalmente due conseguenze:

- non è possibile definire in maniera univoca la posizione del fronte di delaminazione;
- il potenziale rimane valido su tutta l'interfaccia per qualsiasi valore degli spostamenti relativi, al contrario di quanto accadeva per il potenziale PPR (paragrafo 3.2.5).

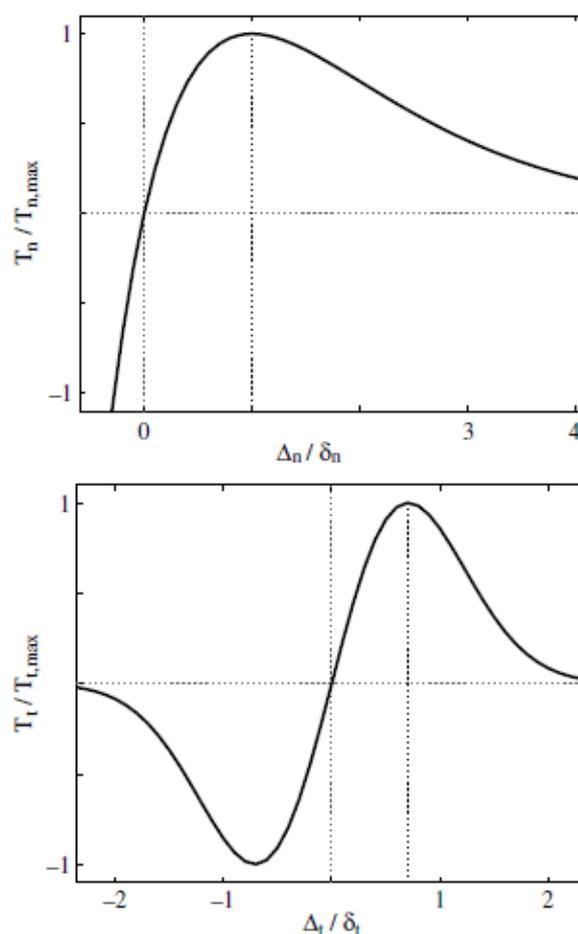


Figura 3.16: Forma della legge coesiva in situazione di modo puro: si può notare che lo sforzo massimo in direzione normale viene raggiunto per $\Delta_n = \delta_n$, mentre per lo sforzo di taglio massimo viene raggiunto per $\Delta_t = \delta_t/\sqrt{2}$. Corrispondenze tra le quantità definite in figura e nel testo: $T_n = \sigma$, $T_t = \tau$, $T_{n,max} = \sigma_{max}$, $T_{t,max} = \tau_{max}$.

Comportamento in modo misto

In [59] viene analizzato il comportamento della legge in modo misto, similmente a quanto fatto in [44] per la legge PPR (paragrafo 3.2.5), con la differenza che, questo caso, si considera solo una storia di spostamento di tipo proporzionale (figura 3.17).

Viene quindi calcolato il lavoro di separazione mediante la seguente

espressione:

$$W_{sep} = W_n + W_t = \int_0^{\infty} \sigma(\Delta_n, \Delta_t) d\Delta_n + \int_0^{\infty} \tau(\Delta_n, \Delta_t) d\Delta_t \quad (3.58)$$

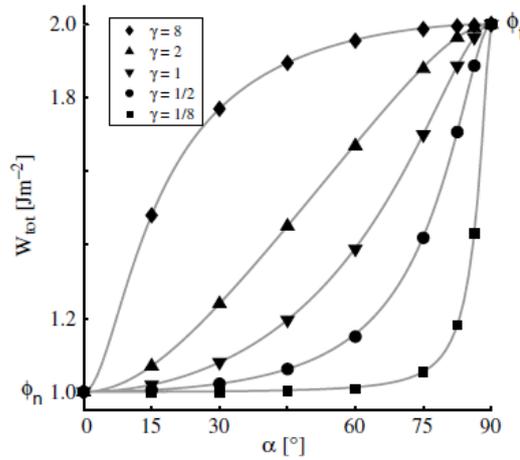


Figura 3.17: Energia di frattura al variare dell'angolo di separazione e per diversi valori di $\gamma = T_{t,max}/T_{n,max}$. Si nota come la legge sia fisicamente coerente, in quanto l'energia di separazione è sempre compresa tra le energie di frattura in modo puro ϕ_n e ϕ_t [59].

Viene inoltre studiato l'andamento dei massimi sforzi nelle due direzioni in funzione del valore di spostamento nella direzione opposta: anche in questo caso, i risultati sono coerenti dal punto di vista fisico, in quanto i valori degli sforzi massimi decrescono al crescere degli spostamenti nelle rispettive direzioni opposte, e risultano pertanto più elevati nelle situazioni in modo puro (figura 3.18).

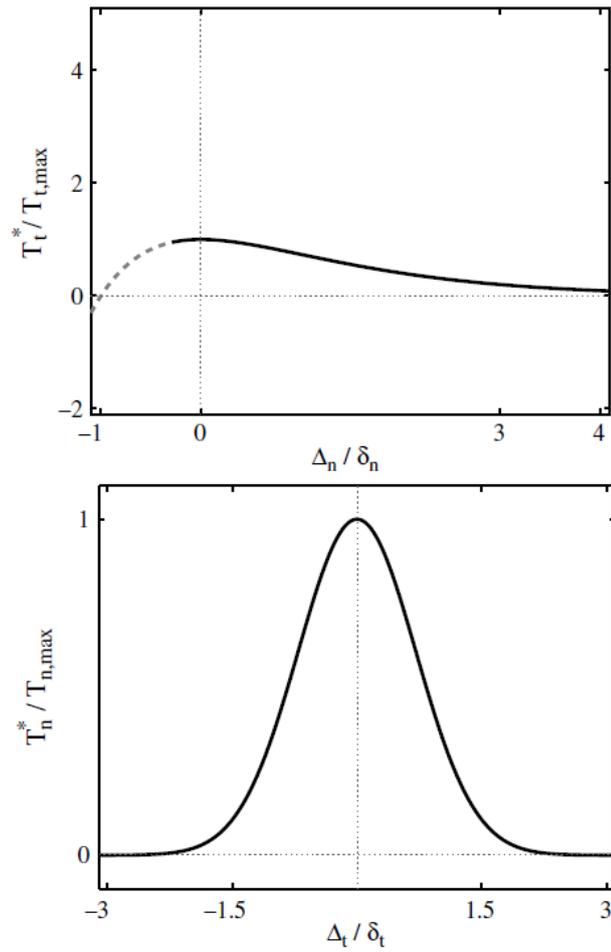


Figura 3.18: Sforzi normali e tangenziali massimi in funzione degli spostamenti relativi nelle direzioni opposte normalizzati; con $T_{t,max}$ e $T_{n,max}$ si intendono i valori degli sforzi massimi in situazione di modo puro [59].

4

Determinazione dei parametri

La scelta di buoni modelli di interfaccia e la determinazione dei parametri del modello sono problemi di non facile risoluzione. La difficoltà principale sta nel fatto che non esiste la possibilità di testare direttamente l'interfaccia.

Le proprietà dell'interfaccia non possono inoltre essere legate direttamente a quelle della matrice dell'adesivo utilizzato: in [24] viene mostrato come le proprietà viscoso elastiche dell'interfaccia siano marcatamente differenti rispetto a quelle della matrice dell'adesivo.

La determinazione dei parametri dell'interfaccia è complicata, siccome la delaminazione interagisce con altri meccanismi di degrado che appaiono negli strati. Essi possono comunque essere divisi in due categorie:

- quelli che governano il comportamento nella fase di attivazione della delaminazione, che comprendono i parametri che definiscono la rigidità iniziale, gli sforzi massimi raggiungibili e i parametri di un eventuale criterio di attivazione;
- quelli che definiscono il comportamento nella fase di propagazione della delaminazione, ovvero le energie di frattura in modo puro ed i parametri di un eventuale criterio di propagazione.

4.1 Energia di frattura

L'energia di frattura è il parametro più importante che caratterizza l'adesione tra due superfici.

Il criterio di Griffith afferma che una fessura si propaga quando la quantità di energia rilasciabile è sufficiente a creare due nuove superfici. Il bilancio d'energia per un volume costante può essere scritto come [32]:

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} = \frac{\partial U_d}{\partial A} + \frac{\partial U_s}{\partial A} + \frac{\partial U_k}{\partial A} \quad (4.1)$$

In cui U_e è l'energia immessa nel sistema, U_k è l'energia cinetica, U_s è l'energia di deformazione immagazzinata e ∂A è l'incremento di superficie a

seguito della propagazione della fessura. U_d rappresenta l'energia dissipata nel processo di propagazione; questa energia, per unità di superficie, viene indicata con la lettera G e viene denominata *tasso di energia rilasciata*:

$$G = \frac{\partial U_e}{\partial A} - \frac{\partial U_s}{\partial A} - \frac{\partial U_k}{\partial A} \quad (4.2)$$

Quando G raggiunge un valore critico G_c , denominato *tasso di energia rilasciata critico* e $\frac{\partial G}{\partial A} > 0$ la fessura comincia a propagarsi. Nel caso si faccia riferimento a prove quasi statiche con propagazione della fessura di tipo stabile, l'energia cinetica risulta essere trascurabile e, per materiali elastici lineari, si può utilizzare il cosiddetto *Compliance method*:

$$G = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad (4.3)$$

in cui

$$C = \frac{u}{P} \quad (4.4)$$

è la cedevolezza (*compliance*) del sistema, espressa come rapporto tra lo spostamento u in direzione del carico ed il carico P .

La quantità G_c è considerata una proprietà del materiale, tuttavia nel caso della delaminazione occorre fare una precisazione. Si considerino due corpi, uniti da uno strato di adesivo: nonostante lo spessore dello strato di adesivo che viene applicato tra due lamine sia piccolo rispetto allo spessore delle lamine che unisce, esso influisce sul comportamento dell'adesivo stesso; in particolare studi sperimentali condotti in [14] hanno mostrato che l'energia di frattura in modo II aumenta al crescere dello spessore. Succede infatti che, se lo spessore dell'adesivo è molto sottile, l'energia richiesta per produrre una microfessura equivale a quella che serve alla formazione di una macrofessura; a questa energia ci si riferisce spesso come energia intrinseca di separazione. Se invece lo spessore è maggiore, una macrofessura si forma dalla coalescenza di microfessure, rendendo il meccanismo di frattura simile a quello che è proprio di un materiale duttile; in questo caso quindi l'energia di frattura comprende sia quella intrinseca, che quella correlata alle dissipazioni plastiche e risulta quindi maggiore.

Conseguentemente, come mostrato in [31], si può pensare di modellare uno strato di adesivo in tre diversi modi.

1. Si considera l'adesivo come un'interfaccia di spessore nullo tra i due corpi che unisce. In questo caso, la legge coesiva considera unicamente l'energia di frattura intrinseca e la variazione delle proprietà dell'adesivo in funzione dello spessore dello stesso non viene perciò presa in considerazione.
2. Si modella l'adesivo come un continuo elasto-plastico e la legge coesiva è basata sulle proprietà di frattura dell'adesivo come un materiale

“bulk”, assumendo che il processo di frattura si sviluppi da una fessura sottile introdotta nell’adesivo;

3. Si modella l’adesivo come un’interfase con uno spessore finito alla quale si associa una legge coesiva.

In questo lavoro di tesi si è scelto spesso di ricorrere al primo di tipo di modellazione, che risulta essere il più semplice ma anche quello maggiormente utilizzato in letteratura, e nel capitolo 7 verrà utilizzata anche la modellazione 3. Di conseguenza le energie di frattura verranno considerate come parametri intrinseci del modello.

Dalla (4.3) si nota quindi come il tasso di energia rilasciato critico G_c possa essere valutato una volta stabilito il legame $C(A)$ (cedevolezza – superficie di frattura). In [3] al fine di valutare questo legame si indicano due metodologie:

- Si identifica una classe di funzioni (es. polinomiali) con la quale esprimere il legame $C(A)$ e si determinano i parametri incogniti dai risultati sperimentali;
- $C(A)$ viene determinata analiticamente applicando la teoria della trave o delle piastre; in questo modo la valutazione è più veloce anche se il grado di approssimazione è maggiore.

Dall’equazione (4.3) si può ottenere l’espressione parametrica della curva $P - u$, assumendo come parametro la superficie della fessura A :

$$P = \sqrt{\frac{2G_c}{\partial C(A)/\partial A}} \quad u = PC(A) = \sqrt{\frac{2G_c}{\partial C(A)/\partial A}} C(A) \quad (4.5)$$

Si può ricavare la quantità A in funzione di P dalla prima equazione e sostituire questa espressione nella seconda equazione.

Una volta nota la relazione $C(A)$, è possibile studiare le condizioni per le quali la propagazione della fessura è stabile in condizioni di controllo di carico (*load control*) o di controllo di spostamento (*displacement control*), assumendo che G_c rimanga costante.

Considerando un problema piano in cui $A = Ba$, dove B è la larghezza (costante) del provino e a è la lunghezza della fessura, la propagazione è stabile quando $\frac{\partial G}{\partial a}$ è non positivo per P o u costante, a seconda che si consideri rispettivamente una condizione di carico o spostamento controllato:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|_P = \frac{1}{2B} P^2 \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} \leq 0 \quad \left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|_u = \frac{u^2}{2BC^2} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} - \frac{2}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)^2 \right] \leq 0 \quad (4.6)$$

L'instabilità si manifesta nella curva carico-spostamento in presenza di tratti di softening (instabilità in controllo di carico) e di snap-back (instabilità in controllo di spostamenti).

Per valutare sperimentalmente l'energia di frattura, si utilizzano le prove di laboratorio tipiche della meccanica della frattura. In queste prove la zona di processo all'estremità della cricca, dove si concentrano i fenomeni dissipativi, trasla senza modificare la propria forma: si ha quindi una propagazione stazionaria della frattura.

In questo modo, con riferimento a quanto spiegato nel paragrafo 2.1.1, tutti i punti appartenenti alla zona di processo saranno soggetti alla stesso processo di decoesione DP. Soddisfacendo questa condizione, il tasso critico d'energia rilasciata G_c può essere direttamente correlato al lavoro di decoesione W_d :

$$G_c = \frac{W_d}{A} = \int_{DP} \sum_{i=1}^3 t_i d\Delta = \phi \quad (4.7)$$

I risultati devono essere indipendenti dalla geometria (ad esempio dalla lunghezza iniziale dell'intaglio). Bisogna sottolineare che, in questo modo, viene conteggiata anche l'energia eventualmente dissipata da altri meccanismi, come quelli di danneggiamento nelle lamine (micro fessurazione della matrice, scorrimento fibra-matrice, rottura delle fibre,...). In questi casi, si dovrebbe tener conto di questi meccanismi per una corretta valutazione di G_c , ma tuttavia si tende a dimensionare i provini in modo tale che il loro comportamento rimanga elastico.

4.2 Rigidezza iniziale

Come già detto nel paragrafo 3.1.1, la rigidezza iniziale del modello deve essere sufficientemente grande da simulare una perfetta aderenza nella fase elastica della risposta; tuttavia, valori di rigidezza troppo elevati porterebbero a problemi numerici, causando oscillazioni spurie nel campo degli sforzi e, conseguentemente, la comparsa di oscillazioni anche nella risposta globale della struttura discretizzata.

Per questo motivo si è cercato di definire dei criteri per la valutazione delle rigidezze dell'interfaccia nella fase iniziale nelle diverse direzioni. In [18] vengono proposte due metodologie:

1. si considera l'interfaccia come uno strato di spessore fittizio pari ad una frazione dello spessore di uno strato (ad esempio 1/5), caratterizzato dai parametri meccanici (modulo di Young e modulo elastico tangenziale) degli strati o della matrice (questo non è completamente vero siccome le proprietà della resina tra i laminati sono diverse da quelle della resina pura);

2. si sfrutta l'influenza che questi parametri hanno sulla concentrazione degli sforzi lungo i lati liberi del laminato (effetti di bordo).

In particolare, con riferimento al punto 2, si è notato come la lunghezza di penetrazione degli sforzi interlaminari di bordo è influenzata direttamente dal rapporto tra la rigidità dell'interfaccia e un modulo di Young equivalente della lamina (si pensi ad esempio al problema della trave su suolo elastico). Ipotizzando quindi che questa lunghezza nel processo di attivazione coincida con la lunghezza di penetrazione del danneggiamento, le rigidità dell'interfaccia possono essere determinate in principio dai dati sperimentali che riguardano l'attivazione della delaminazione.

4.3 Sforzi massimi

Il valore del massimo sforzo sostenibile a livello dell'interfaccia è un importante parametro di progettazione dell'adesione.

In un modello numerico, la scelta dei massimi sforzi raggiungibili influisce sull'attivazione della delaminazione e porta a differenze tra i risultati analitici ottenuti con la meccanica della frattura elastica lineare (LEFM) ed il modello; in particolare, maggiori sono gli sforzi raggiungibili e minori saranno le discrepanze tra i risultati.

Tuttavia più il valore è elevato e più fitta deve essere la mesh attorno al fronte di delaminazione: questo accade perché differenti valori di sforzo massimo modificano sensibilmente la lunghezza della zona coesiva l_{ch} , la quale, come si vedrà in seguito, viene assunta come un parametro indicativo della raffinatezza della mesh da dover utilizzare per ottenere risultati privi di oscillazioni. Si ha infatti che

$$l_{ch} \propto \frac{E\phi}{\sigma_{max}^2} \quad (4.8)$$

4.4 Prove di delaminazione

In questa sezione verranno descritte le prove maggiormente utilizzate per la caratterizzazione dell'adesione tra due superfici. Nei primi due test la delaminazione avviene in modo puro, perciò i risultati sperimentali possono essere utilizzati efficacemente per determinare le energie di frattura in modo puro; le altre due prove sono invece utilizzate per indagare il comportamento dell'adesione in modo misto.

4.4.1 Double Cantilever Beam (DCB)

In questa prova sperimentale la propagazione avviene in puro modo I. Il provino utilizzato per la prova è schematizzato in figura 4.1.

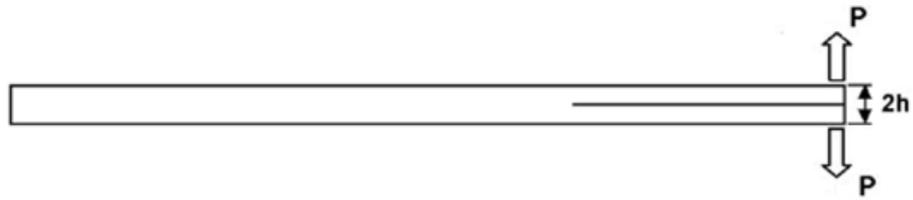


Figura 4.1: Schematizzazione della prova DCB.

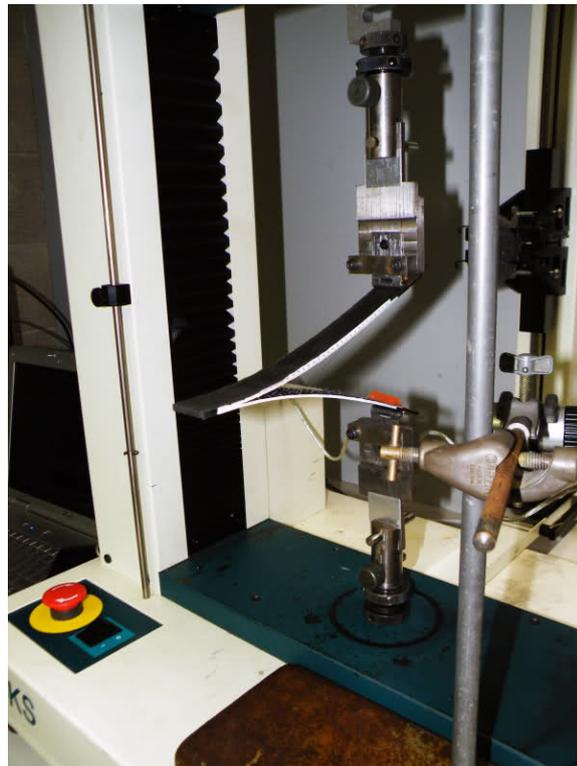


Figura 4.2: Test DCB.

Il provino (figura 4.2) è costituito da due lamine incollate tra loro e tra le quali viene praticato un intaglio ad una delle due estremità; a questa estremità le due lamine vengono caricate simmetricamente, in modo tale da favorirne la separazione, mentre all'estremità opposta il provino può essere considerato vincolato tramite un incastro.

Si consideri un provino di questo tipo costituito da due lamine tra loro identiche, sia come dimensioni geometriche, che come proprietà meccaniche, di lunghezza l , larghezza B e spessore h e costituite da un materiale elastico lineare omogeneo isotropo con modulo elastico E . Ciò che si mira ad ottenere è la soluzione analitica del problema, espressa come curva

carico-spostamento (entrambi riferiti ad una lamina). Le lamine vengono schematizzate come travi, delle quali si trascura la deformabilità a taglio (travi di Eulero-Bernoulli).

La curva carico-spostamento [38] è divisa in due parti:

- nella prima parte, la delaminazione non propaga e la risposta strutturale è quella tipica di una mensola di lunghezza pari a quella dell'intaglio, ossia caratterizzata da una relazione carico-spostamento di tipo lineare descritta dall'equazione

$$P(v) = \frac{3EI}{a_0^3}v \quad (4.9)$$

in cui P e v sono rispettivamente il carico applicato e lo spostamento di una delle mensole;

- nella seconda parte la delaminazione comincia a propagare, a causa del raggiungimento da parte del tasso di energia rilasciata del valore critico G_c .

Per determinare la seconda parte della risposta strutturale, occorre valutare il tasso d'energia rilasciata mediante l'equazione (4.2); innanzitutto occorre quindi valutare la cedevolezza del sistema, che è data da:

$$C(a) = \frac{a^3}{3EI} \quad (4.10)$$

A questo punto è possibile determinare l'espressione di G :

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} = \frac{P^2 a^2}{2BEI} \quad (4.11)$$

Quando viene raggiunta la condizione $G = G_c$ la delaminazione comincia a propagare; esprimendo a in funzione dello spostamento v sfruttando l'equazione (4.9), per la seconda parte della risposta si ottiene quindi la seguente espressione:

$$P(v) = \sqrt{\frac{\sqrt{(BG_c)^3 EI}}{3v}} \quad (4.12)$$

Si può ora analizzare le condizioni per le quali la propagazione è stabile o meno.

$$\begin{aligned} & \text{Carico controllato} \\ \left. \frac{dG}{da} \right|_P &= \frac{P^2}{B} \frac{2a}{3EI} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Spostamento controllato

$$\left. \frac{dG}{da} \right|_v = \frac{v^2}{B} \left(\frac{3EI}{a^3} \right)^2 \left(\frac{6a}{3EI} - \frac{18a}{3EI} \right) \leq 0 \quad (4.14)$$

È immediato verificare come la condizione (4.13) non sia mai soddisfatta, mentre la (4.14) lo è per ogni valore di a . Si ha infatti che la risposta della struttura nel ramo di propagazione è di tipo softening e non presenta tratti in snap-back (figura 4.3).

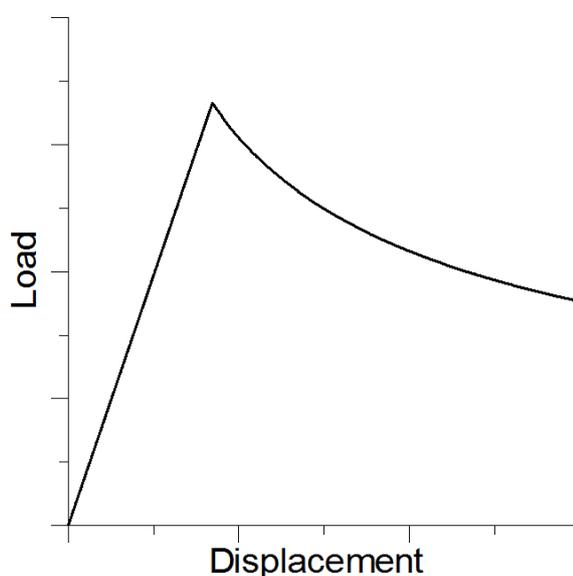


Figura 4.3: Curva carico-spostamento analitica della prova DCB.

4.4.2 End Notch Flexure (ENF)

Mentre nel test DCB la delaminazione avviene in puro modo I, nel test ENF si ha delaminazione per puro taglio.

La prova è rappresentata schematicamente in figura 4.4; il provino ha le stesse caratteristiche di quello utilizzato per la prova DCB, mentre le condizioni di carico e di vincolo sono differenti: il provino è appoggiato ad entrambi gli estremi (cerniera+carrello) e viene caricato trasversalmente in mezzeria (figura 4.5).

Quando il provino si inflette, le due lamine tendono a scorrere l'una sull'altra fino al raggiungimento della delaminazione, che propaga per puro taglio.

La risposta strutturale, intesa come carico applicato in funzione dello spostamento in mezzeria, si può dividere in tre parti:

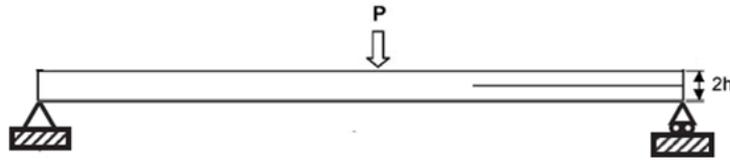


Figura 4.4: Schematizzazione della prova ENF.



Figura 4.5: Test ENF.

1. la prima fase è elastica, in cui la risposta è di tipo lineare e la struttura mantiene la rigidità iniziale;
2. la seconda fase è caratterizzata da una rapida propagazione della delaminazione;
3. nella terza fase la delaminazione propaga in maniera più stabile.

La cedevolezza $C = \frac{v}{P}$ del provino in funzione delle sue proprietà geometriche e meccaniche è data dalla seguente espressione, ottenuta sulla base della teoria delle travi [38]:

$$C = \frac{-3(L - a)^3 + L^3}{96EI} \quad (4.15)$$

in cui a è la lunghezza dell'intaglio, L è la lunghezza del provino, E il modulo elastico delle lamine e I è il momento d'inerzia della sezione trasversale di una lamina.

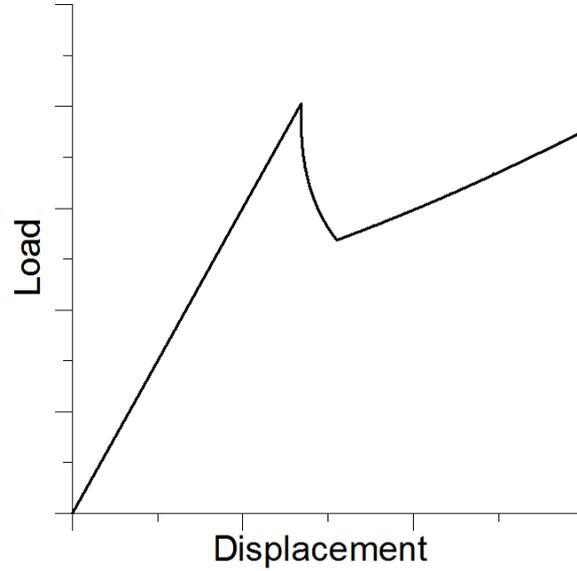


Figura 4.6: Curva carico-spostamento analitica della prova ENF, ottenuta con $a = 0.3L$.

La fase elastica iniziale viene quindi descritta dalla seguente espressione:

$$P = \frac{96EI}{-3(L-a)^3 + L^3}v \quad (4.16)$$

Procedendo allo stesso modo di quanto fatto per il test DCB, si ottiene la seguente curva di propagazione:

$$v = \frac{Pl^3}{96EI} - \frac{1}{P^2}16\sqrt{EI} \left(\frac{B\phi_t}{3} \right)^{3/2} \quad (4.17)$$

È facile verificare come la propagazione risulti sempre instabile in condizioni di carico controllato, mentre in spostamento controllato la propagazione è stabile quando $a > 0.347L$.

La propagazione della delaminazione diventa stabile anche in condizioni di carico controllato quando la dimensione dell'intaglio raggiunge la semilunghezza del provino ($a = l/2$). La terza fase è descritta dall'equazione

$$v = \frac{P}{96EI} \left(L^2 - \frac{(64\phi_t BEI)^{3/2}}{\sqrt{3}P^3} \right) \quad (4.18)$$

Infine, la completa delaminazione si raggiunge per uno spostamento pari a

$$v_{fin} = \frac{PL^3}{12EI} \quad (4.19)$$

La figura 4.6 mostra la curva carico-spostamento del test ENF, ottenuta analiticamente.

4.4.3 Mixed-Mode Bending (MMB)

La prova MMB è un test di delaminazione in modo misto ed è perciò utilizzato per valutare l'effetto della combinazione di sforzi normali e di taglio in corrispondenza dell'interfaccia.

Il test MMB (figura 4.7) è stato sviluppato combinando i test DCB ed ENF. Il provino è sostanzialmente lo stesso, le condizioni di vincolo sono quelle del test ENF, mentre le condizioni di carico sono differenti, in quanto il provino viene caricato mediante l'utilizzo di un braccio rigido a forma di F, attraverso il quale il carico P si trasferisce al provino in due diversi punti: la componente all'estremo, analoga a quella del test DCB, tende a far delaminare le lamine in modo I, mentre la componente al centro tende a far propagare la delaminazione in modo II, essendo analoga al carico della prova ENF. Cambiando la posizione del carico sul braccio, è possibile cambiare il rapporto tra carico in mezzzeria e carico d'apertura all'estremo, ottenendo così un'ampia gamma di rapporti modali. Più precisamente è possibile ottenere un rapporto G_I/G_{II} compreso tra 0 e circa 5.

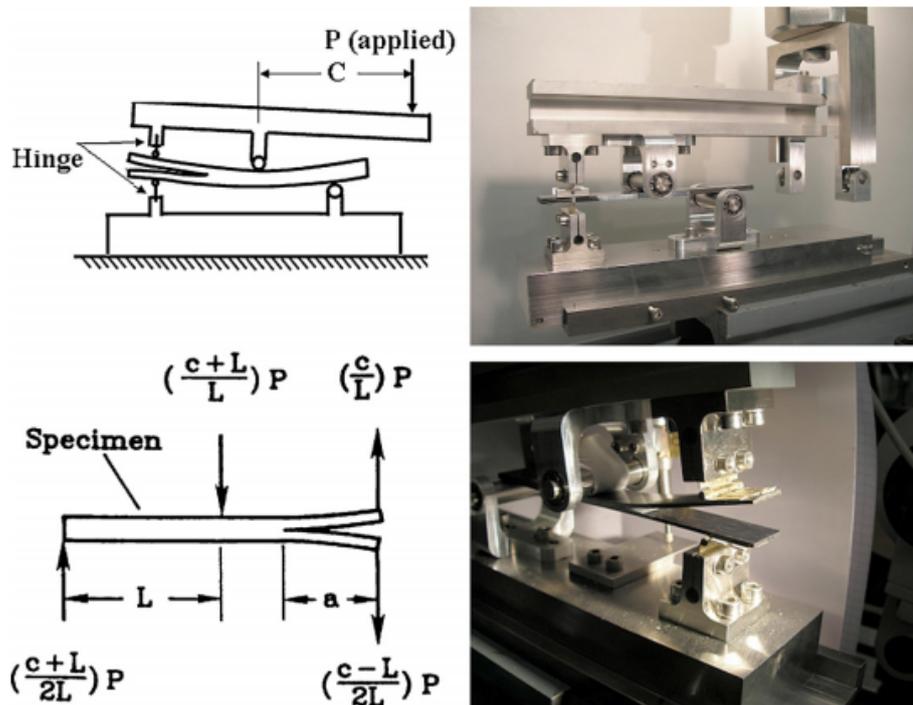


Figura 4.7: Rappresentazione schematica del test MMB ed apparecchiatura utilizzata per la prova [42].

Sfruttando il modello elaborato in [36] è possibile predire a priori con buona accuratezza i valori di G_I e G_{II} .

4.4.4 Peel test

Il cosiddetto *peel test* costituisce una delle prove più frequentemente utilizzate per caratterizzare il collasso di laminati flessibili, essendo impiegato nei settori del packaging e dell'elettronica per determinare l'energia di frattura di un'adesione.

La configurazione del test è rappresentata in figura 4.8: una striscia di laminato viene in parte incollata su un substrato rigido e mediante l'applicazione del carico P viene da esso staccata (figura 4.9). La quantità θ , detta *peel angle* o angolo di tiro, influisce sul valore della forza P che viene misurata, in quanto influenza il modo con il quale la frattura propaga; in particolare nel caso $\theta = 0^\circ$ la frattura propaga in puro modo II, mentre nel caso $\theta = 90^\circ$ la propagazione avviene quasi in puro modo I.

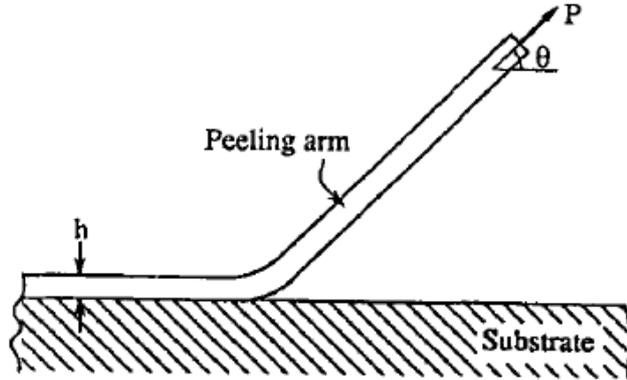


Figura 4.8: Configurazione del *peel test* [37].

Considerando il problema come bidimensionale (la larghezza della striscia b è costante) l'energia di frattura ϕ_a può essere ricavata da un bilancio energetico [37]:

$$\phi_a = \frac{1}{b} \left(\frac{dU_{ext}}{da} - \frac{dU_s}{da} - \frac{dU_{dt}}{da} - \frac{dU_{db}}{da} \right) \quad (4.20)$$

in cui U_{ext} è il lavoro della forza P , U_s è l'energia di deformazione immagazzinata nel braccio, U_{dt} è l'energia dissipata dalla tensione nel braccio e U_{db} è l'energia dissipata dalla flessione del braccio in prossimità del fronte di delaminazione.

Durante il *peel test*, il carico P cresce nella fase iniziale fino al raggiungimento di un plateau. Si consideri quindi un braccio di larghezza b e spessore h che sta delaminando in condizioni di stazionarietà con un carico

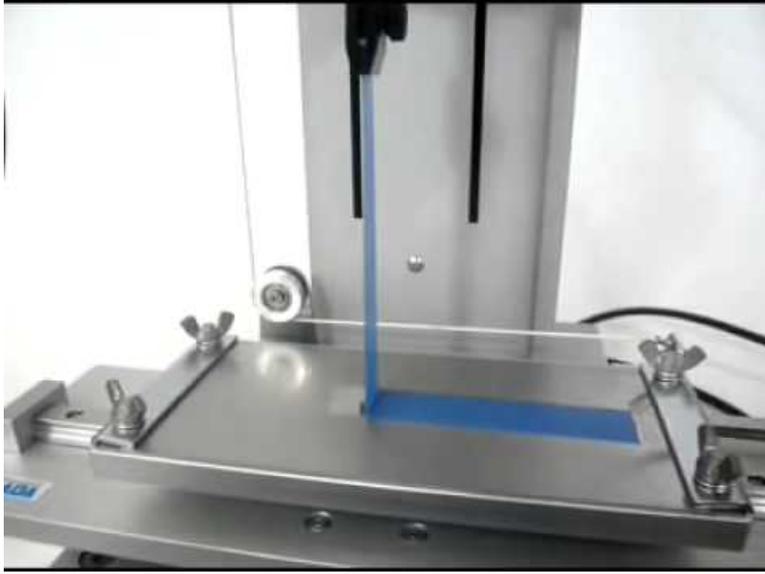


Figura 4.9: Apparecchiatura utilizzata per il *peel test*: cambiando l'inclinazione del substrato varia l'angolo di tiro

P applicato con un'inclinazione θ . Si ha

$$dU_{ext} = Pda(1 + \epsilon_a - \cos \theta) \quad (4.21)$$

$$d(U_s + U_{dt}) = bhda \int_0^{\epsilon_a} \sigma d\epsilon \quad (4.22)$$

in cui ϵ_a è la deformazione normale di trazione nel braccio.

In [64] si considera una flessione del braccio puramente elastica, ottenendo per l'energia di frattura la stima

$$\phi_a^{eb} = \frac{P}{b}(1 + \epsilon_a - \cos \theta) - h \int_0^{\epsilon_a} \sigma d\epsilon \quad (4.23)$$

Considerando la plasticizzazione dovuta alla flessione del braccio, questo porterebbe ad una sovrastima dell'energia di adesione, in quanto

$$\phi_a = \phi_a^{eb} - \phi_{db} \quad (4.24)$$

Il processo flessionale a cui è soggetto il braccio, ipotizzando un legame costitutivo del tipo di figura 4.10, è rappresentato in figura 4.11: dal massimo momento M_0 raggiunto in A , a seguito della propagazione del fronte di delaminazione il braccio torna rettilineo e si raggiunge il punto C . L'energia dissipata è rappresentata dall'area $OABC$, quindi:

$$\phi_{db} = \frac{Area[OABC]}{b} \quad (4.25)$$

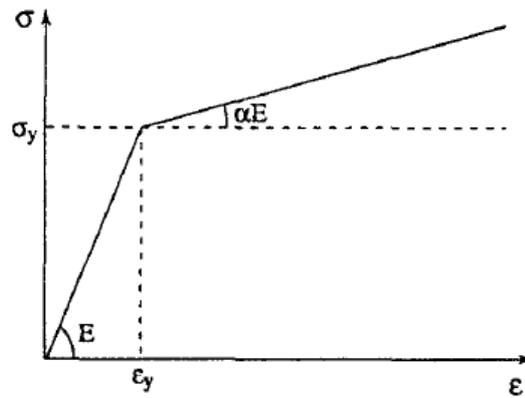


Figura 4.10: Legame costitutivo plastico di tipo *hardening*: con σ_y e ϵ_y rappresentano rispettivamente la tensione e la deformazione di snervamento [37].

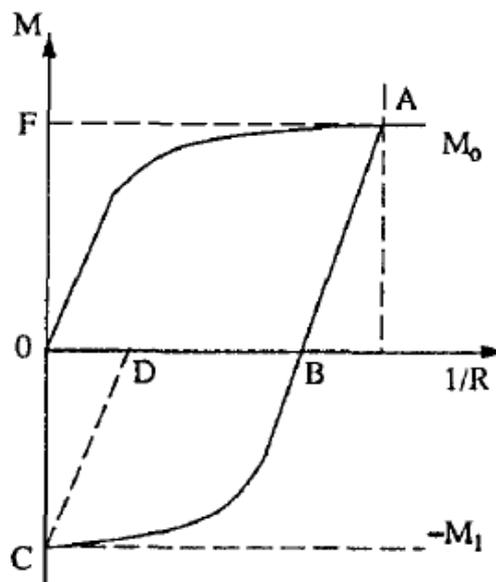


Figura 4.11: Processo deformativo al quale è soggetto il braccio [37].

Per la valutazione di ϕ_{db} si rimanda a [37].

5

Modellazione

5.1 Elementi solid-shell

Quando si trattano fenomeni di delaminazione, spesso sono coinvolti corpi aventi spessori molto piccoli. Per la discretizzazione di strutture sottili si possono generalmente utilizzare due tipologie di elementi:

- a) elementi di tipo guscio classici, per i quali le quantità cinematiche vengono riferite al piano medio e lo stato di sforzo è piano, essendo formulati sulla base delle teorie strutturali di gusci e piastre;
- b) elementi di tipo “solid-shell”, i quali sono elementi tridimensionali che non utilizzano come gradi di libertà le rotazioni ai nodi, ma unicamente gli spostamenti, permettendo in questo modo l’implementazione di leggi costitutive totalmente tridimensionali.

Nel codice utilizzato per la modellazione della delaminazione, gli strati vengono modellati mediante la seconda categoria di elementi. L’elemento solid-shell presenta diversi vantaggi rispetto a quello di tipo guscio: facilità di implementazione di leggi costitutive tridimensionali e semplicità nella formulazione in grandi spostamenti e rotazioni legata all’assenza dei gradi di libertà rotazionali [43].

Il piccolo spessore degli elementi nel caso di un algoritmo esplicito causa un problema relativo all’elevato costo computazionale delle analisi, in quanto, come si vedrà al paragrafo 5.3.3, costringe ad assumere un passo temporale molto ristretto. Questo problema si risolve utilizzando una tecnica di mass scaling selettivo descritta al paragrafo 5.4.

Gli elementi solid-shell ottenuti a partire da un elemento solido a 8 nodi possono essere soggetti a fenomeni di irrigidimento spurio, noti come *Poisson thickness locking*, *volumetric locking* e *shear locking*, che si verificano quando l’interpolazione lineare degli spostamenti fa sì che la deformazione normale al piano medio del guscio sia costante lungo lo spessore. Per evitare l’insorgere di questi fenomeni di locking esistono diverse tecniche, che verranno riassunte nel seguente paragrafo.

5.1.1 Elementi Q1STs

Gli elementi solid-shell utilizzati, denominati Q1STs (figura 5.1), sono elementi ad 8 nodi ad integrazione ridotta e sono stati formulati in [53]. In questi elementi vi è un unico punto di integrazione nel piano, mentre in direzione dello spessore i punti di integrazione devono essere almeno due. L'integrazione ridotta nel piano fa sì che possano insorgere modi di deformazione spuri ad energia nulla, detti modi di *hourglass*. Occorre perciò introdurre una rigidità artificiale che ne impedisca l'attivazione.

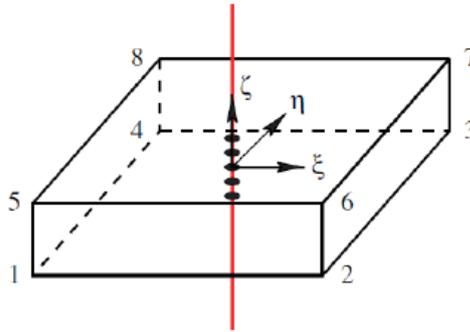


Figura 5.1: Rappresentazione dell'elemento Q1STs [43].

Al fine di garantire una corretta rappresentazione della realtà fisica, all'interno di questi elementi sono implementati alcuni algoritmi di controllo, che vengono riassunti nei seguenti punti.

- Per evitare il fenomeno di *shear locking* e migliorare il comportamento in caso di spessore sottile viene utilizzato il metodo ANS (*Assumed Natural Strain*), che consiste in una diversa interpolazione del campo delle deformazioni, che vengono ottenute in funzione delle deformazioni calcolate in particolari punti, detti *locking free*, all'interno dell'elemento.
- Viene introdotta una tecnica di stabilizzazione dei modi di *hourglass*, che consiste in una modifica della matrice di rigidità dell'elemento \mathbf{K}_e , del tipo

$$\mathbf{K}_e^{new} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_h \quad (5.1)$$

in cui il termine aggiuntivo \mathbf{K}_h serve a fornire all'elemento rigidità elevata nei confronti dei modi deformativi di *hourglass*, mentre offre un contributo di rigidità nullo per i modi restanti.

- Per evitare il *Poisson thickness locking* si arricchisce il campo di deformazione utilizzando una formulazione *enhanced strain* (EAS), che consiste nell'introduzione di un termine aggiuntivo lineare nell'espressione delle deformazioni lungo lo spessore.

5.2 Elementi coesivi

Nella simulazione di fenomeni di delaminazione per mezzo dell'utilizzo di elementi coesivi si crea un modello costituito dall'assemblaggio di due tipi di elementi:

- gli elementi solidi, che discretizzano la parte di *bulk*;
- gli elementi di interfaccia coesivi.

Per creare un'interfaccia tra due corpi occorre inserire gli elementi coesivi tra le superfici dei solidi inizialmente perfettamente coese. Per la formulazione degli elementi coesivi si considerano quindi due superfici, una superiore ed una inferiore. Ciascun punto su una superficie ha un suo punto corrispondente sull'altra, detto omologo. Come già detto, una coppia di punti omologhi è coincidente prima che l'interfaccia venga caricata. Lo spostamento relativo tra due punti omologhi viene proiettato in un sistema di riferimento locale, che lo esprime in termini di apertura (modo I) e scorrimento (modi II e III). Agli elementi di interfaccia viene infine assegnata una legge tra quelle descritte nel paragrafo 3.2.

Nel caso presente sono stati utilizzati elementi ad 8 nodi. Gli elementi di interfaccia vengono inseriti nella fase di *pre-processing*, andando a separare gli strati di elementi di tipo solid-shell tra i quali è prevista la delaminazione.

5.3 Algoritmo esplicito

I metodi di integrazione nelle analisi numeriche vengono classificati in base alla struttura delle equazioni temporali alle differenze finite. La loro espressione più generale è la seguente, rispettivamente per la derivata prima e seconda:

$$\sum_{k=0}^{n_s} (\alpha_k \mathbf{d}^{n_s-k} - \Delta t \beta_k \dot{\mathbf{d}}^{n_s-k}) = \mathbf{0} \quad \sum_{k=0}^{n_s} (\bar{\alpha}_k \mathbf{d}^{n_s-k} - \Delta t^2 \bar{\beta}_k \ddot{\mathbf{d}}^{n_s-k}) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

dove n_s è il numero di passi temporali. Le equazioni (5.2) sono dette esplicite se i coefficienti β_0 e $\bar{\beta}_0$ sono nulli: ciò significa che una equazione alle differenze finite è detta esplicita se l'equazione per la funzione al passo temporale n_s contiene le derivate unicamente agli istanti temporali precedenti [7].

La tecnica di integrazione esplicita è preferibile per la modellazione di fenomeni caratterizzati da importanti fenomeni non lineari, poiché evita i problemi di convergenza che possono manifestarsi negli algoritmi iterativi richiesti dagli schemi di integrazione implicita.

5.3.1 Metodo delle differenze centrali

Nel codice utilizzato, l'integrazione dell'equazione del moto nel tempo è condotta in maniera esplicita mediante il metodo delle differenze centrali. Si suddivide la storia temporale in un numero prefissato di istanti temporali e si consideri il passo $[t_n - t_{n-1}]$. Per la velocità si ha

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n}{\Delta t} \quad (5.3)$$

dalla quale si ottiene lo spostamento a fine passo

$$\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1/2} \quad (5.4)$$

Allo stesso modo, per l'accelerazione si ha

$$\ddot{\mathbf{d}}^n = \mathbf{a}^n = \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (5.5)$$

dalla quale si ottiene

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{a}^n \quad (5.6)$$

Le equazioni (5.4) e (5.6) sono rispettivamente le formule di integrazione degli spostamenti e delle velocità. Si osservi che le velocità sono definite a metà del passo temporale. Esprimendo le velocità in funzione degli spostamenti, è possibile ottenere l'espressione delle accelerazioni in funzione degli spostamenti:

$$\mathbf{a}^n = \frac{\mathbf{d}^{n+1} - 2\mathbf{d}^n + \mathbf{d}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (5.7)$$

5.3.2 Equazione del moto

L'equazione del moto all'istante temporale n è data da:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^n + \mathbf{C}^{damp}\mathbf{v}^n = \mathbf{f}^n(\mathbf{d}^n, t^n) = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{d}^n, t^n) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}^n, t^n) \quad (5.8)$$

in cui \mathbf{f}^{ext} e \mathbf{f}^{int} sono rispettivamente i vettori delle forze nodali esterne ed interne.

Sostituendo l'equazione (5.8) in (5.6) si ottiene

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n - \mathbf{C}^{damp}\mathbf{v}^n) \quad (5.9)$$

In questa equazione, essendo noti gli spostamenti \mathbf{d}^n , è noto il vettore \mathbf{f}^n . Per far sì che tutto il secondo membro dell'equazione lo sia, si sostituisce a \mathbf{v}^n il vettore delle velocità a mezzo passo temporale precedente; in questo modo si ha

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n - \mathbf{C}^{damp}\mathbf{v}^{n-1/2}) \quad (5.10)$$

e tutto il secondo membro è noto. La conseguenza di questa sostituzione è che gli smorzamenti nel sistema vengono ritardati di mezzo passo temporale (questo riduce il passo temporale stabile), ma ora è possibile ricavare $\mathbf{v}^{n+1/2}$ e, per mezzo dell'equazione (5.4), \mathbf{d}^{n+1} .

Il vantaggio di un algoritmo esplicito è quello che, se la matrice di massa è diagonale, non è richiesta la soluzione di alcun sistema, ma di una serie di equazioni tra loro disaccoppiate. Il principale svantaggio è invece il fatto che gli algoritmi espliciti sono condizionatamente stabili, ovvero sono stabili soltanto se il passo temporale viene scelto minore di un valore critico.

5.3.3 Passo temporale stabile

Per garantire la stabilità dell'algoritmo di integrazione, il passo temporale esplicito viene stabilito una volta noto il valore critico Δt_{crit} . Si ha quindi che

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{crit} \quad (5.11)$$

dove α è un fattore di riduzione che tiene conto delle eventuali non linearità, il cui valore è solitamente compreso tra 0.8 e 0.98 ed è denominato *numero di Courant*.

La quantità Δt_{crit} è governata dalla massima autofrequenza del sistema discreto ω_{max} , la quale è stimabile calcolando la massima di ciascun elemento della mesh:

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad \text{con} \quad \omega_{max} = \max_e \{\omega_{max}^e\} \quad (5.12)$$

In aggiunta alle (5.12), la *condizione di Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL) fornisce un limite superiore al passo temporale stabile di ciascun elemento:

$$\Delta t_{crit} = \min \{\Delta t_{crit}^e\} = \min_e \frac{l_e}{c_e} \quad (5.13)$$

essendo l_e una lunghezza caratteristica dell'elemento e (quella minore) e c_e la velocità di propagazione di un'onda elastica di sforzo dilatazionale all'interno dell'elemento e .

La condizione CFL afferma quindi che il passo temporale critico è correlato al tempo che impiega un'onda di sforzo dilatazionale a percorrere la più piccola delle dimensioni di un elemento. È chiaro come, nel caso di gusci sottili, la taglia critica dell'elemento sia tipicamente lo spessore: ciò porta generalmente a passi temporali stabili sensibilmente più piccoli di quelli ottenuti utilizzando elementi di tipo shell, a meno di introdurre l'algoritmo di mass scaling selettivo descritto al paragrafo 5.4.

Da (5.12) e (5.13) si può notare come il passo temporale stabile diminuisca raffinando la mesh o aumentando la rigidità del materiale.

5.3.4 Bilancio dell'energia

In presenza di forti non linearità, è possibile che delle instabilità si sviluppino anche quando la condizione(5.12) viene rispettata: è quindi indispensabile introdurre nell'algoritmo un controllo sulla presenza di eventuali instabilità numeriche, le quali non sempre sono osservabili dalla risposta globale della struttura.

Ogni tipo di instabilità è caratterizzata dalla generazione spuria di energia, che viola il principio di conservazione dell'energia: per questo motivo è necessario monitorare il bilancio dell'energia ad ogni istante temporale.

L'energia meccanica è costituita da tre componenti: l'energia cinetica W_{kin} , l'energia interna di deformazione W_{int} ed il lavoro delle forze esterne W_{ext} .

$$W_{kin}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^n)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^n \quad (5.14)$$

$$W_{int}^n = W_{int}^{n-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}^n - \mathbf{d}^{n-1})^T (\mathbf{f}_{int}^n + \mathbf{f}_{int}^{n-1}) \quad (5.15)$$

$$W_{ext}^n = W_{ext}^{n-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}^n - \mathbf{d}^{n-1})^T (\mathbf{f}_{ext}^n + \mathbf{f}_{int}^{n-1}) \quad (5.16)$$

La condizione di conservazione dell'energia viene espressa tramite la disuguaglianza

$$|W_{kin} + W_{int} - W_{ext}| \leq \epsilon \max\{W_{kin}, W_{int}, W_{ext}\} \quad (5.17)$$

imposta ad ogni istante temporale, in cui ϵ è un valore di tolleranza dell'ordine di 10^{-2} .

5.4 Mass scaling selettivo

L'efficienza di un algoritmo esplicito potrebbe essere compromessa dal fatto di dover utilizzare un passo temporale molto piccolo. Come si è visto nel paragrafo 5.3.3, il valore del passo temporale stabile dipende dalla minore delle dimensioni di un elemento che compone la mesh. Questo può essere un grosso problema quando si ha a che fare con strutture sottili e stratificate come i laminati: tali elementi strutturali hanno infatti il problema di avere una dimensione (lo spessore) molto più piccola rispetto alle altre due, il che limita fortemente l'ampiezza del passo temporale stabile.

Per risolvere questo problema, nel codice utilizzato è introdotta una tecnica di *mass scaling* selettivo, descritta in [15], [16] e [17], per mezzo della quale il passo temporale critico dipende unicamente dalle dimensioni della mesh nel piano, così come accade per gli elementi guscio a 4 nodi. Come suggerisce il nome, la tecnica si basa sulla scalatura della matrice di massa, con l'obbiettivo di ridurre la velocità di propagazione delle onde elastiche lungo lo spessore.

Il mass scaling introdotto può essere utilizzato in quei problemi nei quali la risposta strutturale è governata dalle basse frequenze: questa tecnica consiste infatti nel modificare artificialmente la matrice di massa di ciascun elemento, associando un'inerzia maggiore alla sola componente di risposta degli elementi associata alle alte frequenze. Si dimostra infatti che la più alta autofrequenza dell'elemento è associata alla vibrazione lungo lo spessore. Il comportamento nel piano medio dell'elemento, associato alle basse frequenze ed ai modi rigidi traslazionali, viene invece lasciato inalterato.

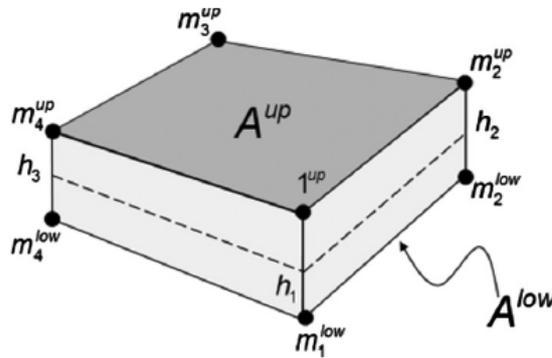


Figura 5.2: Elemento solid-shell a 8 nodi e definizione delle superfici inferiore e superiore [16].

Si consideri un elemento solid-shell ad 8 nodi, con una dimensione, lo spessore, significativamente minore rispetto alle altre due; in questo modo è immediato identificare le superfici inferiore e superiore dell'elemento (figura 5.2). Sia \mathbf{X} il vettore colonna (24x1) che raccoglie le coordinate nodali, espresse secondo un sistema di riferimento cartesiano:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1-4} \\ \mathbf{X}_{5-8} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

I vettori \mathbf{X}_{1-4} e \mathbf{X}_{5-8} (entrambi di dimensione 12x1) contengono le coordinate rispettivamente dei nodi superiori ed inferiori dell'elemento.

Allo scopo di isolare i contributi associati al comportamento nel piano medio (ovvero alle basse frequenze) ed alla vibrazione nello spessore (ovvero alle alte frequenze), viene introdotta un'opportuna trasformazione lineare. Mediante una trasformazione algebrica, la geometria e la cinematica dell'elemento possono infatti essere espresse in termini di coordinate riferite alla superficie media (come negli elementi guscio) ed alle fibre di bordo, ovvero i segmenti che congiungono i nodi corrispondenti sulle superfici inferiore e superiore (figura 5.3).

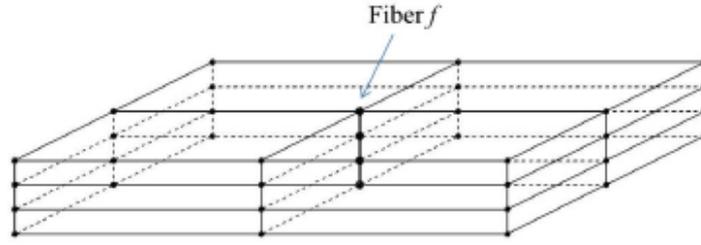


Figura 5.3: Generica fibra f in una struttura multistrato [17].

Le coordinate riferite alla superficie media \mathbf{X}^m ed alle componenti delle fibre trasversali di bordo $\Delta\mathbf{X}$ sono date dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{X}^m = \frac{\mathbf{X}_{5-8} + \mathbf{X}_{1-4}}{2} \quad (5.19)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}_{5-8} - \mathbf{X}_{1-4}}{2} \quad (5.20)$$

Le coordinate trasformate vengono poi raccolte in un unico vettore $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^m \\ \Delta\mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Per passare quindi dalle coordinate trasformate a quelle cartesiane occorre operare un trasformazione lineare, definita dalla matrice \mathbf{Q} :

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{X}} \quad (5.22)$$

Indicando con \mathbf{I} la matrice identità 12x12, la matrice \mathbf{Q} è data da:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \quad (5.23)$$

Allo stesso modo delle coordinate nodali, anche le quantità cinematiche (spostamenti, velocità, accelerazioni) nodali possono essere espresse suddividendole in componenti riferite alla superficie media ed alle fibre di bordo; ad esempio per le accelerazioni nodali si ha:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1-4} \\ \mathbf{a}_{5-8} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^m \\ \Delta\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

In cui le espressioni di $\hat{\mathbf{a}}$ e $\Delta\mathbf{a}$ sono analoghe a (5.19) e (5.20); di conseguenza

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{a}} \quad (5.25)$$

L'equilibrio di un elemento in assenza di smorzamento può essere scritto, sfruttando il principio dei lavori virtuali, in questo modo:

$$\delta\mathbf{a}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{a}_e = \delta\mathbf{a}_e^T \mathbf{f}_e \quad (5.26)$$

dove $\delta \mathbf{a}_e^T$ è il vettore delle accelerazioni nodali virtuali dell'elemento e , \mathbf{M}_e è la matrice di massa dell'elemento e \mathbf{f}_e è il vettore delle forze nodali, date dalla differenza tra il vettore delle forze nodali equivalenti esterne ed interne.

Si considera una matrice di massa di tipo *lumped*, nella quale gli unici termini non nulli sono sulla diagonale:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{low} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}^{up} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Utilizzando (5.25) in (5.26), si esprime l'equilibrio dell'elemento in termini di variabili trasformate:

$$\delta \hat{\mathbf{a}}_e^T \hat{\mathbf{M}}_e \hat{\mathbf{a}}_e^T = \delta \hat{\mathbf{a}}_e^T \hat{\mathbf{f}}_e \quad (5.28)$$

dove

$$\hat{\mathbf{M}}_e = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_e \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}^{up} + \mathbf{m}^{low}) & (\mathbf{m}^{up} - \mathbf{m}^{low}) \\ (\mathbf{m}^{up} - \mathbf{m}^{low}) & (\mathbf{m}^{up} + \mathbf{m}^{low}) \end{bmatrix}_e \quad (5.29)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_e = \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1-4} - \mathbf{f}_{5-8} \\ \mathbf{f}_{1-4} + \mathbf{f}_{5-8} \end{bmatrix}_e \quad (5.30)$$

I termini fuori dalla diagonale della matrice $\hat{\mathbf{M}}_e$ sono pari a zero se gli elementi sono parallelepipedi, mentre per elementi moderatamente distorti sono molto più piccoli di quelli sulla diagonale, quindi è accettabile considerarli nulli in ogni caso. In questo modo, si definisce la matrice di massa in coordinate trasformate *lumped* $\hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}$:

$$\hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}^{up} + \mathbf{m}^{low}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{m}^{up} - \mathbf{m}^{low}) \end{bmatrix}_e \quad (5.31)$$

Come già anticipato, per diminuire la massima frequenza dell'elemento si incrementano le componenti della matrice $\hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}$ associate alle alte frequenze, ovvero ai gradi di libertà delle fibre di bordo, per i quali si hanno spostamenti differenziali tra i nodi superiori ed inferiori corrispondenti di uno stesso elemento: questo viene fatto moltiplicando i termini della matrice di massa associati a $\Delta \mathbf{a}$ per un coefficiente α_e , detto *parametro di mass scaling*.

$$\hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}^\alpha = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}^{up} + \mathbf{m}^{low}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_e (\mathbf{m}^{up} - \mathbf{m}^{low}) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

L'equazione (5.28) diventa quindi

$$\delta \hat{\mathbf{a}}_e^T \hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}^\alpha \hat{\mathbf{a}}_e^T = \delta \hat{\mathbf{a}}_e^T \hat{\mathbf{f}}_e \quad (5.33)$$

Dopo aver applicato il mass scaling, il principio dei lavori virtuali può essere di nuovo espresso in termini di gradi di libertà classici facendo uso della trasformazione inversa in (5.23):

$$\delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{Q} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}^\alpha \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{a}_e = \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{Q} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{f}}_e \quad (5.34)$$

La matrice di massa scalata di un generico elemento solid-shell espressa in gradi di libertà traslazionali assume la seguente forma:

$$\mathbf{M}_e^\alpha = \frac{1}{4} \left(\mathbf{Q} \hat{\mathbf{M}}_{e_{lump}}^\alpha \mathbf{Q}^T \right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \alpha_e)(\mathbf{m}^{low} + \mathbf{m}^{up}) & (1 - \alpha_e)(\mathbf{m}^{low} + \mathbf{m}^{up}) \\ (1 - \alpha_e)(\mathbf{m}^{low} + \mathbf{m}^{up}) & (1 + \alpha_e)(\mathbf{m}^{low} + \mathbf{m}^{up}) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Nel caso di gusci laminati, la discretizzazione prevede di sovrapporre più elementi solid-shell lungo lo spessore. In questo caso la matrice scalata e assemblata risulta non essere più perfettamente diagonale, ma l'accoppiamento è limitato ai nodi che appartengono alla stessa fibra lungo lo spessore. Più precisamente, per ciascuna fibra f la matrice di massa \mathbf{M}_f^α ha una struttura tridiagonale, con un numero di righe pari a $3(N_l + 1)$, dove N_l è il numero di strati. Quando si ha a che fare con un singolo strato di elementi, questa tecnica di mass scaling selettivo preserva la struttura diagonale del sistema assemblato. Nel caso multistrato viene introdotto un accoppiamento parziale per i nodi appartenenti alla stessa fibra, ovvero allineati nella direzione dello spessore.

Il costo computazionale addizionale dovuto all'accoppiamento è piuttosto modesto: le accelerazioni possono essere calcolate piuttosto semplicemente sfruttando il metodo di decomposizione LU su ciascuna delle matrici \mathbf{M}_f^α . La matrice di massa risulta infatti diagonale a blocchi; ciascun blocco è associato ad una singola fibra lungo gli strati. Il costo computazionale aggiuntivo viene comunque largamente compensato dal fatto di poter scegliere un passo temporale di ampiezza maggiore.

5.4.1 Scelta del parametro di mass scaling

La scelta del valore ottimale per il parametro α deriva dal raggiungimento di un compromesso tra due diversi aspetti. Da un lato, un valore elevato di α porta ad una riduzione sostanziale della massima frequenza dell'elemento, permettendo l'utilizzo di passi temporali stabili maggiori. D'altro canto, una modellazione accurata delle proprietà dinamiche della struttura impone di utilizzare un valore di α che sia il più piccolo possibile.

Ad ogni modo, si è notato come per piccoli valori di α c'è un rapido guadagno in termini di passo temporale, mentre per valori più elevati ciò non accade e la risposta strutturale del modello perde di accuratezza, a causa della massa largamente modificata.

L'algoritmo per la scelta del parametro ottimale di mass scaling implementato nel codice è descritto in [15].

5.5 Tecniche di smorzamento

Quando si affronta un problema di dinamica in regime elastico lineare, occorre innanzitutto definire la massa e le caratteristiche meccaniche del materiale, al fine di stabilirne la rigidità. Nel caso in cui siano presenti non linearità, vanno inoltre definite la resistenza e le modalità di collasso del materiale, le quali possono essere determinate mediante apposite prove di laboratorio. Un altro aspetto che va aggiunto in un modello numerico dinamico è lo smorzamento. Al contrario delle caratteristiche già citate, lo smorzamento è una caratteristica di un sistema che, di frequente, può essere solo stimata in maniera approssimativa.

La corretta valutazione dello smorzamento è un'operazione complessa, che deve tener conto di meccanismi di dissipazione dell'energia diversi da quello isteretico del materiale, come attrito, resistenza di elementi non strutturali, ecc. . . In un algoritmo implicito, lo smorzamento può essere espresso come una frazione di quello critico per ciascun modo di vibrare, mentre in un algoritmo esplicito la matrice di rigidità non viene valutata e quindi non si conoscono le frequenze e le forme modali. Per questo motivo occorre solitamente utilizzare algoritmi di smorzamento, che hanno la funzione di smorzare la componente di risposta del sistema associata alle alte frequenze mantenendo un effetto trascurabile sulla risposta dinamica complessiva.

5.5.1 Velocity smoothing

Quella del *velocity smoothing* [34] è una tecnica che viene impiegata per conferire smorzamento al sistema; in particolare, questo algoritmo ha la funzione di smorzare le componenti oscillatorie ad alta frequenza della risposta strutturale.

Il *velocity smoothing* può essere applicato con elementi aventi un numero arbitrario di nodi e consiste nella modifica, ad ogni passo temporale, delle velocità nodali di ciascun elemento nella direzione della media delle velocità nodali.

Per ciascun elemento della mesh occorre innanzitutto determinare la media, pesata rispetto alla massa, delle velocità nodali:

$$\bar{\mathbf{v}}^e = \frac{\sum_{i=1}^8 \mathbf{v}_i^e m_i}{\sum_{i=1}^8 m_i} \quad (5.36)$$

\mathbf{v}_i^e e m_i sono rispettivamente il vettore delle velocità nodali e la massa nodale del nodo i -esimo dell'elemento e , quest'ultima riferita allo specifico elemento (non include le masse nodali di altri elementi che condividono lo stesso nodo).

L'incremento di velocità da associare a ciascun nodo dell'elemento viene dato dalla seguente espressione:

$$\Delta \mathbf{v}_i^e = -C_{smo}(\mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{v}})t^* \frac{m_i}{M_i} \quad (5.37)$$

in cui C_{smo} è un coefficiente di smorzamento adimensionale, generalmente inferiore all'unità, $t^* = \Delta t/(h/c)$ è il rapporto tra passo temporale ed il tempo che impiega il suono a percorrere h , la minore delle dimensioni dell'elemento, mentre M_i è la massa totale al nodo i . Il termine t^* è introdotto al fine di ridurre lo smorzamento quando il passo temporale è piccolo, mentre incrementa lo smorzamento al crescere del passo temporale, eliminando essenzialmente l'effetto del passo temporale sullo smorzamento; il rapporto (m_i/M_i) tende invece ad eliminare la dipendenza dalle dimensioni e dalla tipologia dell'elemento.

Le velocità nodali vengono quindi modificate in questo modo:

$$\mathbf{v}_i^{updated} = \mathbf{v}_i + \sum_{e=1}^{N_{el-sup}} \Delta \mathbf{v}_i \quad (5.38)$$

essendo la sommatoria estesa a tutti gli elementi del supporto del nodo i -esimo. Questa formulazione non modifica le quantità di moto in ogni direzione; da un punto di vista energetico la perdita di energia cinetica in ciascun elemento viene aggiunta all'energia interna, conservando perciò l'energia totale.

In molte delle analisi effettuate è stata utilizzata questa tecnica siccome è stato dimostrato dagli autori come il *velocity smoothing* possa essere utilizzato per ottenere soluzioni quasi statiche, smorzando le oscillazioni proprie delle soluzioni dinamiche esplicite.

5.5.2 Smorzamento alla Rayleigh

Lo smorzamento alla Rayleigh è la tipologia di smorzamento più utilizzata nei sistemi a più gradi di libertà, pur non essendo coerente con l'evidenza sperimentale. Ciò perché se il sistema è disaccoppiato (come avviene nelle analisi modali e nelle analisi dinamiche esplicite) questo smorzamento preserva la struttura diagonale del sistema.

Considerando l'equazione (5.8), la matrice di smorzamento C^{damp} alla Rayleigh è proporzionale alla matrice di massa ed alla matrice di rigidità della struttura, ed assume la seguente espressione:

$$\mathbf{C}^{damp} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad (5.39)$$

in cui i coefficienti α_R e β_R hanno le dimensioni rispettivamente s^{-1} e s . I valori più comuni per questi coefficienti sono $10^{-1} \div 10^{-2} s^{-1}$ per α_R e $10^{-7} \div 10^{-9} s$ per β_R .

Il coefficiente α_R viene utilizzato per smorzare le componenti della risposta alle frequenze più basse, mentre β_R smorza le alte frequenze.

5.6 Scelta della mesh

La scelta di un'appropriata discretizzazione del dominio è un aspetto di fondamentale importanza in tutte le analisi numeriche; questo è particolarmente vero quando si utilizza un algoritmo esplicito, in quanto poter diradare la mesh apporta un duplice guadagno in termini di costo computazionale:

- il problema ha meno gradi di libertà, il che consente una risoluzione più veloce del sistema a ciascun passo temporale;
- il passo temporale stabile cresce e di conseguenza occorre un numero inferiore di incrementi temporali per giungere alla fine dell'analisi.

5.6.1 Lunghezza della zona coesiva

Nei modelli coesivi, il parametro da confrontare con le dimensioni degli elementi della mesh è la lunghezza della zona coesiva (o zona di processo) nella direzione del fronte di propagazione, ovvero di quella zona di processo in cui ha luogo il degrado dell'interfaccia. Al fine di ottenere risultati privi di oscillazioni occorre infatti modellare accuratamente la distribuzione degli sforzi in prossimità del fronte di delaminazione (come quella in figura 5.4), risultato che è possibile ottenere facendo sì che un numero sufficiente di elementi coesivi stia all'interno della zona di processo.

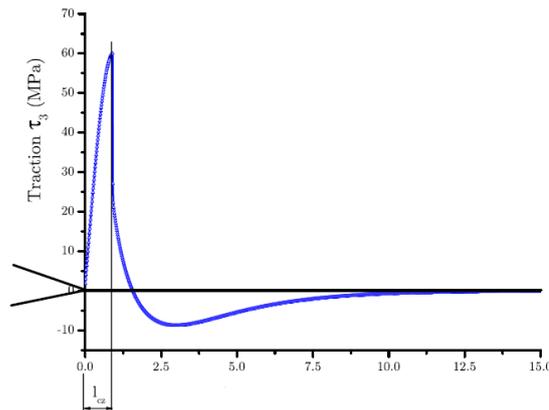


Figura 5.4: Distribuzione degli sforzi in prossimità del fronte di delaminazione in un test DCB [58].

In [25], Dugdale propose che nella zona di processo gli sforzi fossero costanti, con valore pari a quello all'estremità della fessura. Questo faceva

sì che la lunghezza della zona fosse nota a priori, mentre con le leggi che modellano un graduale degrado dell'interfaccia questo non è più vero; in questi casi occorre affidarsi a delle stime.

In [30] è stato studiato il comportamento di travi di calcestruzzo non armate: il comportamento del materiale viene considerato isotropo ed elastico lineare fino al raggiungimento del massimo sforzo σ_{max} , dopodiché si introduce una legge coesiva con softening lineare. Si è notato che il comportamento delle travi dipende dal rapporto tra la loro altezza ed una lunghezza caratteristica del problema, chiamata *lunghezza critica*, funzione delle proprietà meccaniche del materiale e della legge coesiva assegnata, e data da

$$l_{c,Hill} = \frac{E\phi}{\sigma_{max}^2} \quad (5.40)$$

In [29] si evidenzia come la (5.40) sovrastimi significativamente la lunghezza coesiva del modello numerico.

Planas ed Elices [46] hanno confrontato le lunghezze coesive in corpi infiniti ed isotropi per diverse forme del legame coesivo. Queste assumono l'espressione di $l_{ch,Hill}$ moltiplicato per un fattore M (tabella 5.1). Smith [55] ottenne soluzioni in forma chiusa qualitativamente simili per una gamma di leggi di potenza. Questi risultati analitici per corpi infiniti si rivelano poco adatti ad essere applicati allo studio di fenomeni di delaminazione nei laminati, per i quali lo spessore delle lamine ha influenza sulla lunghezza della zona di processo.

Forma della legge	Rettilinea	Lineare	Esponenziale
Valore di M	$\pi/8$	0.731	2.92

Tabella 5.1: Valori del fattore M per diverse forme della legge coesiva.

In [5] si ricava analiticamente la lunghezza della zona di processo nel test DCB (paragrafo 4.4.1): i bracci delle due lamine sono modellati come travi e mediante un'applicazione del J-integral [51] si ottiene la stima

$$l_{ch,DCB} = \left(E \frac{\phi_n}{\sigma_{max}^2} \right)^{1/4} h^{3/4} \quad (5.41)$$

Per quanto riguarda la prova ENF (paragrafo 4.4.2) la soluzione analitica della lunghezza coesiva è fornita in [39]; in questo caso il comportamento delle lamine viene descritto mediante una teoria flessionale per piastre anisotrope sviluppata da Whitney e Pagano in [61]. Anche in questa stima entra in gioco lo spessore delle lamine:

$$l_{ch,ENF} = \sqrt{E \frac{\phi_t}{\tau_{max}^2} h} \quad (5.42)$$

Secondo Harper e Hallet [29], un buon procedimento da utilizzare per un'appropriata scelta della mesh è il seguente:

- si utilizzano le stime (5.40), (5.41) e (5.42), moltiplicandole per un fattore pari a 0.5, in modo tale da ottenere una stima più vicina della lunghezza della zona coesiva del modello numerico;
- si confrontano i risultati forniti dalle tre stime e si sceglie quella inferiore $l_{ch,min}$ per valutare la lunghezza della zona di processo;
- per tutti i problemi trattati dai due autori, tre elementi all'interno della zona di processo si rivelano sufficienti per modellare accuratamente il fenomeno della propagazione della delaminazione, perciò si sceglie una mesh di dimensione pari a

$$l_e = \frac{l_{ch,min}}{3}$$

5.6.2 Riduzione degli sforzi massimi

Si può notare come una caratteristica comune delle stime sulla lunghezza della zona coesiva è la presenza al denominatore dello sforzo massimo trasmissibile attraverso l'interfaccia, come evidenziato in [57]; una sua diminuzione non ha spesso una grande influenza nei risultati (si noti infatti come i risultati analitici delle prove DCB ed ENF, ricavati utilizzando la LEFM, non dipendano da questa quantità), ma permette di aumentare la lunghezza della zona coesiva, consentendo perciò l'utilizzo di elementi di dimensioni maggiori.

In base a questo principio, è possibile sviluppare una strategia per adattare i parametri dell'interfaccia alla discretizzazione utilizzata: una volta scelta la dimensione degli elementi l_e ed il numero di elementi coesivi N_e all'interno della zona di processo, si pone $l_{ch} = N_e l_e$ e si ricava così lo sforzo massimo a partire dalle stime di l_{ch} .

Una riduzione degli sforzi massimi consente quindi una miglior descrizione della fase di propagazione della delaminazione a parità di dimensione degli elementi, tuttavia la descrizione della fase di attivazione viene penalizzata, in quanto accade che gli elementi raggiungono la fase di softening in maniera anticipata e nella risposta globale della struttura si nota un distacco prematuro dalla fase elastica e quindi una differenza maggiore tra i risultati numerici e quelli analitici ricavati applicando la meccanica della frattura elastica lineare.

6

Risultati numerici: test di delaminazione in modo puro

Le prove DCB ed ENF sono state utilizzate per testare il funzionamento delle leggi coesive implementate, al fine di determinare quali sono fossero quelle più adatte per la simulazione dinamica di fenomeni di delaminazione. In questo caso, il corretto funzionamento di una legge dipende unicamente dalla forma del legame coesivo, non essendo indagato in alcun modo l'accoppiamento tra i modi. Pertanto, nella modellazione di questi test le leggi Camanho-Davila e Alfano-Cristfield (paragrafi 3.2.2 e 3.2.4) non sono state utilizzate, in quanto fornirebbero risultati identici alla legge bilineare disaccoppiata specificata al paragrafo 3.2.1.

Le prove sono state descritte ai punti 4.4.1 e 4.4.2. Essendo i risultati analitici di tipo statico, occorre eliminare le componenti dinamiche dalla risposta strutturale per simulare un comportamento quasi statico. A tal fine, si è scelto di utilizzare:

- smorzamento alla Rayleigh con $\alpha_R = 10^{-1}$ e $\beta_R = 0$;
- *velocity smoothing*.

È stata fatta questa scelta siccome è necessario imporre una storia di spostamento sufficientemente veloce per giungere a termine di un'analisi in tempi accettabili; più precisamente nel test DCB gli spostamenti vengono imposti ad una velocità di 60 mm/s, mentre nel test ENF la velocità è pari a 80 mm/s. Per smorzare le alte frequenze si è notato come il *velocity smoothing* risultasse più efficace rispetto al termine di rigidità dello spostamento alla Rayleigh; si sarebbero dovuti utilizzare infatti valori di β_R troppo elevati, che avrebbero alterato la risposta strutturale.

6.1 Obiettivi e procedimento seguito

Gli obiettivi di queste analisi numeriche si possono riassumere nei seguenti:

CAPITOLO 6. RISULTATI NUMERICI: TEST DI DELAMINAZIONE IN MODO PURO

- stabilire quali sono le leggi che, a parità di sforzo massimo, danno risultati affetti da oscillazioni più modeste;
- analizzare l'influenza del numero di punti di Gauss utilizzati per l'integrazione della legge coesiva dell'interfaccia;
- stabilire per ciascuna legge come scegliere i parametri di forma ottimali, ovvero quelli che definiscono la rigidità del tratto iniziale e l'andamento del ramo di softening;
- come fatto in [29], individuare un criterio per un'appropriata scelta (a priori) della mesh in base alla stima della lunghezza della zona coesiva, una volta definiti i parametri geometrici e meccanici del modello.

A tal fine, si è scelto quindi di operare secondo questo procedimento:

- sono state studiate due diverse geometrie per i due test, ciascuna delle quali discretizzata mediante tre diverse mesh;
- per ciascun modello, è stata fatta una serie di analisi utilizzando la legge van den Bosch, nella quali sono assenti i parametri di forma, allo scopo di determinare il valore limite per lo sforzo massimo per il quale le oscillazioni sono più ridotte;
- stabilito il valore di sforzo massimo per ciascuna mesh, si sono utilizzate le altre leggi di interfaccia, effettuando uno studio di sensitività al variare dei parametri di forma dei modelli;
- una volta ottenuta la stima, si è proceduto alla sua validazione studiando problemi con geometrie e parametri meccanici differenti.

Si considerano dei provini del tipo rappresentato nelle figure 4.1 e 4.4: essi sono costituiti da due lamine identiche per spessore e materiale, di lunghezza L , larghezza B e spessore h , con un intaglio di lunghezza a . Le seguenti tabelle definiscono i dati geometrici e meccanici dei problemi studiati e le partizioni utilizzate, definite sulla base della dimensione degli elementi nella direzione di propagazione della delaminazione. I parametri meccanici dei materiali sono tratti da [33].

Test	L(mm)	a(mm)	h(mm)	b(mm)	E(MPa)	ϕ_n	ϕ_t
DCB	100	30	1.5	1	126000	0.281	0.281
ENF	3000	1000	30	50	135300	4.0	4.0

Tabella 6.1: Parametri geometrici e meccanici

Test	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3
DCB	3mm	2mm	1mm
ENF	70mm	50mm	30mm

Tabella 6.2: Partizioni utilizzate

6.2 Risultati ottenuti

Nelle tabelle 6.3 e 6.4 sono riportati i risultati dello studio parametrico svolto sullo sforzo massimo ottimale, ovvero i valori di sforzo massimo per il quale la legge van den Bosch ha fornito una risposta globale priva di oscillazioni. Viene riportato anche il valore del rapporto L_{ch}/L_{ele} nei diversi casi, il quale, come spiegato nel paragrafo 5.6, può essere utilizzato come stima a priori della dimensione della mesh da utilizzare per descrivere il problema in maniera appropriata.

Mesh	L_{ele} (mm)	σ_{max} (MPa)	L_{ch} (mm)	L_{ch}/L_{ele}
1	3	5	4.15	1.38
2	2	10	2.93	1.47
3	1	30	1.70	1.70

Tabella 6.3: Tabella riassuntiva per il test DCB.

Mesh	L_{ele} (mm)	τ_{max} (MPa)	L_{ch} (mm)	L_{ch}/L_{ele}
1	70	17	118.5	1.69
2	50	25	1.47	1.47
3	30	40	4.15	1.38

Tabella 6.4: Tabella riassuntiva per il test ENF.

Nella ricerca del valore ottimale dello sforzo massimo della legge di interfaccia, lo sforzo massimo (σ_{max} o τ_{max} a seconda del modo considerato) è stato fatto variare con passo 5 MPa. Per la mesh 1 utilizzata per la modellazione della prova ENF si è fatta un'eccezione per quanto riguarda il passo di variazione dello sforzo massimo, in quanto un valore di τ_{max} pari a 15 MPa avrebbe portato ad avere $L_{ch}/L_{ele} = 1.92$, significativamente più elevato. Viceversa, per il test DCB il caso caratterizzato dal rapporto L_{ch}/L_{ele} più elevato riguarda la mesh 3: utilizzando questa discretizzazione con $\sigma_{max} = 35\text{MPa}$ si sono ottenute oscillazioni, con un rapporto L_{ch}/L_{ele} pari a 1.57.

La bontà di questa stima è stata confermata da una serie di simulazioni numeriche delle prove DCB ed ENF, effettuate variando i parametri dei modelli in modo tale da ottenere $L_{ch}/L_{ele} \approx 1.7$ per ogni caso analizzato.

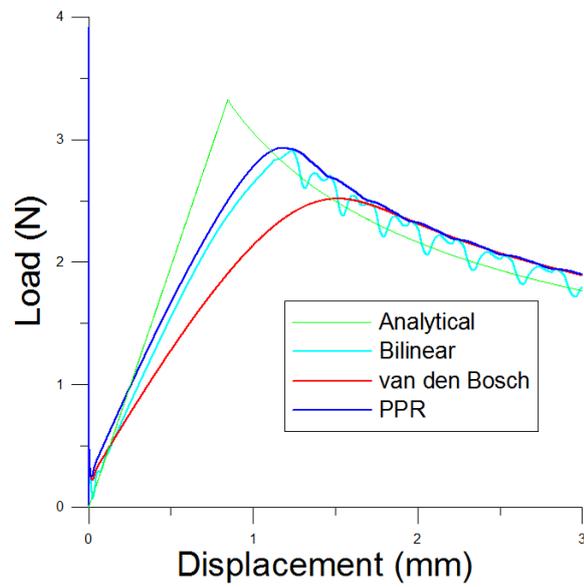


Figura 6.1: Risultati prova DCB - mesh 1

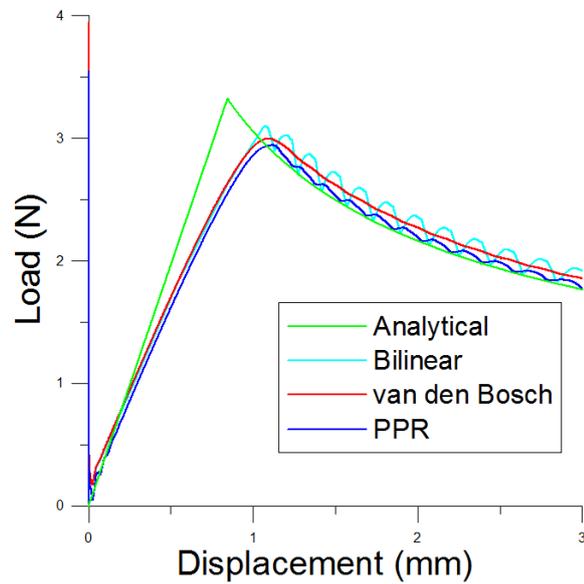


Figura 6.2: Risultati prova DCB - mesh 2

Nelle figure 6.3, 6.2, 6.1, 6.4, 6.5 e 6.6 sono mostrati le curve carico-spostamento ottenute per i diversi casi analizzati con i valori degli sforzi

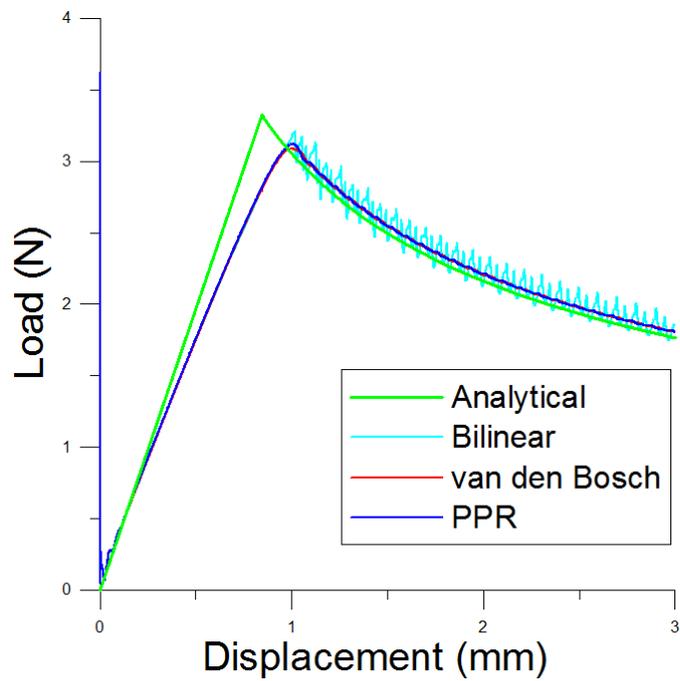


Figura 6.3: Risultati prova DCB - mesh 3

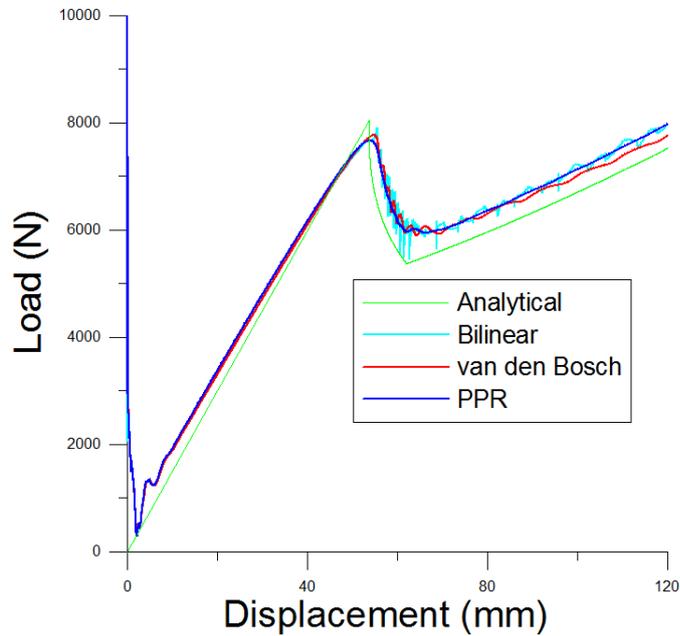


Figura 6.4: Risultati prova ENF - mesh 1

massimi riportati nelle tabelle 6.3 e 6.4.

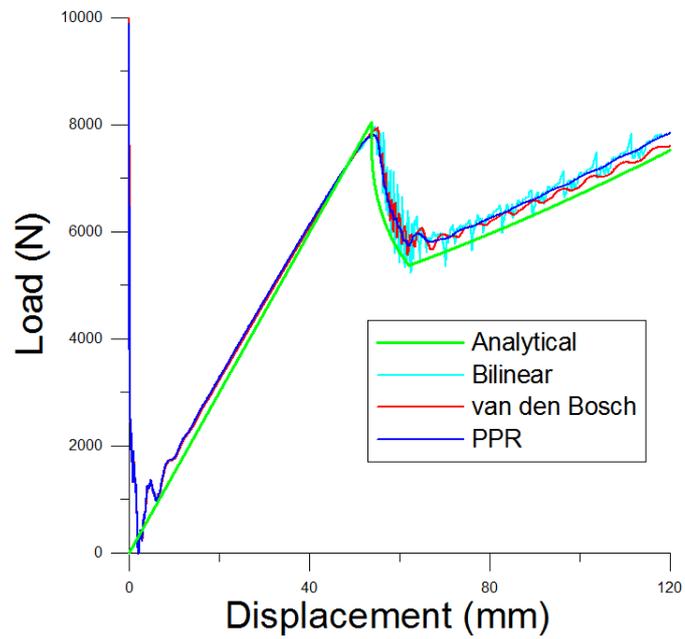


Figura 6.5: Risultati prova ENF - mesh 2

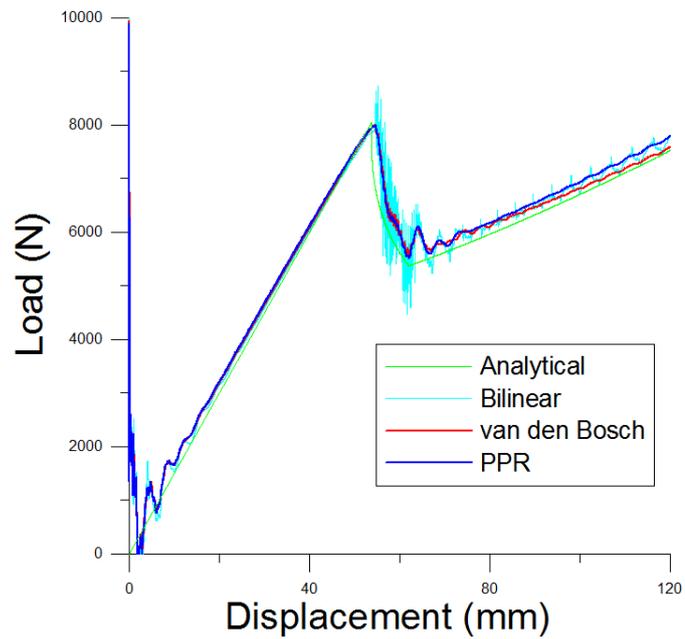


Figura 6.6: Risultati prova ENF - mesh 3

Le curve ottenute risultano parzialmente traslate verso l'alto, a causa di un contributo inerziale costante durante l'analisi, e nella fase iniziale sono presenti oscillazioni, che vengono però efficacemente smorzate dal *velocity*

smoothing. Tali oscillazioni sono causate dalla storia di carico adottata nelle due analisi, significativamente più veloce di quella tipica di un test statico.

È immediato constatare che le leggi che hanno permesso di ottenere i risultati migliori sono state la legge PPR e la legge van den Bosch: è infatti possibile affermare che in tutti i casi studiati l'applicazione di una di queste due leggi ha portato ad avere risultati privi di oscillazioni per i valori degli sforzi massimi più elevati.

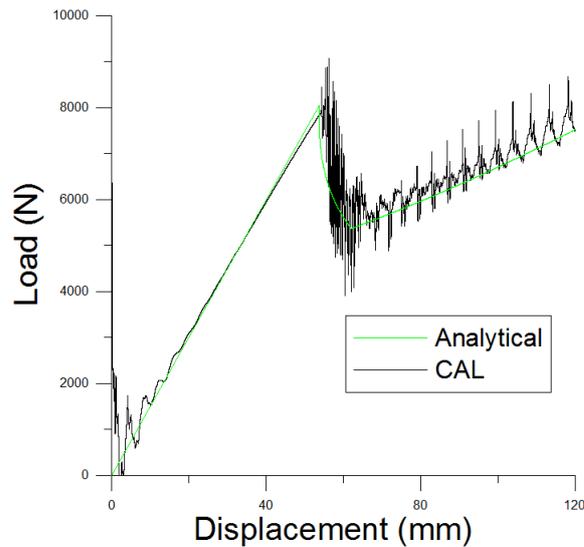


Figura 6.7: Risultato prova ENF - mesh 3 ottenuto con la legge Corigliano-Allix-Ladeveze. La forma della legge è rappresentata in figura 6.8.

Al contrario, dalla figure 6.7 e 6.8 si può notare come utilizzando la legge Corigliano-Allix-Ladeveze la risposta globale risulta affetta da oscillazioni, nonostante venga assunto un valore di sforzo massimo inferiore rispetto a quello utilizzato con le altre leggi. Ad ulteriore conferma, si guardino anche le figure 6.9 e 6.10: per la legge CAL in questo caso è stato utilizzato uno sforzo massimo pari a circa 5 MPa (ovvero il 15% di quello utilizzato dalle altre leggi). La fase di propagazione risulta essere ancora soggetta ad oscillazioni, seppure di modesta entità. È bene sottolineare peraltro come la scelta dei parametri Y_0 e Y_c della legge CAL sia stata fatta in modo tale da rendere la fase di softening sufficientemente prolungata ed avere conseguentemente una legge in cui la perdita di rigidità è la più graduale possibile.

I risultati ottenuti con le leggi PPR e van den Bosch sono tra loro piuttosto simili, soprattutto nei casi in cui vengono utilizzate le discretizzazioni più fitte. Le maggiori differenze si riscontrano:

- nella terza parte della risposta della prova ENF (vedi paragrafo 4.4.2), in cui si vede chiaramente come il ramo della legge van den Bosch non sia parallelo a quello della risposta analitica;

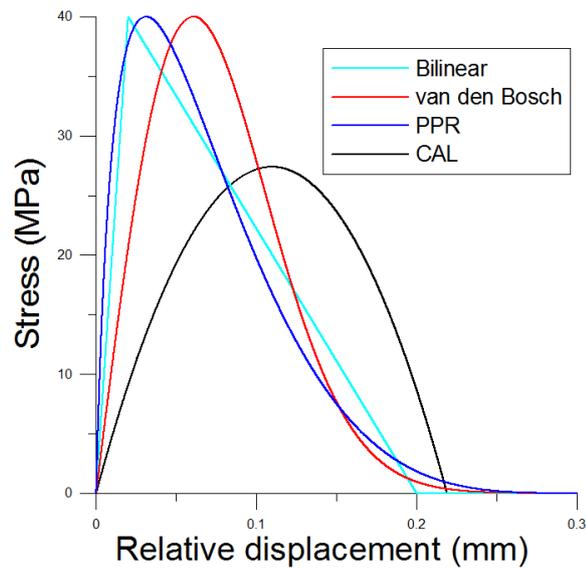


Figura 6.8: Forma delle leggi costitutive utilizzate per simulare il test ENF con mesh 3 ed ottenere i risultati nelle figure 6.6 e 6.7.

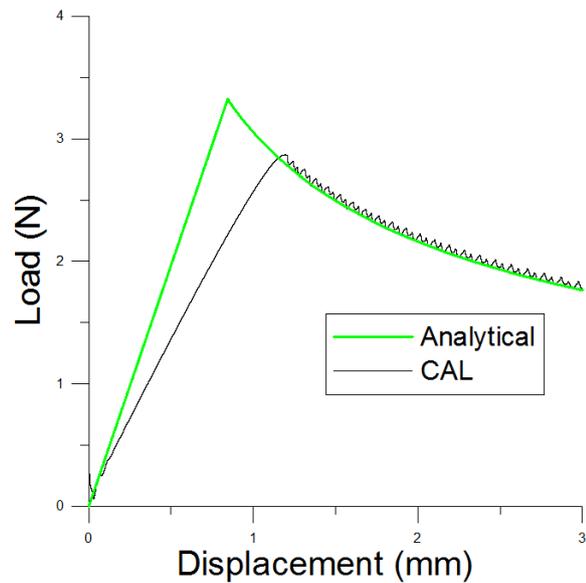


Figura 6.9: Risultato prova DCB - mesh 3 ottenuto con la legge Corigliano-Allix-Ladeveze. La forma della legge è rappresentata in figura 6.11.

- nella parte iniziale della risposta della prova DCB, in cui la legge van den Bosch si discosta maggiormente dal comportamento rigido di una doppia mensola.

Queste differenze possono essere spiegate guardando ai grafici 6.11 e 6.8:

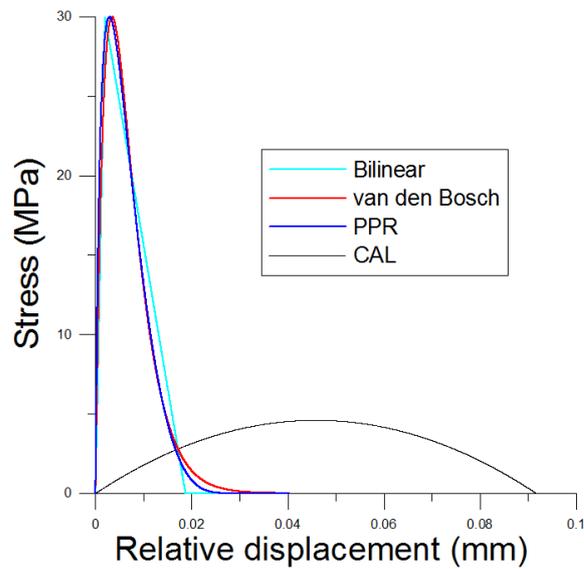


Figura 6.10: Forma delle leggi costitutive utilizzate per simulare il test DCB con mesh 3 ed ottenere i risultati nelle figure 6.3 e 6.9.

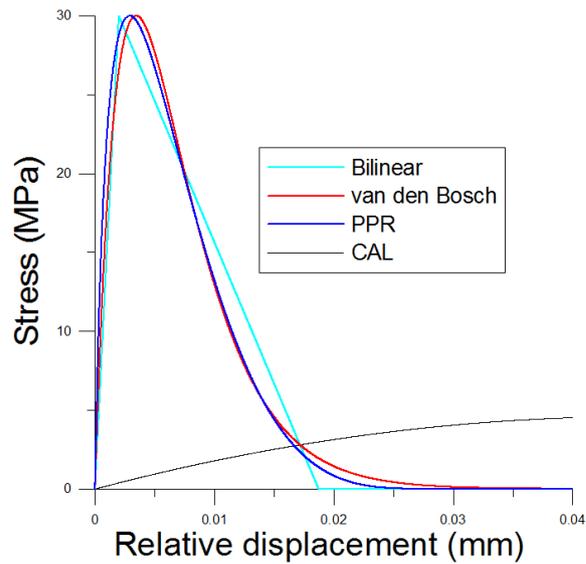


Figura 6.11: Dettaglio di figura 6.10.

soprattutto per quanto riguarda la forma delle due leggi coesive in direzione tangenziale, la legge PPR con $\lambda_n = \lambda_t = 0.1$ è più rigida nella fase elastica iniziale, sia trazione che a compressione, il che appunto si traduce in una maggiore rigidità globale della struttura; il fatto che nel test DCB questa differenza si manifesti solo con la mesh più rada è di difficile spiegazione.

6.2.1 Scelta ottimale dei parametri di forma

La legge PPR avvicina la qualità dei risultati ottenuti con la legge van den Bosch quando si assume per i coefficienti λ_n e λ_t (*slope indicators*), definiti come rapporto tra spostamento a massimo sforzo e spostamento a rottura nelle due direzioni) dei valori pari a circa 0.1, mentre per i coefficienti α e β (che definiscono la forma del legame nella fase di softening) è consigliabile assumere valori superiori a 2. Ciò perché da un lato occorre assegnare ai parametri λ_n e λ_t un valore sufficientemente piccolo da riprodurre con buona approssimazione una perfetta adesione nella fase elastica, dall'altro va evitato di utilizzare un valore troppo piccolo che causerebbe problemi di carattere numerico. La scelta adottata per i coefficienti α e β fa sì che la rottura venga raggiunta in modo graduale (si veda la figura 3.7) e che il rilascio di energia a rottura sia meno brusco, in modo tale da favorire l'assenza di oscillazioni.

Per la legge bilineare, si è notato come la scelta ottimale di un buon valore di rigidezza iniziale risulti quello per il quale si ha $\delta_0/\delta_f \approx 0.1$, dove δ_0 e δ_f sono rispettivamente gli spostamenti relativi a limite elastico e a rottura. Assumere rigidezze che poco si discostano da questo valore non comporta una grossa variazione dei risultati.

Parametro	Valore ottimale
λ_n, λ_t (PPR)	≈ 0.1
α, β (PPR)	≈ 5
K_n (bilineare)	$\approx \frac{5\sigma_{max}^2}{\phi_n}$
K_t (bilineare)	$\approx \frac{5\tau_{max}^2}{\phi_t}$

Tabella 6.5: Valori ottimali dei parametri di forma.

Per quanto riguarda il valore della rigidezza a compressione, l'analisi parametrica ha mostrato come questo parametro possa essere invece scelto, entro certi limiti, piuttosto liberamente.

6.2.2 Distribuzione degli sforzi

Come già detto al paragrafo 5.6.1, è di fondamentale importanza riuscire a descrivere in maniera accurata lo stato di sforzo in prossimità del fronte di delaminazione; è infatti unicamente in questa zona che si concentrano sforzi di interfaccia di entità significativa. Questo diventa possibile quando un numero sufficiente di elementi si trovano all'interno della zona coesiva.

Nelle figure 6.12 e 6.13 vengono riportati la distribuzione degli sforzi di interfaccia ottenuti utilizzando partizioni sufficientemente fitte o troppo rade, fotografate quando la delaminazione ha cominciato a propagare in modo tale da poter valutare qualitativamente le differenze.

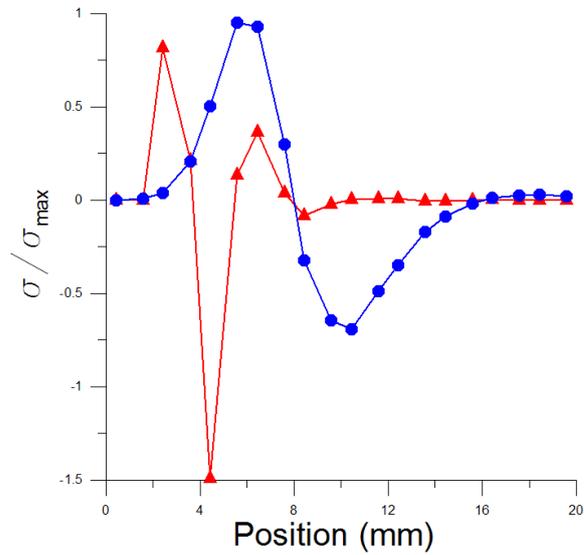


Figura 6.12: Distribuzione degli sforzi normali nell'interfaccia di un provino DCB: la curva rossa è ottenuta per un caso in cui $L_{ch}/L_{ele} = 0.45$, mentre quella blu è ottenuta per un caso in cui $L_{ch}/L_{ele} = 1.70$ (con L_{ch} si intende il valore di lunghezza coesiva stimato con l'equazione (5.41)).

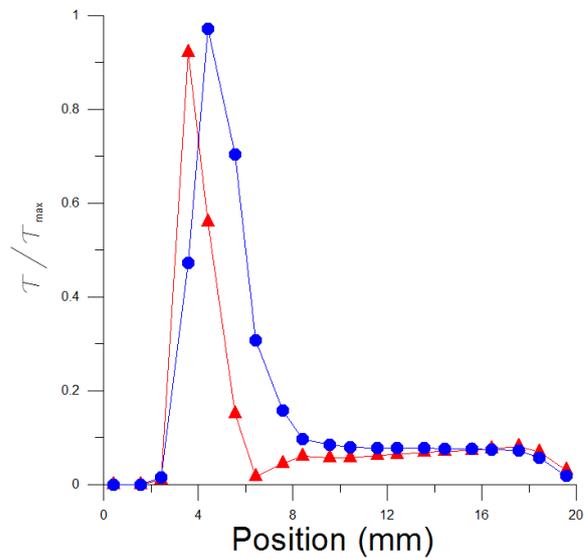


Figura 6.13: Distribuzione degli sforzi tangenziali nell'interfaccia di un provino ENF: la curva rossa è ottenuta per un caso in cui $L_{ch}/L_{ele} = 0.71$, mentre quella blu è ottenuta per un caso in cui $L_{ch}/L_{ele} = 1.70$ (con L_{ch} si intende il valore di lunghezza coesiva stimato con l'equazione (5.42)).

7

Risultati numerici: travi rinforzate con CFRP

Negli ultimi anni è stata crescente l'attenzione rivolta verso le tecniche di riabilitazione di strutture in acciaio ed in calcestruzzo armato, le quali consistono nel miglioramento delle caratteristiche meccaniche di uno o più componenti della struttura. Una di queste metodologie prevede l'incollaggio di laminati in fibra di carbonio (CFRP) sulla superficie dell'elemento strutturale. Anni fa, come rinforzo esterno, venivano invece utilizzate piastre in acciaio. Il loro utilizzo si è successivamente rilevato poco adatto a causa dei problemi associati alla corrosione del materiale. Per questo e per altri motivi, oggi si preferisce utilizzare piastre in CFRP: oltre ad avere un'ottima resistenza a fatica e a corrosione (il che conferisce un'ottima durabilità), questi compositi sono costituiti da fibre ad alta resistenza, superiore a quella dell'acciaio, con un peso inferiore al 10% di quello dell'acciaio. Questo permette un notevole risparmio in termini di quantità di materiale da utilizzare e di carico che si va ad aggiungere alla struttura.

Affinché il funzionamento del rinforzo sia soddisfacente, risulta fondamentale la qualità del trasferimento degli sforzi all'interfaccia, che ha una grande influenza sul comportamento meccanico complessivo. Ad esempio, quando il materiale rinforzato è il calcestruzzo, occorre che l'adesivo abbia sufficiente tenacità per dissipare l'energia rilasciata dalla fessurazione e sufficiente resistenza e rigidità per trasferire gli sforzi tra calcestruzzo e rinforzo.

Diversi studi hanno mostrato come la modalità di collasso più importante di questo tipo di strutture sia quella del distacco del rinforzo. Il fenomeno presenta un comportamento di tipo fragile all'aumentare del carico applicato. Il massimo carico trasferibile al rinforzo non può essere stimato per mezzo di analisi elastiche lineari: infatti già per carichi corrispondenti al 60-70% di quello ultimo si ha il raggiungimento del massimo sforzo di taglio vicino alla sezione iniziale della piastra; di conseguenza un criterio del tipo *stress-based* non può essere valido per predire la delaminazione [27], in

quanto occorrerebbe assumere valori irragionevolmente elevati per gli sforzi massimi raggiungibili all'interfaccia. Al fine di ottenere i valori di carico ultimo rilevati sperimentalmente, per un'accurata progettazione diventa perciò imprescindibile possedere strumenti adeguati che descrivano il comportamento della struttura oltre al limite elastico, quando parte dell'interfaccia ha già raggiunto la fase di softening.

Nel caso in cui la piastra di rinforzo venga incollata sulle fibre tese di una trave soggetta a flessione si sviluppano, in prossimità dell'estremo della piastra, degli sforzi normali, noti come *sforzi di peeling*. Conseguentemente occorre utilizzare leggi coesive che combinano tra loro gli effetti in direzione normale e a taglio; perciò si è scelto di non utilizzare la legge bilineare disaccoppiata (vedi paragrafo 3.2.1).

Vista l'importanza di questa applicazione, è stato deciso di simulare una trave soggetta a flessione sulla quale è incollata una piastra di rinforzo dalla parte soggetta a trazione. I risultati ottenuti verranno confrontati con quelli ottenuti in [41], [49] e [40].

7.1 Modi di delaminazione

La delaminazione del rinforzo può avvenire principalmente con due diverse metodologie:

- nel fenomeno noto come *Intermediate Crack Debonding* (ICD) la delaminazione si innesca in corrispondenza di fessure nel componente strutturale rinforzato, tipicamente presenti in travi di calcestruzzo;
- nel caso in cui il componente strutturale non sia soggetto a fessurazione, la delaminazione si innesca all'estremità del rinforzo ed il fenomeno prende il nome di *Edge Debonding* (ED).

7.2 Tensioni di interfaccia

Al fine di fornire una trattazione più completa del problema della trave rinforzata, in questo paragrafo si riporta la soluzione analitica per gli sforzi all'interfaccia tra trave e rinforzo, ottenuta in [56]. Le ipotesi alla base della soluzione ottenuta dagli autori sono riassunte nei seguenti punti:

1. i materiali che costituiscono il rinforzo hanno comportamento elastico lineare;
2. si considerano le deformabilità assiali, flessionali ed a taglio di entrambi i costituenti;
3. gli sforzi si mantengono costanti lungo lo spessore dell'adesivo (questa è un'ipotesi-chiave per ottenere soluzioni in forma chiusa).

Si consideri un concio infinitesimo di trave rinforzata: le azioni agenti su di esso sono rappresentate in figura 7.1.

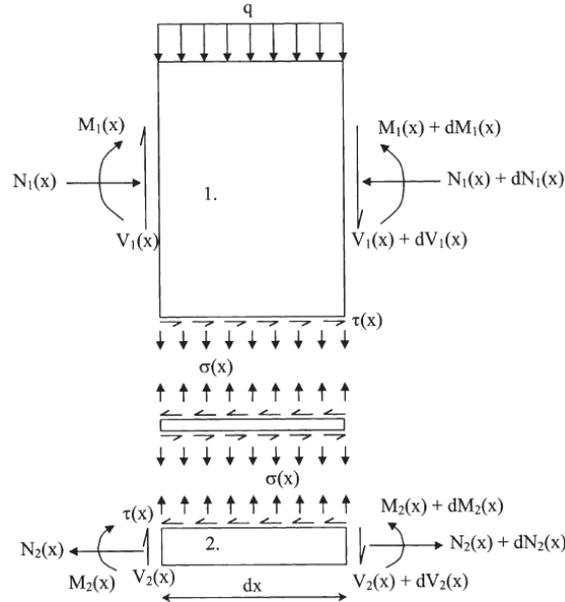


Figura 7.1: Elemento infinitesimo di trave: sono rappresentate le azioni interne agenti sulle sezioni trasversali e le sollecitazioni normali e di taglio agenti livello dell'interfaccia trave-rinforzo, le quali non variano lungo lo spessore dello strato di adesivo [56].

7.2.1 Sforzi di taglio

La deformazione a taglio γ nello strato di adesivo può essere espressa come

$$\gamma = \frac{du(x, y)}{dy} + \frac{dv(x, y)}{dx} \quad (7.1)$$

in cui $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono rispettivamente gli spostamenti orizzontali e verticali in ogni punto dell'adesivo illustrato in figura 7.1. Questi spostamenti generano degli sforzi di taglio, dati da

$$\tau(x) = G_a \left(\frac{du(x, y)}{dy} + \frac{dv(x, y)}{dx} \right) \quad (7.2)$$

dove G_a è il modulo elastico a taglio dell'adesivo. Differenziando la (7.2) rispetto a x si ottiene

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = G_a \left(\frac{d^2u(x, y)}{dx dy} + \frac{d^2v(x, y)}{dx^2} \right) \quad (7.3)$$

Per ipotesi gli sforzi di taglio sono considerati uniformi lungo lo spessore dello strato di adesivo e quindi dipendono unicamente dalla coordinata x ; ne consegue che gli spostamenti $u(x, y)$ sono lineari lungo y nell'adesivo. Perciò la derivata lungo la direzione trasversale può essere espressa come

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_2(x) - u_1(x)}{t_a} \quad (7.4)$$

in cui $u_2(x)$ e $u_1(x)$ sono rispettivamente gli spostamenti longitudinali alla base della trave ed alla sommità del rinforzo.

La curvatura nel concio può essere correlata al momento flettente applicato $M_T(x)$ dall'equazione

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_T(x)}{(EI)_t} \quad (7.5)$$

in cui per $(EI)_t$ si intende la rigidezza flessionale totale della sezione composta.

Utilizzando le equazioni (7.4) e (7.5), l'equazione (7.3) assume la seguente espressione:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} - \frac{t_a}{(EI)_t} M_T(x) \right) \quad (7.6)$$

In (7.6) il terzo termine tra parentesi risulta essere molto piccolo rispetto agli altri due e, per questo motivo, nel seguito verrà trascurato.

Considerando tutte e tre le componenti di deformabilità, le deformazioni assiali alla base della trave e alla sommità del rinforzo sono date dalle seguenti equazioni:

$$\epsilon_1(x) = \frac{du_1}{dx} = \frac{y_1}{E_1 I_1} M_1(x) - \frac{N_1(x)}{E_1 A_1} + \frac{y_1(q + b_2 \sigma(x))}{G_1 \chi A_1} \quad (7.7)$$

$$\epsilon_2(x) = \frac{du_2}{dx} = -\frac{y_2}{E_2 I_2} M_2(x) + \frac{N_2(x)}{E_2 A_2} + \frac{y_2 b_2 \sigma(x)}{G_2 \chi A_2} \quad (7.8)$$

Con riferimento alla figura 7.1, imponendo l'equilibrio in direzione orizzontale ai conci di trave e rinforzo si ottiene

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{dN_2(x)}{dx} = b_2 \tau(x) \quad (7.9)$$

da cui

$$N_1(x) = N_2(x) = N(x) = b_2 \int_0^x \tau(x) dx \quad (7.10)$$

Assumendo come uguali le curvature della trave e del rinforzo, si possono correlare i momenti flettenti nei due componenti nel seguente modo:

$$M_1(x) = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} M_2(x) = R M_2(x) \quad (7.11)$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione del concio in figura 7.1 si ottiene:

$$M_T(x) = M_1(x) + M_2(x) + N(x)(y_1 + y_2 + t_a) \quad (7.12)$$

I momenti flettenti nei due componenti in funzione del momento totale sono quindi dati da:

$$M_1(x) = \frac{R}{R+1} \left[M_T(x) - b_2 \int_0^x \tau(x)(y_1 + y_2 + t_a) dx \right] \quad (7.13)$$

$$M_2(x) = \frac{1}{R+1} \left[M_T(x) - b_2 \int_0^x \tau(x)(y_1 + y_2 + t_a) dx \right] \quad (7.14)$$

Derivando rispetto ad x queste due equazioni si ottengono le espressioni del taglio:

$$\frac{dM_1}{dx} = V_1(x) = \frac{R}{R+1} [V_T(x) - b_2 \tau(x)(y_1 + y_2 + t_a)] \quad (7.15)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = V_2(x) = \frac{1}{R+1} [V_T(x) - b_2 \tau(x)(y_1 + y_2 + t_a)] \quad (7.16)$$

Sostituendo le equazioni (7.7) e (7.8) in (7.6) e differenziando una volta si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} = \frac{G_a}{t_a} \left(-\frac{y_2}{E_2 I_2} \frac{dM_2(x)}{dx} + \frac{1}{E_2 A_2} \frac{dN_2(x)}{dx} + \frac{y_2}{G_2 \chi A_2} b_2 \frac{d\sigma(x)}{dx} \right. \\ \left. - \frac{y_1}{E_1 I_1} \frac{dM_1(x)}{dx} + \frac{1}{E_1 A_1} \frac{dN_1(x)}{dx} - \frac{y_1}{G_1 \alpha A_1} b_2 \frac{d\sigma(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Sfruttando le equazioni (7.15), (7.16) e (7.10) si ottiene l'equazione differenziale che governa la distribuzione degli sforzi di taglio:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} - \frac{G_a b_2}{t_a} \left(\frac{(y_1 + y_2)(y_1 + y_2 + t_a)}{E_1 I_1 + E_2 I_2} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) \tau(x) \\ = -\frac{G_a}{t_a} \left(\frac{y_1 + y_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right) V_T(x) - \frac{G_a y_1}{t_a g_1 \chi A_1} \frac{dq}{dx} \\ - \frac{G_a b_2}{\chi t_a} \left(\frac{y_1}{G_1 A_1} - \frac{y_2}{G_2 A_2} \right) \frac{d\sigma(x)}{dx} \end{aligned} \quad (7.18)$$

7.2.2 Sforzi normali

Quando la trave viene caricata, il rinforzo tende a separarsi dalla trave anche in direzione verticale e si innescano spostamenti relativi tra i due componenti anche in questa direzione. Conseguentemente si sviluppano delle tensioni normali, date da

$$\sigma(x) = \frac{E_a}{t_a} [v_2(x) - v_1(x)] \quad (7.19)$$

in cui $v_1(x)$ e $v_2(x)$ sono gli spostamenti trasversali rispettivamente di trave e rinforzo.

Trascurando i termini di secondo grado, imponendo l'equilibrio della trave si ottiene

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{1}{E_1I_1}M_1(x) - \frac{1}{G_1\chi A_1}[q + b_2\sigma(x)] \quad (7.20)$$

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) - b_2y_1\tau(x) \quad (7.21)$$

$$\frac{dV_1(x)}{dx} = -b_2\sigma(x) - q \quad (7.22)$$

Mentre per il rinforzo si ottiene

$$\frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = -\frac{M_2(x)}{E_2I_2} + \frac{b_2\sigma(x)}{G_2\chi A_2} \quad (7.23)$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) - b_2y_2\tau(x) \quad (7.24)$$

$$\frac{dV_2(x)}{dx} = b_2\sigma(x) \quad (7.25)$$

Dalle equazioni di equilibrio si ricavano le equazioni della linea elastica per trave e rinforzo, che sostituite nella (7.19) derivata quattro volte portano all'equazione differenziale che governa la distribuzione degli sforzi normali:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4\sigma(x)}{dx^4} - \frac{E_ab_2}{\chi t_a} \left(\frac{1}{G_1A_1} + \frac{1}{G_2A_2} \right) \frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} + \frac{E_ab_2}{t_a} \left(\frac{1}{E_1I_1} + \frac{1}{E_2I_2} \right) \sigma(x) \\ & = -\frac{E_ab_2}{t_a} \left(\frac{y_1}{E_1I_1} - \frac{y_2}{E_2I_2} \right) \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{E_a}{t_aE_1I_1}q + \frac{E_a}{t_aG_1\chi A_1} \frac{d^2q}{dx^2} \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.2.3 Soluzioni in forma chiusa

È possibile ottenere soluzioni in forma chiusa trascurando la deformabilità a taglio dei due componenti; in questo modo, infatti, le equazioni (7.18) e (7.26) si disaccoppiano e per semplici condizioni di carico si riescono a ricavare le costanti che compaiono all'interno degli integrali generali delle equazioni (7.18) e (7.26).

Dalle figure 7.2 e 7.3 si nota chiaramente come nel caso di trave rinforzata soggetta a flessione la propagazione della eventuale delaminazione avvenga in modo misto.

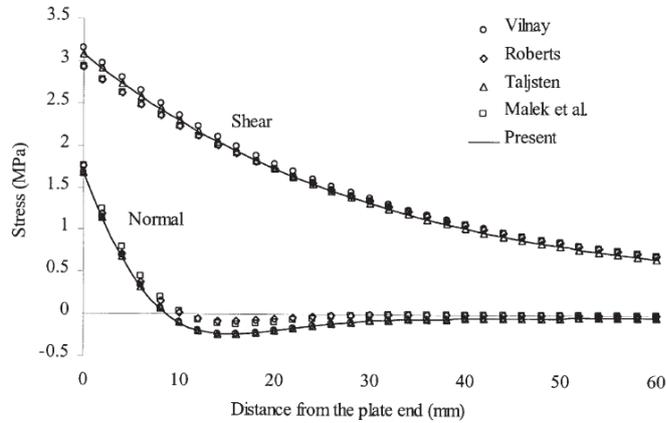


Figura 7.2: Distribuzione degli sforzi lungo l'interfaccia nel caso di trave soggetta ad un carico concentrato in mezzeria; nell'immagine è riportato il confronto tra il risultato ottenuto con la formulazione analitica descritta (*Present*) e quelli ottenuti da altri autori [56].

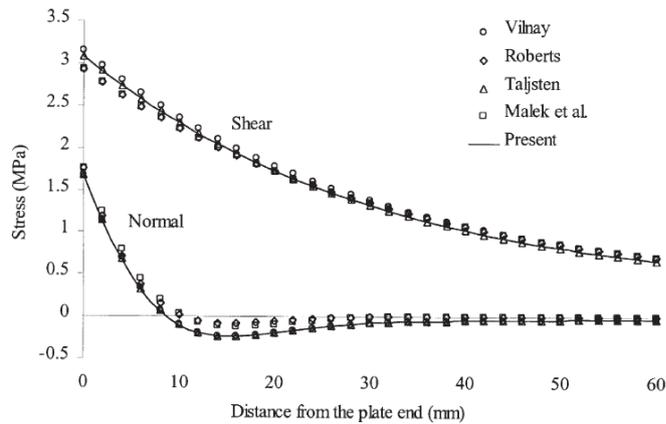


Figura 7.3: Distribuzione degli sforzi lungo l'interfaccia nel caso di trave soggetta ad un carico uniformemente distribuito; nell'immagine è riportato il confronto tra il risultato ottenuto con la formulazione analitica descritta (*Present*) e quelli ottenuti da altri autori [56].

7.3 Modelli utilizzati

Per simulare il problema della progressiva delaminazione del rinforzo si possono utilizzare due diversi tipi di modelli.

Modello A

Nel modello A la piastra di rinforzo è considerata incollata direttamente alla trave; in questo modello è presente pertanto un'unica interfaccia in corrispondenza della superficie di separazione trave-FRP. Lo strato di adesivo non viene modellato direttamente, ma sostituito da elementi di interfaccia a spessore nullo.

In questo caso l'interfaccia non ha una esatta corrispondenza nella realtà fisica, ma deve, in sostanza, concentrare il comportamento dell'adesivo e delle due interfacce fisiche. Questo approccio è quello solitamente utilizzato in letteratura per lo studio di problemi di delaminazione nei casi in cui lo spessore dell'adesivo è piccolo in confronto a quello degli strati incollati.

Modello B

Nel modello B viene modellato anche lo strato di adesivo tra trave e rinforzo; esso viene considerato un materiale elastico lineare ed è discretizzato mediante la stessa tipologia di elementi utilizzati per trave e piastra di rinforzo (vedi paragrafo 5.1.1). Questo modello è analogo a quello utilizzato in [40] e [49] e si presta a descrivere casi di spessore dell'adesivo non trascurabili. Vengono inserite due interfacce coesive, rispettivamente tra FRP e adesivo e tra adesivo e trave.

Il modello A è certamente il più semplice, nel senso che il problema è costituito da un minor numero di gradi di libertà, ma tuttavia la sua applicazione non considera l'impatto che lo stato di sforzo nello strato di adesivo ha su ciascuna delle due interfacce fisiche [49]. Analisi dettagliate hanno infatti evidenziato che gli sforzi nell'adesivo variano lungo lo spessore, principalmente vicino a spigoli, aree delaminate, fessure ed altre tipologie di irregolarità. Da queste considerazioni, è derivata la necessità di utilizzare anche il modello B per poter caratterizzare l'impatto dello strato di adesivo nel modello numerico.

7.4 Trave di calcestruzzo rinforzata

Si consideri la trave in figura 7.4. Nella tabella 7.1 sono riportati i parametri meccanici dei materiali.

Questo problema è stata studiato numericamente in [48] e [40]: in questi studi gli autori hanno utilizzato elementi di trave per discretizzare la struttura, utilizzando il modello cinematico di Eulero-Bernoulli (non considerano quindi la deformabilità a taglio) nel primo articolo e nel secondo quello di Timoshenko, nell'ipotesi di grandi spostamenti e piccole deformazioni. Per lo

7.4. TRAVE DI CALCESTRUZZO RINFORZATA

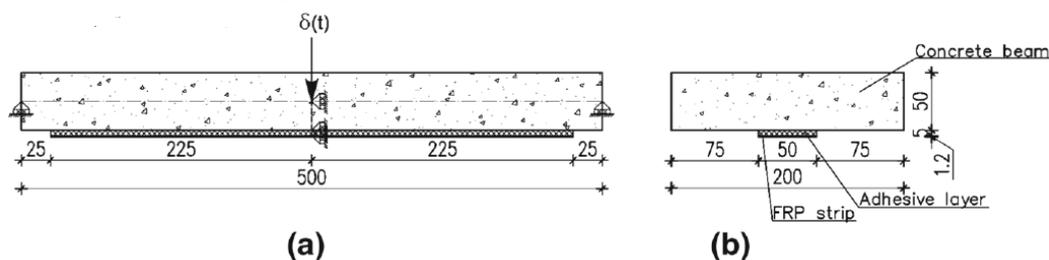


Figura 7.4: Geometria della trave analizzata: (a) vista laterale, (b) vista trasversale. Le misure sono riportate in mm.

Materiale	Modulo di Young(MPa)	Modulo elastico tangenziale (MPa)	Densità (kg/m ³)
Calcestruzzo	30000	12500	2500
Adesivo	1000	350	2000
CFRP	160000	60000	2000

Tabella 7.1: Parametri meccanici dei materiali del problema.

strato di adesivo viene utilizzato un modello cinematico arricchito, in modo tale da riuscire caratterizzare uno stato di sforzo tridimensionale e che varia lungo lo spessore dell'adesivo stesso. Gli autori ritengono infatti che i modelli in cui lo spostamento varia linearmente lungo lo spessore dell'adesivo, il che comporta uno stato di sforzo costante lungo questa direzione, tendono a sottostimare la concentrazione degli sforzi, la quale causa l'innescio del processo di delaminazione. Le interfacce trave-adesivo e adesivo-CFRP vengono caratterizzate con la legge coesiva sviluppata in [60], che è sostanzialmente analoga alla legge van den Bosch implementata nel codice e descritta al paragrafo 3.2.7. I parametri utilizzati per le interfacce sono riassunti in tabella 7.2.

Interfaccia	ϕ_n (N/mm)	ϕ_t (N/mm)	σ_{max} (MPa)	τ_{max} (MPa)
Adesivo-Trave	0.0583	0.0583	2.14	5.00
Adesivo-CFRP	0.0583	0.0583	2.14	5.00

Tabella 7.2: Parametri meccanici delle interfacce del modello.

La trave è in semplice appoggio ed è soggetta ad uno spostamento imposto in direzione trasversale in mezzzeria. Il problema è dunque simmetrico. Per questo viene studiata metà struttura, in cui i nodi posti nella mezzzeria della trave reale vengono vincolati tramite carrelli che scorrono in direzione trasversale rispetto all'asse della trave, mentre per i nodi all'estremo opposto viene vincolato unicamente lo spostamento trasversale.

7.4.1 Stima della lunghezza coesiva

Come già sottolineato al paragrafo 7.2, lo stato di sforzo all'interfaccia è di tipo misto: soprattutto all'estremità del rinforzo si hanno infatti sia sforzi di taglio che importanti sforzi di trazione. Per questo motivo si sono utilizzate le stime (5.40), (5.41) e (5.42) per stabilire la dimensione minima che gli elementi di interfaccia devono possedere per descrivere accuratamente lo stato di sforzo nella zona di processo.

I risultati delle stime sono riportati in tabella 7.3, ottenute utilizzando modulo elastico e spessore dello strato di adesivo.

$l_{ch,Hill}$	12.73 mm
$l_{ch,DCB}$	3.16 mm
$l_{ch,ENF}$	3.99 mm

Tabella 7.3: Stime della lunghezza della zona coesiva, ottenute utilizzando le formule (5.40), (5.41) e (5.42).

7.4.2 Mesh utilizzate

Per la discretizzazione della struttura si sono utilizzate due differenti mesh, rappresentate in pianta nelle figure 7.5 e 7.6. Per entrambe è stato scelto di raffinare la mesh all'estremità del rinforzo, siccome questa è la zona nella quale si concentrano gli sforzi di interfaccia più elevati: nella mesh 1 questi elementi hanno dimensione 5 mm (nella direzione del fronte di propagazione), mentre nella mesh 2 hanno dimensione pari a 2 mm. Il rinforzo e l'adesivo sono stati discretizzati mediante un unico strato di elementi, mentre per la trave si è scelto di utilizzare quattro strati di elementi, di altezza pari a 12.5mm ciascuno.

In base alle stime della lunghezza della zona coesiva riportate in tabella 7.3 ed a quanto ottenuto nella simulazione delle prove DCB ed ENF, ci si aspetta quindi che lo stato di sforzo venga descritto in maniera sufficientemente accurata con la mesh 2, siccome

$$l_{ch} = 3.16mm \approx 1.6L_{ele}$$

mentre con la mesh 1 si dovrebbe al contrario avere qualche oscillazione. Questa scelta è stata fatta in modo tale da valutare quale sia l'effetto di una minore accuratezza della descrizione dello stato di sforzo sullo spostamento e sul carico a rottura.

7.4.3 Risultati ottenuti

Per valutare il funzionamento del codice, è stato innanzitutto creato un modello ispirato a quello proposto in [40]: è stata quindi utilizzata la legge

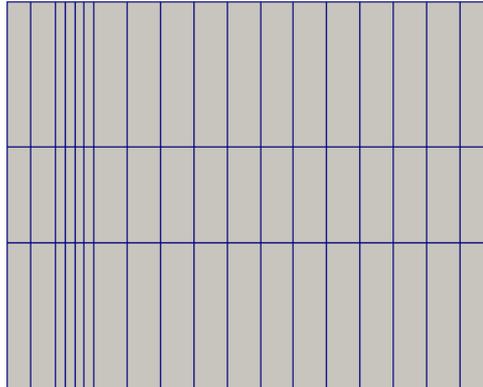


Figura 7.5: Mesh 1 vista dall'alto: nel piano è formata da 54 elementi e 76 nodi.

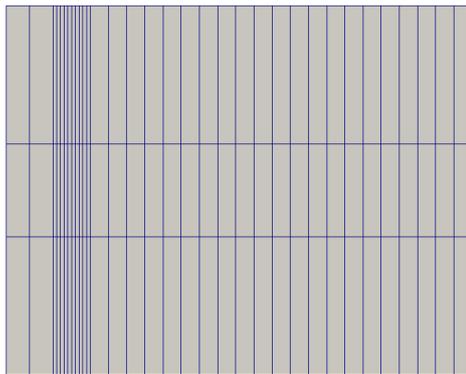


Figura 7.6: Mesh 2 vista dall'alto: nel piano è formata da 99 elementi e 136 nodi.

coesiva van den Bosch e la struttura è stata discretizzata introducendo anche lo strato di adesivo (modello B).

I risultati ottenuti in termini di spostamento e carico a rottura sono in buon accordo con quelli ottenuti in [48] e [40], come si può vedere dalle figure 7.7 e 7.8 e dalla tabella 7.4.

	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
Mesh 1	1.661	21.9
Mesh 2	1.608	21.3
Modello in [49]	1.590	21.3
Modello in [40]	1.640	21.2

Tabella 7.4: Risultati ottenuti con le due mesh utilizzate e con i modelli di riferimento in termini di spostamento e carico a delaminazione.

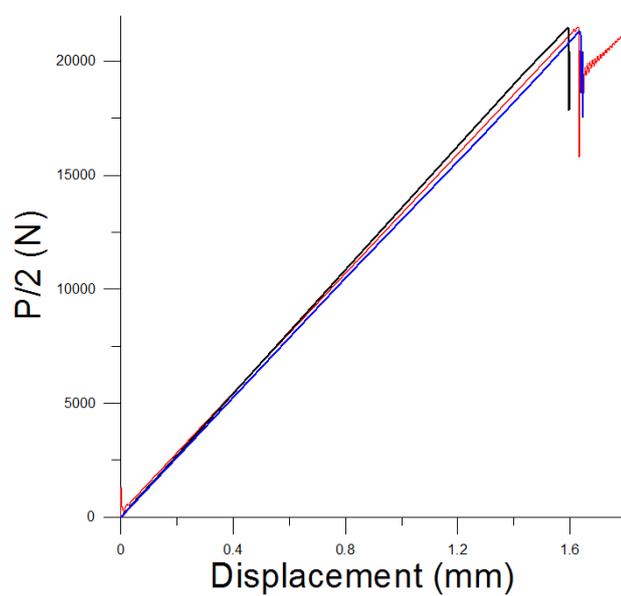


Figura 7.7: Curva carico - spostamento ottenuta con la mesh 2 (in rosso), confrontata con quelle ottenute in [48] (in nero) e [40] (in blu).

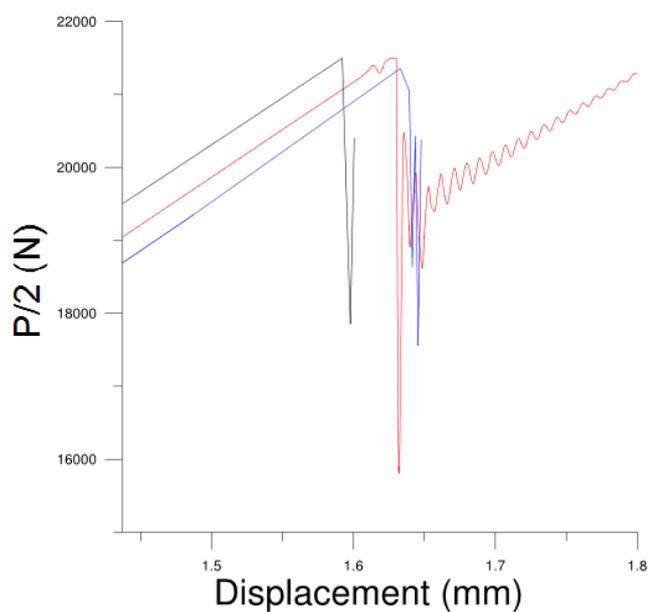


Figura 7.8: Dettaglio del grafico di figura 7.7.

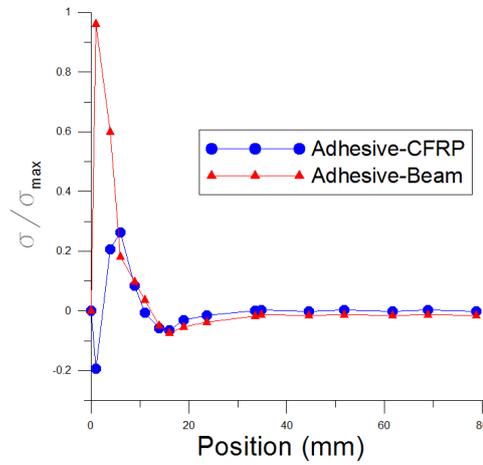


Figura 7.9: Mesh 1, modello B - distribuzione degli sforzi normali con carico $P = 14.5kN$.

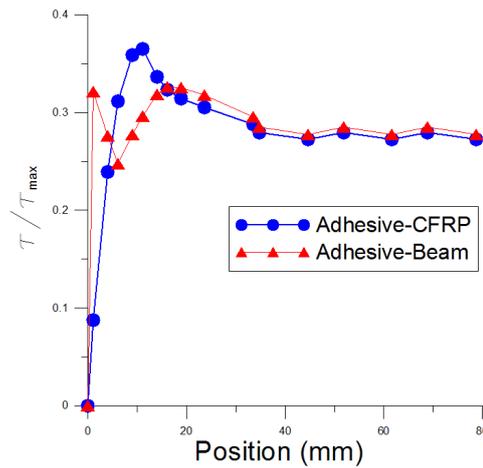


Figura 7.10: Mesh 1, modello B - distribuzione degli sforzi tangenziali con carico $P = 14.5kN$.

Modello	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
A	3.040	39.6
B	1.608	21.3

Tabella 7.5: Risultati ottenuti con i due modelli e la legge coesiva van den Bosch.

Nelle figure 7.9 e 7.16 viene riportata la distribuzione degli sforzi sulle due interfacce del modello, le discretizzazioni utilizzate nel caso di un livello di carico pari a:

- 14.5kN, per il quale i punti di Gauss situati in prossimità dell'estre-

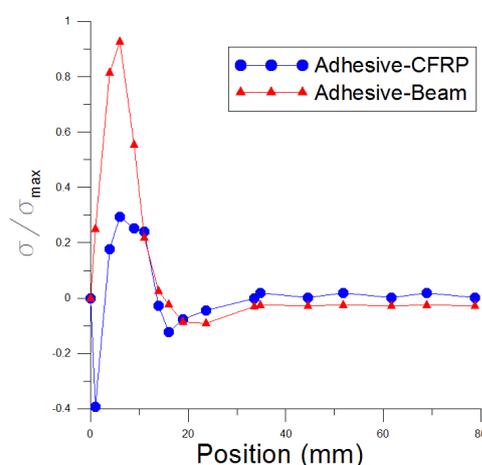


Figura 7.11: Mesh 1, modello B - distribuzione degli sforzi normali con carico $P = 21.1kN$.

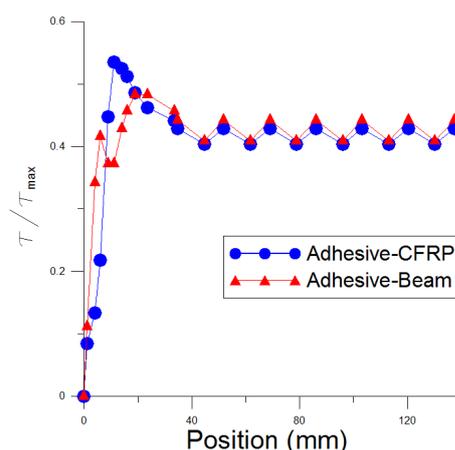


Figura 7.12: Mesh 1, modello B - distribuzione degli sforzi tangenziali con carico $P = 21.1kN$.

mità del rinforzo hanno appena raggiunto la fase di softening (inizio del danneggiamento);

- 21.1kN, per il quale l'interfaccia è prossima alla rottura.

Si può notare come le distribuzioni degli sforzi nel caso $P = 14.5kN$ modellate con le due partizioni siano qualitativamente simili. Le maggiori differenze sono osservabili invece per gli sforzi tangenziali con livello di carico $P = 21.1kN$: in questo caso infatti nella distribuzione degli sforzi ottenuta con la mesh 1 compaiono oscillazioni, che propagano anche ad una certa distanza dall'estremo del rinforzo (figura 7.12); con la mesh 2 invece la distribuzione degli sforzi tangenziali (figura 7.16) risulta essere più regolare

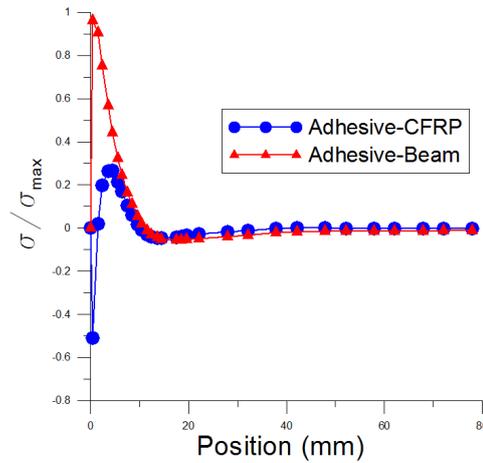


Figura 7.13: Mesh 2, modello B - distribuzione degli sforzi normali con carico $P = 14.5kN$.

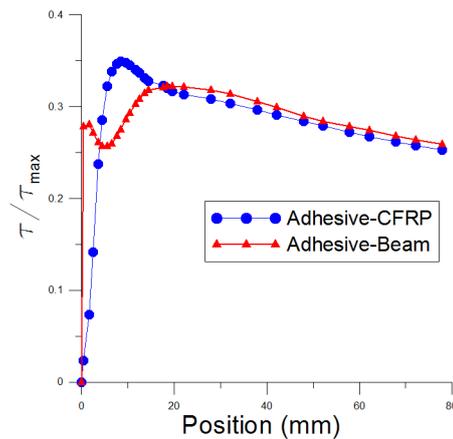


Figura 7.14: Mesh 2, modello B - distribuzione degli sforzi tangenziali con carico $P = 14.5kN$.

e qualitativamente simile alla soluzione analitica rappresentata in figura 7.2. Nonostante ciò, con la mesh 1 i risultati ottenuti in termini di spostamento e carico a delaminazione non sono molto diversi rispetto a quelli ottenuti dagli altri modelli (vedi tabella 7.4).

Utilizzando il modello di tipo B si può constatare come gli sforzi normali giochino un ruolo predominante nella delaminazione del rinforzo: in accordo con quanto si osserva sperimentalmente, la rottura avviene infatti all'interfaccia trave-adesivo, laddove gli sforzi normali raggiungono valori prossimi

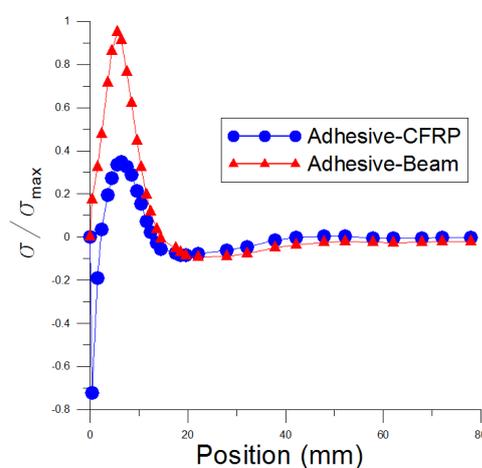


Figura 7.15: Mesh 2, modello B - distribuzione degli sforzi normali con carico $P = 21.1kN$.

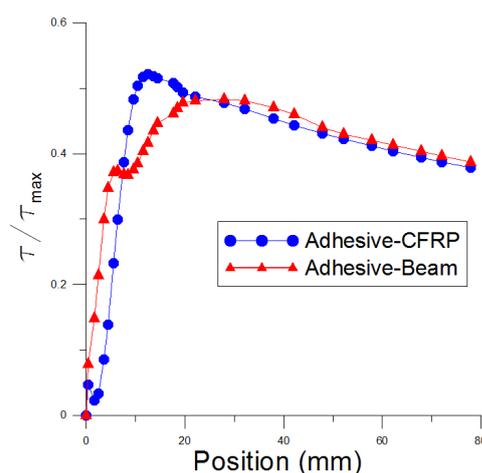


Figura 7.16: Mesh 2, modello B - distribuzione degli sforzi tangenziali con carico $P = 21.1kN$.

a σ_{max} .

In tabella 7.5 sono riportati i risultati in termini di spostamento e carico a rottura ottenuti utilizzando il modello A ed il modello B. Si nota come i risultati siano tra loro molto diversi, in quanto spostamento e carico a rottura differiscono in maniera sostanziale. Anche l'evoluzione del fronte di delaminazione nei due casi è sensibilmente differente; ciò è dovuto al fatto che nel caso del modello A, essendo maggiori carico e spostamento critico, la quantità di energia elastica che viene rilasciata è superiore rispetto a quella nel modello B, il che fa sì che la propagazione del fronte di delaminazione sia più rapida. Inoltre si nota come anche la distribuzione degli sforzi all'inter-

7.5. TRAVE DI ACCIAIO RINFORZATA - CONFRONTO NUMERICO-SPERIMENTALE

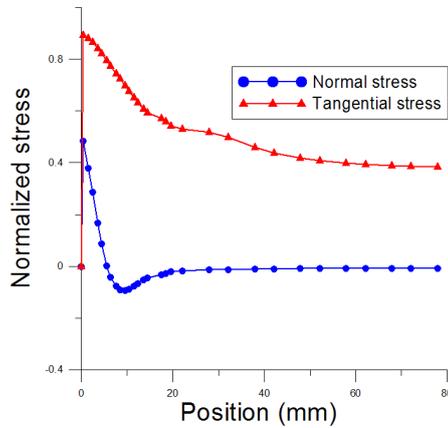


Figura 7.17: Distribuzione degli sforzi all'interfaccia ottenuta con la mesh 2 ed il modello di tipo A (senza adesivo), con carico $P = 26.3kN$, per il quale si ha l'attivazione del danneggiamento.

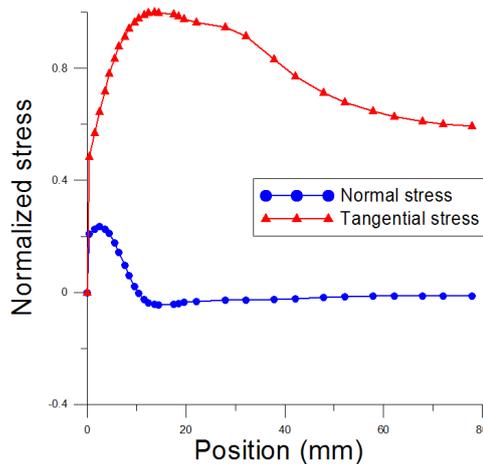


Figura 7.18: Distribuzione degli sforzi all'interfaccia ottenuta con la mesh 2 ed il modello di tipo A (senza adesivo), con carico $P = 39.0kN$, per il quale l'interfaccia è prossima alla rottura.

faccia sia differente nei due modelli; nel modello B infatti gli sforzi normali sono preponderanti su quelli tangenziali, al contrario di quanto avviene nel modello A (figure 7.17 e 7.18).

7.5 Trave di acciaio rinforzata - confronto numerico-sperimentale

In [41] è stato studiato sperimentalmente il comportamento di travi di acciaio rinforzate soggette a flessione su quattro punti, del tipo rappresentato nelle figure 7.19 e 7.20. In particolare, in questo studio è stata analizzata la

risposta strutturale di due provini, del tutto identici tra loro fatta eccezione per lo spessore dello strato di adesivo: nel provino SB1 è pari a 4 mm, mentre per il provino SB2 è di 3 mm.

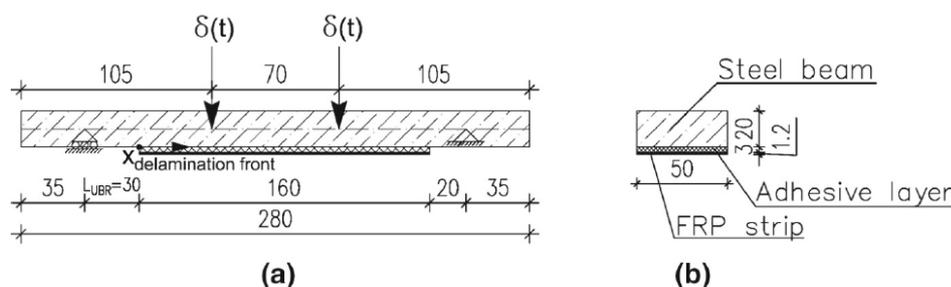


Figura 7.19: Geometria della trave analizzata: (a) vista laterale, (b) vista trasversale. Le misure sono riportate in mm.

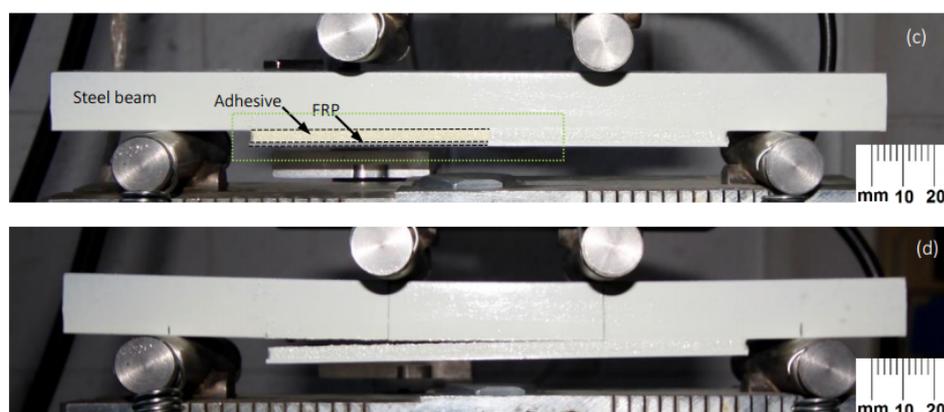


Figura 7.20: Provino sull'apparecchiatura di prova [41].

Gli altri parametri geometrici sono i medesimi rappresentati in figura 7.19. In tabella 7.6 sono riportati i parametri meccanici dei materiali.

Materiale	E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Densità (kg/m ³)
Acciaio (SAE-4340)	190000	0.3	750	7800
CFRP	165000	0.375	/	1600
Adesivo	7800	0.39	/	1700

Tabella 7.6: Proprietà dei materiali che costituiscono i provini SB1 e SB2. Il carico di snervamento dell'acciaio è stato riportato per completezza: durante la prova l'acciaio si mantiene in regime elastico lineare.

L'asimmetria del provino fa sì che il processo di delaminazione si innesci ad una delle due estremità (quella sinistra in figura 7.19) e propa

7.5. TRAVE DI ACCIAIO RINFORZATA - CONFRONTO NUMERICO-SPERIMENTALE

verso l'estremità opposta. Mediante un'apposita strumentazione, schematizzata in figura 7.21, gli autori riescono a seguire l'evoluzione del fronte di delaminazione nel tempo.

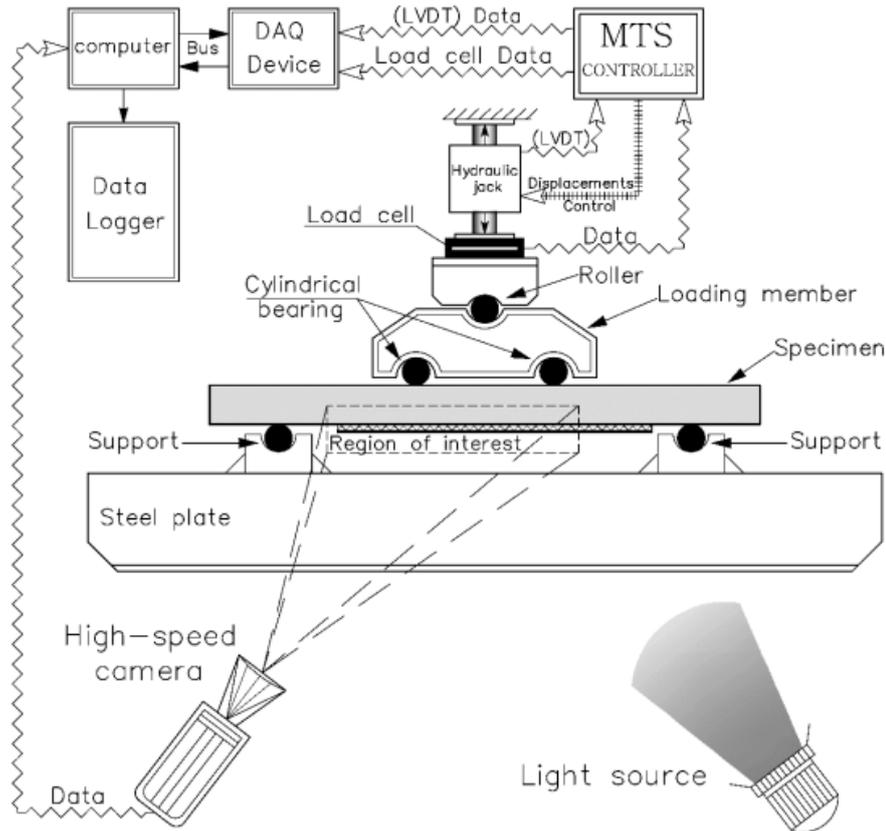


Figura 7.21: Rappresentazione schematica della strumentazione utilizzata in [41].

L'utilizzo di strati di adesivo relativamente spessi è motivato con due ragioni pratiche:

- è stato notato in [40] che l'utilizzo di adesivi spessi comporta una propagazione più lenta del fronte di delaminazione;
- la chiarezza delle immagini fornite dall'apparecchiatura sperimentale migliora.

I parametri delle interfacce nei due provini sono ricavati in [41] a posteriori, sfruttando i valori di spostamento e carico critico e le misurazioni della velocità di propagazione della delaminazione. Allo stesso modo di quanto si osserva nel paragrafo 7.4.3, la delaminazione si innesca all'interfaccia trave-adesivo e non c'è quindi modo di caratterizzare l'interfaccia tra adesivo e

rinforzo, la quale in ogni caso riveste un ruolo poco importante nel problema in esame. A causa dell'assenza di informazioni sperimentali, i parametri delle due interfacce sono assunti identici e vengono riportati in tabella 7.7.

Provino	ϕ_n (N/mm)	ϕ_t (N/mm)	σ_{max} (MPa)	τ_{max} (MPa)
SB1	0.370	0.370	17.01	39.67
SB2	0.363	0.363	18.05	42.08

Tabella 7.7: Parametri delle interfacce del modello, ricavati a posteriori in [41].

La prova è condotta in controllo di spostamento ad una velocità di 1mm/s.

7.5.1 Risultati ottenuti

I risultati ottenuti sono riportati in termini di spostamento e carico a rottura sono riportati in tabella 7.8. La figura 7.22 mostra invece il confronto tra la curva sperimentale e quella ottenuta dalla simulazione numerica per il provino SB1.

La figura 7.22 mostra che i risultati ottenuti sono in buon accordo con quelli sperimentali. La stima dello spostamento al raggiungimento della delaminazione è infatti molto buona; la differenza tra le due risposte è imputabile al fatto che la struttura discretizzata è leggermente più rigida di quella reale, il che può essere dovuto ad avere utilizzato una mesh troppo rada.

7.6 Trave di acciaio rinforzata - studio parametrico

Si consideri la trave in figura 7.19, i cui dati meccanici sono riportati in tabella 7.9.

In [40] viene riportato uno studio parametrico al variare di alcuni parametri geometrici e meccanici. Allo stesso modo, è stato scelto di effettuare uno studio di questo tipo anche in questo lavoro.

	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
Sperimentale-SB1	0.729	39.1
Numerico-SB1	0.722	40.9
Sperimentale-SB2	0.751	40.2
Numerico-SB2	0.816	44.9

Tabella 7.8: Risultati numerici e sperimentali in termini di spostamento e carico all'innescio della delaminazione.

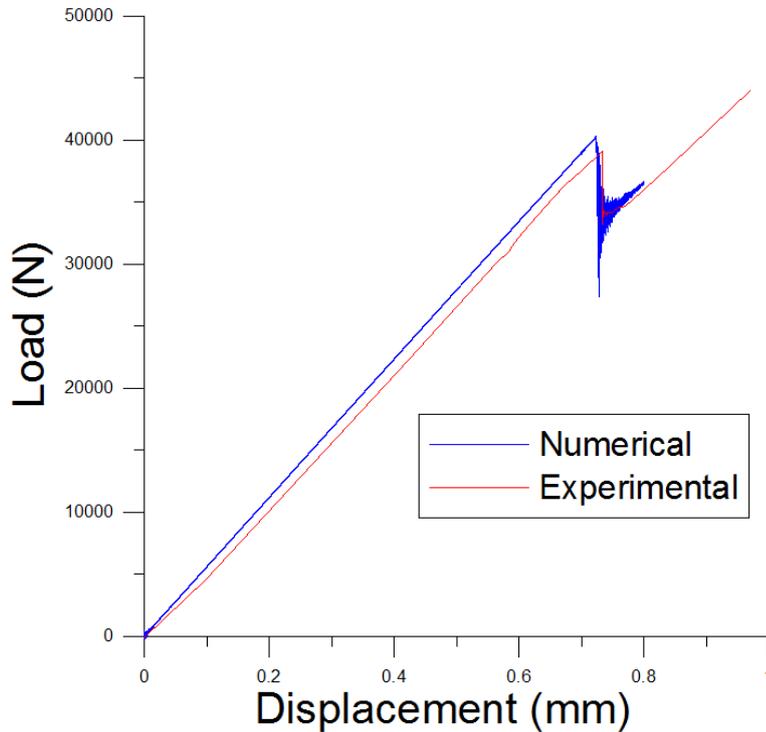


Figura 7.22: Confronto tra risultato numerico e sperimentale per il provino SB1.

Materiale	Modulo di Young(MPa)	Modulo elastico tangenziale (MPa)	Densità (kg/m ³)
Acciaio	210000	79300	7800
Adesivo	5000	1748	2000
CFRP	165000	60000	2000

Tabella 7.9: Parametri meccanici dei materiali del problema.

I risultati ottenuti non saranno però confrontati con quelli presenti in [40] a causa di una disparità nel modulo elastico tangenziale dello strato di adesivo; l'adesivo considerato in [40] possiede infatti un valore del coefficiente di Poisson non raggiungibile fisicamente (maggiore di 0.5). Conseguentemente, nel modello considerato il modulo elastico tangenziale dell'adesivo è più alto, il che porta ad ottenere valori di carico e spostamento critici meno elevati rispetto a quelli in [40].

I parametri delle interfacce acciaio-adesivo e adesivo-CFRP sono i medesimi e sono riportati in tabella 7.10. La legge coesiva utilizzata in [40] è ancora quella sviluppata in [60] e, a causa della forma esponenziale di questa legge coesiva, per lo studio parametrico è stata utilizzata la legge coesiva van den Bosch.

ϕ_n (N/mm)	0.350
ϕ_t (N/mm)	0.350
σ_{max} (MPa)	12.88
τ_{max} (MPa)	30

Tabella 7.10: Parametri delle interfacce.

7.6.1 Risultati ottenuti

I parametri di riferimento sono quelli riportati in tabella 7.11. È stato studiata l'andamento del carico critico e dello spostamento critico al variare dello spessore dell'adesivo e dello spessore della piastra di rinforzo.

Materiale	Modulo elastico (MPa)	Coeff. di Poisson	Densità (kg/m ³)
Acciaio	190000	0.3	7500
CFRP	165000	0.375	2000
Adesivo	5000	0.43	2000

Tabella 7.11: Parametri di riferimento per lo studio parametrico.

I risultati vengono riportati nelle tabelle 7.12 e 7.13.

t_a (mm)	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
0	1.250	62.5
0.1	1.243	62.4
0.2	1.215	61.1
0.5	1.133	57.3
1.5	0.982	52.1
3.0	0.801	42.5

Tabella 7.12: Risultati ottenuti al variare dello spessore di adesivo t_a .

t_{CFRP} (mm)	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
1.2	0.801	42.5
1.4	0.749	41.0
1.6	0.719	40.0
1.8	0.687	38.2
2.0	0.652	36.3

Tabella 7.13: Risultati ottenuti al variare dello spessore del rinforzo t_{CFRP} .

Qualitativamente i risultati sono analoghi a quelli ottenuti in [40], ovvero lo spostamento ed il carico critico diminuiscono all'aumentare degli spessori di adesivo e CFRP.

8

Risultati numerici: ancoraggi acciaio-CFRP

Le strutture in acciaio necessitano spesso di operazioni di riabilitazione strutturale, in molti casi a causa dell'intrinseco problema di corrosione al quale questo materiale può essere soggetto.

Tra le tecniche di riabilitazione, l'incollaggio di strisce di CFRP sulla superficie esterna degli elementi strutturali in acciaio rappresenta una tecnica di comprovata efficacia per irrobustire una struttura esistente. È dunque fondamentale poter caratterizzare in maniera adeguata l'unione tra piastre di rinforzo in CFRP e acciaio.

In particolare, il progettista non è unicamente interessato al massimo valore del carico trasmissibile nell'unione, ma, soprattutto in relazione ad una progettazione antisismica, diventa fondamentale saper stimare il grado di duttilità dell'incollaggio e, conseguentemente, della struttura riabilitata. In tal senso, occorre studiare l'interazione tra il fenomeno della delaminazione della piastra in CFRP e le deformazioni plastiche che si possono sviluppare nell'acciaio.

Studi di questo tipo sono stati effettuati in [9], nei quali il fenomeno è stato affrontato dai punti di vista analitico, sperimentale e numerico.

8.1 Prove sperimentali

Le prove di laboratorio che vengono solitamente usate per caratterizzare il legame CFRP-acciaio sono state riassunte in [67] e vengono qui riportate.

- Tipologia 1: l'unione viene caricata in modo indiretto caricando una trave di acciaio pre-forata (figura 8.1).
- Tipologia 2: l'unione viene caricata direttamente applicando il carico ad una piastra d'acciaio (figura 8.2).

- Tipologia 3: l'unione viene caricata direttamente applicando il carico a due piastre di acciaio, tra loro collegate da due strisce di CFRP (figura 8.3).
- Tipologia 4: il carico viene applicato direttamente al CFRP (figura 8.4).

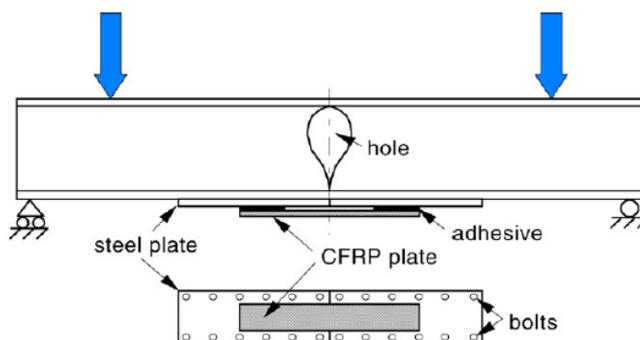


Figura 8.1: Configurazione di una prova di tipologia 1.

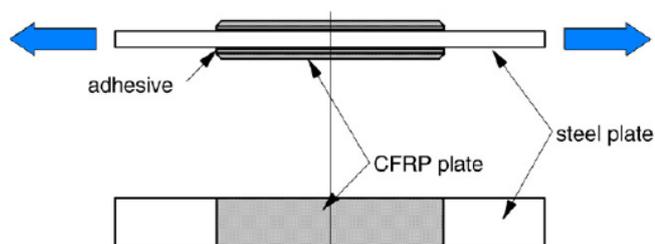


Figura 8.2: Configurazione di una prova di tipologia 2.

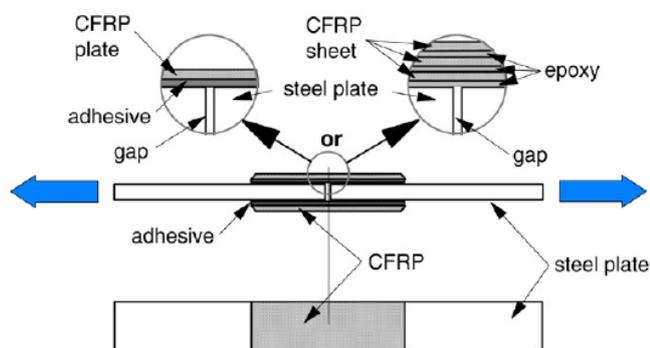


Figura 8.3: Configurazione di una prova di tipologia 3.

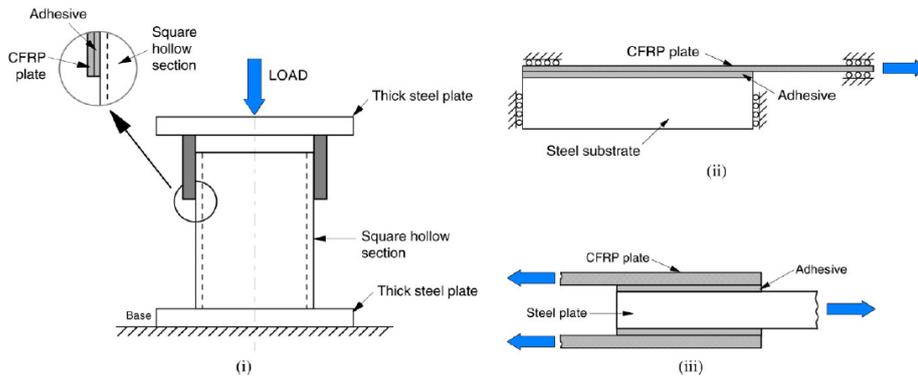


Figura 8.4: Possibili configurazioni di una prova di tipologia 4.

La prova di tipo 1 è mirata a riprodurre gli sforzi all'interfaccia trave-rinforzo che si sviluppano nel caso in cui la trave sia soggetta a flessione. Il carico viene infatti applicato sulla trave, in modo tale da ottenere nella zona dell'incollaggio un diagramma delle azioni interne di puro momento flettente. In [67] si contesta però la validità della prova, osservando che i risultati sono dipendenti dal tipo di provino utilizzato ed il modello che viene sviluppato non può essere applicato direttamente nel caso in cui cambi il tipo di sezione della trave (ad esempio se si passa da una sezione a doppia T ad una sezione cava).

Nelle prove di tipo 2 e 3 è l'acciaio ad essere caricato direttamente e, nel caso di un legame acciaio-CFRP sufficientemente resistente si possono sviluppare plasticizzazioni nell'acciaio prima che la delaminazione avvenga. Nella prova di tipo 2, la delaminazione può avere inizio unicamente all'estremità del rinforzo, mentre in quella di tipo 3 può avvenire anche in corrispondenza del gap (lo spazio tra le due piastre di acciaio). Mediante la trattazione analitica sviluppata in [9] e riportata al paragrafo 8.3.1 è possibile stimare a priori dove si verifica l'innesco della delaminazione.

Nelle prove di tipo 4, possono essere applicati sulle piastre di CFRP carichi sia di compressione, che di trazione, anche se per carichi di compressione si otterrebbero rotture localizzate nel CFRP a causa della sua bassa resistenza a questo tipo di sollecitazione. Il CFRP viene inoltre utilizzato solitamente in trazione, perciò è preferibile optare per questo tipo di carico.

8.2 Modalità di collasso delle unioni

Le possibili modalità di collasso di una unione acciaio-CFRP sono le seguenti:

- a) rottura dell'interfaccia acciaio-adesivo
- b) rottura coesiva nello strato di adesivo

- c) rottura dell'interfaccia adesivo-CFRP
- d) delaminazione nel CFRP (separazione tra fibre di carbonio e matrice)
- e) rottura del CFRP
- f) rottura dell'acciaio.

In [26] e [63] sono riportati i risultati di una campagna sperimentale volta ad analizzare l'influenza di alcuni parametri meccanici e geometrici sulle modalità di collasso. In particolare, è stata analizzata l'influenza del modulo elastico del CFRP utilizzato e della tipologia e spessore dell'adesivo.

In [26] si mostra che quando si utilizzano strisce di CFRP con modulo elastico comune (circa 200 GPa), la modalità di collasso è una combinazione tra a) e d); quando invece si utilizzano strisce ad alto modulo elastico (più di 600 GPa), il collasso avviene nel FRP in modalità e).

In [63] si mostra che la modalità b) tende ad attivarsi in caso si utilizzi uno strato di adesivo sottile, mentre la modalità d) si attiva con strati di adesivo più spessi; nei test sperimentali non sono stati osservati collassi all'interfaccia, il che indica la possibilità di ottenere una forte coesione tra i due materiali.

Il collasso dell'acciaio (modalità f) viene evitato nelle prove di laboratorio dimensionando i provini in modo opportuno.

8.3 Unioni di tipologia 2 e 3

Tra le prove disponibili per la caratterizzazione di un'unione acciaio-FRP vi sono quelle che prevedono l'incollaggio di due piastre di FRP alle superfici inferiore e superiore di una o due piastre d'acciaio (rispettivamente tipologia 2 e 3 nel paragrafo 8.1), alle quali è applicata trazione fino al raggiungimento della delaminazione. Queste prove sono state caratterizzate sperimentalmente, analiticamente e numericamente in [10] ed in [9]. È stato perciò scelto di simulare questi test, al fine di confrontare i risultati numerici ottenuti con le diverse stime presenti negli articoli.

8.3.1 Formulazione analitica

In questo paragrafo viene riportata la soluzione analitica sviluppata in [9], che fornisce una stima del carico necessario al raggiungimento della totale delaminazione, nel caso in cui questa si attivi all'estremità del rinforzo o in corrispondenza del gap. Il modello prende in considerazione il caso di delaminazione a livello dell'interfaccia e l'ipotesi di comportamento elastoplastico dell'acciaio.

La geometria studiata è rappresentata in figura 8.5, corrispondente ad un provino di tipologia 2. Per la prova sperimentale è stata utilizzata un'unica

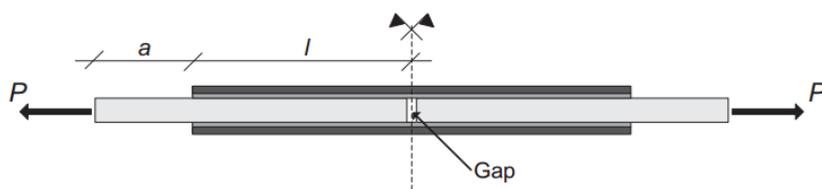


Figura 8.5: Geometria considerata per la formulazione analitica [9].

piastra d'acciaio dimensionata in modo tale che la delaminazione inizi agli estremi in seguito alla plasticizzazione dell'acciaio.

Nella soluzione analitica è invece stata considerata la presenza di un gap, come mostrato in figura 8.5.

Per l'acciaio si assume una legge costitutiva di tipo elasto-plastico con incrudimento lineare. La relazione costitutiva è quindi:

$$\begin{cases} \epsilon_{el} = \frac{\sigma}{E_s} \\ \epsilon_{pl} = \frac{\sigma - \sigma_y}{B_s} \\ \epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl} \end{cases} \quad (8.1)$$

in cui

$$B_s = \frac{H_s E_s}{E_s - H_s} \quad (8.2)$$

essendo E_s e H_s rispettivamente i moduli elastico e di incrudimento dell'acciaio.

Nel caso in cui il carico venga applicato in maniera quasi statica (energia cinetica trascurabile) e considerando un sistema di tipo adiabatico, il bilancio dell'energia durante la fase di propagazione della delaminazione è il seguente:

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial U_e}{\partial A} + \frac{\partial U_p}{\partial A} + \frac{\partial \Gamma}{\partial A} \quad (8.3)$$

dove W è il lavoro esterno, U_e è l'energia di deformazione elastica, U_p è l'energia di deformazione plastica, Γ è l'energia di superficie e con ∂A si intende l'incremento infinitesimo di superficie dovuto all'avanzamento del fronte di delaminazione.

Ne segue la seguente espressione per il tasso di energia rilasciata:

$$G = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} = \frac{1}{2b_f} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = \frac{1}{2b_f} \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial U_e}{\partial a} - \frac{\partial U_p}{\partial a} \right) \quad (8.4)$$

avendo considerato che la nuova superficie creata dalla delaminazione è pari a $A = 2b_f a$, dove b_f è la larghezza dell'unione. La delaminazione comincia a propagare quando G raggiunge l'energia di frattura G_c . Sia N_f la forza

assiale nella piastra di rinforzo. La sua espressione può essere valutata imponendo la congruenza in direzione orizzontale. Lo scorrimento a taglio γ_a nell'adesivo è dato da

$$\gamma_a = \frac{u_s - u_f}{t_a} \quad (8.5)$$

dove u_s e u_f sono rispettivamente gli spostamenti orizzontali di acciaio e rinforzo, mentre con t_a si indica lo spessore dell'adesivo.

Differenziando rispetto all'ascissa x , orientata nella direzione longitudinale delle piastre, l'equazione 8.5 diventa:

$$t_a \frac{d\gamma_a}{dx} = \epsilon_s - \epsilon_f \quad (8.6)$$

in cui ϵ_s e ϵ_f sono le deformazioni longitudinali rispettivamente di acciaio e rinforzo. Ipotizzando che l'acciaio rimanga elastico lungo la porzione in cui è incollato al rinforzo, le deformazioni possono essere espresse in funzione delle forze assiali N_s e N_f come segue:

$$\epsilon_s = \frac{N_s}{E_s A_s} \quad \epsilon_f = \frac{N_f}{E_f A_f} \quad (8.7)$$

Imponendo l'equilibrio globale dell'unione in direzione orizzontale si ha

$$N_s = P - 2N_f \quad (8.8)$$

mentre imponendo l'equilibrio per il rinforzo si ottiene

$$\tau_a = -\frac{1}{b_a} \frac{dN_f}{dx} \quad (8.9)$$

dove τ_a è lo sforzo di taglio nell'adesivo.

Combinando tra loro le equazioni (8.6), (8.7) e (8.8) si ricava:

$$t_a \frac{d\gamma_a}{dx} = \frac{P}{E_s A_s} - N_f \left(\frac{1}{E_f A_f} + \frac{2}{E_s A_s} \right) \quad (8.10)$$

Dopodiché ipotizzando per l'adesivo un comportamento elastico lineare e sfruttando l'equazione (8.9) si ottiene:

$$\gamma_a = \frac{\tau_a}{G_a} = -\frac{1}{B_a G_a} \frac{dN_f}{dx} \quad (8.11)$$

in cui G_a è il modulo elastico a taglio dell'adesivo.

Sostituendo (8.11) in (8.10) si ottiene l'equazione differenziale che governa la distribuzione della forza assiale nel rinforzo:

$$\frac{t_a}{b_a G_a} \frac{d^2 N_f}{dx^2} = \left(\frac{1}{E_f A_f} + \frac{2}{E_s A_s} \right) N_f - \frac{P}{E_s A_s} \quad (8.12)$$

Considerando un rinforzo sufficientemente lungo, la soluzione dell'equazione (8.12) è del tipo

$$N_f = Ae^{-\lambda x} + \frac{P}{2 + \frac{E_s A_s}{E_f A_f}} \quad (8.13)$$

in cui i coefficienti A e λ dipendono dal valore del carico applicato P , dai parametri meccanici dei materiali e dalle caratteristiche geometriche dell'adesivo.

Introducendo il parametro $\delta = \frac{E_s A_s}{2E_f A_f}$, che rappresenta una misura della disparità di rigidità assiale tra acciaio e rinforzo, e considerando una sezione del provino sufficientemente distante dall'estremità del rinforzo, in modo tale da rendere trascurabile il primo termine della (8.13), si ottengono le azioni assiali nel rinforzo e nella piastra di acciaio, quest'ultima ricavata sfruttando l'equazione (8.8):

$$\begin{aligned} N_f &= \frac{P}{2(\delta + 1)} \\ N_s &= \frac{P\delta}{\delta + 1} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Delaminazione all'estremo del rinforzo

Si ipotizza che il processo di delaminazione cominci all'estremità del rinforzo e, vista la simmetria del sistema, si assume che esso propaghi simmetricamente nelle due piastre.

In questo modo è possibile esprimere l'energia di deformazione elastica ed il lavoro esterno come segue:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{P^2}{E_s A_s} (a + b) + \frac{1}{2} \frac{N_s^2}{E_s A_s} (l - b) + \frac{1}{2} \frac{N_f^2}{E_f A_f} (l - b) \quad (8.15)$$

$$W = P \left[\frac{N_s}{E_s A_s} (l - b) + \left(\frac{\sigma_y}{E_s} + \frac{P/A_s - \sigma_y}{H_s} \right) (a + b) \right] \quad (8.16)$$

L'energia di deformazione plastica è data invece da:

$$U_p = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{P}{A_s} + \sigma_y \right) \left(\frac{P/A_s - \sigma_y}{H_s} \right) + \frac{1}{E_s} \left[\sigma_y^2 - \left(\frac{P}{A_s} \right)^2 \right] \right\} A_s (a + b) \quad (8.17)$$

A questo punto è possibile ottenere l'espressione per la ERR G , nel caso in cui l'acciaio si comporti in maniera elasto-plastica, sostituendo le equazioni (8.15), (8.16) e (8.17) nella (8.4):

$$G = \frac{1}{4b_f} \left[P^2 \left(\frac{E_s(1 + \delta) - H_s \delta}{E_s(1 + \delta) A_s H_s} \right) - P \left(2 \frac{\sigma_y}{B_s} \right) + \left(\frac{\sigma_y^2 A_s}{B_s} \right) \right] \quad (8.18)$$

Il carico P_{deb}^{el-pl} per il quale si ha il raggiungimento della delaminazione (*debonding load*) è quello per il quale G eguaglia l'energia di frattura G_c . La sua espressione, ricavata risolvendo l'equazione $G = G_c$, è la seguente:

$$P_{deb,end}^{el-pl} = \alpha\sigma_y A_s + 2A_s \sqrt{\frac{H_s}{t_s}(1+\delta)\gamma(G_c - \alpha G_p)} \quad (8.19)$$

in cui t_s è lo spessore della piastra d'acciaio e:

$$\alpha = \frac{(E_s - H_s)(1 + \delta)}{E_s(1 + \delta) - H_s\delta} \quad (8.20)$$

$$\gamma = \frac{E_s}{E_s(1 + \delta) - H_s\delta} \frac{b_f}{b_s} \quad (8.21)$$

mentre G_p è la ERR al limite elastico

$$G_p = \frac{1}{4b_f} \frac{P_y^2}{E_s A_s (1 + \delta)} \quad (8.22)$$

Ovviamente, la soluzione espressa dall'equazione (8.19) è valida solo nel caso in cui lo sforzo nell'acciaio supera quello di snervamento:

$$\sigma_{s-deb} = \frac{P_{deb,end}^{el-pl}}{A_s} = \alpha\sigma_y + 2\sqrt{\frac{H_s}{t_s}(1+\delta)\gamma(G_c - \alpha G_p)} \geq \sigma_y \quad (8.23)$$

Ciò si verifica quando è soddisfatta la disequaglianza

$$G_c \geq \frac{t_s(1 - \alpha)^2\sigma_y^2}{4\gamma(1 + \delta)H_s} + \alpha G_p \quad (8.24)$$

Ponendo $H_s = E_s$ si ottiene la stima presente in [10], valida in caso di comportamento elastico dell'acciaio:

$$P_{deb,end}^{el} = 2A_s \sqrt{\frac{E_s}{t_s}(\delta + 1)G_c} \quad (8.25)$$

Per un acciaio strutturale si ha $H_s \ll E_s$ e, se $b_s = b_f$, $\alpha \approx 1$ e $\gamma \approx \frac{1}{1-\delta}$. L'espressione del carico di delaminazione in questo caso diviene:

$$P_{deb,end}^{el-pl} \approx P_y + 2A_s \sqrt{\frac{H_s}{t_s}(G_c - G_p)} \quad (8.26)$$

ovvero diventa pari al carico di snervamento al quale si somma il carico che causa la delaminazione in caso di comportamento elastico lineare dell'acciaio con modulo elastico pari a H_s ed energia di frattura pari a $G_c - G_f$.

Delaminazione al gap

Facendo riferimento al caso di delaminazione che ha inizio in corrispondenza del gap, nel caso di comportamento elastico lineare l'espressione della ERR diventa, [10]:

$$G = \frac{1}{4b_a} \frac{\delta^2 P^2}{E_s A_s (\delta + 1)} \quad (8.27)$$

Come fatto in precedenza, ponendo $G = G_c$ si ricava il valore del carico limite:

$$P_{deb,gap}^{el} = \frac{2A_s}{\delta} \sqrt{\frac{E_s}{t_s} (\delta + 1) G_c} \quad (8.28)$$

In caso di comportamento elastico dell'acciaio, il carico di delaminazione è il minore tra i valori delle espressioni (8.25) e (8.28). È quindi immediato notare come, se $\delta < 1$, la delaminazione inizi in corrispondenza del gap, mentre nel caso in cui $\delta > 1$ essa comincia all'estremità del rinforzo.

Prendendo in considerazione il comportamento plastico dell'acciaio, il carico di delaminazione è invece dato da:

$$P_{deb}^{el-pl} = \min \begin{cases} \alpha P_y + 2A_s \sqrt{\frac{H_s}{t_s} (1 + \delta) \gamma (G_c - \alpha G_p)} \geq P_y \\ 2A_s \sqrt{\frac{E_s}{t_s} (\delta + 1) G_c} \leq P_y \\ \frac{2A_s}{\delta} \sqrt{\frac{E_s}{t_s} (\delta + 1) G_c} \end{cases} \quad (8.29)$$

8.4 Ancoraggio di tipologia 2

8.4.1 Materiali e modalità della prova

Per studiare l'interazione tra le deformazioni plastiche nell'acciaio sul processo di delaminazione, in [9] sono stati utilizzati due provini, dimensionati in modo tale che lo snervamento fosse raggiunto prima del processo di delaminazione.

I dati sulla geometria dei provini e sulle caratteristiche meccaniche dei materiali vengono riportati nelle tabelle 8.4.1 e 8.2. In figura 8.6 è rappresentato il legame costitutivo dell'acciaio utilizzato per la prova ed il modello elasto-plastico con incrudimento lineare utilizzato nel modello.

Provino	$L_{acciaio}$ (mm)	Sez. acciaio (mm)	L_{FRP} (mm)	Sez. FRP (mm)	Adesivo	$h_{adesivo}$ (mm)
R1	800	50 x 6	500	2 x 50 x 1.4	Sikadur 30	1.1
R2	800	50 x 5	500	2 x 50 x 1.4	Sikadur 30	1.1

Tabella 8.1: Geometria dei provini

Le prove sono state condotte sotto controllo di carico ad una velocità di 0.15 kN/s, utilizzando una macchina di prova idraulica con una cella di carico di capacità pari a 250 kN.

Proprietà	S275	Carbodur M514	Sikadur 30
Modulo elastico (MPa)	210000	197000	4500
Modulo elastico a taglio (MPa)	80769	71636	1730.8
Sforzo di snervamento (MPa)	330	/	/
Modulo di hardening (MPa)	800	/	/

Tabella 8.2: Proprietà meccaniche dei materiali

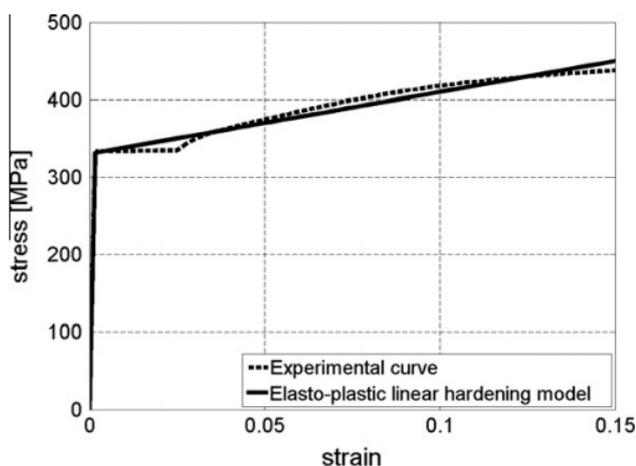


Figura 8.6: Legame costitutivo dell'acciaio utilizzato [9].

	Provino	R1	R2
Carico di snervamento (kN)		95	84
Allungamento a snervamento (mm)		1.53	1.66
Carico di delaminazione (kN)		101	88
Allungamento a delaminazione (mm)		21.3	28.1

Tabella 8.3: Risultati sperimentali

La seguente tabella mostra i risultati sperimentali ottenuti in [9].
I parametri dell'interfaccia sono i seguenti:

$$\phi_n = \phi_t = 0.815 N/mm$$

$$\sigma_{max} = \tau_{max} = 21.75 MPa$$

L'energia di frattura è stata scelta in [9] in modo tale da minimizzare la discrepanza tra i risultati forniti dal modello numerico utilizzato (implementato dagli autori sul software ABAQUS) ed i risultati sperimentali. Lo sforzo tangenziale massimo è invece stato scelto in modo tale che la rigidità secante iniziale nel modello coesivo riproducesse il comportamento elastico a taglio dell'adesivo, il quale dipende dal valore del modulo elastico tangenziale G_a e dallo spessore t_a dell'adesivo stesso. Va comunque sottolineato

$l_{ch,Hill}$	339 mm
$l_{ch,DCB}$	2.76 mm
$l_{ch,ENF}$	10.90 mm

Tabella 8.4: Stime della lunghezza della zona coesiva, ottenute utilizzando le formule (5.40), (5.41) e (5.42).

che in [62] è stato dimostrato che il valore dello sforzo massimo tangenziale non influisce sul valore di picco della curva carico-spostamento, se la lunghezza di incollaggio è sufficiente a far sì che la zona di processo si sviluppi interamente, circostanza che nelle prove analizzate è sempre verificata.

Essendo il modo II largamente predominante, per semplicità i parametri dell'interfaccia in direzione normale sono stati assunti pari a quelli in direzione tangenziale, allo stesso modo di quanto fatto in [10] e [9].

8.4.2 Stima della lunghezza coesiva

Per la scelta della mesh si è proceduto stimando la lunghezza della zona coesiva. Le diverse stime, ottenute con le espressioni descritte al paragrafo 7.4.1 sono riportate in tabella 8.4.

Nonostante ci si aspetti che lo stato di sforzo sia dominato dagli sforzi di taglio, in prossimità del bordo del rinforzo si ha comunque la presenza di sforzi di trazione. Per la scelta della mesh si è utilizzata la stima derivante dalla soluzione del DCB: la taglia degli elementi in prossimità dell'estremo del rinforzo, in cui si aspetta l'attivazione della delaminazione, è stata presa pari a 1.5 mm. La stessa taglia è stata utilizzata per i primi 10 elementi che discretizzano la zona d'acciaio non legata al rinforzo: questa è infatti la prima zona che tende a plasticizzare ed assumere una taglia maggiore per questi elementi (per i quali viene utilizzato un unico punto di Gauss nel piano) causerebbe una propagazione repentina della plasticizzazione. Per gli altri elementi è stata adottata una taglia di 10 mm, in quanto lontani dal fronte di delaminazione e soggetti perciò ad uno stato di sforzo uniforme.

La mesh utilizzata è rappresentata in figura 8.7.

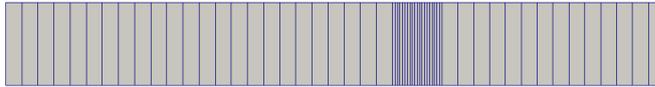


Figura 8.7: Discretizzazione utilizzata per la prova di tipologia 2: nel piano è formata da 58 elementi e 118 nodi.

8.4.3 Risultati ottenuti

Gli aspetti critici per la simulazione numerica di questa prova sperimentale mediante il codice implementato sono sostanzialmente due:

- la prova è condotta in regime quasi statico, in quanto ad una velocità di carico pari a 0.15 kN/s corrispondono spostamenti nell'ordine di 0.001 mm/s;
- lo spostamento al quale si innesca la delaminazione è elevato.

La prova è stata quindi simulata utilizzando sia l'algoritmo di *velocity smoothing*, che lo smorzamento alla Rayleigh, che hanno permesso di ottenere buoni risultati seppure con una velocità di spostamento imposto nel modello numerico molto elevata rispetto al valore sperimentale e pari a 20 mm/s.

I risultati ottenuti sono rappresentati nelle figure 8.8 e 8.9. I valori di spostamento e carico a delaminazione sono riportati nella tabella 8.5.

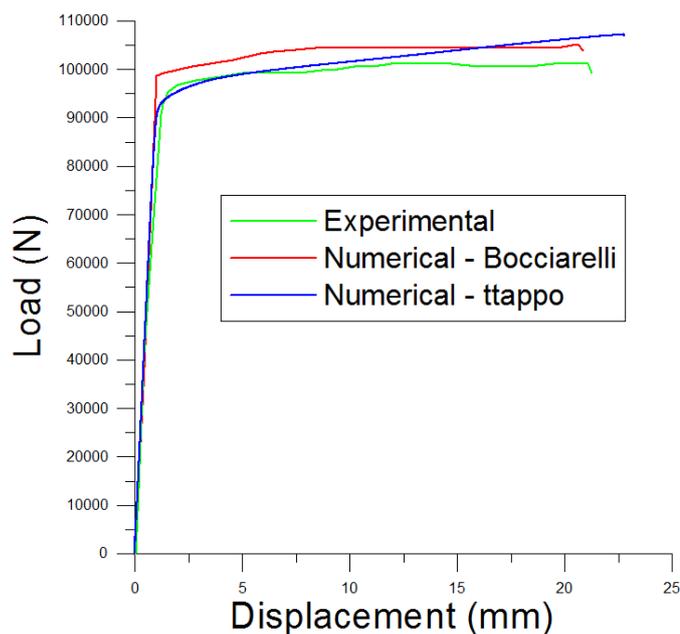


Figura 8.8: Curve carico-spostamento per il provino R1.

Come si può notare dal confronto tra i valori riportati nelle tabelle 8.3 e 8.5, i carichi di delaminazione ottenuti numericamente per entrambi i provini sono più elevati rispetto a quelli ottenuti in [9] ed ai risultati analitici. Questo accade perché nelle simulazioni numeriche si plasticizza parte dell'acciaio legato al CFRP (in prossimità dell'estremità del rinforzo) prima che avvenga la delaminazione. Le stime analitiche, invece, prevedono che l'acciaio possa

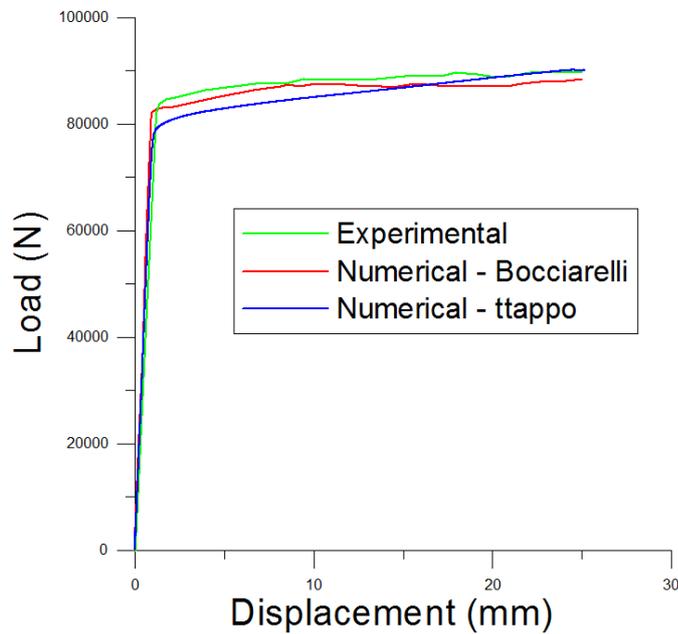


Figura 8.9: Curve carico-spostamento per il provino R2.

	d_{cr} (mm)	P_{cr} (kN)
R1	22.78	107.2
R2	25.14	90.0

Tabella 8.5: Risultati numerici ottenuti per i due provini in termini di spostamento e carico a delaminazione (rispettivamente d_{cr} e P_{cr}).

plasticizzarsi soltanto al di fuori del rinforzo e conseguentemente forniscono un valore minore di carico a delaminazione.

Dai grafici si nota una buona corrispondenza nella parte elastica della risposta e nella prima fase di plasticizzazione dell'acciaio. Dopodiché il carico nel modello numerico elaborato continua a crescere, a causa dell'ipotesi di hardening lineare, mentre nei risultati sperimentali e nel modello in [9] il carico raggiunge un plateau meglio definito.

9

Conclusioni

Questo lavoro di tesi ha avuto come obiettivo quello di introdurre in un codice di calcolo la possibilità di modellare fenomeni di delaminazione. Prima della modifica apportata, il codice, sviluppato nel Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale (DICA) del Politecnico di Milano, era in grado di modellare fenomeni di frattura e taglio in strutture sottili; la possibilità di analizzare la delaminazione può essere quindi vista come un completamento del codice, che diviene capace non solo di caratterizzare processi di frattura perpendicolari al piano della struttura, ma anche di fratturare il materiale nel suo piano, tra le lamine che lo compongono.

A questo scopo, sono stati implementati nel codice diversi modelli coesivi, scelti tra quelli più citati in letteratura.

Il funzionamento del codice è stato dapprima testato mediante la modellazione di prove di delaminazione in modo puro (test DCB ed ENF). Queste simulazioni sono servite, oltre che a provare il corretto funzionamento del codice per tutte le leggi coesive implementate, a stabilire quali di queste leggi fornissero i risultati migliori nella fase di propagazione della delaminazione, nella quale viene rilasciata energia a livello dell'interfaccia e la risposta globale della struttura può essere quindi affetta da oscillazioni. Essendo che l'interfaccia in entrambi test viene caricata in un'unica direzione (modo puro), l'efficacia delle leggi coesive nella simulazione di queste prove dipende unicamente dalla forma del legame tra sforzi e spostamenti relativi. È risultato evidente come la caratteristica più importante sia l'aspetto del ramo di softening della legge, che deve raggiungere gradualmente la rottura al fine garantire un rilascio dell'energia non improvviso. Le leggi che rispondono questa caratteristica sono la legge van den Bosch e la legge PPR, per la quale occorre scegliere opportunamente i parametri di forma. Le simulazioni sono servite altresì a stabilire un criterio valido per la scelta (a priori) della discretizzazione del dominio; in tal senso, è stato stimato che la dimensione della zona coesiva, che è possibile stimare attraverso opportune formule, debba essere pari a circa 1.7 volte la dimensione degli elementi nella direzione di propagazione della delaminazione. Il numero di punti di Gauss è risultato

invece sostanzialmente ininfluenza sull'ampiezza delle oscillazioni.

Il codice è stato in seguito utilizzato per lo studio di processi di delaminazione più rilevanti dal punto di vista dell'ingegneria civile. Tra di essi, è stato scelto di analizzare il comportamento di travi soggette a flessione, sulla cui superficie tesa viene incollata una piastra di rinforzo. Questo metodo di riabilitazione strutturale sta infatti acquisendo una popolarità crescente e per questo motivo lo studio delle condizioni di carico per le quali avviene il distacco del rinforzo è di fondamentale importanza. I risultati ottenuti sono stati confrontati con dati sperimentali e numerici ottenuti da altri autori, con i quali hanno mostrato un'ottima corrispondenza.

Si è scelto infine di simulare una prova di laboratorio, che prevede di caricare a trazione una piastra di acciaio sulla quale vengono incollate piastre di rinforzo in CFRP. La prova è stata elaborata per analizzare l'unione acciaio-CFRP e studiare l'interazione tra delaminazione e deformazioni plastiche nell'acciaio. I risultati numerici sono stati confrontati con i dati sperimentali, quelli numerici ottenuti da altri autori e con stime analitiche, mostrando una buona corrispondenza.

In base ai risultati delle analisi, si può quindi affermare che il codice è ora in grado di simulare efficacemente i processi di delaminazione.

Il problema principale legato all'utilizzo di strumenti di meccanica della frattura per le applicazioni civili riguarda la scelta dei parametri dell'interfaccia e del modello al quale vanno applicati. In particolare, è stato mostrato come nel problema della trave rinforzata il modellare lo strato adesivo con elementi solidi cambi significativamente la distribuzione degli sforzi all'interfaccia. Utilizzare gli stessi parametri di interfaccia nei due modelli porta infatti a differenze sostanziali nei risultati.

Un altro punto critico è costituito dai tempi di analisi, spesso di lunghezza considerevole, soprattutto quando l'interfaccia è caratterizzata da una lunghezza coesiva molto piccola, il che obbliga ad utilizzare una mesh molto fitta; in questi casi, i tempi di analisi possono diventare proibitivi.

Bibliografia

- [1] G. Alfano and M. A. Crisfield. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1701–1736, 2001.
- [2] Giulio Alfano. On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. *Composites Science and Technology*, 66(6):723–730, 2006.
- [3] O. Allix and a. Corigliano. Modeling and in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture*, 77(2):111–140, 1996.
- [4] Ted L Anderson and TL Anderson. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 2005.
- [5] G. Bao and Z. Suo. Remarks on Crack-Bridging Concepts, 1992.
- [6] G.I. Barenblatt. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. general ideas and hypotheses. axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(3):622–636, 1959.
- [7] Ted Belytschko, Brian Moran, and Wk Liu. *Nonlinear finite element analysis for continua and structures*, 1999.
- [8] ML Benzeggagh and M Kenane. Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus. *Composites science and technology*, 56(4):439–449, 1996.
- [9] Massimiliano Bocciarelli and Pierluigi Colombi. Elasto-plastic debonding strength of tensile steel/cfrp joints. *Engineering Fracture Mechanics*, 85:59–72, 2012.
- [10] Massimiliano Bocciarelli, Pierluigi Colombi, Giulia Fava, and Carlo Poggi. Prediction of debonding strength of tensile steel/cfrp joints using fracture mechanics and stress based criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(2):299–313, 2009.
- [11] G.T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2899–2938, 1996.
- [12] P. P. Camanho, C. G. Davila, M. F. de Moura, and M F De Moura. Journal of Composite Materials. *Journal of composite materials*, 37(16):1415–1438, 2003.

BIBLIOGRAFIA

- [13] Pedro P. Camanho and Carlos G. Dávila. NASA Technical Memorandum 211737 Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. *Nasa/Tm-2002-211737*, (June), 2002.
- [14] Herzl Chai and Martin YM Chiang. A crack propagation criterion based on local shear strain in adhesive bonds subjected to shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(10):1669–1689, 1996.
- [15] G Cocchetti, M Pagani, and U Perego. Selective mass scaling for distorted solid-shell elements in explicit dynamics: optimal scaling factor and stable time step estimate. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(9):700–731, 2015.
- [16] Giuseppe Cocchetti, Mara Pagani, and Umberto Perego. Selective mass scaling and critical time-step estimate for explicit dynamics analyses with solid-shell elements. *Computers and Structures*, 127:39–52, 2013.
- [17] Federica Confalonieri, Aldo Ghisi, and Umberto Perego. 8-node solid-shell elements selective mass scaling for explicit dynamic analysis of layered thin-walled structures. *Computational Mechanics*, 56(4):585–599, 2015.
- [18] A Corigliano. Damage and fracture mechanics techniques for composite structures. *Comprehensive structural integrity*, 3:459–539, 2003.
- [19] Alberto Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20):2779–2811, 1993.
- [20] Alberto Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20):2779–2811, 1993.
- [21] Alberto Corigliano and Olivier Allix. Some aspects of interlaminar degradation in composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185:203–224, 2000.
- [22] Alberto Corigliano, Stefano Mariani, and Anna Pandolfi. Numerical modeling of rate-dependent debonding processes in composites. *Composite Structures*, 61(1-2):39–50, 2003.
- [23] Alberto Corigliano, Stefano Mariani, and Anna Pandolfi. Numerical analysis of rate-dependent dynamic composite delamination. *Composites Science and Technology*, 66(6):766–775, 2006.
- [24] Alberto Corigliano and Michele Ricci. Rate-dependent interface models: formulation and numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 38(4):547–576, 2001.

-
- [25] DS Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2):100–104, 1960.
- [26] Sabrina Fawzia, Riadh Al-Mahaidi, and Xiao-Ling Zhao. Experimental and finite element analysis of a double strap joint between steel plates and normal modulus cfrp. *Composite structures*, 75(1):156–162, 2006.
- [27] B. Ferracuti, M. Savoia, and C. Mazzotti. Interface law for FRP-concrete delamination. *Composite Structures*, 80(4):523–531, 2007.
- [28] H. Hadavinia, L. Kawashita, A. J. Kinloch, D. R. Moore, and J. G. Williams. A numerical analysis of the elastic-plastic peel test. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(16):2324–2335, 2006.
- [29] Paul W. Harper and Stephen R. Hallett. Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(16):4774–4792, 2008.
- [30] A. Hillerborg, M. Modeer, and P-E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements Hillerborg 1976.pdf, 1976.
- [31] J. L. Högberg. Mixed mode cohesive law. *International Journal of Fracture*, 141(3-4):549–559, 2006.
- [32] Christian Holmqvist and Hanna Bruce. Modelling adhesion in packaging materials. *TVSM*, 2013.
- [33] L. Iannucci. Dynamic delamination modelling using interface elements. *Computers and Structures*, 84(15-16):1029–1048, 2006.
- [34] Gordon R. Johnson and Stephen R. Beissel. Damping algorithms and effects for explicit dynamics computations. *International Journal of Impact Engineering*, 25(9):911–925, 2001.
- [35] LM Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [36] MF Kanninen. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest. *International Journal of fracture*, 9(1):83–92, 1973.
- [37] A. J. Kinloch, C. C. Lau, and J. G. Williams. The peeling of flexible laminates. *International Journal of Fracture*, 66(1):45–70, 1994.
- [38] P Ladeveze and A Corigliano. Damage analysis of interlaminar fracture specimens 0. 31:61–74, 1995.

BIBLIOGRAFIA

- [39] Roberta Massabo and Brian N. Cox. Concepts for bridged Mode II delamination cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(6):1265–1300, 1999.
- [40] Gilad Mulian and Oded Rabinovitch. Debonding dynamics in FRP plated beams: high order cohesive FE formulation and parametric sensitivity. *International Journal of Fracture*, 195(1-2):53–78, 2015.
- [41] Gilad Mulian and Oded Rabinovitch. Experimental and analytical study of the dynamic debonding in frp plated beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2016.
- [42] P Naghipour, M Bartsch, L Chernova, J Hausmann, and H Voggenreiter. Effect of fiber angle orientation and stacking sequence on mixed mode fracture toughness of carbon fiber reinforced plastics: Numerical and experimental investigations. *Materials Science and Engineering: A*, 527(3):509–517, 2010.
- [43] Mara Pagani. An explicit finite element computational strategy for the simulation of blade cutting of thin shells. (February):155, 2013.
- [44] Kyoungsoo Park, Glaucio H. Paulino, and Jeffery R. Roesler. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(6):891–908, 2009.
- [45] S. T. Pinho, L. Iannucci, and P. Robinson. Formulation and implementation of decohesion elements in an explicit finite element code. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(5):778–789, 2006.
- [46] Jaime Planas and Manuel Elices. Nonlinear fracture of cohesive materials. In *Current Trends in Concrete Fracture Research*, pages 139–157. Springer, 1991.
- [47] Y. Qiu, M. A. Crisfield, and G. Alfano. An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(16):1755–1776, 2001.
- [48] Oded Rabinovitch. Dynamic edge debonding in frp strengthened beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 47:309–326, 2014.
- [49] Oded Rabinovitch. An extended high order cohesive interface approach to the debonding analysis of frp strengthened beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 81:1–16, 2014.
- [50] Yu N Rabotnov. Creep rupture. In *Applied mechanics*, pages 342–349. Springer, 1969.

-
- [51] J. R. Rice. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379, 1968.
- [52] JCJ Schellekens and R De Borst. On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(1):43–66, 1993.
- [53] Marco Schwarze and Stefanie Reese. A reduced integration solid-shell finite element based on the eas and the ans concept—geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(10):1322–1355, 2009.
- [54] Amir Shojaei, Guoqiang Li, P. J. Tan, and Jacob Fish. Dynamic delamination in laminated fiber reinforced composites: A continuum damage mechanics approach. *International Journal of Solids and Structures*, 71:262–276, 2015.
- [55] E Smith. The effect of the stress-relative displacement law on failure predictions using the cohesive zone model. *International journal of fracture*, 99(1-2):41–51, 1999.
- [56] Scott T Smith and JG Teng. Interfacial stresses in plated beams. *Engineering structures*, 23(7):857–871, 2001.
- [57] A. Turon, P. P. Camanho, J. Costa, and C. G. Davila. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, 38(11):1072–1089, 2006.
- [58] A. Turon, C. G. Davila, P. P. Camanho, and J. Costa. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1665–1682, 2007.
- [59] M. J. van den Bosch, P. J G Schreurs, and M. G D Geers. An improved description of the exponential Xu and Needleman cohesive zone law for mixed-mode decohesion. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(9):1220–1234, 2006.
- [60] K Yu Volokh and A Needleman. Buckling of sandwich beams with compliant interfaces. *Computers & structures*, 80(14):1329–1335, 2002.
- [61] JM Whitney and NJ Pagano. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 37(4):1031–1036, 1970.

BIBLIOGRAFIA

- [62] Zhishen Wu, Hong Yuan, and Hedong Niu. Stress transfer and fracture propagation in different kinds of adhesive joints. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(5):562–573, 2002.
- [63] SH Xia and JG Teng. Behaviour of frp-to-steel bonded joints. In *Proceedings of the international symposium on bond behaviour of FRP in structures*, pages 419–26. International Institute for FRP in Construction, 2005.
- [64] Ming Xie and Vistasp M Karbhari. Peel test for characterization of polymer composite/concrete interface. *Journal of composite materials*, 31(18):1806–1825, 1997.
- [65] X-P Xu and A Needleman. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1(2):111, 1993.
- [66] Lin Ye. Role of matrix resin in delamination onset and growth in composite laminates. *Composites science and technology*, 33(4):257–277, 1988.
- [67] Xiao-Ling Zhao and Lei Zhang. State-of-the-art review on frp strengthened steel structures. *Engineering Structures*, 29(8):1808–1823, 2007.