

# POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento Delle Scienze e Tecnologie Aerospaziali

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica



STATO DELL'ARTE DEL METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE

Tesi di Laurea Magistrale

Waffo Gatchuessi Clovis Paterson

Matricola 784405

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>9</b>
1.1	Considerazioni Generali . . . . .	9
1.2	Approssimazione funzionale . . . . .	11
1.3	Coefficienti di Ponderazione . . . . .	11
1.4	Generalità sulle Condizioni al Contorno . . . . .	12
<b>2</b>	<b>METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE (DQM)</b>	<b>13</b>
2.1	Generalità su DQM . . . . .	13
2.2	Approcci risolutivi . . . . .	14
2.2.1	Approcci di Bellman . . . . .	14
2.2.2	Approccio di Quan e Chang . . . . .	16
2.2.3	Approccio di Quan e Chang: coefficienti di secondo ordine . . . . .	17
2.3	Discretizzazione del dominio . . . . .	17
2.3.1	Discretizzazione uniforme . . . . .	18
2.3.2	Discretizzazione non uniforme . . . . .	18
<b>3</b>	<b>METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE GENERALIZZATO (GDQM)</b>	<b>22</b>
3.1	Generalità sul GDQM . . . . .	22
3.2	Metodo di Quadratura Differenziale Polinomiale (PDQM) . . . . .	23
3.2.1	Generalità su PDQM . . . . .	23
3.2.2	Calcolo dei coefficienti di ponderazione . . . . .	24
3.2.3	Applicazioni del PDQM . . . . .	25
3.3	Metodo di quadrature Differenziale Armonico (HDQM) . . . . .	26
3.3.1	Generalità su HDQM . . . . .	26
3.3.2	Calcolo dei coefficienti di ponderazione . . . . .	28
3.3.3	Applicazioni del HDQM . . . . .	29
<b>4</b>	<b>ALTRI METODI BASATI SU DQM E GDQM</b>	<b>33</b>
4.1	Generalità . . . . .	33

4.2	Metodo di Quadratura Differenziale Multi-dominio (MDDQM)	33
4.3	Metodo di Quadratura Differenziale Generalizzato Locale (LG-DQM)	35
4.4	Metodo di Quadratura Differenziale Random (RDQM)	38
4.5	Metodo di Quadrature Differenziale Incrementale (IDQM)	40
4.6	State Space-based Differential Quadrature Method (SSDQM)	40
4.7	Ritz e Metodo di Quadrature Differenziale (Ritz-DQM)	40
4.8	Metodo di Quadrature Differenziale basato sui Minimi quadrati (MLSDQM)	41
4.9	Metodo di Quadrature Differenziale basato sulla Spline (SD-QM)	41
<b>5</b>	<b>CONDIZIONI AL CONTORNO</b>	<b>42</b>
5.1	Introduzione	42
5.2	Approccio con $\delta$ tecnica chiamato DQN	43
5.3	$\delta$ -tecnica	43
5.4	Approccio senza $\delta$ tecnica chiamato DQU	43
5.4.1	Modificazione delle coefficienti della matrice (MWCM)	43
5.4.2	Sostituzione delle condizioni al contorno negli equazioni di governo (SBCGE)	48
5.4.3	Accoppiamento delle condizioni al contorno all'interno dell'equazione di governo (CBCGE)	49
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONE</b>	<b>50</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>51</b>

# Elenco delle figure

1	Schema a blocchi delle famiglie DQM . . . . .	7
2	. . . . .	8
2.1	integrale delle funzione $f$ nell'intervallo $[a, b]$ . . . . .	14
2.2	Leggi di distribuzione dei nodi nell'intervallo $[0, 1]$ . . . . .	20
2.3	Leggi di distribuzione dei nodi nell'intervallo $[0, 1]$ . . . . .	21
3.1	Pulsazioni adimensionalizzate di una piastra rettangolare S-S-S-S I/II . . . . .	26
3.2	Pulsazioni adimensionalizzate di una piastra rettangolare S-S-S-S II/II . . . . .	27
3.3	Confronto frequenze esatte con DQM e HDQM [23] . . . . .	30
3.4	Prime dieci frequenze di una piastra quadrata di lato $2m$ laminata non simmetrica C-C-F-F[24] . . . . .	31
3.5	Prime forme modali della piastra quadrata [24] . . . . .	32
4.1	Mappatura di un elemento quadratico: (a) dominio fisico (b) dominio computazionale[37] . . . . .	34
4.2	Piastra appoggiata composta da due materiali elastici, con carico distribuito $q$ [37] . . . . .	35
4.3	Sforzi ottenuti mediante DQM e ABAQUS in corrispondenza della discontinuità $y = \frac{H}{2}$ della piastra composta[37] . . . . .	36
4.4	Sforzi ottenuti mediante MDDQM e ABAQUS in corrispondenza della discontinuità $y = \frac{H}{2}$ della piastra composta[37] . . . . .	37
4.5	Relazione tra punti punti . . . . .	39
5.1	Influenza della $\delta - tecnica$ sulla suddivisione uniforme . . . . .	44
5.2	Influenza della $\delta - tecnica$ sulla suddivisione <i>Chebyshev gauss lobatto</i> . . . . .	45
5.3	Influenza della $\delta - tecnica$ sulla suddivisione quadratica . . . . .	46
5.4	Influenza della $\delta - tecnica$ sulla suddivisione <i>Chebyshev</i> Tipo I . . . . .	47
5.5	Influenza della $\delta - tecnica$ sulla suddivisione <i>Chebyshev</i> Tipo II . . . . .	47

5.6 Influenza della  $\delta$  – *tecnica* sulla suddivisione *Legendre* . . . . 48

# Prefazione

Questo documento nasce dalla curiosità di capire il metodo di quadratura differenziale (DQM) che rischia di essere quello preferito dai scienziati rispetto al famoso Metodo agli Elementi Finiti (FEM) nei prossimi anni. Si articola in sei capitoli all'interno dei quali si tenta di dare al lettore un inquadramento generale sul metodo, il suo utilizzo e le varie ramificazioni. All'interno del primo capitolo, che si occupa dell'introduzione generale, si presenta la nascita del metodo, le difficoltà incontrate e come viene classificato. Si continua poi nel secondo capitolo dove viene presentato il metodo DQM originale, i suoi problemi e come sono stati risolti per quanto possibile. Si parla delle varie discretizzazioni del dominio che vengono utilizzati nell'intento di migliorare il comportamento della soluzione. Nel terzo capitolo si presenta la forma evoluta del DQM ovvero il metodo di quadratura differenziale generalizzato (GDQM). Il GDQM viene diviso in metodo di quadratura differenziale polinomiale (PDQM) e in metodo di quadratura differenziale armonica (HDQM), essendo questo ultimo metodo considerato da molti autore come una sotto classe del GDQM. Vengono presentati alcuni risultati che ne evidenziano le differenze. Nel capitolo quattro ci siamo concentrati sulle varianti del metodo che derivano dalle due sotto classe (PDQM e HDQM), cercando di dare un'idea di che cos'è, citando dei riferimenti per chi fosse interessato all'argomento. Quindi viene presentato il metodo di quadratura differenziale multi-dominio (MDDQM), il metodo di quadratura differenziale generalizzato locale (LG-DQM), e in modo molto breve, il Metodo di Quadratura Differenziale Random (RDQM), il Metodo di Quadratura Differenziale Incrementale (IDQM), lo "State Space-based Differential Quadrature Method" (SSDQM), il "Ritz differential quadrature method" (Ritz-DQM), il Metodo di Quadrature Differenziale basato sui Minimi quadrati (MLSDQM) e il Metodo di Quadrature Differenziale basato sulla Spline (SDQM). Nel capitolo quinto si presenta le varie tecniche d'implementazione delle condizioni al contorno in particolare la  $\delta$  - tecnica e una breve descrizione delle tecniche del "Modifying Weighing Coefficient Matrices" (MWCM), "Substituting Boundary Conditions into Governing Equations" (SBCGE) e del "Coupling Boundary Conditions

with Governing Equation" (CBCGE). L'ultimo capitolo conclusivo è seguito dalla bibliografia chiudono il documento.

Figura 1: Schema a blocchi delle famiglie DQM

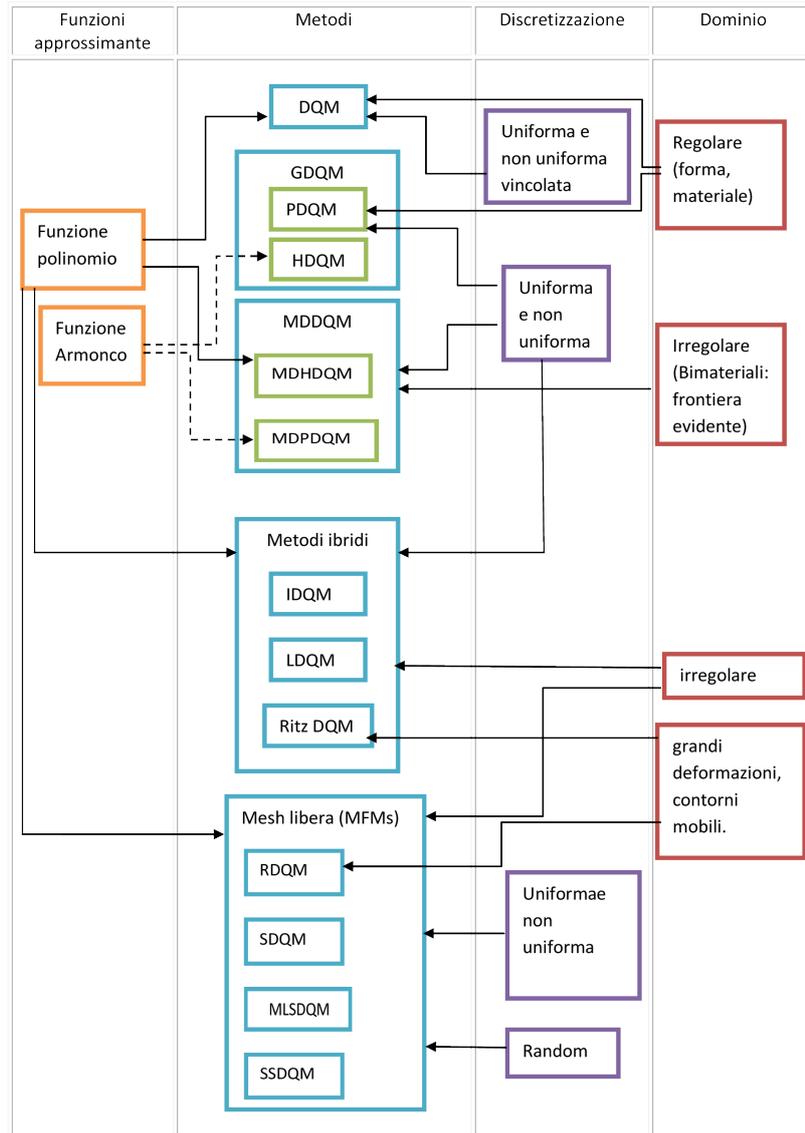


Figura 2:

**Elenco acronimi**

DQM	Differential Quadrature Method
FE-DQ	Finite Element-Differential Quadrature
GDQM	Generalized Differential Quadrature Method
HDQM	Harmonic Differential Quadrature Method
IDQM	Incremental Differential Quadrature Method
LDQM	Local Differential Quadrature Method
MDPDQM	Multi-Domain Polynomial Differential Quadrature Method
MDHDQM	Multi-Domain Harmonic Differential Quadrature Method
MDDQM	Multi-Domain Differential Quadrature Method
MFMs	Mesh-Free Methods
MLSDQM	Moving Least Squares Differential Quadrature Method
PDQM	Polynomial Differential Quadrature Method
RDQM	Random Differential Quadrature Method
SDQM	Spline-based Differential Quadrature Method
SSDQM	State-Space-based Differential Quadrature Method

# Capitolo 1

## INTRODUZIONE

### 1.1 Considerazioni Generali

In questo lavoro cerchiamo di presentare lo stato dell'arte del metodo di quadratura differenziale Differential Quadrature Method (DQM). Si tratta sostanzialmente di dare una panoramica del metodo. I problemi ingegneristici sono retti da equazioni differenziali e nella maggior parte dei casi questi equazioni sono difficili da risolvere se non impossibili di trovarne delle soluzioni in forme chiuse. Lo sviluppo dei computer sempre più potente ha reso possibile lo sviluppo dei metodi numerici per risolvere i problemi differenziali, metodi che vengono sempre più migliorati se non ripensati nello scopo di raggiungere ottime efficienze. In maniera generale i metodi numerici trasformano il problema espresso nel dominio continuo in un problema nel dominio discontinuo e permette così di trovare la soluzione approssimata in alcuni punti detti nodi del dominio. Questa soluzione viene poi interpolata per riportare il problema nel dominio continuo. Tra i metodi numerici per la risoluzione dei problemi differenziali si può contare il metodo alle differenze finite (FDM), metodi agli elementi finiti (FEM), il metodo ai volumi finiti (FVM) e i metodi dei residui pesati (FWR) come il metodo di Galerkin e il metodo di collocazione, che hanno la particolarità di utilizzare come tecnica di approssimazione degli interpolatore di basso grado per valutare la funzione ai nodi per cui vengono chiamati metodi di basso ordine [1]. In questi casi per arrivare alla convergenza servono un numero sempre più elevato di nodi il che vuol dire un costo computazionale sempre più elevato, non solo, ma anche i tempi di calcoli si allungano. Di più in alcuni problemi ingegneristiche come problemi di analisi modali non servono avere tanti nodi di discretizzazione anche perché ai fini pratici ne servono solo i primi modi. Questa inconvenienza può essere risolta usando dei metodi così dette Global methods [1], ovvero

metodi globali che sfruttano più informazione sulla funzione. Il metodo di quadratura differenziale (DQM) rientra in questa categoria. In particolare, lo sfruttamento di ulteriori informazioni sulla funzione aumenta il grado di convergenza del metodo, la sua accuratezza e la sua efficienza computazionale. Questo fa sì che il metodo converga con solo pochi punti di discretizzazione. Il DQM è stato sviluppato per la prima volta nei anni 1971 da Bellman and Casti [2][3]. Viene successivamente applicato ai vari problemi ingegneristiche. In particolare, Civan l'ha applicato alla risoluzione dell'equazione di Poisson [4], alla risoluzione dei problemi multidimensionali [5], Mingle invece l'ha applicato ai problemi di transizione della diffusione non lineare [6]. Nei ultimi anni c'è stato un interesse crescente a questo metodo e in particolare la sua applicazione nel campo della meccanica dei continui proprio per la loro efficienza di convergenza con pochi nodi. La vera rivoluzione del metodo viene da Shu che formulò un approccio generale del methodo chiamato metodo di quadratura differenziale generalizzato (GDQM) con vantaggi che vedremo nei prossimi capitoli.

L'idea del DQM si basa sulla scrittura della derivata di una funzione in un punto (nodo) come una combinazione lineare dei valori della funzione stessa valutata in tutti i nodi del dominio lungo una linea coordinata. I coefficienti della combinazione che sono i pesi o coefficienti di ponderazione dipendono dall'ordine di derivazione della funzione. Prendendo un caso bidimensionale in un dominio rettangolare dove è definita la funzione  $f(x, y)$ , avremmo che:

$$\frac{\partial^n f(x_i, y_j)}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^{N_x} a_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j) \quad \frac{\partial^m f(x_i, y_j)}{\partial y^m} = \sum_{k=1}^{N_y} b_{jk}^{(m)} f(x_i, y_k) \quad (1.1)$$

Per  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  dove  $N_x, N_y$  sono i numeri dei nodi nella direzione  $x$  e nella direzione  $y$  rispettivamente.  $a_{ik}^{(n)}$  e  $b_{jk}^{(m)}$  sono i coefficienti di ponderazione della combinazione lineare per la derivata di ordine  $n$  e  $m$  della funzione  $f(x, y)$  rispetto a  $x$  lungo la linea coordinata  $y_i$  e rispetto a  $y$  lungo la linea coordinata  $x_i$  rispettivamente. La formula (1.1) permette di collocare l'equazione di governo del problema fisico nei nodi di discretizzazione, trasformando il problema differenziale ordinario in un problema algebrico vincolato alle condizioni al contorno. La difficoltà maggiore in questa tecnica sta da una parte nel determinare i vari coefficienti di ponderazione della combinazione  $a_{ik}^{(n)}$  e  $b_{jk}^{(m)}$  e dall'altra parte l'integrazione delle condizioni al contorno. Questa ultima è stata la causa per cui durante tanti anni il DQM è stato ignorato fino a quando Bert e i suoi collaboratori sono riusciti a proporre una via d'uscita [7] [8].

## 1.2 Approssimazione funzionale

I problemi differenziali difficilmente vengono risolti in forma chiusa perciò le soluzioni vengono approssimate. In pratica si tratta di trovare una funzione approssimante che al meglio rappresenta la soluzione del problema analizzato tenendo in considerazione l'impatto della discretizzazione sulla qualità del risultato. L'approssimazione funzionale e la discretizzazione del dominio sono alla base dei vari metodi numerici in generale e hanno portato alla proliferazione delle tecniche di risoluzione dei problemi ingegneristiche, ma molto spesso questa proliferazione è dovuta a varie tipologie di problemi che richiedono attenzioni diverse. In particolare nella DQM introdotta inizialmente da Bellman [2][3], veniva usata una approssimazione polinomiale particolare con dei limiti che vedremo sia a livello del polinomio che al livello della discretizzazione. Nel GDQM introdotto da Shu, è stato possibile levare questi limiti. Sempre nel GDQM, diverse approssimazioni della funzione portano il metodo di quadratura differenziale ad essere diviso in due grandi classi[9]

1. Metodo di Quadratura Differenziale Polinomiale (PDQM) In questo caso la funzione approssimante è un polinomio scelto appositamente e anche in base al tipo di problema fisico da risolvere. Questa classe è indicata soprattutto per approssimare i problemi retti da funzioni non periodiche.
2. Fourier expansion-based quadrature Method (FDQM) In questo caso la funzione approssimante ha la struttura di una serie di Fourier. Questa classe è indicata soprattutto per approssimare i problemi retti da funzioni periodiche.

Altre varianti che vedremo sono classificate in base al tipo di discretizzazione.

## 1.3 Coefficienti di Ponderazione

La determinazione dei coefficienti di Ponderazione è stata una delle prime sfide che hanno dovuto affrontare i primi protagonisti del metodo DQM in particolare Bellman e suoi associati [1]. Hanno inizialmente proposto due metodi per il calcolo dei coefficienti associati al primo ordine di derivazione, cioè quando nella formula (1.1),  $m = n = 1$ . Ma questi metodi incontrarono subito delle difficoltà. Il primo metodo, che era basato sulla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche per la determinazione dei coefficienti di ponderazione si confrontò al problema di mal condizionamento della matrice

del sistema, particolarmente quando il numero dei nodi si avvicinava ai 13 nodi. Il secondo metodo, basato sul fatto che i nodi dovendo essere radici di un polinomio "shiftato" di Legendre era vincolato alla non arbitarietà dei nodi. Il che significava che non si poteva discretizzare il dominio liberamente. Ulteriori sviluppi effettuati da Shu hanno permesso di formulare un approccio generalizzato del methodo chiamato GDQM o "Generalized Differential Quadrature Method", del calcolo dei coefficienti di ponderazione,  $a_{ik}^{(n)}$  e  $b_{jk}^{(m)}$ , del primo ordine  $n = m = 1$  e soprattutto una formula ricorsiva per il calcolo dei coefficienti di ponderazione di ordini superiori  $n > 1, m > 1$ .

## 1.4 Generalità sulle Condizioni al Contorno

L'applicazione delle condizioni al contorno costituisce un altro problema del metodo di quadratura differenziale. Se per ogni punto ci fosse una sola condizione al contorno non ci sarebbero problemi. Nel caso della meccanica delle strutture si ha molto spesso a che fare con problemi che hanno delle condizioni di vincolo ridondanti, in quanto l'equazione del problema è una, mentre le condizioni al contorno sono più di una. L'implementazione di questi tipi di condizioni al contorno richiede una particolare attenzione per evitare una situazione di stallo. Questo aspetto della meccanica delle strutture ha contribuito grandemente al perfezionamento del metodo DQM. Per implementare le condizioni al contorno esistono vari metodi che vedremo, ciascuno con i propri vantaggi e svantaggi.

Nel seguito cercheremo di dare una panoramica delle tecniche che risultano dal metodo di quadratura differenziale. Incominceremo con la presentazione del DQM come fu introdotto all'origine e le sue difficoltà. Parleremo successivamente della versione evoluta ovvero il metodo di quadratura differenziale generalizzata (GDQM) che ha dato una svolta considerevole al metodo DQM iniziale. Procederemo poi presentando altri sviluppi sempre in accordo con il tema seguito da un accenno alle condizioni al contorno che ci porterà alla conclusione.

## Capitolo 2

# METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE (DQM)

### 2.1 Generalità su DQM

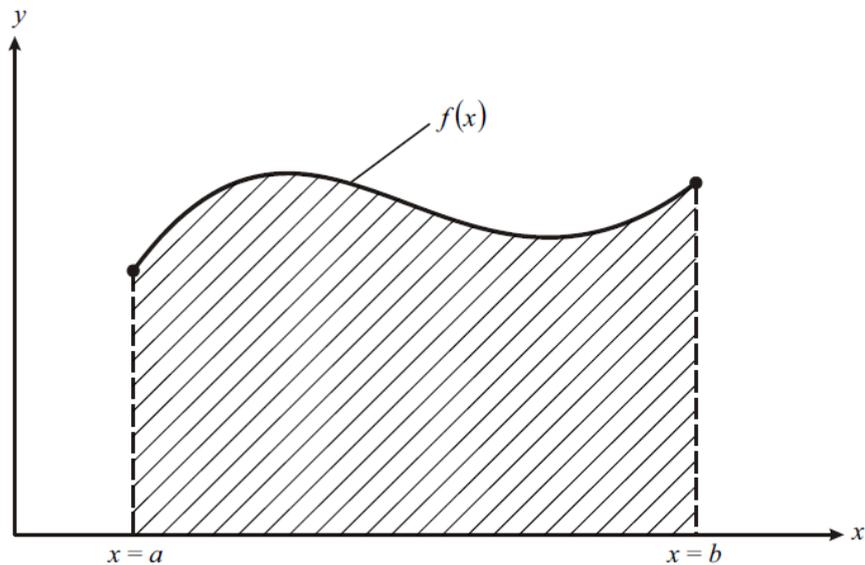
In questo capitolo cerchiamo di presentare il metodo di quadratura differenziale (DQM). Il DQM è particolarmente interessante per la sua semplicità applicativa. Come già accennato, dato un problema differenziale alle derivate totali o parziali, la soluzione in forma chiusa è difficile da trovare. L'obiettivo del metodo di quadratura differenziale è quello di trovarne una soluzione approssimata. Il DQM si basa sull'approssimazione della derivata rispetto alla coordinata spaziale, ma anche temporale, di una funzione (soluzione) in un punto (nodo) con una combinazione lineare dei valori della funzione stessa valutata in tutti i nodi del dominio lungo una linea coordinata. Il metodo è stato introdotto da Bellman e i suoi associati negli anni 1971 e 1972 [2],[3], ispirandosi dal metodo di quadratura integrale (IQM) di cui l'espressione è rappresentata dall'equazione (2.1). Tale equazione approssima l'area sotto la curva  $f(x)$  limitata in  $x = a$  e  $x = b$  (figura(2.1)).

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N \int_a^b p(x) dx f(x_i) = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i). \quad (2.1)$$

Per  $i = 1, \dots, N$ , dove  $N$  è il numero dei nodi.

La formula di quadratura integrale mostra che i coefficienti di ponderazione dipendono dalla scelta della funzione  $p(x)$  e di conseguenza questa scelta condiziona la soluzione. Questo mostra il legame forte tra funzione approssimante e la soluzione. Nel caso di quadratura differenziale la formula ha la stessa struttura, i coefficienti di ponderazione dipendono dalla funzione approssimante. Vari approcci risolutivi si basano sulla scelta di quelle

Figura 2.1: integrale delle funzione  $f$  nell'intervallo  $[a, b]$



funzioni approssimanti e della discretizzazione del dominio che influenza la convergenza.

## 2.2 Approcci risolutivi

Il metodo come definito a quell'epoca presentava dei problemi non del tutto indifferente ovvero, i protagonisti rendendosi conto della difficoltà legata alla determinazione dei coefficienti di ponderazione, hanno suggerito due approcci per calcolare almeno quelli associati alla derivata del primo ordine della funzione. Il primo approccio viene introdotto da Bellman [1] ed era la soluzione di un sistema di equazioni algebrici, successivamente viene migliorato da Quan and Chang (1989) [15], e il secondo approccio doveva utilizzare una formulazione algebrica semplice ma con l'inconveniente di dover scegliere come punti nodali i radici dei polinomi shiftati di Legendre.

### 2.2.1 Approcci di Bellman

E' ben noto dal primo teorema di *Weierstrass* che se  $f(x)$  è una funzione continua a valori reali definita nell'intervallo chiuso  $[a, b]$ , allora esiste una sequenza di polinomi  $p_N(x)$  che converge uniformemente a  $f(x)$  al tendere di

$N$  all'infinito. Nei due primi approcci di bellman, i polinomi vengono scelti come funzioni di base.

### 1. Primo Approccio di Bellman.

In questo primo approccio particolarizzato a un caso mono dimensionale, le funzioni di base scelte da Bellman sono fati come nell'equazione (2.2).

$$p_k = x^{k-1} \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Quindi  $p_k$  sostituirà  $f$  nella formula (1.1), considerando il problema monodimensionale, che a sua volta sarà collocata ai nodi del dominio fornendo un sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite descritto dal sistema (2.3).

$$\frac{dp_k(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} x_j^{k-1} = (k-1)x_i^{k-2} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

La matrice del sistema (2.3) è di dimensione  $N \times N$  ed viene chiamata matrice di *Vandermonde*. Quella matrice era ben conosciuta nel campo ingegneristico per il suo carattere di mal condizionamento. Maggior parte delle applicazioni del DQM nel campo ingegneristico si sono basati sul primo approccio ma questo ottimismo è stato superato rapidamente perche al crescere del numero dei nodi, cioè la dimensione della matrice di *Vandermonde*, il suo carattere di mal condizionamento si faceva sentire. Questo significava che la matrice del sistema diventava difficilmente invertibile e di conseguenza il calcolo dei coefficienti di ponderazione, per un numero elevato di nodi, diventava impossibile. Indicativamente questo approccio perdeva la sua efficacia al raggiungere di un numero di nodi pari a 13. Per ovviare a questa difficoltà vengono provati più tentativi tra cui la risoluzione del problema del mal condizionamento della matrice attraverso l'algoritmo di Bjorck and Pereyra (1970), algoritmo che esisteva già a quei tempi visto che il problema di mal condizionamento era frequente nel mondo ingegneristico. Ma questo tentativo ha permesso di incrementare i nodi di discretizzazione da 13 nodi come accennato in precedenza fino a 31 nodi. Quindi il problema rimaneva anche se migliorato ma non solo rimaneva anche il problema del calcolo dei coefficienti per le derivate di ordine superiori.

### 2. Secondo Approccio di Bellman

A differenza del caso precedente ed analogamente alla formula d'interpolazione di Lagrange, in questo approccio le funzioni di base scelte

sono i polinomi espressi nella formula (2.4).

$$p_k(x) = \frac{L_N^*(x)}{(x - x_k)L_N^{*(1)}(x_k)} \quad k = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Dove  $L_N^*(x)$  rappresenta il polinomio shiftato di Legendre di grado  $N$ ,  $L_N^{*(1)}(x_k)$  la sua derivata.

Con questa formulazione Bellman e Kashef [3] hanno dimostrato che con una discretizzazione in cui nodi sono radici del polinomio  $L_N$  si puo calcolare i coefficienti di ponderazione come segue:

$$a_{ik}^{(1)} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k)L_N^{(1)}(x_k)} \quad i \neq k \quad a_{ik}^{(1)} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad i = k \quad (2.5)$$

si vede che questo procedimento consente di calcolare direttamente i coefficienti  $a_{ik}^{(1)}$  senza risolvere nessun sistema algebrico, pero presenta la debolezza che la discretizzazione è vincolata ai radici del polinomio di Legendre. Con questa tecnica il calcolo dei coefficienti di ponderazione è abbastanza semplice. Ad ogni modo, questo approccio non è flessibile come il precedente poiché, in questo caso, le  $N$  coordinate dei punti nodali non possono essere scelte arbitrariamente; motivo per cui come anticipato questo approccio non è stato molto sollecitato dal punto di vista applicativo rispetto al primo.

## 2.2.2 Approccio di Quan e Chang

Con l'intento di migliorare i risultati ottenuti da Bellman, un altro approccio viene proposto da Quan and Chang (1989) [15] attraverso l'utilizzo del polinomio interpolatore di Lagrange come funzione base per ottenere una formulazione esplicita che permette il calcolo dei coefficienti di ponderazione del primo e del secondo ordine di derivazione.

$$p_k(x) = \frac{l(x)}{(x - x_k)l^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

dove

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (2.7)$$

$$a_{ik}^{(1)} = \frac{1}{(x_j - x_i)} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \quad i \neq k \quad a_{ii}^{(1)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} \quad i = k \quad (2.8)$$

Come per il secondo approccio di Bellman, il calcolo dei coefficienti di ponderazione è abbastanza semplice usando delle relazioni tipo (2.8) ma, a differenza di quella di Bellman (2.5), le formule trovate possono essere applicate senza nessuna restrizione sulla scelta dei punti nodali.

### 2.2.3 Approccio di Quan e Chang: coefficienti di secondo ordine

L'equazione differenziale di secondo ordine viene espressa come segue:

$$f''(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} f(x_j) \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Successivamente Quan e Chang [15] hanno ricavato le formule (2.10),(2.11) per il calcolo dei coefficienti di ponderazione di secondo ordine,  $a_{ik}^{(2)}$ , sempre attraverso l'utilizzo del polinomio interpolatore di Lagrange come funzione base. E questo è stato un passo considerevole perché si poteva già affrontare i problemi differenziali di secondo ordine.

$$a_{ik}^{(2)} = \frac{2}{(x_j - x_i)} \left( \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left( \sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad i \neq k \quad (2.10)$$

$$a_{ii}^{(2)} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left( \frac{1}{x_i - x_k} \left( \sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right) \quad i = k \quad (2.11)$$

## 2.3 Discretizzazione del dominio

Nel risolvere il problema numerico, un passo fondamentale da compiere è la discretizzazione del dominio. Molto spesso veniva scelto esclusivamente una distribuzione uniforme dei nodi per la risoluzione dei problemi di meccanica delle strutture. Anche se funzionava bene per certi tipi di problemi funzionava invece male per altri, ad esempio i problemi coinvolgendo l'analisi di buckling delle strutture in compositi. La discretizzazione uniforme non garantisce sempre la stabilità e la convergenza rapida. In modo generale esistono due classi di distribuzione: la distribuzione uniforme e la distribuzione non uniforme. Questa ultima classe ha dei vantaggi di qualità superiore in termine di accuratezza e di stabilità. Di solito la distribuzione dei punti viene fatta in un intervallo adimensionale  $[0, 1]$  seguendo una legge dipendente dall'indice che varia tra 1 e  $N$ . Questi punti vengono successivamente utilizzati per ricavare i nodi nell'intervallo di definizione della funzione.

Se  $N$  è il numero di punti di suddivisione del dominio,  $[a, b]$  l'intervallo di definizione della funzione nella direzione  $x$ ,  $a \leq x \leq b$ , considerando un intervallo  $[0, 1]$  adimensionale di variabile  $\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ , costituito da  $N$  punti, avremo  $\xi = (x - a)/(b - a)$  e quindi data la legge di distribuzione nell'intervallo  $[0, 1]$  è possibile ricavare le  $x$ .

### 2.3.1 Discretizzazione uniforme

E' la scelta semplice e naturale per la disposizione dei punti nodali. I punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.12)[36].

$$\xi_k = \frac{k - 1}{N - 1} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Questa distribuzione non è molto prestante.

### 2.3.2 Discretizzazione non uniforme

La distribuzione non uniforme favorisce l'accuratezza e la convergenza. Ne esistono più tipi di distribuzione che vengono utilizzati nel DQM che sono[36]:

1. Discretizzazione *Chebyshev – Gauss – Labatto*.

Questo tipo di discretizzazione fornisce ottime qualità di accuratezza, convergenza e stabilità. I punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.13)

$$\xi_k = \frac{1 - \cos(\pi \frac{k-1}{N-1})}{2} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

2. Discretizzazione quadratica

I punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.14) e (2.15)[36].

$$\xi_k = 2\left(\frac{k - 1}{N - 1}\right)^2 \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N + 1}{2} \quad (2.14)$$

e

$$\xi_k = -2\left(\frac{k - 1}{N - 1}\right)^2 + 4\left(\frac{k - 1}{N - 1}\right) - 1 \quad k = \frac{N + 1}{2} + 1, \dots, N - 1, N \quad (2.15)$$

3. Discretizzazione secondo le radici del polinomio di *Chebyshev* di prima specie (I tipo)  $r_k$  essendo radice del polinomio  $k$ -esimo di *Chebyshev*, i punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.16)[36].

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}. \quad r_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N}\right). \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.16)$$

4. Discretizzazione secondo le radici del polinomio di *Chebyshev* di seconda specie (II tipo)  $r_k$  essendo radice del polinomio  $k$ -esimo di *Chebyshev*, i punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.17)[36].

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}. \quad r_k = \cos\left(\pi \frac{k}{N+1}\right). \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

5. Discretizzazione secondo le radici del polinomio di *Legendre*  $r_k$  essendo radice del polinomio  $k$ -esimo di *Legendre*, i punti nodali vengono individuati mediante la relazione (2.18)[36]).

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}. \quad r_k = \left(1 - \frac{1}{8N^2} + \frac{1}{8N^3}\right) \cos\left(\pi \frac{4k-1}{4N+2}\right). \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.18)$$

A partire da queste tipologie si può definire altre suddivisioni in modo da avere maggior o minor numero di punti nodali in prossimità degli estremi del dominio. Questa tecnica va sotto nome di *Stretching formulation*. In letteratura esistono molte altre forme di discretizzazione ma quelli citati sono più comuni.

Le figure (2.2) e (2.3) mostrano le leggi di distribuzione dei nodi esposte precedentemente. E' opportuno specificare che per la gestione delle condizioni al contorno esiste un metodo chiamato  $\delta$ -tecnica che vedremo nel capitolo cinque. In caso di utilizzo di quella tecnica che prevede l'esistenza un punto molto vicino al nodo di contorno, la distribuzione vera modificata leggermente. In effetti nelle figure di discretizzazione la parte (a) è senza  $\delta$ -punto e la (b) con  $\delta$ -punto.

Il metodo di quadratura differenziale come impostato presentava dei limiti non trascurabili. Gli sviluppi ulteriori hanno portato alla modificazione del metodo di quadratura differenziale e al raggiungimento delle forme che rendono più agevole l'utilizzo del metodo. Questo ulteriore studio viene chiamato metodo di quadratura differenziale generalizzato (GDQM) ed è una generalizzazione del metodo di quadratura differenziale (DQM). Nel prossimo capitolo cercheremo di esplicitarne l'idea e i risultati prodotti

Figura 2.2: Leggi di distribuzione dei nodi nell'intervallo  $[0, 1]$

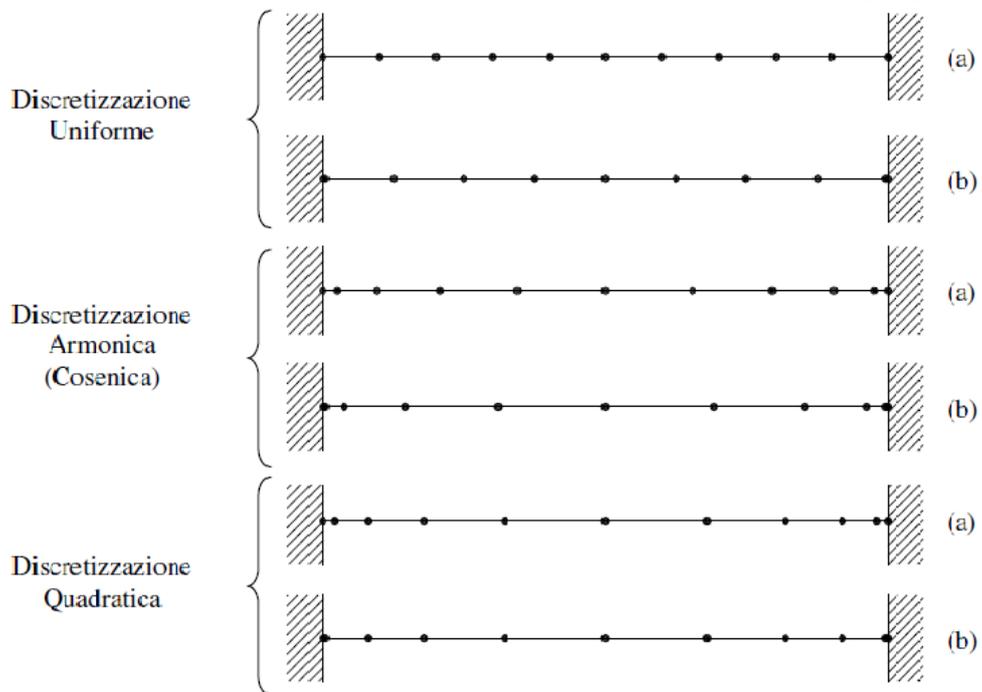
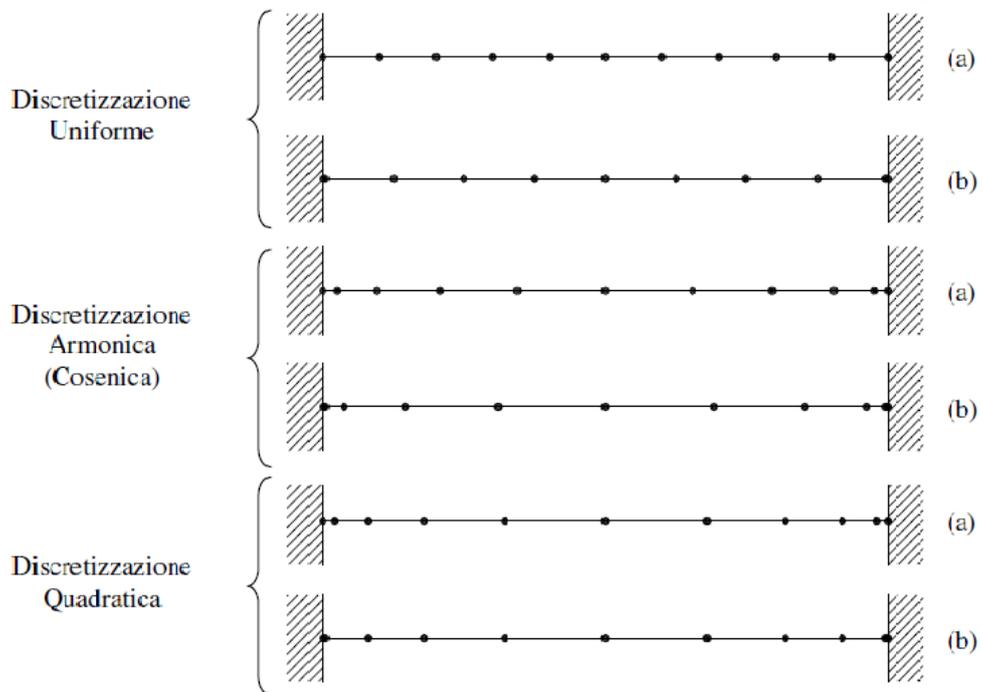


Figura 2.3: Leggi di distribuzione dei nodi nell'intervallo  $[0, 1]$



## Capitolo 3

# METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE GENERALIZZATO (GDQM)

### 3.1 Generalità sul GDQM

Il metodo di quadratura differenziale generalizzato (GDQM) è un miglioramento della DQM proposta da Shu (1991) [16] e da Shu e Richards (1991) [17] ed è basato sull'approssimazione polinomiale di ordine superiore. Shu ha dimostrato che con una semplice formulazione algebrica si poteva determinare i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione, di più la determinazione dei coefficienti di ponderazione relativi ai ordini superiori poteva essere fatta in modo ricorsivo una volta calcolati quelli del ordine precedente, e questo senza restrizione sulla scelta dei nodi. Ciò significa che avendo a disposizione i coefficienti di primo ordine si poteva calcolare quelli del secondo ordine, poi da quelli del secondo ordine si poteva calcolare quelli del terzo ordine e così via. Shu ha sviluppato così un modo innovativo per calcolare i coefficienti di ponderazione per l'approssimazione delle derivate di qualsiasi ordine. La principale differenza tra i metodi di quadratura differenziali sta da una parte nella scelta della funzione base per approssimante e dall'altra parte nella tipologia di discretizzazione. Nell'approccio generalizzato di Shu, la scelta della funzione base di tipo polinomiale conduce al metodo di quadratura differenziale polinomiale (PDQM) in letteratura Polynomial Differential Quadrature Method, mentre la scelta della funzione base di tipo armonica o basata sull'espansione di serie di Fourier conduce al metodo di quadratura differenziale armonico (HDQM) in letteratura Harmonic Differential Quadrature Method[18]. Nel campo dell'analisi strutturale il GDQM

si è rilevato di elevata potenzialità per la sua precisione, efficienza e semplicità senza dimenticare l'aspetto del costo computazionale contenuto (Civan, Civan e Sliepcevich, Jand, Bert et al., Janget al.). Per completezza, gli sviluppi recenti hanno portato all'individuazione di una nuova classe di funzioni di base che dipendono dalla distanza radiale tra i punti della discretizzazione nota in letteratura come RBFs (Radial Basis Functions) [18], il metodo che ne risulta viene chiamato RBFsDQM ovvero Radial Basis Functions-differential quadrature method. Sempre con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale, il GDQM può essere utilizzato in forma locale. Questa tecnica va sotto il nome di metodo di quadratura differenziale generalizzato locale (LGDQ) in letteratura *LocalGeneralizedDifferentialQuadrature* [18]. Di seguito procederemo esponendo brevemente i metodi racchiusi nel GDQM.

## 3.2 Metodo di Quadratura Differenziale Polinomiale (PDQM)

### 3.2.1 Generalità su PDQM

Abbiamo già detto che la tecnica di quadrature differenziale approssima la derivata di una funzione rispetto a una variabile con una combinazione lineare dei valori della funzione stessa in tutti i punti di discretizzazione. Il problema fondamentale è il calcolo dei coefficienti della combinazione o coefficienti di ponderazione. I fondamenti del metodo GDQM si basa sull'analisi dello spazio vettoriale lineare e l'approssimazione funzionale. Shu nel 1991 sfruttò le proprietà dello spazio vettoriale polinomiale per mostrare che le formule di calcolo dei coefficienti di ponderazione nel PDQM possono essere generati attraverso una adeguata scelta di vettori base nello stesso spazio vettoriale polinomiale stesso[18]. Queste formule più tardi vengono presentati insieme a una relazione ricorsiva per il calcolo dei coefficienti relativi ai ordini superiori[17]. A traverso il teorema di *Weierstrass* una funzione continua nel suo dominio può essere approssimata uniformemente con una successione infinita di polinomi. In pratica basta una somma finita di polinomi di grado elevato. Se  $p_k(x), k = 1, 2, \dots, N$  è una base dello spazio vettoriale polinomiale la soluzione  $f(x)$  di un'equazione differenziale può essere approssimata con una combinazione lineare degli elementi della base che costituisce un polinomio di grado  $N - 1$  [18]

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k p_k(x) \quad (3.1)$$

Visto che in uno spazio vettoriale lineare ci sono diversi insiemi di polinomi base, per ogni insieme di polinomi base si avrà dei coefficienti di ponderazione di cui i valori dipendono dalla scelta della base. Questo fa sì che esistono vari approcci per il calcolo dei coefficienti di ponderazione inclusi quelli di Bellman visto in precedenza[18].

### 3.2.2 Calcolo dei coefficienti di ponderazione

Riguardando l'approccio di Shu è possibile definire i coefficienti di ponderazione usando due differenti insiemi di polinomi base.

1. Polinomi di Lagrange

$$p_k(x) = \frac{l(x)}{(x - x_k)l^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

dove

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (3.3)$$

2. Polinomi in forma monomio del tipo rappresentato nella formula (3.4)

$$p_k = x^{k-1} \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

#### Coefficienti di primo ordine

Utilizzando il primo tipo di polinomi base, cioè di Lagrange espresso nella formula(3.2), Shu ottiene il seguente risultato:

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{l^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)l^{(1)}(x_j)} \quad i \neq j \quad (3.5)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{l^{(2)}(x_i)}{2l^{(1)}(x_i)} \quad i = j \quad (3.6)$$

Questa formula (3.6) richiede la conoscenza della derivata seconda  $l^{(2)}(x_i)$ . Mentre usando il secondo tipo di polinomi base ovvero polinomi in forma monomio nella formula (3.4), i coefficienti  $a_{ii}^{(1)}$  prendono la forma (3.7) molto semplice.

$$a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)}, \quad i = j \quad (3.7)$$

### Coefficienti di secondo ordine

Shu dimostra poi come deve essere calcolato i coefficienti di secondo ordine (formula (3.8),(3.9))

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)}(a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{(x_i - x_j)}) \quad i \neq j \quad (3.8)$$

$$a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(2)} \quad i = j \quad (3.9)$$

### Coefficienti di ordine superiori

Se consideriamo n l'ordine di derivazione Shu dimostra che i coefficienti di ordine  $n$  si possono calcolare seguendo le formule (3.10),(3.11).

$$a_{ij}^{(2)} = n(a_{ij}^{(1)} a_{ii}^{(n-1)} - \frac{a_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)}) \quad i \neq j \quad (3.10)$$

$$a_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(n)} \quad i = j \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Applicazioni del PDQM

La tecnica del PDQM è stata applicata ai vari problemi tra cui il problema di vibrazione della piastra di spessore  $h$ , di lunghezza  $L_x$  lungo la coordinata  $x$ , di larghezza  $L_y$  lungo lacoordinata  $y$ , appoggiata sui quattro lati. I risultati sono stati poi confrontati con la soluzione ottenuta con il DQM e la soluzione ottenuta analiticamente[24]. I risultati sono presentati nella tabella immagine (3.1),(3.2).

Figura 3.1: Pulsazioni adimensionalizzate di una piastra rettangolare S-S-S-S I/II

$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.4$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ $12 \times 12$	PDQ $15 \times 15$
$\bar{\omega}_1$	11.4487	11.4487	11.4482
$\bar{\omega}_2$	16.1862	16.1826	16.1852
$\bar{\omega}_3$	24.0818	24.0529	24.0794
$\bar{\omega}_4$	35.1358	34.7326	35.1319
$\bar{\omega}_5$	41.0576	41.0592	41.0499
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ $12 \times 12$	PDQ $15 \times 15$
$\bar{\omega}_1$	14.2561	14.2561	14.2551
$\bar{\omega}_2$	27.4156	27.4161	27.4120
$\bar{\omega}_3$	43.8649	43.8665	43.8560
$\bar{\omega}_4$	49.3480	49.2377	49.3367
$\bar{\omega}_5$	57.0244	57.0258	57.0091

### 3.3 Metodo di quadrature Differenziale Armonico (HDQM)

#### 3.3.1 Generalità su HDQM

Il metodo di quadratura differenziale basato sulle funzioni armoniche o espansione di Fourier ha dimostrato essere un metodo vincente soprattutto per quanto riguarda l'analisi in frequenza di ordine elevato, l'analisi di bucking delle strutture rettangolari con grande rapporto di rastremazione [19]. Per questo tipo di analisi i risultati ottenuti dal metodo di quadratura differenziale polinomiale non sono abbastanza accurati, in particolare quando il rapporto di rastremazione superi un certo limite o quando il numero dei nodi distribuiti in modo equispaziati diventa sempre più elevato, indicativamente  $5 < N < 11$  [19], [20],[21],[22]. Il comportamento è dovuto anche alle caratteristiche delle funzioni polinomi [19]. Come anticipato la scelta delle funzioni base determina le differenze tra i metodi. Scegliendo una approssimazione attraverso l'espansione in serie di Fourier si ottiene il HDQM. In letteratura viene anche chiamato FDQM ovvero Fourier Expansion-based Differential Quadrature Method. A differenza del PDQM, il HDQM utilizza come vettori base dello spazio vettoriale trigonometrico di dimensione  $N$  i polinomi trigonometrici. In quello spazio trigonometrico è possibile individuare due

Figura 3.2: Pulsazioni adimensionalizzate di una piastra rettangolare S-S-S-S II/II

$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12x12	PDQ 15x15
$\bar{\omega}_1$	19.7392	19.7392	19.7374
$\bar{\omega}_2$	49.3480	49.3495	49.3367
$\bar{\omega}_3$	49.3480	49.3495	49.3367
$\bar{\omega}_4$	78.9568	78.9586	78.9278
$\bar{\omega}_5$	98.6960	98.4154	98.6510
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1.5$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12x12	GDQ (15x15)
$\bar{\omega}_1$	32.0762	32.0762	32.0741
$\bar{\omega}_2$	61.6850	61.6861	61.6772
$\bar{\omega}_3$	98.6960	98.6996	98.6760
$\bar{\omega}_4$	111.0330	110.7848	111.0077
$\bar{\omega}_5$	128.3049	128.3081	128.2709
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 2.5$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12x12	PDQ 15x15
$\bar{\omega}_1$	71.5564	71.5546	71.5508
$\bar{\omega}_2$	101.1634	101.1641	101.1558
$\bar{\omega}_3$	150.5115	150.3305	150.4947
$\bar{\omega}_4$	219.5987	217.0789	219.5710
$\bar{\omega}_5$	256.6097	256.6205	256.5611

\* A. W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [155].

\*\* C. Shu, H. Du, *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), 819-835 [155].

base:

$$f(x) = (1, \sin(x\pi), \cos(x\pi), \sin(2x\pi), \cos(2x\pi), \dots, \sin(x\frac{N-1}{2}\pi), \cos(x\frac{N-1}{2}\pi)). \quad (3.12)$$

$$g_k(x) = \pi G(x) 2 \sin(\pi \frac{x-x_k}{2}) G^{(1)}(x_k). \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

Dove  $G(x) = \prod_{j=1}^N \sin(\pi \frac{x-x_j}{2})$ .

Usando la base espressa in 3.13 si può calcolare i coefficienti di ponderazione seguendo il procedimento descritto in [18]. Per nostro scopo ne riportiamo solo i risultati .

### 3.3.2 Calcolo dei coefficienti di ponderazione

#### Coefficienti del primo ordine

I termini fuori dalla diagonale sono calcolabili dall'espressione seguente.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{\pi G^{(1)}(x_i)}{2 \sin(\pi \frac{x_i-x_j}{2}) G^{(1)}(x_j)}. \quad i \neq j \quad (3.14)$$

I termini nella diagonale si calcolano invece come segue:

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{G^{(2)}(x_i)}{2G^{(1)}(x_i)}. \quad i = j \quad (3.15)$$

#### Coefficienti di secondo ordine

I termini fuori dalla diagonale sono calcolabili dall'espressione seguente.

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} (2a_{ii}^{(1)} - \pi \cot(\pi \frac{x_i-x_j}{2})) \quad i \neq j \quad (3.16)$$

I termini nella diagonale si calcolano invece come segue:

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{G^{(3)}(x_i)}{3G^{(1)}(x_i)} + \frac{\pi^2}{12} \quad i = j \quad (3.17)$$

### Coefficienti di terzo ordine

I termini fuori dalla diagonale sono calcolabili dall'espressione seguente.

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(1)} \left( 3a_{ii}^{(2)} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} a_{ij}^{(2)} \cot\left(\pi \frac{x_i - x_j}{2}\right) \quad i \neq j \quad (3.18)$$

I termini nella diagonale si calcolano invece come segue

$$a_{ij}^{(3)} = \frac{G^{(4)}(x_i)}{4G^{(1)}(x_i)} + \frac{\pi^2}{4} a_{ii}^{(1)} \quad i = j \quad (3.19)$$

Con formule (3.14, 3.16, 3.18) si può trovare i coefficienti di ponderazione fuori dalla diagonale, relativi ai primi ordini, senza difficoltà. Mentre quelli nella diagonale, (3.19) ad esempio, si ricavano usando  $G^{(4)}(x_i)$  derivata di ordine una volta superiore a quello dei coefficienti che si sta calcolando. Anche in questo caso come nel caso del PDQM è dovuto alla base scelta. Se usassimo invece la prima base ovvero la base espresso in (3.12) Otterremo (3.20) molto più semplice.

$$a_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, N = 1, 2, 3, 4 \quad (3.20)$$

### 3.3.3 Applicazioni del HDQM

Nello scopo applicativo viene analizzato la vibrazione di una trave flessibile, soggetta a diverse condizioni al contorno. I risultati sono confrontati con i risultati analitici e quelli del metodo di quadrature differenziale. L'analisi viene fatta considerando diversi  $N$  [23]. L'equazione di governo è data da

$$\frac{d^4 u(X)}{dX^4} - \Omega^2 u = 0; \quad (3.21)$$

Dove  $u(X)$  è lo spostamento non adimensionale e  $X$  la coordinata adimensionale. Scrivendo l'equazione nella forma DQM

$$\sum_{j=1}^N D_{ij}^4 u_j - \Omega^2 u_i = 0; \quad i = 3, 4, \dots, N - 2 \quad (3.22)$$

In questa equazione,  $D_{ij}^4$  sono i coefficienti di ponderazione di quarto ordine che vengono calcolati secondo le formule del HDQM. Per l'implementazione delle condizioni al contorno è stato utilizzato il metodo di sostituzione di cui ne parleremo brevemente nel capitolo 4.  $\Omega$  è parente della frequenza propria  $\omega$  legati insieme attraverso l'espressione 3.23.

Figura 3.3: Confronto frequenze esatte con DQM e HDQM [23]

Support Conditions	Exact (Ref.19)		DQ (N=9) Type-II		HDQ (N=7) Type-I		HDQ (N=7) Type-II	
	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$
<b>C-C</b>	4.730	7.853	4.682	7.846	4.688	7.850	4.728	7.853
<b>C-F</b>	1.875	4.694	1.870	4.711	1.873	4.691	1.875	4.694
<b>C-G</b>	2.365	5.498	2.361	5.620	2.360	5.500	2.364	5.498
<b>G-S</b>	1.571	4.712	1.568	4.699	1.568	4.708	1.571	4.711
<b>C-S</b>	3.927	7.069	3.920	7.114	3.923	7.101	3.926	7.070

$$\Omega_i^2 = \rho AL^4 \omega_i^2 / EI \quad (3.23)$$

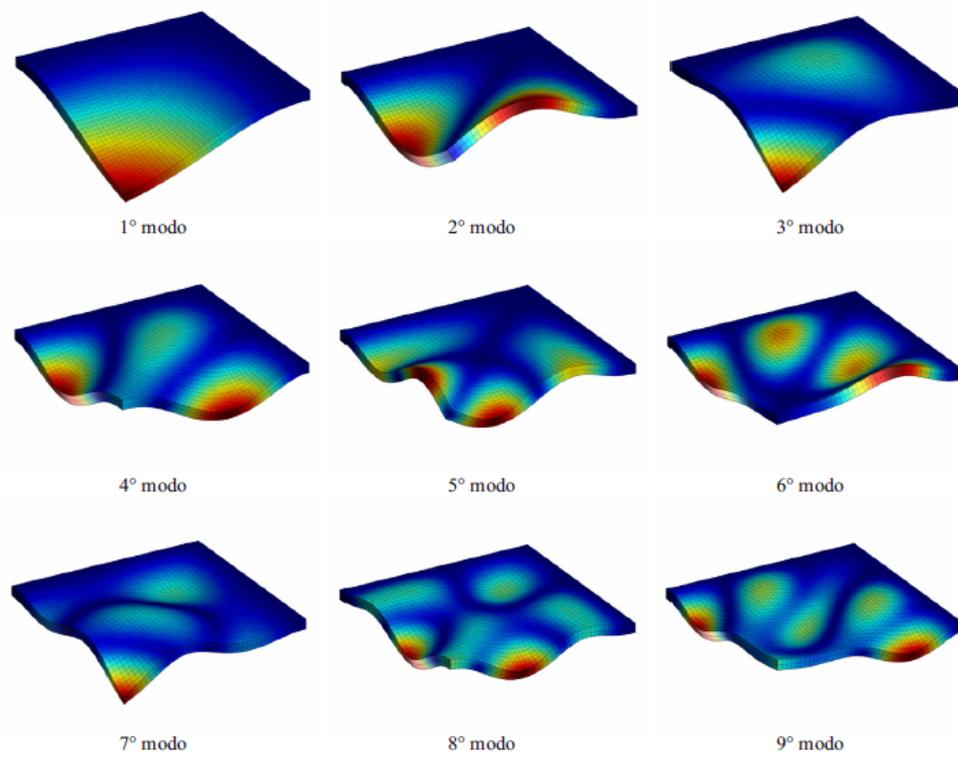
Nella tabella imagine(3.3) vengono esposti i risultati dell'analisi relativi alle due prime frequenze. Nella prima colonna abbiamo il tipo di vicolo, seguito dalla soluzione esatta nella seconda colonna. Si puo vedere come usando il metodo HDQ con sette nodi e una discretizzazione di tipo II, la prima fequenza è migliore rispetto al caso del DQM dove sono stati impiegati due nodi in più usando la stessa discretizzazione.

Il secondo esempio applicativo tratta una piastra quadrata di lato  $2m$  laminata non simmetrica, fatta in materiali compositi e incastrata sui due lati consecutivi e libera sui due altri. Le proprietà sono visibili nella tabella imagine (3.4) [24]. Un confronto dei risultati mostra chiaramente il vantaggio del GDQM rispetto al metodo FEM, in particolare il numero di nodi necessari per raggiungere una certa accuratezza risulta molto superiore nel caso del metodo FEM. Questo ha un impato considerevole dal punto di vista computazionale.

Figura 3.4: Prime dieci frequenze di una piastra quadrata di lato  $2m$  laminata non simmetrica C-C-F-F[24]

Caratteristiche geometriche: $L_x = L_y = 2m$ , $h = 0.1m$ Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9GPa$ , $E_2 = 8.96GPa$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1GPa$ , $G_{23} = 6.21GPa$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450Kg/m^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 40×40 (8 nodi)	Abaqus 40×40 (8 nodi)	Ansys 40×40 (8 nodi)	Straus 40×40 (8 nodi)	Pro/Mech 21×21 (GEM)
$f_1$	42.863	42.849	42.891	42.889	43.101	43.467	42.851
$f_2$	114.567	114.565	114.958	114.984	115.719	117.339	114.518
$f_3$	165.485	165.482	165.937	165.963	168.195	171.960	165.522
$f_4$	212.178	212.179	213.403	213.493	215.618	220.550	211.983
$f_5$	309.521	309.520	311.815	311.991	316.451	326.211	309.336
$f_6$	343.913	343.914	347.050	347.265	352.148	363.547	343.550
$f_7$	373.440	373.441	375.473	375.629	384.478	399.602	373.688
$f_8$	452.975	452.975	457.066	457.387	466.525	485.313	452.685
$f_9$	485.355	485.355	491.091	491.449	497.243	511.831	484.342
$f_{10}$	531.138	531.138	532.153	532.160	536.210	545.739	531.137

Figura 3.5: Prime forme modali della piastra quadrata [24]



## Capitolo 4

# ALTRI METODI BASATI SU DQM E GDQM

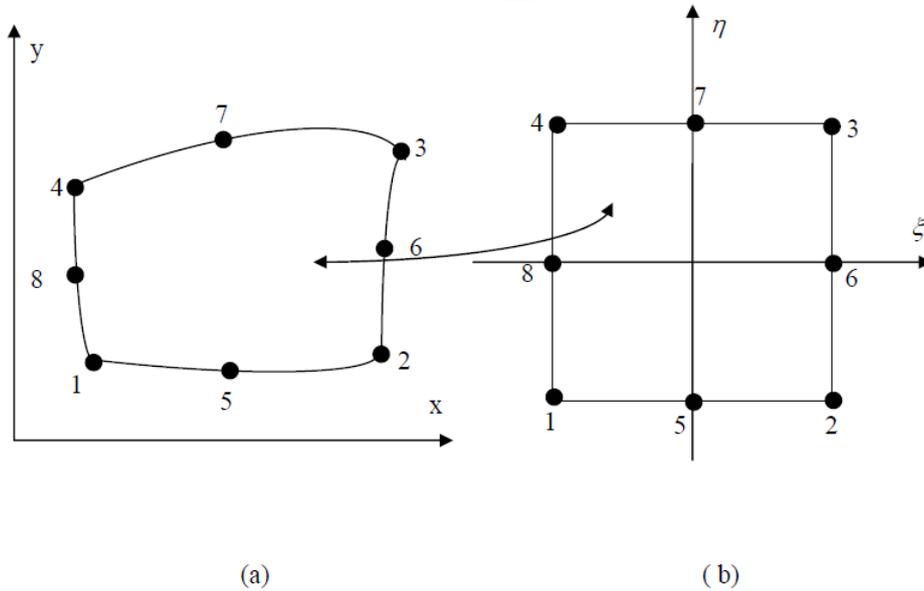
### 4.1 Generalità

Oltre ai metodi citati ci sono stati altri sviluppi che sono delle ramificazioni del DQM. In questi sviluppi, tenendo buono il concetto del DQM, cambia principalmente il tipo di discretizzazione, o la scelta dei nodi coinvolti nell'approssimazione, o il tipo di funzione approssimante, o l'ordine della funzione approssimante. Questi sviluppi nascono nello scopo di gestire al meglio possibile i problemi associati sia ai vincoli non semplici, sia alla forma non regolare del dominio. Ne abbiamo individuati alcuni, senza pretendere di aver esaurito l'elenco, che descriviamo brevemente con riferimenti per chi fosse disposto ad approfondire l'argomento. Maggior parte essi vengono creati soprattutto per gestire i problemi legati all'irregolarità del dominio, altri sono una combinazione di metodi di quadratura già esistenti.

### 4.2 Metodo di Quadratura Differenziale Multi-dominio (MDDQM)

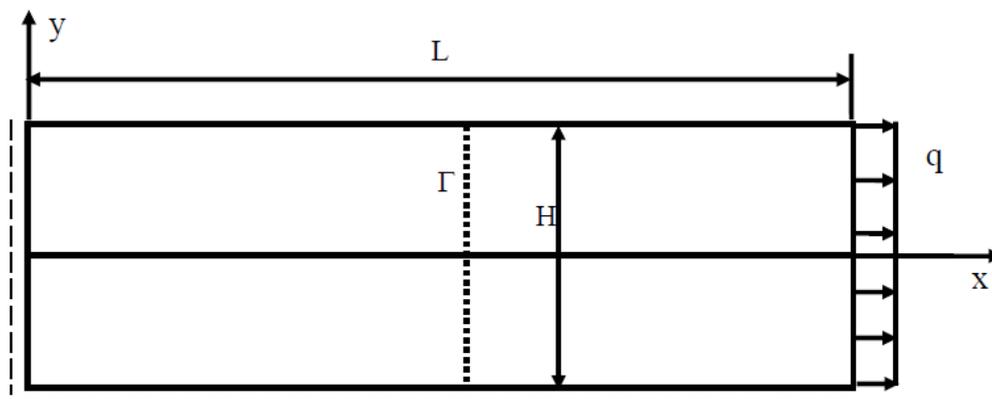
Spesso si ha a che fare con problemi elastici dove sono presenti delle discontinuità. Si può a tale proposito pensare a un dominio fatto di due materiali diversi con frontiera evidente ad esempio. Il metodo DQM in questi casi cade in difetto per colpa di quella discontinuità. Visto che la soluzione nel GDQM viene approssimata da un polinomio di grado elevato, non è adatto a descrivere comportamenti discontinui. Per continuare a sfruttare i vantaggi del GDQM viene introdotto il Metodo di Quadratura Differenziale Multi-dominio

Figura 4.1: Mappatura di un elemento quadratico: (a) dominio fisico (b) dominio computazionale[37]



(MDDQM) in letteratura Multi-Domaine differential quadrature method[37]. Il procedimento consiste nel dividere il dominio in corrispondenza della discontinuità in modo che i sotto domini siano disgiunti. Le proprietà fisiche di ogni sotto dominio vengono conservate. Ogni sotto dominio ha due tipi di condizioni al contorno; una che fa parte del dominio totale oggetto dello studio e verrà trattato come nel caso del GDQM normale e l'altra, che una condizione d'interfaccia tra due sotto domini, verrà invece trattata con cura. A tale proposito viene applicato la condizione di compatibilità imponendo l'uguaglianza degli spostamenti in corrispondenza dell'interfaccia. Il metodo Multi-Dominio funziona bene per problemi elastici fatti di materiali diversi[37]. La forma del sotto dominio, che può essere di forma qualunque, è difficile da discretizzare in alcuni casi per cui ci viene in aiuto il procedimento chiamato tecnica di mappatura (*MappingTechnique*) che permette di trasformare un dominio di contorno non regolare in un dominio normalizzato come si vede nella figura (4.1). E' fondamentale precisare che l'approssimazione della soluzione si può fare utilizzando un polinomio (Multi-Domain PDQM) o una funzione armonica (Multi-Domain FDQM).

Figura 4.2: Piastra appoggiata composta da due materiali elastici, con carico distribuito  $q$  [37]



Di seguito vengono mostrati alcuni risultati ottenuti per un pannello lungo  $L = 6m$  alto  $H = 3m$ , figura(4.2), suddiviso in due sotto domini con interfaccia posizionata in  $x = L/2$  e con carico distribuito  $q = 10N/m$ . I materiali hanno lo stesso coefficiente di poisson pari a 0.25, il modulo di Young  $E_1 = 3.0E7N/m^2$  per il materiale di sinistra e  $E_2 = 3.0E6N/m^2$  per il materiale di destra. I risultati sono calcolati in corrispondenza di  $y = 1.5m$  mediante l'applicazione diretta del DQM e Abaqus (figura(4.3)), e con il MD-DQM e Abaqus (figura(4.4))[37]. La risoluzione del problema viene eseguita correttamente con il metodo Multi-dominio che riesce a catturare il salto di sollecitazione dovuto alla discontinuità del materiale, mentre il DQM classico presenta difficoltà evidente in corrispondenza della discontinuità.

### 4.3 Metodo di Quadratura Differenziale Generalizzato Locale (LGDQM)

Il metodo di quadratura differenziale generalizzato viene applicato con buon esito ai problemi con contorni allineati con gli assi coordinati come contorni rettangolari ad esempio. In pratica ci sono sempre più problemi a geometrie complesse, con forme irregolari che bisogna affrontare. Sappiamo poi che nel GDQM la soluzione viene approssimata con un polinomio di grado elevato. All'aumentare del grado del polinomio sorge anche il problema di

Figura 4.3: Sforzi ottenuti mediante DQM e ABAQUS in corrispondenza della discontinuità  $y = \frac{H}{2}$  della piastra composta[37]

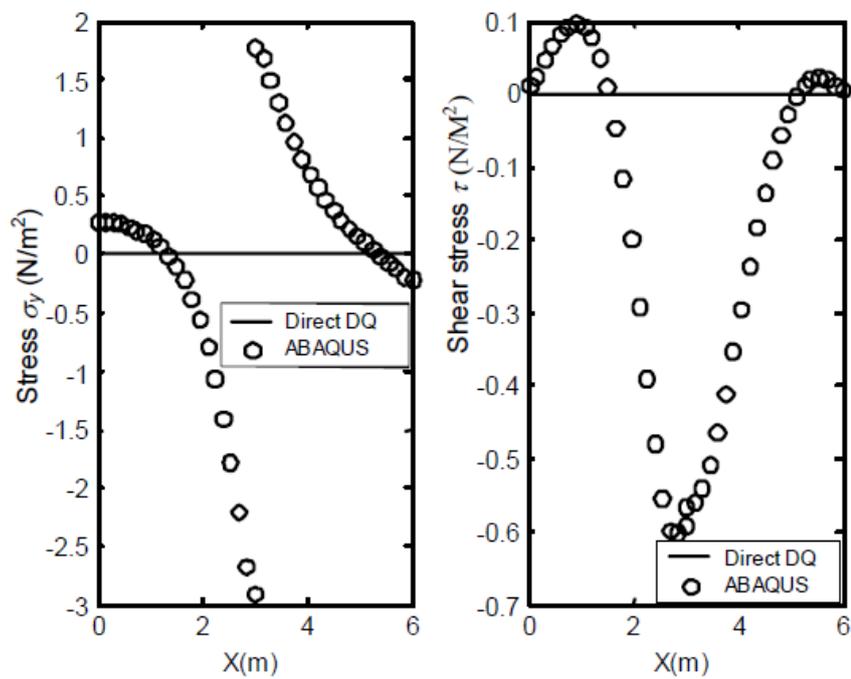
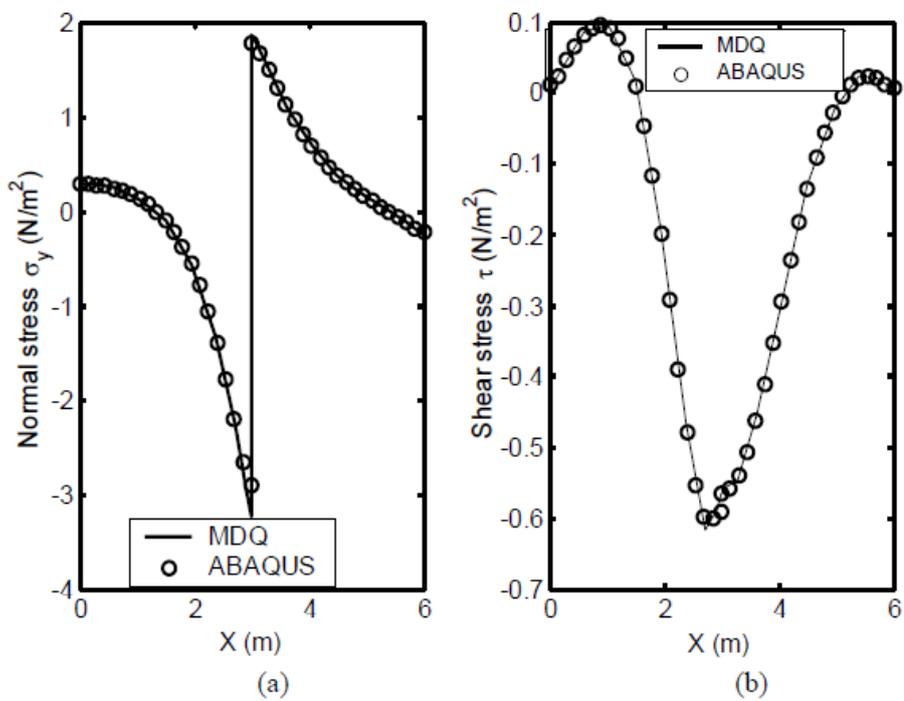


Figura 4.4: Sforzi ottenuti mediante MDDQM e ABAQUS in corrispondenza della discontinuità  $y = \frac{H}{2}$  della piastra composta[37]



stabilità oltre al problema di sensibilità alla griglia di distribuzione[31]. Il metodo di quadratura differenziale generalizzato locale (LGDQM) in letteratura Local Generalized Differential Quadrature Method nasce con lo scopo di risolvere questi tipi di problemi [27]. Nella LGDQM la derivata spaziale valutata a un nodo viene approssimata con una combinazione lineare dei valori della funzione ai nodi come nel GDQM solo che l'operazione viene eseguita usando i valori della funzione nell'intorno del nodo approssimato. Quindi non tutti i valori della funzione vengono usati durante l'approssimazione ma solamente una parte. Questo consente di poter aumentare anche i nodi di discretizzazione [18], di conservare l'accuratezza del metodo e la sua stabilità[31]. IL metodo LGDQM viene proposto da Sun et al [28] per risolvere il problema del flusso viscoso incomprimibile. Nel [27] Wang ha eseguito il metodo di quadratura differenziale locale utilizzando una distribuzione irregolare dei nodi per risolvere il problema della diffusione convessa ottenendo risultati soddisfacenti verificandone la robustezza, l'accuratezza e l'efficienza. Un altro aspetto molto interessante è il fatto che le matrici che deriva dal LGDQM non è piena ma è a banda il che è un vantaggio dal punto di vista computazionale[18]. Il metodo risulta molto flessibile con performance abbastanza buona soprattutto per i problemi lineare con geometria e dinamica complesse.[31]. l'espressione della PDQM viene modificato seguendo la formula (4.1) per ottenere quella della LGDQM .

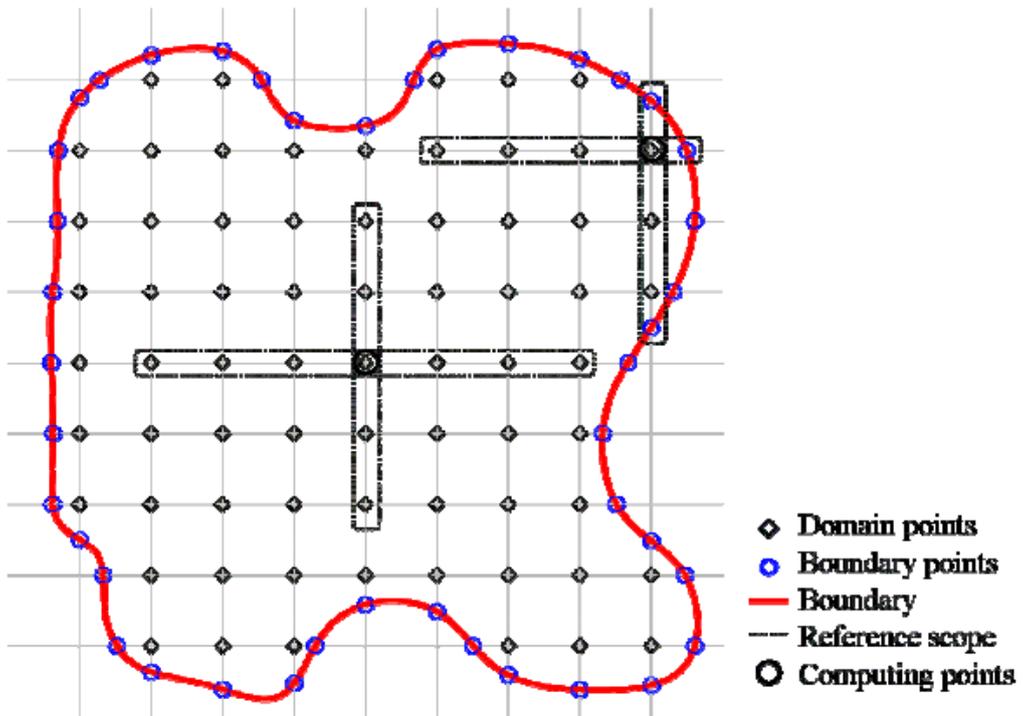
$$\frac{d^m f(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=1}^{n_p} a_{ij}^m f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

Il parametre  $n_p$  è il numero dei punti di riferimento. Quindi l'approssimazione viene fatta usando solo  $n_p$  punti invece di tutti i  $N$  punti come nel GDQM. Questo processo si puo estendere in due dimensione. Nella figura (4.5) si può individuare inquadrate i punti usati per l'approssimazione nel LGDQM (i punti di contorno e i punti del dominio).

## 4.4 Metodo di Quadratura Differenziale Random (RDQM)

Anche questo metodo nasce per problemi con irregolarità. L'obbiettivo principale del Metodo di Quadratura Differenziale Random (RDQM) è di estendere l'applicazione del metodo DQM ai domini irregolari discretizzati seguendo una legge uniforme o casuale [34]. Il dettaglio della formulazione è ripetibile in [34]. E' utile notare che nel RDQM vengono usati due tipi di nodi in fase di discretizzazione che sono i nodi virtuali creati fissi sul corpo distribuiti uniformemente o secondo la legge di Chebyshev-Gauss-Lobatto, e i

Figura 4.5: Relazione tra punti punti



nodi di campo creati in modo random[34]. La particolarità del RDQM è il fatto che combina due griglie ovvero quella Euleriana e Lagrangiana. I nodi virtuali, fissi, formano la griglia Euleriana mentre i nodi del campo sono Lagrangiana e si muovono liberamente nel dominio [34]. Il metodo viene applicato ai problemi coinvolgendo grandi deformazioni e ai problemi con contorni mobili[34].

## 4.5 Metodo di Quadrature Differenziale Incrementale(IDQM)

Il metodo di quadrature differenziale incrementale (IDQM) in letteratura presente come Incremental Differential Quadrature Method è stato introdotto da Malekzade et al [29] come metodo altamente efficiente per risolvere le equazioni differenziali a derivate parziali che descrivono i problemi di transizione, dove il dominio del tempo viene scomposto in un insieme di sotto domini e ogni sotto dominio viene discretizzato. L'alta efficienza del metodo viene poi confermata da Alibakhsh Kasaeian e i suoi colleghi nel 2013 [30] in seguito all'applicazione del IDQM all'equazione non lineare dell'energia.

## 4.6 State Space-based Differential Quadrature Method (SSDQM)

I materiali compositi vengono usati nei vari campi delle costruzioni, aerospaziali, civili, marine e altri per le sue alte proprietà meccaniche. Durante l'analisi dinamica di quei materiale è importante conoscere le loro frequenze naturali e modi di vibrare. Il metodo State Space-based Differential Quadrature Method (SSDQM) viene utilizzato con successo per analizzare questi tipi di materiali ma non solo, in generale il metodo è valido per materiali con proprietà molte speciali[32]. Dettagli sul metodo può essere trovato in [33].

## 4.7 Ritz e Metodo di Quadrature Differenziale (Ritz-DQM)

Questo metodo unisce la soluzione semianalitica fornita dal metodo di Ritz e il DQM [18]. In questo caso il metodo di Ritz viene utilizzato per semplificare un problema più generale che potrebbe essere numericamente più oneroso da risolvere. Il metodo viene soprattutto indicato per risolvere problemi di

vibrazione di piastra che coinvolgono angoli liberi che potrebbe mettere in difficoltà i classici metodi di Ritz e DQM separatamente [35] .

## **4.8 Metodo di Quadrature Differenziale basato sui Minimi quadrati (MLSDQM)**

Il Moving Least Squares Differential Quadrature Method (MLSDQM) è stato sviluppato e impiegato per l'analisi degli elementi di piastra con moderato spessore basato sulla first-order shear deformation theory (FSDT) [38] . In questo approccio, per risolvere l'equazione di governo, gli spostamenti generalizzati della piastra, soluzioni del problema differenziale, vengono formulati attraverso un approssimazione ai minimi quadrati[38].

## **4.9 Metodo di Quadrature Differenziale basato sulla Spline (SDQM)**

Abbiamo visto che nella PDQM la soluzione viene approssimato con polinomio di grado elevato. Nel metodo di quadratura differenziale basato sulla spline(SDQM) noto come Spline-based Differential Quadrature Method, l'approssimazione della funzione si basa sulla spline[39]. Nel documento [39], il metodo viene esplicitato e utilizzato con successo in termini di convergenza, stabilità e accuratezza, per la determinazione delle frequenze naturali della piastra. In particolare gli studi mostrano che il SDQM ha una convergenza rapida quando viene usato una spline di alto grado come approssimante e si può aumentare il numero di griglia senza preoccuparsi di perdere la stabilità del metodo contrariamente alla PDQM in caso di griglia uniforme. Di più il metodo non ha limiti su tipo di griglia utilizzata come PDQM. Questo fa del SDQM un metodo versatile[39].

# Capitolo 5

## CONDIZIONI AL CONTORNO

### 5.1 Introduzione

Nell'introduzione abbiamo parlato delle condizioni al contorno. In questo capitolo cerchiamo di estendere un pochino di più l'argomento senza entrare troppo nello specifico. In meccanica delle strutture molto spesso si ha a che fare con problemi che presentano più condizioni al contorno nello stesso punto. Per una trave incastrata alle due estremità, in ogni lato si dovrà imporre più condizioni al contorno sullo stesso punto. Carattere di questo tipo viene detto ridondante. Questo problema della meccanica delle strutture ha portato al perfezionamento della tecnica di quadratura differenziale. Nei prossimi paragrafi presentiamo i vari modi in cui vengono trattate le condizioni al contorno, loro applicazioni preferenziali e spesso loro inconvenienti, ma prima è utile notare che in letteratura, spesso e volentieri si procede alla classificazione del trattamento delle condizioni al contorno secondo tre approcci [25],[26].

1. Approccio con  $\delta$  tecnica chiamato anche DQN
2. Approccio senza  $\delta$ -tecnica chiamato anche DQU
3. Approccio che combina i due precedente chiamato anche DQC

Non entreremo nel dettaglio di questo ultimo

## 5.2 Approccio con $\delta$ tecnica chiamato DQN

### 5.3 $\delta$ -tecnica

La  $\delta$ -technique est stata proposta da Berte e al 1988 [7] e Jang et al 1989 [8]. Si tratta di applicare una condizione al contorno su un vero nodo di contorno, e la seconda su un nodo messo a una distanza piccola  $\delta$  chiamato  $\delta$ - punto dal nodo di contorno. Di conseguenza una condizione al contorno viene soddisfatta esattamente mentre l'altra viene soddisfatta solo in modo approssimata nel  $\delta$  punto. Questo vuol dire che la soluzione numerica dipenderà dalla scelta di  $\delta$  e perciò, introduce un punto debole sul metodo. In generale per  $\delta$  minore di  $0.001L$  [7],[8], in alcuni documenti  $\delta$  minore di  $0.00001L$  [24], con  $L$  la lunghezza caratteristica della trave o piastra, si ottiene un risultato numerico accurato in particolare per le strutture incastrate, però per le strutture appoggiate o con lati liberi non si ottiene un buon risultato. Ma se  $\delta$  è molto piccolo la matrice dei coefficienti di ponderazione diventa mal condizionata il che non è vantaggioso per l'implementazione. Nel capitolo due (figure (2.2),(2.3)) abbiamo parlato delle leggi di distribuzione che serviva per ricavare i punti nodali nell'intervallo di definizione della funzione. In pratica le varie leggi definite nel capitolo due rimangono le stesse per i punti  $k = 3, 4, \dots, N - 2$  mentre per  $k = 1, 2, N - 1, N$ , i punti nodale saranno:  $\xi_1 = 0; a, \xi_2 = \delta, \xi_{N-1} = 1 - \delta, \xi_N = 1$ . figure(2.2-b),(2.3-b). La  $\delta$  - tecnica è quello che sembra più evidente perché in quel caso si dispone di tanti punti in cui applicare le condizioni al contorno quante sono le condizioni stesse. Ma bisogna tenere presente che solo la condizione applicata sul punto esatto del vincolo viene soddisfatta rigorosamente. Le figure (5.1-5.6) mostrano l'influenza della  $\delta$  - tecnica sulla suddivisione del dominio adimensionale per le classe di discretizzazione già visto in precedenza.

## 5.4 Approccio senza $\delta$ tecnica chiamato DQU

### 5.4.1 Modificazione delle coefficienti della matrice (MWCM)

Questa tecnica viene introdotta da Wang and Bert 1993 [10],[11] per ovviare alle difficoltà della  $\delta$  tecnica. Hanno proposto un approccio alternativo conosciuto come Modifying Weighing Coefficient Matrices (MWCM) dove la condizione al contorno differenziale è direttamente costruita all'interno della matrice dei coefficienti di ponderazione. Questo approccio permette di risolvere i problemi di trave e piastre appoggiate con buona approssimazione.

Figura 5.1: Influenza della  $\delta$  – tecnica sulla suddivisione uniforme

Discretizzazione uniforme $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\xi_1$	0.000000	0.000000
	2	$\xi_2$	0.100000	0.000010
	3	$\xi_3$	0.200000	0.125000
	4	$\xi_4$	0.300000	0.250000
	5	$\xi_5$	0.400000	0.375000
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.600000	0.625000
	8	$\xi_8$	0.700000	0.750000
	9	$\xi_9$	0.800000	0.875000
	10	$\xi_{10}$	0.900000	0.999990
11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000	

Figura 5.2: Influenza della  $\delta$  – tecnica sulla suddivisione *Chebyshev gauss lobatto*

Discretizzazione armonica (cosenica) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
		1	$\xi_1$	0.000000
	2	$\xi_2$	0.024472	0.000010
	3	$\xi_3$	0.095492	0.038060
	4	$\xi_4$	0.206107	0.146447
	5	$\xi_5$	0.345492	0.308658
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.654508	0.691342
	8	$\xi_8$	0.793893	0.853553
	9	$\xi_9$	0.904508	0.961940
	10	$\xi_{10}$	0.975528	0.999990
	11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000

Figura 5.3: Influenza della  $\delta$  – tecnica sulla suddivisione quadratica

Discretizzazione quadratica $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\xi_1$	0.000000	0.000000
	2	$\xi_2$	0.020000	0.000010
	3	$\xi_3$	0.080000	0.080000
	4	$\xi_4$	0.180000	0.180000
	5	$\xi_5$	0.320000	0.320000
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.680000	0.680000
	8	$\xi_8$	0.820000	0.820000
	9	$\xi_9$	0.920000	0.920000
	10	$\xi_{10}$	0.980000	0.999990
11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000	

Figura 5.4: Influenza della  $\delta$  – tecnica sulla suddivisione *Chebyshev* Tipo I

Discretizzazione di Chebyshev (I tipo) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
	1	0.989821	0.000000	0.984808	0.000000
2	0.909632	0.040507	0.866025	0.000010	
3	0.755750	0.118239	0.642788	0.060307	
4	0.540641	0.226900	0.342020	0.173648	
5	0.281733	0.357685	0.000000	0.326352	
6	0.000000	0.500000	-0.342020	0.500000	
7	-0.281733	0.642315	-0.642788	0.673648	
8	-0.540641	0.773100	-0.866025	0.826352	
9	-0.755750	0.881761	-0.984808	0.939693	
10	-0.909632	0.959493	-	0.999990	
11	-0.989821	1.000000	-	1.000000	

Figura 5.5: Influenza della  $\delta$  – tecnica a sulla suddivisione *Chebyshev* Tipo II

Discretizzazione di Chebyshev (II tipo) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
	1	0.965926	0.000000	0.951057	0.000000
2	0.866025	0.051712	0.809017	0.000010	
3	0.707107	0.133975	0.587785	0.074675	
4	0.500000	0.241181	0.309017	0.190983	
5	0.258819	0.366025	0.000000	0.337540	
6	0.000000	0.500000	-0.309017	0.500000	
7	-0.258819	0.633975	-0.587785	0.662460	
8	-0.500000	0.758819	-0.809017	0.809017	
9	-0.707107	0.866025	-0.951057	0.925325	
10	-0.866025	0.948288	-	0.999990	
11	-0.965926	1.000000	-	1.000000	

Figura 5.6: Influenza della  $\delta$  – tecnica sulla suddivisione *Legendre*

	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
Discretizzazione di Legendre $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	1	0.978165	0.000000	0.968070	0.000000
	2	0.887051	0.046574	0.836018	0.000010
	3	0.730150	0.126776	0.613370	0.068204
	4	0.519096	0.234658	0.324254	0.183200
	5	0.269543	0.362220	0.000000	0.332526
	6	0.000000	0.500000	-0.324254	0.500000
	7	-0.269543	0.637780	-0.613370	0.667474
	8	-0.519096	0.765342	-0.836018	0.816800
	9	-0.730150	0.873224	-0.968070	0.931796
	10	-0.887051	0.953426	-	0.999990
	11	-0.978165	1.000000	-	1.000000

Tuttavia presenta dei limiti quando si trattino di condizione d'incastro, e di piastre con contorni liberi .

#### 5.4.2 Sostituzione delle condizioni al contorno negli equazioni di governo (SBCGE)

Questa tecnica viene introdotta da Shu an Du [12],[13] consiste nel sostituire la condizione al contorno direttamente all'interno dell'equazione del governo. Questa tecnica è conosciuta come Substituting Boundary Conditions into Governing Equations (SBCGE). Quindi le condizioni al contorno vengono accoppiate per risolvere il valore della funzione sui contorni e sui nodi direttamente adiacenti a quelli del contorno. Questo metodo funziona bene per qualsiasi condizione al contorno e quindi leva le limitazioni dei precedenti metodi citati. Anche se la SBCGE è molto efficiente nel gestire le condizioni al contorno, ha comunque un problema di generalizzazione e il metodo costa molto in termine di tempo e sforzo per preparare e modificare le matrici da utilizzare.

### 5.4.3 Accoppiamento delle condizioni al contorno all'interno dell'equazione di governo (CBCGE)

. Questa tecnica viene introdotta da Shu an Du [14] viene chiamato Coupling Boundary Conditions with Governing Equation(CBCGE). Con questo metodo il problema di vibrazione possono essere trasformati in un problema generale con condizione al contorno. Questo metodo funziona bene con qualsiasi condizioni al contorno ma viceversa fornisce una soluzione meno accurata rispetto a SBCGE.

## Capitolo 6

# CONCLUSIONE

In questo documento abbiamo fatto delle considerazioni generali sui DQM evidenziando le ragioni per cui il metodo è diventato oggetto di conquista da parte degli scienziati. E' stato presentato poi i vincoli che hanno paralizzato il DQM e come sono stati affrontati nel corso degli anni. Una attenzione è stata dedicata alle varietà del metodo che sono nate cercando dei risultati sempre più ottimizzati. Abbiamo sottolineato il fatto che la meccanica delle strutture per la sua particolarità ha portato al perfezionamento del metodo. Non abbiamo mai menzionato le regole di quadratura differenziale generalizzate (GDQR) noto come Generalised Differential Quadrature Rules dato che il metodo GDQR permette di calcolare i coefficienti di ponderazione di grado elevato cosa che la GDQM presenta già attraverso una formula ricorsiva. Di più in letteratura ci sono degli autori che parlano chiaramente di GDQR o GDQM indifferentemente evidenziando così il carattere comune dei due metodi.

Decisamente il DQM ha un carattere promettente, in particolare, gli autore F. Tornabene, N fantuzzi, M. Baccocchi, E. Viola (Luglio 2015) nel documento [18] presentano risultati di una ricerca ampiamente fornita sul metodo DQM, sul suo fundamento matematico e la sua applicazione alle strutture in compositi con geometrie di forme variate.

# Bibliografia

- [1] R.E. Bellman, J. Casti, ‘Differential quadrature and long term integration’, *J. Math Anal. Appl.* 34, 235–238 (1971).
- [2] R.E. Bellman, J. Casti, ‘Differential quadrature and long term integration’, *J. Math Anal. Appl.* 34, 235–238 (1971).
- [3] R. Bellman, B.G. Kashef and J. Casti, ‘Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations’, *J. Comp. Phys.* 10, 40–52 (1972).
- [4] F. Civan, C.M. Sliepcevich, ‘Solution of the poisson equation by differential quadrature’, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 19, 711–724 (1983).
- [5] F. Civan, C.M. Sliepcevich, ‘Differential quadrature multi-dimensional problems’, *J. Math Anal. Appl.* 101, 423–443 (1984).
- [6] J.O. Mingle, ‘The method of differential quadrature for transient nonlinear diffusion’, *J. Math Anal. Appl.* 60, 559–569 (1977).
- [7] C.W. Bert, S.K. Jang and A.G. Striz, ‘Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components’, *AIAA J.* 26, 612–618 (1988).
- [8] S.K. Jang, C.W. Bert and A.G. Striz, ‘Application of differential quadrature to static analysis of structural problems’, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 28, 561–577 (1989).
- [9] C. Shu, ‘Differential Quadrature and Its Application in Engineering’, London, Springer-Verlag, 340 pp (January 2000).
- [10] Wang, X. and Bert, C. W. ‘A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates’. *Journal of Sound and Vibration* 162, 566-572. (1993)

- [11] Wang, X., Striz, A. G. and Bert, C. W. 'Free vibration analysis of annular plates by the DQ method', *Journal of Sound and Vibration* 164, 173-175. (1993)
- [12] Shu C, Du H. 'Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates', *Int J Solids Struct* ;34:819–35. (1997)
- [13] Shu C, Chen W. 'On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates', *J Sound Vib*;222(2):239–57 (1999)
- [14] Shu, C. and Du, H. 'A generalized approach for implementing general boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of plates', *International Journal of Solids and Structures* 34, 837 846.(1997)
- [15] Quan, J. R. and Chang, C. T. 'New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods', *Analysis Computers and Chemical Engineerin* 9 13, 779-788. (1989)
- [16] C. Shu, 'Generalised differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallelcomputation', PhD Thesis, University of Glasgow, (1991)
- [17] C. Shu, 'Differential Quadrature and Its Application in Engineering', Springer, Berlin, (2000).
- [18] F. Tornabene, N fantuzzi, M. Baccocchi, E. Viola, 'Strutture a Guscio in materiale composito', libro, Vol.II (Luglio 2015)
- [19] A. G. Striz, X. Wang, and C. W. Bert, Norman, Oklahoma, 'Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components', *Acta Mechanica* 111, 85-94 (1995)
- [20] Wang, X., Bert, C. W. 'A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates', *J. Sound Vib.* 162, 566-572 (1993).
- [21] Wang, X., Bert, C. W., Striz, A. G.: Differential quadrature analysis of deflection, buckling, and free vibration of beams and rectangular plates. *Comput. Struct.* 48, 473-479 (1993).
- [22] Bert, C. W., Wang, X., Striz, A. G.: Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mech.* 102, 11-24 (1994).

- [23] Omer Civalek , Mehmet urlker, firat university, 'Free vibration analysis of elastic beams using harmonic differential quadrature (HDQ)', Math. computational App. 9, n2 pp. 257-264, (2004)
- [24] F. Tornabene, 'Modellazione e soluzione di strutture a guscio in materiale anisotropo', Tesi di dottorato, Università di Bologna (Luglio 2007)
- [25] C. SHU AND Y. T. CHEW 'Fourier expansion-based differential quadrature and its application to helmholtz eigenvalue problems', comm. in num. methods in eng. 13,643-653 (1997)
- [26] A. G. Striz, X. Wang, and C. W. Bert, Norman, Oklahoma, 'Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components', Acta Mechanica 111, 85-94 (1995)
- [27] WANG Juan, Ma wang, 'Local differential quadrature method using irregularly distributed nodes for solving partial differential equations', Article, Shanghai Univ, 12(2):110–114 (2008)
- [28] Sun J A, Zhu Z Y.Upwind, 'local differential quadrature method for solving incompressible viscous flow', Volume 188, Issues 1–3, (21 July 2000)
- [29] Malekzadeh P., Rahideh H., Karami G. 'A Differential Quadrature Element Method for Nonlinear Transient Heat Transfer Analysis of Extended Surfaces', Numer. Heat Transfer, Part A (2006)
- [30] Alibakhsh Kasaieian, Samaneh Daviran, Sassan Mohaseb, 'Incremental differential quadrature method for numerical heat transfer analysis of horizontal tube fluid flow using nano fluid', Faculty of New Sciences Technologies University of Tehran, (Gune 2013).
- [31] L.H. Shen and D.L. Young, 'Local Differential Quadrature Method for elliptic equation in irregular domains', article, (2009)
- [32] Chen WQ, Lv CF, Bian ZG. 'Free vibration of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature', Compos Struct 63(3):417-425, (February 2004)
- [33] Chen WQ, Lv CF, Bian ZG, 'Elasticity solution for free vibration of laminated beams', Compos Struct 62:495–502, (2003)

- [34] SHANTANU SHASHIKANT MULAY. 'Development of a novel strong-form meshless technique – random differential quadrature (RDQ) method with applications for 2-d multiphysics simulation of ph-sensitive hydrogel', Doctoral thesis, Nanyang Technological University, Singapore, (2011)
- [35] S.A. Eftekhari. 'A simple and accurate mixed Ritz-DQM formulation for free vibration of rectangular plates involving free corners', Ain Shams Engineering Journal (2015)
- [36] F. Tornabene, E. Viola. 'Modelazione e soluzione di strutture a guscio con DQM', Tesi di dottorato, Università di Bologna (Luglio 2007)
- [37] Z. YINGYAN, 'MDQ approach to plane elastic problems with material discontinuity', Article, scholarbank (2004)
- [38] K.M. Liew, Y.Q. Huang, J.N. Reddy. 'Moving least squares differential quadrature method and its application to the analysis of shear deformable plates', Int.Journal for Num. Meth. Engineering (2003).
- [39] Artur Krowiak, 'Methods based on the differential quadrature in vibration analysis of plates', journal of theoretical and applied mechanics, 46, 1, PP. 123-139 (2008).