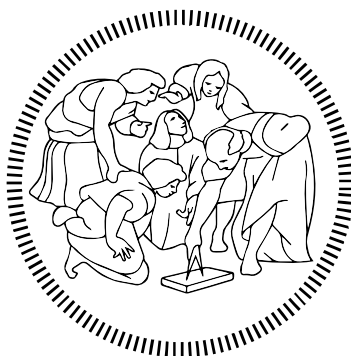


POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale  
Corso di Laurea in Civil Engineering – Structures



**Metodi di linearizzazione equivalente nello  
studio della risposta di viadotti  
sismicamente isolati**

Relatore: Prof. Antonio Capsoni

Tesi di Laurea Magistrale di

Riccardo Visentini

Matr. 833708

Anno Accademico 2015/2016



## Ringraziamenti

Desidero ringraziare la mia famiglia che mi ha sostenuto, sia moralmente che economicamente, in tutti questi anni di studio che culminano in questo elaborato; con particolare enfasi per zia Gabriella, da sempre quasi una seconda mamma.

Infine desidero dedicare questo mio studio e tutti i sacrifici fatti a mio padre, che ora spero mi guardi da lassù, da cui ho mutuato questa passione per l'ingegneria civile.

L'obiettivo che ci si pone nel redigere questo elaborato è studiare metodi semplificati nel campo dell'isolamento sismico strutturale che forniscano risultati attendibili già in fase preliminare di progetto. Nello specifico si vuole trovare un metodo che permetta di valutare già nella fase preliminare di progettazione di ponti o viadotti il fenomeno del martellamento che può verificarsi tra campate attigue. L'elaborato è strutturato con una prima parte introduttiva dove vengono mostrati i più comuni sistemi di isolamento sismico e la teoria che sta alla base delle procedure di linearizzazione equivalente. Quindi nel secondo capitolo si passa ad illustrare l'algoritmo di linearizzazione equivalente scelto, prima nell'ottica di un'analisi spettrale poi di una time history per i due sistemi studiati. Infine il terzo capitolo tratta il fenomeno del martellamento vero e proprio, in cui si espone il confronto tra metodi semplificati, basati sui risultati delle analisi precedenti, che forniscono la distanza minima per scongiurare il pericolo di collisione.

Il fil rouge di tutta la trattazione è l'idea di partire da database più ampi possibili di isolatori disponibili sul mercato, studiare un metodo che permetta di eseguire una cernita dei migliori e più adatti al problema che si deve affrontare, quindi tarare dei modelli lineari equivalenti che predicano con sufficiente accuratezza il comportamento di strutture equipaggiate con il sistema scelto. Sebbene questa filosofia possa sembrare riduttiva, poiché limita gli algoritmi a particolari categorie di prodotti, tuttavia sono state considerate due serie di isolatori molto comuni nel panorama dell'isolamento sismico prodotti da aziende leader in questo campo: la serie LRB dell'ALGA e la serie degli FPS a superfici lucidate in acciaio corredati anche di damper viscosi della FIP industriale. Ciò permette di conferire ugualmente ai metodi un'ampia applicabilità agli scenari più comuni.

L'ultima precisazione necessaria riguarda i risultati ottenuti, che vanno considerati validi solo sotto le ipotesi formulate via via per ogni metodo. Estrapolare tali algoritmi per applicarli ad altri sistemi di isolamento non fornisce alcuna garanzia che i risultati ottenuti siano affidabili ed a favore di sicurezza.

# Indice dei Contenuti

Ringraziamenti.....	I
Sintesi .....	II
Indice dei Contenuti .....	III
Indice dei Grafici.....	V
Indice delle Tabelle .....	VII
<b>1. INTRODUZIONE .....</b>	<b>1</b>
1.1 Caratteristiche isolatori.....	1
1.1.1 Dissipazione energia.....	2
1.2 Tipi di unità antisismiche.....	3
1.2.1 Isolatori low damping (LDR) .....	4
1.2.2 Isolatori High damping (HDR).....	5
1.2.3 Isolatori lead – rubber (LRB).....	5
1.2.4 Isolatori pure friction (P – F).....	6
1.2.5 Isolatori friction pendulum (FPS).....	7
1.2.6 Smorzatori viscosi (FVD).....	9
1.3 Metodi di linearizzazione .....	10
1.3.1 Rigidezza secante .....	10
1.3.2 Procedura di calcolo .....	13
<b>2. LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE .....</b>	<b>15</b>
2.1 Analisi spettrale con sistema LRB.....	16
2.1.1 Equazione risolutiva .....	18
2.1.2 Studio della convergenza .....	21
2.1.3 Algoritmo Matlab .....	25
2.1.4 Validazione del modello .....	27
2.1.5 Ottimizzazione scelta isolatore .....	33
2.2 Analisi spettrale con sistema FPS + FVS .....	45
2.2.1 FPS superfici lucidate .....	45
2.2.2 FPS superfici lucidate + FVD .....	51
2.3 Analisi lineare time history.....	60
2.3.1 Sistema LRB .....	65
2.3.2 Sistema FPS + FVD .....	68
<b>3. MARTELLAMENTO IN FASE PRELIMINARE DI PROGETTO .....</b>	<b>73</b>
3.1 Metodo basato su time history lineare.....	74
3.2 Ricerca upper bound del problema.....	76

4.	CONCLUSIONI .....	81
4.1	Analisi lineare equivalente basata sullo spettro.....	81
4.2	Analisi lineare time history .....	82
4.3	Martellamento.....	83
5.	APPENDICI.....	85
5.1	Appendice A.....	85
5.2	Appendice B.....	93
6.	BIBLIOGRAFIA .....	107

## Indice dei Grafici

Grafico 1. Spettro di risposta.....	1
Grafico 2. influenza dello smorzamento su spostamento e forza.....	2
Grafico 3. ciclo di isteresi.....	3
Grafico 4. legge forza-spostamento isolatori LDR.....	4
Grafico 5. legge forza-spostamento isolatori HDR.....	5
Grafico 6. legge forza-spostamento isolatore LRB.....	6
Grafico 7. legge forza-spostamento isolatore P - F.....	6
Grafico 8. legge velocità scorrimento-coefficiente d'attrito per diversi valori di sforzo assiale.....	7
Grafico 9. legge forza-spostamento isolatore FPS.....	8
Grafico 10. modello bilineare FPS.....	8
Grafico 11. cicli di isteresi per diversi valori di $\alpha$ .....	10
Grafico 12. picchi della forza al variare del coefficiente $\alpha$ .....	10
Grafico 13. significato di rigidità secante.....	11
Grafico 14. energia dissipata dal sistema bilineare in un ciclo di isteresi.....	12
Grafico 15. energia dissipata dal sistema lineare.....	13
Grafico 16. legge costitutiva bilineare.....	18
Grafico 17. spettri di risposta.....	18
Grafico 18. coefficiente di smorzamento equivalente in funzione dello spostamento $u$ .....	22
Grafico 19. funzione $G(u)$ .....	22
Grafico 20. spostamenti minori o poco maggiori di $u_y$ sono inadatti.....	23
Grafico 21. Confronto fattori per calcolo energia elastica del sistema equivalente ed energia elastica.....	25
Grafico 22. 1° parte dell' algoritmo: grafico sinottico soluzione.....	26
Grafico 23. 1° parte dell' algoritmo: grafico derivata prima di $G(u)$ .....	26
Grafico 24. valore coefficiente correttivo $f$ in funzione del rapporto di duttilità per diversi valori del parametro $\alpha$ .....	30
Grafico 25. valore coefficiente $\beta$ in funzione del rapporto di duttilità.....	32
Grafico 26. variabilità coefficiente $f_1$ in funzione del periodo.....	34
Grafico 27. variabilità coefficiente $f_2$ in funzione del periodo.....	35
Grafico 28. variabilità coefficiente $f_3$ in funzione del periodo.....	36
Grafico 29. variabilità coefficiente $f_4$ in funzione del periodo.....	37
Grafico 30. Variabilità indice IB in funzione del tempo per carico d' esercizio pari al 10% della massa della struttura.....	39
Grafico 31. Variabilità indice IB in funzione del tempo per carico d' esercizio pari al 0% della massa della struttura.....	39
Grafico 32. Variabilità errore% sugli spostamenti in funzione dell' indice di bontà IB database LRS.....	42
Grafico 33. Variabilità errore% sul taglio alla base in funzione dell' indice di bontà IB database LRS.....	42
Grafico 34. coefficiente correttivo $\beta$ in funzione del rapporto di duttilità $\frac{u}{u_y}$ e del rapporto di rigidità $\alpha$ .....	43

Grafico 35. Varibilità errore% sugli spostamenti in funzione dell'indice di bontà IB database LRS+LRN.....	44
Grafico 36. Varibilità errore% sul taglio alla base in funzione dell'indice di bontà IB database LRS+LRN.....	44
Grafico 37. legge costitutiva FPS.....	46
Grafico 38. legge costitutiva usata nel modello .....	46
Grafico 39. funzione di correzione del coefficiente $\xi$ in funzione di $\frac{u}{u_y}$ e $\mu$ .....	49
Grafico 40. legame forza - velocità al variare di $\alpha$ .....	52
Grafico 41. grafico forza - spostamento al variare di $\alpha$ .....	52
Grafico 42. Relazione tra coefficiente $\gamma$ e $\xi_{sd}$ per diversi valori di massa, attrito e raggio equivalente .....	54
Grafico 43. Particolare per valori di $\xi_{sd}$ fino a 80% del grafico 42.....	55
Grafico 44. errore % in funzione della pulsazione $\omega$ al variare di massa, attrito e raggio equivalente, senza correzione .....	56
Grafico 45. errore % in funzione della pulsazione $\omega$ al variare di massa, attrito e raggio equivalente, con correzione .....	57
Grafico 46. relazione tra coefficiente $\gamma$ e la pulsazione $\omega$ .....	58
Grafico 47. relazione tra coefficiente $\gamma$ ed errore % .....	58
Grafico 48. Time history lineare, LRB indice 60, in cui vengono approssimate bene fase e picchi assoluti.....	64
Grafico 49. Time history lineare, LRB indice 60, in cui viene approssimata bene fase ma non i picchi .....	64
Grafico 50. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D300_1. $R_{xy} = 0.954$ $\chi = 0.761$ .....	66
Grafico 51. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D600_1. $R_{xy} = 0.847$ $\chi = 0.513$ .....	66
Grafico 52. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D1000_1. $R_{xy} = 0.722$ $\chi = 0.431$ .....	66
Grafico 53. relazione tra $R_{xy}$ $\chi$ e smorzamento equivalente $\xi_{eq}$ per sistema LRB .....	67
Grafico 54. segnale analisi non lineare e lineare per FPS $R_{eq} = 3700 \text{ mm}$ e $\mu = 1\%$ . $R_{xy} = 0.942$ $\chi = 0.733$ .....	68
Grafico 55. segnale analisi non lineare e lineare per FPS $R_{eq} = 2500 \text{ mm}$ e $\mu = 3\%$ . $R_{xy} = 0.794$ $\chi = 0.539$ .....	68
Grafico 56. relazione tra $\chi$ e smorzamento equivalente $\xi_{eq}$ per sistema FPS+FVD .....	70
Grafico 57. relazione tra $R_{xy}$ e $\xi_{eq}$ per sistema FPS+FVD per diversi coefficienti di attrito $\mu$ 70	
Grafico 58. valori $R_{xy}$ in funzione del coefficiente $\xi_{eq}$ e $\mu$ .....	71
Grafico 59. grafico superiore - due segnali campione; grafico inferiore - valore assoluto della loro differenza.....	76
Grafico 60. dipendenza dell' errore relativo tra $\Delta_{min,i,\delta}$ e $\Delta_{min,i,SR}$ dai paramenti $R_{xy}$ e $\chi$ ... 77	



## Indice delle Tabelle

Tabella 1. confronto tra intervalli di ricerca di diversi isolatori .....	24
Tabella 2. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente.....	27
Tabella 3. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coeff correttivo 0.7 .....	29
Tabella 4. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione della funzione f.....	30
Tabella 5. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente $\beta$ .....	32
Tabella 6. confronto taglio alla base analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente $\beta$ .....	33
Tabella 7. tabelle errore % - indice IB per valori di massa della struttura (20% - 100%) e carichi d'esercizio (0% - 10%) .....	41
Tabella 8. tabelle errore % - indice IB per valori di massa della struttura (120% - 200%) e carichi d'esercizio (0% - 10%) .....	41
Tabella 9. confronto spostamenti per diversi raggio di curvatura e attrito 1%.....	48
Tabella 10. confronto spostamenti per diversi raggio di curvatura e attrito 2%.....	48
Tabella 11. confronto spostamenti per diversi raggio di curvatura e attrito 3%.....	48
Tabella 12. confronto spostamento massimo analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente $\beta$ .....	50
Tabella 13. confronto taglio alla base analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente $\beta$ .....	50
Tabella 14. valori di $R_{xy}$ e $\chi$ per diversi accelerogrammi e indici IB pari 60 e 10 .....	65
Tabella 15. Confronto valori $R_{xy}$ e $\chi$ delle prove sul sistema FPS + FVD .....	69
Tabella 16. confronto valori di apertura minima libera per i diversi approcci di calcolo .....	79



## 1. INTRODUZIONE

Il principio fondamentale che sta alla base dell'isolamento sismico è la necessità di "staccare" la struttura dalle sue fondazioni, cosicché gli spostamenti indotti da un terremoto nella sovrastruttura vengano annullati o per lo meno ridotti il più possibile. Questo approccio alla costruzione antisismica (nei casi in cui è applicabile) permette non solo di salvare vite umane ma rende una struttura agibile anche subito dopo un terremoto, in quanto anche tutti elementi non strutturali vengono danneggiati in minima parte e di conseguenza si riesce a limitare anche il costo della successiva riparazione.

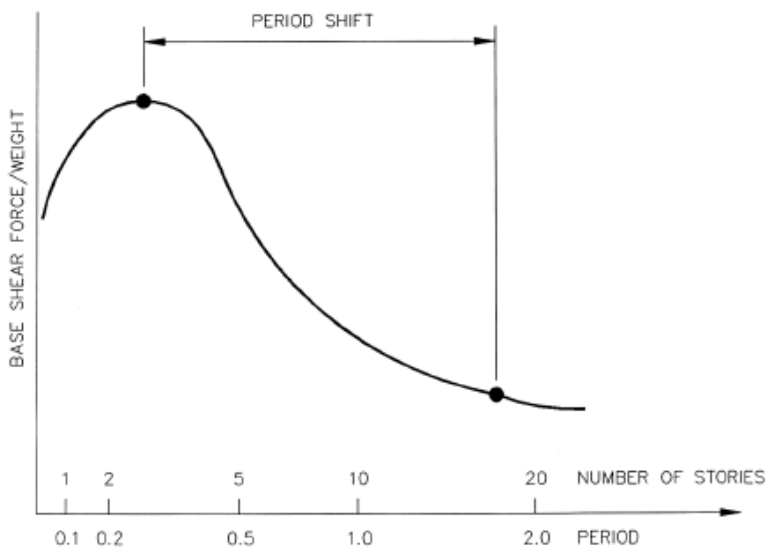


Grafico 1. Spettro di risposta

Per raggiungere l'obiettivo di una struttura "staccata" dal terreno sottostante si procede aggiungendo tra la sovrastruttura e le fondazioni uno stato più deformabile orizzontalmente (ovvero gli isolatori sismici) in modo da concentrare lì tutti gli spostamenti ed avere la sovrastruttura che si comporta come un corpo rigido che scivola su una serie di carrelli. In altri termini aggiungendo uno stato più deformabile si crea una struttura più flessibile con un periodo di vibrazione più lungo, il che implica forze trasmesse minori.

### 1.1 Caratteristiche isolatori

Esistono svariati tipi di isolatori per forma, dimensioni e tipo ma tutti per poter adempiere al meglio al compito a cui sono preposti devono avere delle caratteristiche indispensabili.

- 1) **bassa rigidità trasversale:** in questo modo rendono la struttura più flessibile nel piano orizzontale, allungandone il periodo di vibrazione e di conseguenza diminuendo le forze che vengono trasmesse alla sovrastruttura.
- 2) **sufficiente rigidità orizzontale:** infatti se è vero che durante un sisma deve deformarsi, è altrettanto necessario che sottoposto a carichi orizzontali di servizio (quale per esempio il

vento) non si attivi, in quanto questo renderebbe l'edificio poco confortevole o addirittura inadatto alla funzione per cui è stato costruito.

3) **alta rigidità verticale**: sebbene l'isolatore debba deformarsi in orizzontale, in verticale deve essere sufficientemente rigido da sopportare il peso della struttura senza danneggiarsi e deformarsi eccessivamente.

4) **capacità dissipativa/smorzamento**: questa caratteristica è fondamentale per un isolatore, in quanto permette di ridurre gli spostamenti relativi tra sovrastruttura e fondazioni.

### 1.1.1 Dissipazione energia

Se è vero, da un lato, che grazie a questi dispositivi si possono ridurre le forze indotte da un sisma sull'edificio, è pur vero che lo scotto da pagare sono ingenti spostamenti relativi. L'unico modo per moderare tale spostamento è dissipare un'aperta d'energia sismica fornendo agli isolatori un'adeguata capacità di smorzamento.

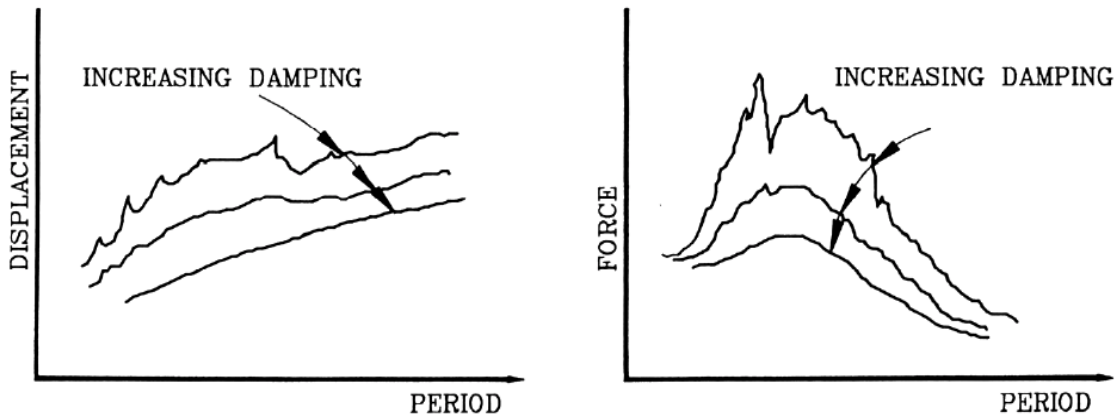


Grafico 2. influenza dello smorzamento su spostamento e forza

Un modo assai efficace per fornire capacità dissipativa è usare materiali che presentino un **comportamento isteretico**. Per isteresi si intende il fenomeno per cui sotto carichi ciclici la curva forza – spostamento di carico e scarico non coincidono. Questo fa sì che alla fine di ogni ciclo il lavoro svolto durante la fase di carico sia diverso da quello svolto durante lo scarico e quindi del lavoro (energia) viene perso sotto forma di calore. In un grafico forza – spostamento (*grafico 3*) l'energia totale dissipata per ogni ciclo non è altri che l'area racchiusa dal ciclo stesso.

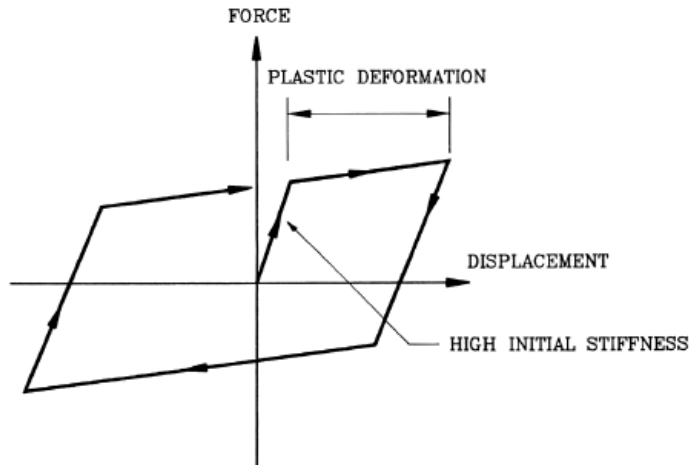


Grafico 3. ciclo di isteresi

Altri metodi efficaci di dissipazione dell'energia sono **l'attrito Coulombiano** e **l'attrito viscoso**. È proprio sulla base del meccanismo dissipativo che adotta ogni isolatore che si opera una classificazione.

A questo punto, dopo aver compreso cos'è un isolatore e come funziona, è necessario capire quando le strategie di isolamento sismico siano efficaci ed applicabili, e quando invece non risultino inutili o addirittura dannose. Un importante vincolo all'uso degli isolatori è dato dal tipo di terreno; infatti il suolo funge da filtro per le onde sismiche che arrivano alla struttura modificate in frequenza. Più un suolo è rigido più le onde arriveranno con frequenze alte, meno è rigido più le frequenze sono basse ed è quest'ultima situazione la più pericolosa poiché una sollecitazione in tal caso non viene smorzata dagli isolatori ma bensì amplificata. Quindi gli isolatori sismici possono essere impiegati solo in presenza di suoli con elevate rigidezze. Un'altra limitazione è data dall'altezza della sovrastruttura: l'isolamento sismico risulta più efficace per strutture basse con un numero di piani compreso tra 10 e 15 in quanto un edificio con questa conformazione è assimilabile ad un corpo rigido che scivola su dei carrelli con minime deformazioni nella sovrastruttura. Un'altro aspetto da tenere in considerazione durante la fase di progettazione sono i carichi laterali in esercizio; infatti se questi risultano essere maggiori del 10% del peso totale della struttura l'isolamento risulta inapplicabile. Questa limitazione è dettata dal fatto che carichi maggiori di tale soglia attiverrebbero gli isolatori anche sotto carichi d'esercizio. Infine, sebbene sembri scontato, è necessario lasciare uno spazio sufficiente attorno all'edificio per evitare che durante il movimento indotto dal sisma la sovrastruttura collida con elementi adiacenti.

## 1.2 Tipi di unità antisismiche

I dispositivi per la protezione antisismica vengono suddivisi a seconda del modo in cui dissipano l'energia; in particolare attraverso il comportamento isteretico dei materiali, l'attrito Coulombiano e l'attrito viscoso.

1) isolatori **elastomerici**: dissipazione avviene tramite cicli di isteresi. Alcuni esempi di isolatori di questo genere sono gli LDR, HDR e LRB

2) isolatori **a scorrimento**: in questi dispositivi la dissipazione di energia avviene principalmente grazie all'attrito Coulombiano. Esempi di tali isolatori sono P – F e gli FPS.

3) smorzatori **viscosi**: l'energia in questo caso viene dissipata attraverso l'attrito viscoso e i dispositivi che presentano questa metodologia dissipativa sono gli FVD.

### 1.2.1 Isolatori low damping (LDR)

Questi isolatori elastomerici sono costituiti da dischi di gomma naturale alternati a dischi di acciaio in modo da fornire bassa rigidità trasversale attraverso la gomma e l'alternanza di dischi e al contempo alta capacità portante garantita dai dischi di acciaio. La gomma solitamente usata per impieghi civili di questo tipo ha una durezza pari a 50 con un modulo di taglio  $G$  compreso tra 0.65 e 0.9 MPa. Questo modello di isolatore presenta un comportamento pressoché lineare fino ad una deformazione angolare  $\gamma = 150\%$  e un coefficiente di smorzamento  $\xi = 2 - 3\%$  per scorrimenti angolari pari al 100%. Dal momento che il coefficiente di smorzamento di questi dispositivi è molto basso (area racchiusa dalla linea del grafico 4) è usuale accoppiarvi dispositivi aggiuntivi che provvedano ad aumentare lo smorzamento fino al livello desiderato.

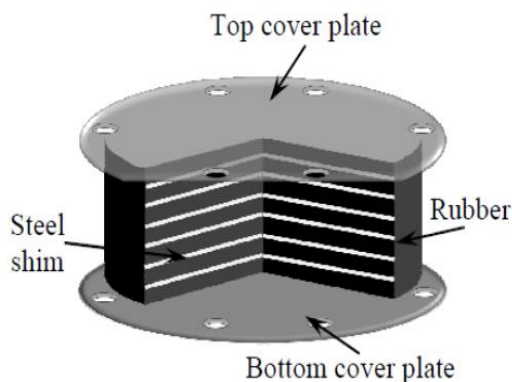


Figura 1. isolatore elastomerico

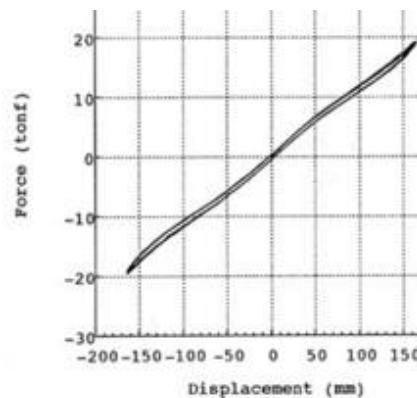


Grafico 4. legge forza-spostamento isolatori LDR

Per gli isolatori elastomerici un parametro rilevante risulta essere il fattore di forma, definito come  $S = \frac{\text{area caricata}}{\text{area scarica}}$ , che per una progettazione ottimale è bene che vari tra 10 e 20. Gli altri due parametri essenziali nella progettazione sono la rigidità trasversale  $K_H$  e quella verticale  $K_V$ .

$$K_H = \frac{GA}{t_r} \quad (1)$$

in cui  $G$  è il modulo di taglio della gomma,  $A$  è l'area dei dischi, mentre  $t_r$  è lo spessore totale della gomma.

$$K_V = \frac{E_c A_s}{t_r} \quad (2)$$

in cui  $E_c$  è il modulo elastico del materiale composito acciaio – gomma, che può essere calcolato come  $E_c = 6GS^2$ ,  $A_s$  è l'area dei dischi d'acciaio.

### 1.2.2 Isolatori High damping (HDR)

Questi isolatori sono del tutto simili agli LDR, tuttavia si è cercato di eliminare il problema del basso coefficiente di smorzamento, e quindi la necessità di sistemi aggiuntivi, unendo i benefici della bassa rigidità trasversale a capacità smorzanti maggiori. Questo processo è stato possibile miscelando alla gomma naturale dei filler, come il carbone in polvere che, sebbene mantengano un modulo di taglio  $G$  simile agli isolatori LDR, aumentano però di molto il coefficiente di smorzamento  $\xi$  al 100% dello scorrimento angolare, portandolo a valori tra 10 e 20.

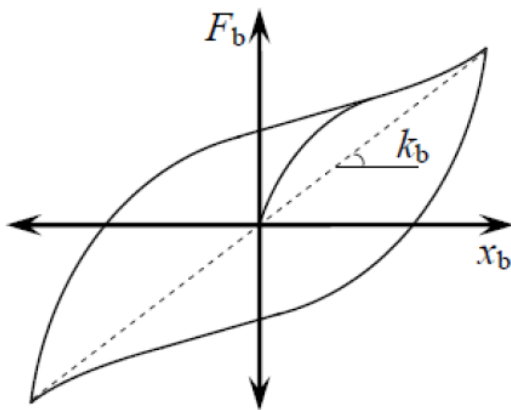


Grafico 5. legge forza-spostamento isolatori HDR

Gli isolatori costruiti con questi tipi di gomma sintetica presentano un comportamento di gran lunga migliore rispetto a quelli prodotti con gomma naturale. Infatti gli HDR mostrano una legge forza – spostamento sotto carichi ciclici isteretica non lineare. Come si può notare l'area racchiusa da questo ciclo di isteresi è assai maggiore di quella del *grafico 4*, a dimostrazione della migliore capacità dissipativa degli HDR rispetto agli LDR

### 1.2.3 Isolatori lead – rubber (LRB)

Al fine di migliorare ulteriormente la dissipazione negli isolatori HDR, si è giunti ad una nuova generazione di isolatori elastomerici, i cosiddetti isolatori a cuore di piombo. Inserendo all'interno di un isolatore un nucleo di piombo (ottima resistenza a fatica), che sottoposto ad azione tagliante a 10 MPa plasticizza, si aumenta considerevolmente la capacità dissipativa. Un altro vantaggio fornito dell'aggiunta del nucleo di piombo sta nel fatto che questo conferisca all'isolatore una rigidità iniziale maggiore rispetto ad un semplice HDR. Di conseguenza i dispositivi LRB restano inattivi sotto l'azione di carichi orizzontali di servizio maggiori che invece attiverebbero un dispositivo HDR. Nel *grafico 6*  $F_y$  e  $q$  rappresentano rispettivamente la forza trasversale alla quale il piombo si plasticizza e lo spostamento a cui avviene tale plasticizzazione.

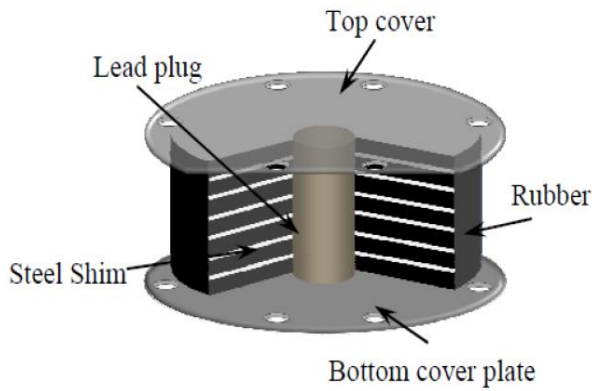


Figura 2. isolatore LRB

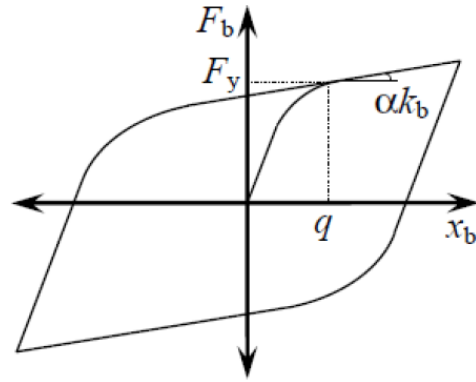


Grafico 6. legge forza-spostamento isolatore LRB

**1.2.4 Isolatori pure friction (P - F)**

I dispositivi pure friction fanno parte della famiglia degli isolatori a scorrimento; infatti il principale mezzo per dissipare l'energia che impiegano è l'attrito di tipo Coulombiano. Due caratteristiche salienti che li differenziano da quelli elastomerici sono la completa insensibilità alle variazioni nella frequenza di eccitazione provocata da un sisma e la capacità di ridurre effetti torsionali nelle strutture asimmetriche: Dato che la forza di attrito dipende dall'azione assiale su ogni isolatore, il centro di massa dell'edificio e il centro delle resistenze coincidono.

Tali dispositivi per adempiere al proprio compito fanno uso, per esempio, di strati di sabbia o carrelli posti tra le fondazioni e la sovrastruttura. In questo modo sotto carichi orizzontali di servizio gli isolatori restano inattivi finché un sisma non genera forze tali da vincere l'attrito statico. Una volta in azione gli isolatori P - F attraverso l'attrito dinamico tra le due superfici di contatto del dispositivo generano forze contrarie al moto che limitano gli spostamenti e dissipano energia attraverso la formazione di calore.

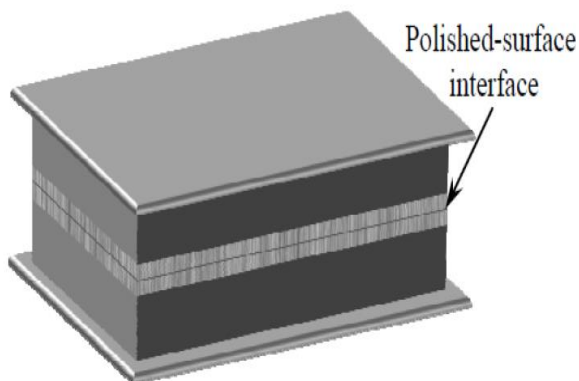


Figura 3. isolatore P - F

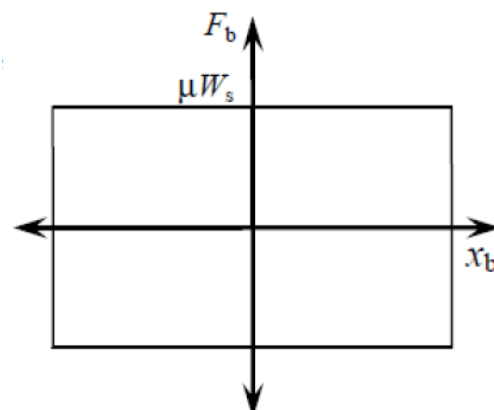


Grafico 7. legge forza-spostamento isolatore P - F



### 1.2.5 Isolatori friction pendulum (FPS)

Questi isolatori si possono considerare l'evoluzione degli P – F, infatti se il principio di funzionamento resta il medesimo, tuttavia sono state introdotte delle migliorie per renderli più efficienti e performanti. La modifica sostanziale sta nel fatto che le due superfici piene a contatto sono state rimpiazzate da due concave separate da un pattino articolato ed i dischi vengono spesso trattati con PTFE per migliorarne il coefficiente di attrito. La parte fondamentale di questo dispositivo risulta essere il pattino, in quanto deve sopportare un elevato sforzo assiale, dato dalle ridotte dimensioni, e al contempo deve generare l'attrito necessario. Per questi motivi tale elemento viene accuratamente progettato sia dal punto di vista della sua geometria che dal punto di vista dei materiali utilizzati. Negli isolatori FPS è emerso da studi svolti negli anni '90 che il coefficiente d'attrito dipende fortemente da sforzo assiale e velocità di scorrimento e può essere espresso grazie alla relazione

$$\mu = f_{max} - D_f e^{-a\dot{u}} \quad (3)$$

Dove  $f_{max}$  è il coefficiente di attrito per velocità elevate,  $D_f$  la differenza tra  $f_{max}$  e il coefficiente di attrito a basse velocità,  $a$  un parametro che dipende dalla pressione verticale e  $\dot{u}$  la velocità di scorrimento.

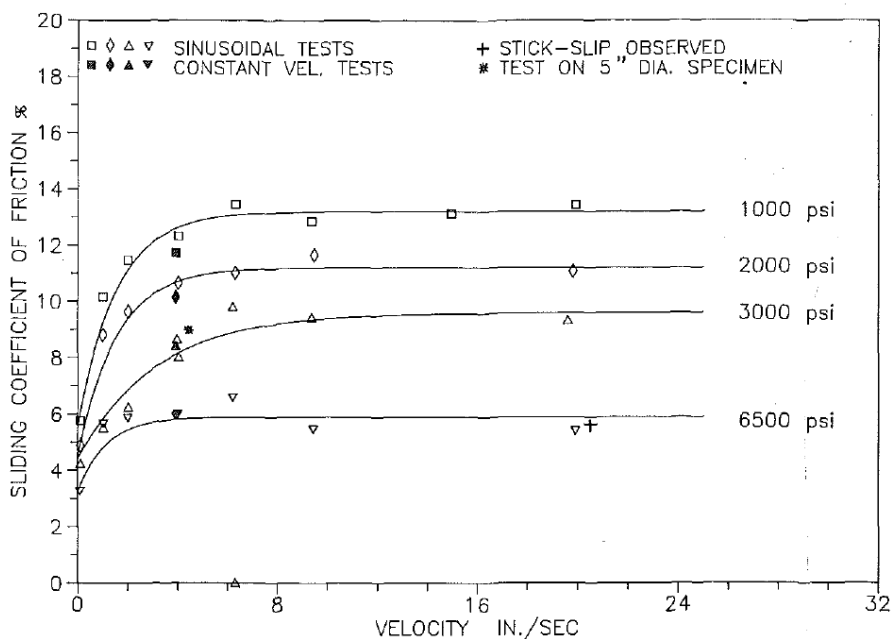


Grafico 8. legge velocità scorrimento-coefficiente d'attrito per diversi valori di sforzo assiale

Un'altra miglioria data dal fatto che le superfici di scorrimento siano concave risulta essere la presenza di una forza di richiamo che si va ad aggiungere a quella di attrito. Infatti durante il movimento il pattino spostandosi verso l'esterno del disco concavo si alza, il che genera una forza di richiamo che tende a riportarlo al centro del dispositivo (punto più basso). In aggiunta a questa miglioria che apportano le superfici concave vi è anche la capacità di auto-centramento dell'isolatore dopo il sisma.

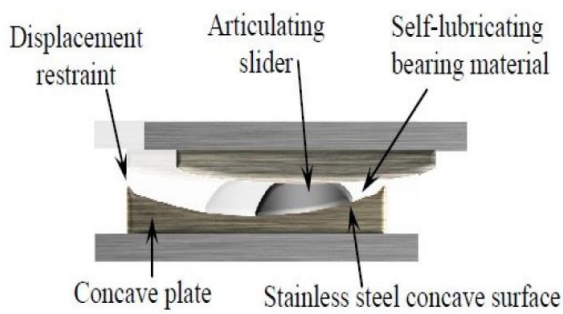


Figura 4. isolatore FPS

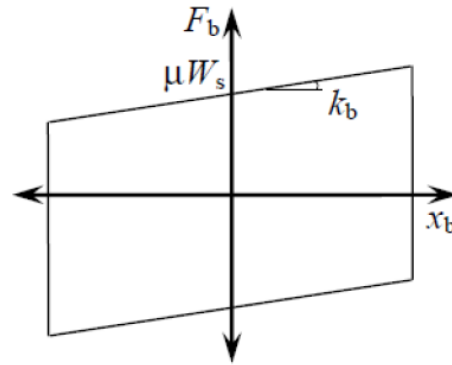


Grafico 9. legge forza-spostamento isolatore FPS

Come si evince da *grafico 8* per modellare il comportamento di un isolatore FPS la legge più prossima alla realtà è quella rigido – plastica con post yield softening. Tuttavia per una questione di integrazione numerica stabile è sconsigliabile avere una rigidezza iniziale pari a infinito; quindi di solito si usa un modello bilineare con un piccolo spostamento di snervamento per avere la rigidezza iniziale molto alta ma non infinita. Secondo questo principio fu sviluppato da Wen un modello isteretico bilineare in cui la forza che si genera a seguito di uno spostamento  $u$  dell'isolatore può essere definita come

$$F = W \left( \frac{u}{R} + \mu z \right) \quad (4)$$

Dove  $W$  è l'azione assiale a cui è assoggettato l'isolatore,  $R$  il raggio di curvatura della superficie concava,  $\mu$  il coefficiente di attrito e  $z$  è la variabile interna del modello definita secondo la legge evolutiva

$$z = [1 - z^2(\alpha \cdot \text{sgn}(\dot{u}z) + \beta)] \left( \frac{k}{W\mu} \right) \dot{u} \quad (5)$$

I parametri  $k, \alpha, \beta$  definiscono rispettivamente la rigidezza iniziale prima dello snervamento, e la forma del ciclo di isteresi ( $\alpha + \beta \equiv 1$ ).

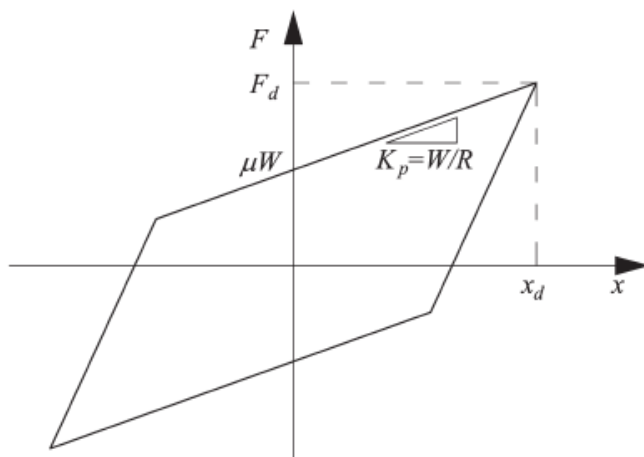


Grafico 10. modello bilineare FPS

### 1.2.6 Smorzatori viscosi (FVD)

Gli smorzatori viscosi non possono essere annoverati tra gli isolatori sismici, infatti la loro unica funzione è fornire smorzamento aggiuntivo ad una struttura senza andarne a modificare la rigidità e quindi il periodo di vibrazione.

Inizialmente per la facilità con cui potevano essere modellati si usavano gli smorzatori con legge forza – velocità lineare; tuttavia per velocità elevate il modello lineare sviluppa forze eccessive che non rispecchiano il reale comportamento della struttura. Per questo motivo si è sentita la necessità di studiare dispositivi dissipativi viscosi con leggi forza – velocità non lineari, che limitino i picchi delle forze per elevate velocità pur fornendo un adeguato smorzamento aggiuntivo.

Uno smorzatore non lineare può essere modellato in modo semplice ed efficace usando due parametri indipendenti quali  $\xi_{sd}$  e  $\alpha$  che rappresentano rispettivamente la capacità dissipativa equivalente del dispositivo e il grado di non linearità ( $\alpha = 1$  caso dello smorzatore lineare). La forza generata da un dissipatore non lineare si può calcolare attraverso la relazione

$$F_D = C_\alpha \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha \quad (6)$$

In cui  $C_\alpha$  è il coefficiente sperimentale di smorzamento,  $\dot{u}$  è la velocità dello smorzatore e  $\alpha$  il grado di non linearità (di solito  $0.35 < \alpha < 1$ ).

L'equivalenza tra il dissipatore viscoso non lineare e quello lineare viene eseguita in termini di eguale energia dissipata per ogni ciclo di movimento  $u = u_0 \sin(\omega t)$

$$E_D = \oint F_D du = \pi \beta_\alpha C_\alpha \omega^\alpha u_0^{\alpha+1} \quad (7)$$

$$\beta_\alpha = \frac{2^{2+\alpha} \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(2+\alpha)} \quad (8)$$

In cui  $\Gamma$  è la “funzione gamma”

$$E_{D1} = \pi C_1 \omega u_0^2 \quad (9)$$

Imponendo ora l'uguaglianza tra l'energia dissipata dallo smorzatore non lineare (eq 7) e quella dissipata da uno lineare sottoposto allo stesso ciclo di spostamenti (eq 9) si giunge a definire il coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{sd}$  come

$$\xi_{sd} = \frac{\beta_\alpha C_\alpha}{2\pi m \omega} (\omega u_0)^{\alpha-1} \quad (10)$$

In cui  $m$  è la massa del sistema ad un grado di libertà lineare.

Dall'equazione 10 si può facilmente ricavare la relazione tra il coefficiente sperimentale  $C_\alpha$  e il coefficiente di smorzamento  $C_1$  di un dissipatore lineare sostituendo al posto di  $\xi_{sd} \rightarrow \xi_1 = \frac{C_1}{2m\omega}$ . Tale relazione ci permette di mettere in luce i benefici di un dissipatore non

lineare, con la medesima capacità dissipativa di uno lineare, sotto forma di riduzione dei picchi di forza per elevate velocità.

$$C_\alpha = \frac{(\omega u_0)^{1-\alpha}}{\beta_\alpha} C_1 \quad (11)$$

Andando a sostituire la relazione 11 nell'equazione 6 e normalizzando il tutto per la forza di picco di un dissipatore lineare ( $F_{D0} = C_1 \dot{u}_0$ ) si ricava la seguente legge isteretica forza – spostamento

$$\frac{F_D}{F_{D0}} = \frac{(\omega u_0)^{1-\alpha}}{\beta_\alpha \dot{u}_0} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha \quad (12)$$

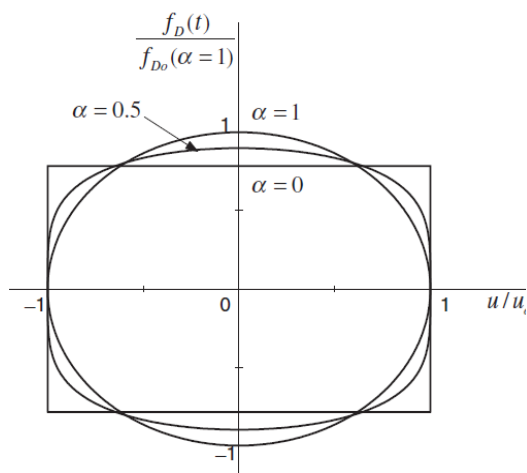


Grafico 11. cicli di isteresi per diversi valori di  $\alpha$

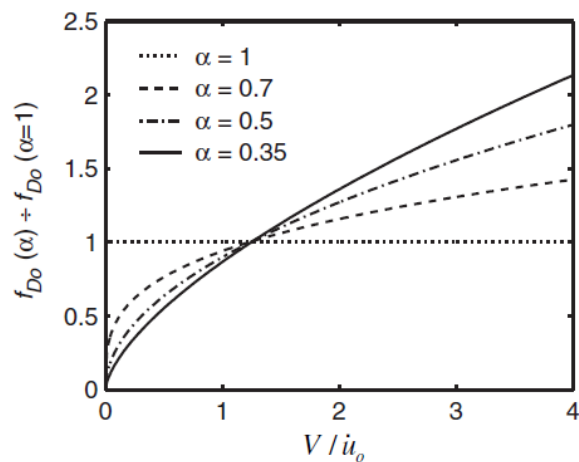


Grafico 12. picchi della forza al variare del coefficiente  $\alpha$

### 1.3 Metodi di linearizzazione

Linearizzare un problema ne semplifica di molto la risoluzione, tuttavia il risultato ottenuto va considerato solo come un risultato adatto ad una progettazione preliminare. Infatti introducendo nel sistema lineare uno smorzamento viscoso equivalente la risposta dinamica risulterà ridotta rispetto a quella reale; il che significa che questa approssimazione non è a favore di sicurezza.

Operativamente linearizzare un problema dinamico significa ricondurre lo studio ad un sistema ad un grado di libertà con periodo e smorzamento equivalenti a quelli del sistema non lineare. Esistono molteplici metodi di linearizzazione, ma tutti possono essere suddivisi in due gruppi a seconda di come venga trovata la rigidità equivalente. In particolare il primo gruppo è basato sul concetto di **rigidità secante**, mentre il secondo su **formule interpolate**.

#### 1.3.1 Rigidità secante

Dietro al concetto di rigidità secante sta l'equivalenza in termini di spostamenti/forze tra un sistema non lineare e uno elastico lineare. Infatti per trovare la rigidità secante si

impone che per uno stesso spostamento/forza i due sistema presentino la stessa forza/spostamento.

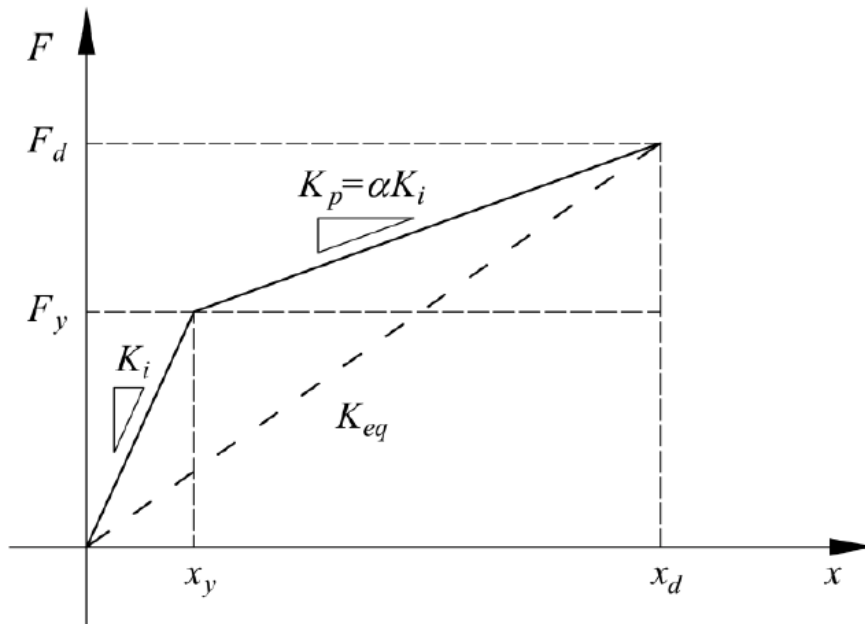


Grafico 13. significato di rigidezza secante

Nel *grafico 13* è stata riportata una legge forza – spostamento bilineare elastoplastica con post yield softening (linea continua) ed una elastica lineare (linea tratteggiata). Le quantità  $F_y$  e  $x_y$  sono definite rispettivamente carico di snervamento e limite di snervamento mentre le quantità  $F_d$  e  $x_d$  non sono note a priori. Entrambe le linee giungono nel medesimo punto  $(F_d; x_d)$  ma attraverso percorsi diversi.

$$F_d = K_{eq}x_d \quad (13)$$

$$F_d = K_i x_y + K_p (x_d - x_y) \quad (14)$$

Imponendo che l'espressione 13 del sistema lineare sia uguale alla 14 di quello bilineare trovo la rigidezza secante  $K_{eq}$

$$K_{eq} = K_i \left[ \frac{x_y}{x_d} + \frac{k_p}{k_i} \left( 1 - \frac{x_y}{x_d} \right) \right] \quad (15)$$

Definendo poi due grandezze adimensionali

$$\alpha = \frac{k_p}{k_i} \quad (16)$$

$$v = \frac{x_d}{x_y} \quad (17)$$

Si giunge alla formulazione finale della rigidezza secante come frazione della rigidezza iniziale il cui coefficiente di proporzionalità dipende dalla forma della legge non lineare scelta.

$$K_{eq} = K_i \left[ \frac{1 + \alpha(v-1)}{v} \right] \quad (18)$$

A questo punto, nota la rigidezza secante, e la massa  $m$  del sistema lineare equivalente si può trovare il periodo di vibrazione equivalente

$$T_{eq} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \quad (19)$$

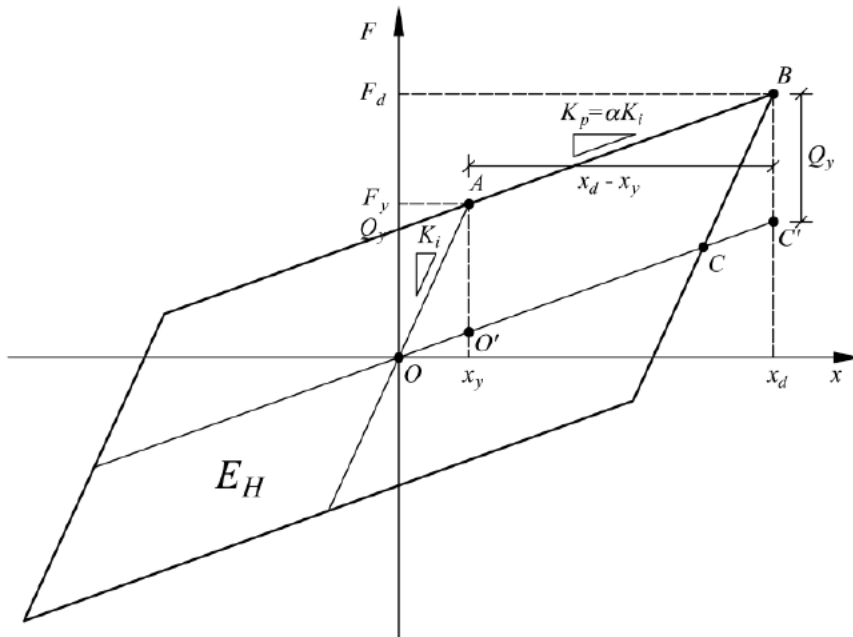


Grafico 14. energia dissipata dal sistema bilineare in un ciclo di isteresi

Una volta trovato il periodo di vibrazione, non resta che il coefficiente di smorzamento equivalente per definire univocamente il sistema ad un grado di libertà liberare equivalente. Per trovare quest'ultimo parametro si impone l'uguaglianza tra l'energia dissipata per ogni ciclo di spostamento dal sistema lineare e da quello bilineare.

L'energia dissipata in un ciclo isteretico dal sistema bilineare non è altro che 4 volte l'area racchiusa nel parallelogramma OABC, che riscritta in funzione dei parametri di rigidezza e spostamento risulta

$$E_H = 4x_y(k_i - k_p)(x_d - x_y) \quad (20)$$

Per quanto riguarda il sistema lineare, l'energia dissipata risulta essere l'area interna all'ellisse del grafico 15

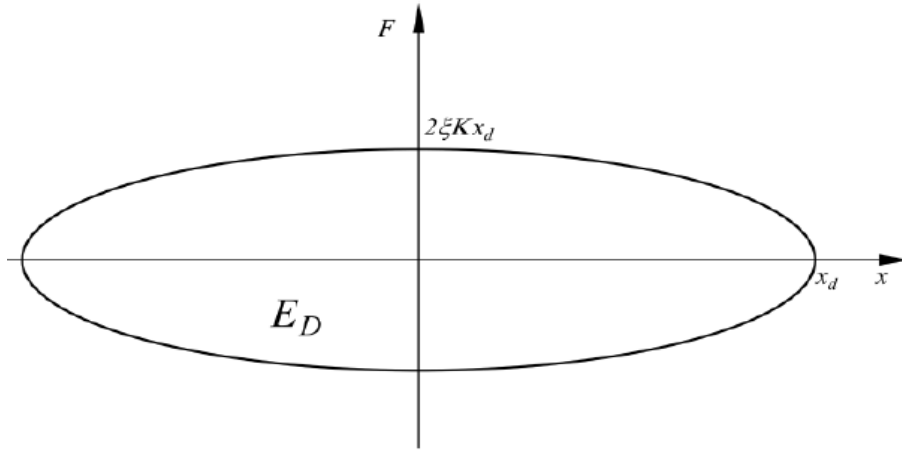


Grafico 15. energia dissipata dal sistema lineare

$$E_D = \pi x_d (2\xi_{eq} K_{eq} x_d) \quad (21)$$

Sostituendo ora l'equazione 18 nella 21, e successivamente eguagliando l'equazione 20 e 21 si riesce a definire il coefficiente di smorzamento equivalente

$$\xi_{eq} = \frac{E_H}{E_D} = \frac{4x_y(k_i - k_p)(x_d - x_y)}{\pi x_d (2K_{eq} x_d)} \quad (22)$$

$$\xi_{eq} = \frac{2(1-\alpha)(v-1)}{\pi v [1 + \alpha(v-1)]} \quad (23)$$

### 1.3.2 Procedura di calcolo

Una volta ridotto il problema da non lineare ad uno lineare su un sistema SDOF (single degree of freedom) si può notare che nelle definizioni di  $K_{eq}$  e  $\xi_{eq}$  rientra un valore di spostamento  $x_d$  incognito a priori. È proprio in questo frangente che si nota la non linearità del problema: ovvero i parametri che si dovrebbero usare come input del processo risolutivo dipendono dalla soluzione  $x_d$ . Un modo efficace di trattare questo tipo di problema è applicare una procedura iterativa.

- 1) Si ipotizza uno spostamento  $x'_d$  di primo tentativo
- 2) Si calcolano  $K_{eq}$ ,  $\xi_{eq}$  e di conseguenza  $T_{eq}$
- 3) Con questi valori di input, grazie allo spettro di risposta, si ricava  $x''_d$

$$x''_d = \frac{m S_e(T_{eq}, \xi_{eq})}{K_{eq}} \quad (24)$$

- 4) Se  $|x'_d - x''_d| < TOL$  allora  $x''_d$  è la soluzione e di conseguenza si trovano tutti gli altri parametri. Qualora la differenza tra i valori di  $x''_d$  di due iterazioni successive non fosse minore di una certa tolleranza stabilita dal progettista si torna al punto 1) e si ricomincia la procedura sostituendo a  $x'_d$  il valore  $x''_d$  appena trovato.





## 2. LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

Nel caso specifico di questo studio la necessità di ridurre il problema da non lineare a lineare equivalente risulta essere un passaggio propedeutico ed essenziale fondamentale per tre ragioni. Innanzitutto l'obiettivo principale è quello di trovare un metodo che permetta di considerare il fenomeno del "martellamento" tra i diversi segmenti di un ponte già in fase preliminare di progetto ed in modo semplificato. In secondo luogo risulta interessante valutare diversi modelli, via via più sofisticati, che possano essere applicati anche a diverse situazioni oltre a quella studiata in questa sede. Una volta raggiunta una profonda comprensione dei diversi metodi di analisi è possibile quindi decidere in modo critico quale metodo sia più adatto ad ogni scenario. Infine, non meno importante, è il ruolo che hanno gli algoritmi lineari nel controllo di una procedura molto complessa e potente quale l'analisi time history non lineare. Assumere come verità assoluta i risultati di un metodo così avanzato potrebbe portare a grossolani errori, dovuti anche solo ad una non corretta immissione dei numerosi dati di input. Il confronto con i risultati di un'analisi lineare potrebbe di suffragare maggiormente il risultato qualora gli output coincidessero, oppure suonerebbe come un campanello d'allarme in caso contrario.

Il modello utilizzato al fine di schematizzare la struttura è una piastra infinitamente rigida nel piano membranale in calcestruzzo armato ( $\gamma = 25 \frac{KN}{m^3}$ ), supportata in 4 punti equidistanti dal baricentro da isolatori sismici (nodi 1 – 4 *fig. 5*). Nello specifico le dimensioni dell'impalcato considerate sono 30m di lunghezza, 12 di larghezza per uno spessore di 1m. I sistemi di isolamento che vengono adottati sono due. Nella prima analisi l'impalcato viene equipaggiato con degli LRB con legame carico – spostamento bilineare che presenta una fase di softening a seguito dello snervamento dell'anima in piombo. La scelta di questi dispositivi è dettata innanzitutto dal fatto che siano quelli più comunemente usati in quanto racchiudono simultaneamente la capacità di allungare il periodo della struttura e fornire una significativa dissipazione di energia. Nella seconda analisi si adotta invece un sistema formato da isolatori fiction pendolum (FPS) con in parallelo degli smorzatori viscosi (FVD). Sebbene questi due sistemi siano quelli più comunemente usati nella pratica dell'isolamento sismico, va sottolineata anche la possibilità di inserire nell'algoritmo altre leggi costitutive non bilineari a patto che sia presente un comportamento di tipo softening.

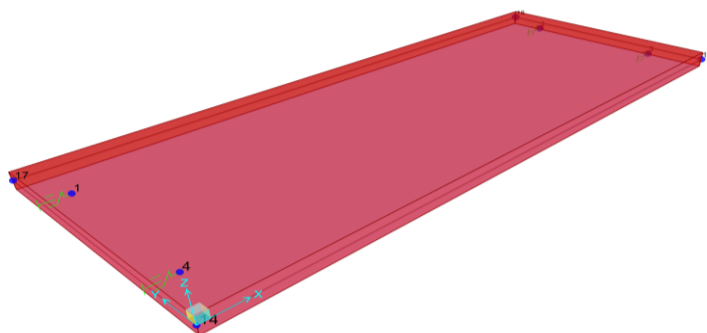


Figura 5. modellazione impalcato in SAP2000

Per valutare la veridicità e l'accuratezza del modello si procede confrontando i risultati ottenuti con un'analisi modale time history non lineare sviluppata in SAP2000. Più precisamente con l'ausilio del programma SIMQKE viene scelta una zona italiana (comune di Sacile in Friuli), il tipo di terreno (B) e la topografia (T4) alle quali viene associato uno spettro di risposta elastico. Lo stesso programma poi permette di generare accelerogrammi indipendenti spettro – compatibili partendo da quello elastico appena definito che verranno poi usati come input per l'analisi in SAP2000.

In particolare per la taratura dei parametri di input dell'algoritmo vengono considerate dodici time history di input, ognuna delle quali fornisce un valore di spostamento massimo. Una volta ricavati tutti i dodici spostamenti massimi si esegue una media aritmetica ed il valore così trovato si confronta con quello generato dal problema linearizzato per valutarne la bontà o meno.

## 2.1 Analisi spettrale con sistema LRB

Un livello semplificato, ma non meno importante, a cui si può condurre un'analisi sismica è quello basato sullo spettro di risposta. Tale funzione è generata per un sistema ad un grado di libertà, dotato di uno smorzamento  $\xi$ , periodo  $T$  e soggetto ad una forzante variabile nel tempo  $F(t)$ . La costruzione avviene invilupando i **valori massimi** della grandezza di output, che può essere un'accelerazione, una velocità o uno spostamento al variare del periodo del sistema ad un grado di libertà. Le altre due quantità che governano il problema svolgono la funzione di parametri indipendenti, quindi per ogni coppia  $(\xi, F(t))$  sarà creato uno spettro di risposta diverso.

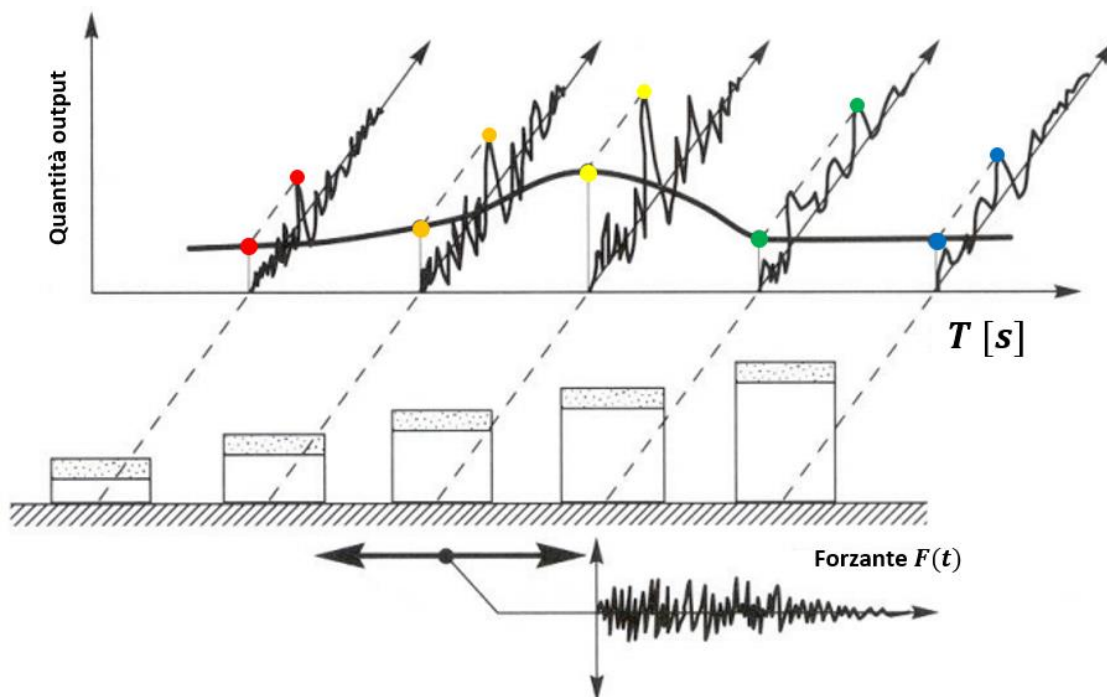


Figura 6. costruzione di uno spettro di risposta

In questo studio verrà usato lo spettro di risposta in termini di accelerazione, in quanto una volta scalato, moltiplicando ogni valore per la massa della struttura, si giunge alla definizione delle forze inerziali generate dal sisma. Come detto nell' introduzione l'obbiettivo dell'isolamento è quello di allungare il periodo proprio della struttura e dissipare più energia possibile. Questi due aspetti spesso sono disaccoppiati nei sistemi di isolamento: per esempio negli LRB l'allungamento del periodo è fornito dalla bassa rigidità della gomma armata mentre la dissipazione avviene per la maggior parte grazie alla plasticizzazione del nucleo di piombo. Discorso analogo, ma ancor più lampante, vale per il sistema che sarà analizzato nel seguente capitolo (FPS + FVD). Infatti in questa situazione il periodo viene allungato solo grazie agli isolatori fiction pendulum, che però dissipano pochissima energia. Per questa ragione nella pratica corrente sono sempre equipaggiati in parallelo con dampers che forniscono solo smorzamento.

Va tuttavia sottolineato che il vantaggio di avere il periodo disaccoppiato dallo smorzamento vale solo sotto certe ipotesi. Infatti la formulazione rigorosa per valutare il periodo di una struttura fornita di smorzamento è la seguente

$$T = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (25)$$

Per valori modesti dello smorzamento il fattore  $\sqrt{1-\xi^2}$  risulta prossimo all'unità, quindi trascurabile, mentre più  $\xi$  aumenta più il denominatore diminuisce andando complessivamente ad incrementare il periodo. Per valori di smorzamento, per esempio, pari all' 80% che potrebbero essere comodamente raggiunti creando un sistema in parallelo con isolatori LRB e dampers viscosi l'incremento del periodo è pari al 66%. Quindi ogni qualvolta si decida di trascurare la dipendenza del periodo dallo smorzante è essenziale essere consapevoli che uno smorzamento troppo elevato apporterà degli errori nella soluzione, motivo per cui l'NTC 08 impone un limite allo smorzamento pari al 28%. Nella trattazione seguente si è optato per mantenere periodo e smorzamento disaccoppiati in quanto uno smorzamento del 30 – 35% lo si ritiene più che sufficiente.

Il primo modello studiato è quello ad un solo grado di libertà mediante spettro di risposta, ovvero si considera la sollecitazione sismica agente in una sola direzione, trascurando la presenza di eccentricità accidentali del baricentro rispetto al centro delle rigidità che indurrebbero una rotazione rigida dell'impalcato. Sebbene la modellazione ad un solo grado di libertà sia riduttiva e non rappresentativa del reale comportamento di una struttura (eccetto alcuni casi), tuttavia è una fase preliminare e necessaria per poter capire a fondo la variabilità, le possibili complicazioni e i punti di forza di questo metodo di linearizzazione. Dal momento che l'azione sismica viene considerata mediante lo spettro, il dato di output dell'algoritmo di linearizzazione è lo spostamento massimo degli estremi di ogni sezione di impalcato. Tutte le informazioni e i dati così raccolti verranno poi esportati nello studio di un

metodo più ricco come l'analisi time history lineare, così da creare un algoritmo efficace che possa modellare al meglio anche aspetti diversi dal solo spostamento massimo in valore assoluto.

### 2.1.1 Equazione risolutiva

Il metodo di linearizzazione proposto si basa sul concetto di rigidità secante e sull'equilibrio che deve sussistere tra le reazioni vincolari che forniscono gli isolatori all'impalcato e le forze inerziali generate da un sisma

$$F_r(u) = m \cdot S_a(\xi_{eq}; T_{eq}) \tag{26}$$

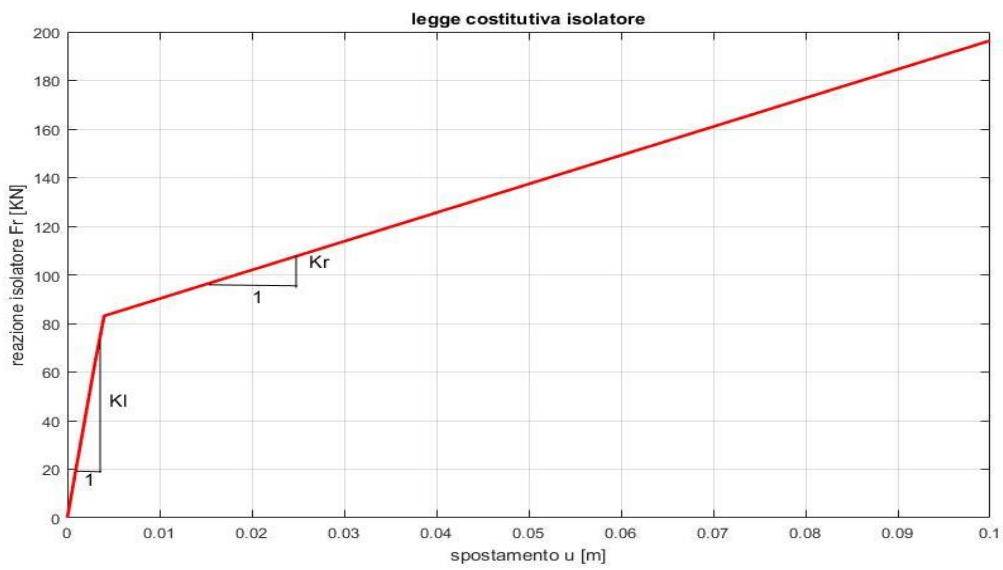


Grafico 16. legge costitutiva bilineare

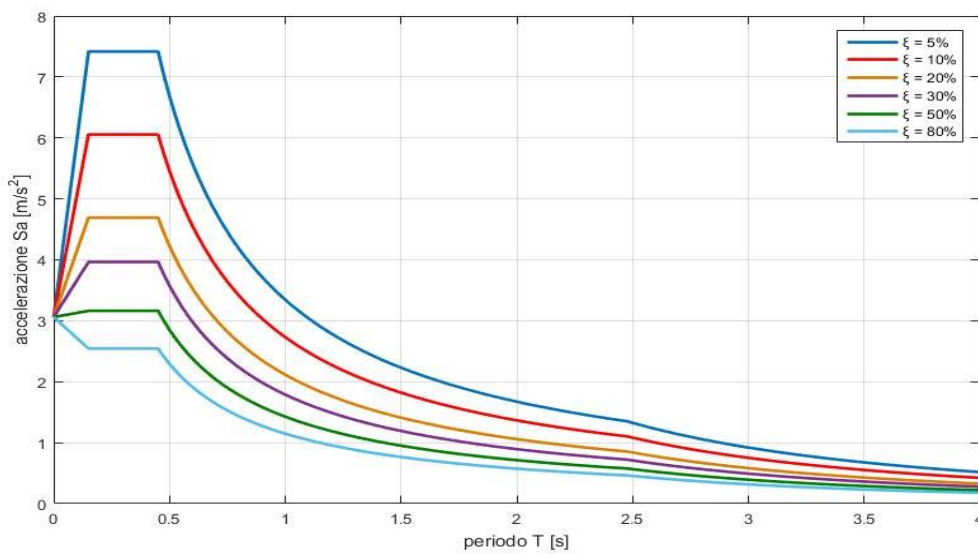


Grafico 17. soettri di risposta

L'equazione 26 risulta essere un'equazione lineare in un'incognita ( $u$ ) solo se lo studio viene condotto in campo elastico lineare; infatti sotto questa ipotesi il secondo membro dell'equazione risulta essere indipendente dallo spostamento e quindi la soluzione sarà unica e facilmente ricavabile. Come si evince dal grafico 16 la situazione sopra descritta è valida nel primo tratto della legge costitutiva, ovvero prima che l'anima in piombo dell'LRB raggiunga lo snervamento.

Una volta raggiunto il carico di snervamento si esce dal ramo iniziale elastico e per tutti gli spostamenti maggiori di quello relativo allo snervamento ( $u_y$ ) il secondo membro dell'equazione diventa dipendente dallo spostamento  $u$  per le equazioni 27 e 28.

$$T_{eq} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot u}{F_r}} \quad (27)$$

$$\xi_{eq} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \quad (28)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi_{eq} \cdot 100}} = \sqrt{\frac{10}{5 + \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \cdot 100}} \quad (29)$$

Le equazioni risolutive a seconda della zona dello spettro in cui ci si trova diventano le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} T < T_B \\ F_r(u) = a_g \cdot F_0 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{10}{5 + \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \cdot 100}} \cdot \left[ \frac{2\pi \sqrt{\frac{m \cdot u}{F_r}}}{T_B} + \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{5 + \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \cdot 100}}} \cdot F_0 \left(1 - \frac{2\pi \sqrt{\frac{m \cdot u}{F_r}}}{T_B}\right) \right] \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_B < T < T_C \\ F_r(u) = a_g \cdot F_0 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{10}{5 + \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \cdot 100}} \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_C < T < T_D \\ F_r(u) = a_g \cdot F_0 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{10}{5 + \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \cdot 100}} \cdot \left(\frac{T_C}{2\pi \sqrt{\frac{m \cdot u}{F_r}}}\right) \end{array} \right. \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T > T_D \\ F_r(u) = a_g \cdot F_0 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{10}{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_y}\right)}} \cdot \left(\frac{T_C \cdot T_D}{\left(2\pi \sqrt{\frac{m \cdot u}{F_r}}\right)^2}\right) \\ 5 + \frac{\left(\frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \left(\frac{u}{u_y} - 1\right)\right]}{100} \end{array} \right. \quad (33)$$

I parametri  $a_g$ ,  $F_0$  ed  $S$  vengono definiti in seguito alla scelta dello spettro di risposta; mentre il coefficiente  $\eta$  opera una riduzione dello spettro rispetto a quello elastico a seconda dello smorzamento efficace fornito dagli isolatori. Per quanto riguarda il primo termine di ogni equazione, ovvero la reazione fornita dagli isolatori, questo può essere scritto come:

$$F_r(u) = n(A \cdot u + B) \quad (34)$$

In qui  $A$  e  $B$  rappresentano il coefficiente angolare e l'intercetta delle rette che formano il legame costituito dall'isolatore a seconda che ci si trovi in fase elastica o successivamente allo snervamento; mentre  $n$  il numero di isolatori impiegati (in questo caso 4).

$$\text{Fase elastica} \left\{ \begin{array}{l} u < u_y \\ A = K_l \\ B = 0 \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\text{Fase post elastica} \left\{ \begin{array}{l} u > u_y \\ A = K_r \\ B = F_y \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \end{array} \right. \quad (36)$$

Dove  $F_y$  rappresenta il carico di snervamento,  $K_l$  la pendenza del primo ramo della legge bilineare e  $K_r$  la pendenza del ramo in fase di softening.

Come si può facilmente notare, le precedenti equazioni (eq. 30 – 33) risultano essere altamente non lineari; il che non permette di trovare una soluzione in forma chiusa ma bensì è necessario applicare metodi numerici iterativi. Ogni qualvolta si debba applicare un metodo iterativo i problemi che si presentano riguardano lo **studio della convergenza** e **l'unicità o meno della soluzione**. Nella presente trattazione si è deciso di utilizzare una formulazione del problema in termini di "punto fisso" per trovare la soluzione, in quanto ciò permette di applicare il teorema di Banach – Caccioppoli delle contrazioni che sotto determinate ipotesi garantisce la convergenza globale del metodo e l'unicità della soluzione.

Teorema delle contrazioni. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $T: X \rightarrow X$  una contrazione, cioè:  $\exists \alpha \in [0; 1]: d(T(x_1); T(x_2)) \leq \alpha \cdot d(x_1; x_2) \forall x_1, x_2 \in X$ . Allora  $T$  ammette uno e un solo punto fisso  $\bar{x} \in X$ , tale cioè che  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Un' equazione si definisce scritta in forma di punto fisso quando viene formulata nella seguente modalità:

$$G(x) = x \quad (37)$$

Specializzando il teorema nel caso di funzioni ad una sola variabile, le ipotesi da soddisfare all'interno di un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  affinché sussista l'esistenza e l'unicità della soluzione sono 3:

$$1) G(x) \in C^0 \forall x \in [a; b] \quad (38)$$

$$2) G(x) \in [a; b] \forall x \in [a; b] \quad (39)$$

$$3) G(x) \in C^1 \text{ e } |G'(x)| \leq \lambda < 1 \forall x \in [a; b] \quad (40)$$

Quindi scelto un punto qualunque  $x_0$  all'interno di  $[a; b]$  la successione degli iterati converge all'unica soluzione  $\bar{x}$  dell'equazione  $G(x) = x$ , cioè al suo punto fisso.

Tuttavia per poter applicare l'algoritmo di punto fisso, è necessario definire una funzione  $G(u)$  appropriata. Infatti come si può notare il problema formulato secondo le equazioni 30 – 33 non è in forma  $G(u) = u$ . Innanzitutto viene definita la funzione  $f(u)$  come

$$f(u) = m \cdot S_a(\xi_{eq}; T_{eq}) - F_r(u) \quad (41)$$

Da sottolineare, confrontando l'equazione 26 con la 41, che quest'ultima fornisca la soluzione cercata  $\bar{u}$  quando  $f(\bar{u}) = 0$ . Quindi, sfruttando la relazione così costruita si determina  $G(u)$  nella seguente forma

$$G(u) = u - \frac{f(u)}{K_{eq}} \quad (42)$$

In cui la rigidità equivalente viene definita come

$$K_{eq} = \frac{\sum F_r}{u} \quad (43)$$

In questo modo, risolvere l'equazione nella forma  $f(u) = 0$  oppure  $G(u) = u$  conduce al medesimo risultato  $\bar{u}$ .

### 2.1.2 Studio della convergenza

Nel cercare di soddisfare le ipotesi 38 – 40, si riscontra che la più complessa e stringente delle tre sia la 40, ovvero quella legata al valore massimo che può assumere la derivata prima della funzione  $G(u)$ . La spiegazione di questo comportamento la si può trovare studiando l'andamento della funzione del coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$  (eq. 28) in funzione dello spostamento  $u$ . Questa presenta una forma a campana con un tratto

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

iniziale molto ripido che culmina con un massimo da cui poi parte un ramo decrescente, come si nota dal *grafico 18*.

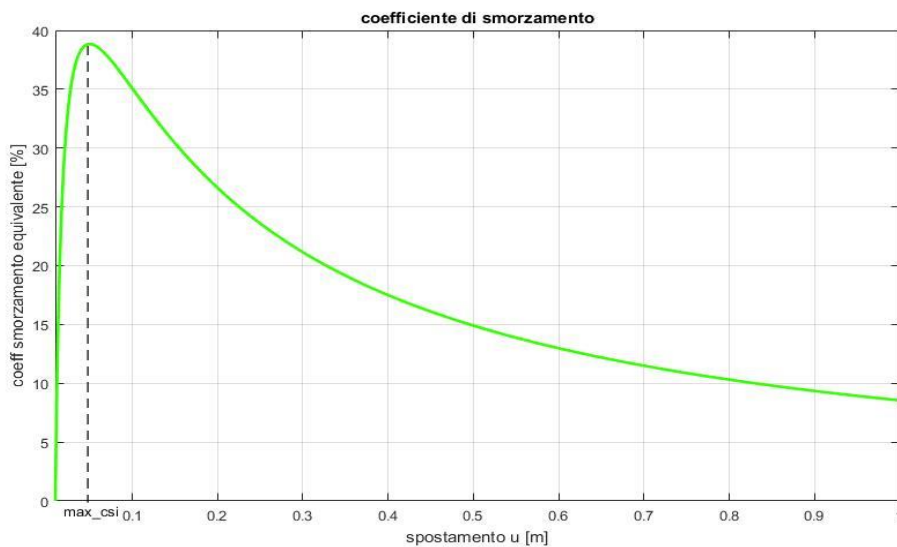


Grafico 18. coefficiente di smorzamento equivalente in funzione dello spostamento  $u$

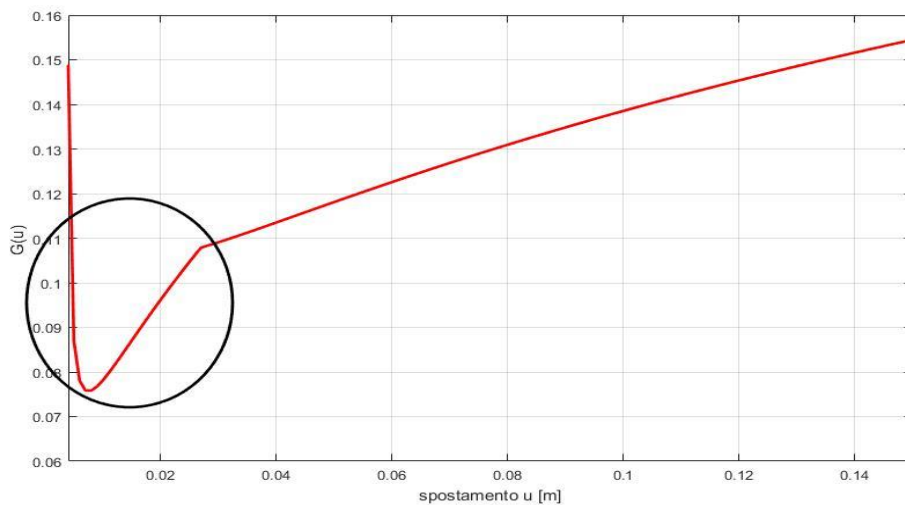


Grafico 19. funzione  $G(u)$

Per ovviare a questo problema (*grafico 19*) l'unica soluzione è quella di “stringere” l'intervallo di spostamenti in cui si ricerca la soluzione per eliminare la parte iniziale. A questo scopo può aiutare compiere delle considerazioni di carattere pratico nell'ambito dell'isolamento sismico. La funzione fondamentale degli isolatori sismici, come detto in precedenza, è quella di dissipare la maggior quantità di energia attraverso cicli di isteresi e allungare il periodo della struttura così da diminuire le forze inerziali dovute al sisma. Entrambi questi obiettivi si possono raggiungere una volta che l'isolatore ha superato il carico di snervamento e quindi è entrato in campo plastico; perciò progettare un sistema di isolamento in cui gli isolatori durante l'evento sismico di progetto rispondano in fase elastica è del tutto inadeguato ed antieconomico.



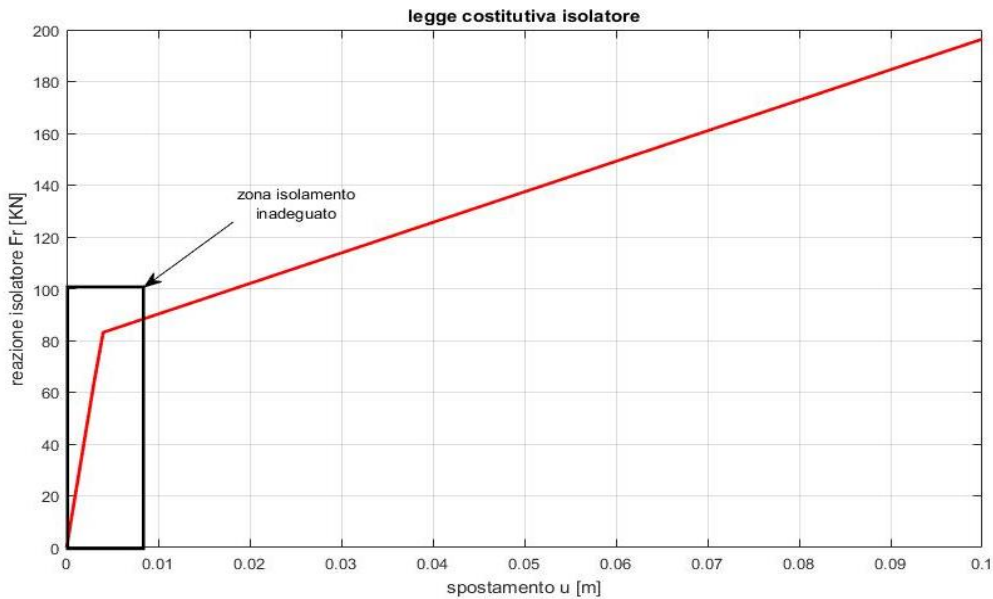


Grafico 20. spostamenti minori o poco maggiori di  $u_y$  sono inadatti

Il modo più naturale per eliminare il problema mostrato nel *grafico 19* è quello eseguire le analisi solo nel ramo discendente del coefficiente di smorzamento equivalente. Quindi considerando anche le riflessioni eseguite in precedenza si giunge a stabile che i valori di spostamento in cui è opportuno ricercare la soluzione siano quelli maggiori di  $Max_\xi$  (spostamento associato al coefficiente  $\xi$  massimo). Va infine considerato anche il limite che la normativa pone sul fattore di riduzione  $\eta$  dello spettro di progetto (eq.29). Questo fattore, che dipende dal coefficiente di smorzamento efficace, deve essere minore di 1 (risposta elastica) e maggiore di 0.55 qualora il metodo lineare equivalente sia la base per la progettazione. È possibile tenere conto o no di questa limitazione attivando o disattivando parte del codice a seconda dell'uso che si desidera fare dei dati in output. Nella seguente trattazione quest' ultima condizione non verrà considerata.

Quindi ricapitolando, le condizioni da tenere in considerazione per ridurre l'intervallo di ricerca della soluzione sono:

$$1) \quad u > u_y \quad (44)$$

$$2) \quad u > Max_\xi \quad (45)$$

$$3) \quad \eta \geq 0,55 \quad (46)$$

Il valore di  $Max_\xi$  è fornito dalla seguente relazione:

$$Max_\xi = u_y \left( 1 + \sqrt{\frac{K_l}{K_r}} \right) \quad (47)$$

Che risulta essere la condizione più stringente tra la 44 e la 45. In merito alla terza condizione, nell'algoritmo se ne è tenuto conto attraverso un cut – off della funzione  $\eta$ : nei punti in cui il

coefficiente riduttivo risultava minore di 0.55 (ovvero per i valori di  $\xi_{eq} > 28\%$ ) il programma nel calcolo usa il valore 0.55.

A titolo di esempio vengono riportati di seguito i valori degli intervalli di ricerca per alcuni isolatori della serie ALGASISM LRB che sono stati usati per tarare il modello. Vengono scelti 3 diversi tipi partendo dal più piccolo, passando per uno di medie dimensione giungendo poi al più grande della serie. Per ogni dimensione si è considerata prima una miscela poco rigida (LRS) ed infine una più rigida (LRN) per un totale di 6 casi.

	$K_l \left[ \frac{KN}{m} \right]$	$K_r \left[ \frac{KN}{m} \right]$	$F_y [KN]$	$u_y [m]$	$Max_\xi [m]$	$u_{max} [m]$	$\frac{Max_\xi - u_y}{u_y}$	$\frac{u_{max} - Max_\xi}{Max_\xi}$
<b>D300 LRS</b>	6430	570	26	0,004	0,0176	0,1	3,4	4,7
<b>D300 LRN</b>	21270	1180	83	0,003 9	0,0205	0,1	4,3	3,9
<b>D650 LRS</b>	20770	1980	114	0,005 5	0,0233	0,13	3,2	4,6
<b>D650 LRN</b>	69270	4120	367	0,005 3	0,027	0,13	4,1	3,8
<b>D1200 LRS</b>	39330	3650	397	0,010 1	0,0432	0,24	3,3	4,5
<b>D1200 LRN</b>	12941 0	7590	1265	0,009 8	0,0501	0,24	4,1	3,8

Tabella 1. confronto tra intervalli di ricerca di diversi isolatori

Come si evince dall'ultima colonna della tabella, l'intervallo di ricerca della soluzione è sempre all'incirca 4 volte quello scartato, il che significa che le condizioni 44 e 45 non riducono troppo il campo utile degli spostamenti di ogni isolatore.

Un'obiezione che potrebbe essere mossa a questo modo di procedere riguarda lo smorzamento, che come si nota dal *grafico 18*, risulta massimo per valori di spostamento prossimi a quello di snervamento per poi decrescere per valori sempre maggiori di spostamento. Quindi eliminando l'intervallo degli spostamenti "piccoli" si potrebbe pensare che ciò significhi scartare la zona in cui il sistema presenta le migliori prestazioni in termini di dissipazione. Tuttavia non si deve confondere il mondo reale del sistema isteretico, con quello fittizio del sistema equivalente, creato solo per semplificare il problema. Infatti l'energia dissipata dal sistema equivalente è il prodotto di tre termini: lo smorzamento  $\xi_{eq}$ , la rigidità equivalente  $K_{eq}$  e lo spostamento  $x_d^2$ . Come si evince dal *grafico 21* sebbene all'aumentare dello spostamento rigidità e smorzamento diminuiscano, lo spostamento stesso aumenta con legge quadratica e nel complesso il prodotto dei tre termini aumenta (linea verde). Questo comportamento è suffragato dal fatto che senza dubbio all'aumentare dello spostamento l'area dei cicli di isteresi (energia dissipata) del sistema reale aumenta e deve sempre essere uguale a quella dissipata dal sistema lineare (cfr eq. 22). Quindi non bisogna farsi trarre in inganno dallo smorzamento equivalente poiché se considerato trascurando il reale comportamento degli isolatori fornisce un'idea fuorviante, ovvero che il sistema dissipa più energia e quindi è più efficiente per spostamenti

piccoli, prossimi a quello di snervamento. Quindi la scelta operata in precedenza scartando dagli intervalli di ricerca della soluzione gli spostamenti in fase elastica o poco oltre risulta una scelta ragionevole che tende ad aumentare il periodo e contestualmente diminuire le forze inerziali aumentando lo smorzamento.

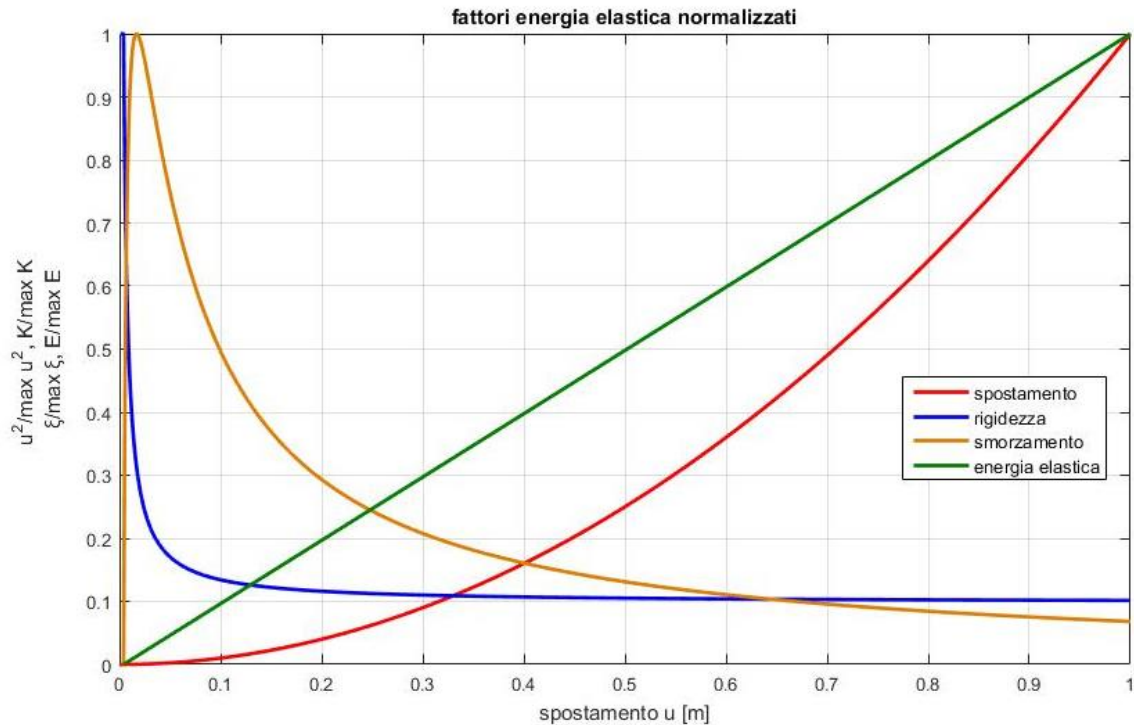


Grafico 21. Confronto fattori per calcolo energia elastica del sistema equivalente ed energia elastica

### 2.1.3 Algoritmo Matlab

La procedura di calcolo sviluppata in Matlab è composta da due parti. La prima fornisce un quadro sinottico del problema attraverso un grafico che mostra la posizione approssimata della soluzione e permette di verificare che le ipotesi per applicare il teorema delle contrazioni siano verificate. La seconda è il vero e proprio algoritmo di ricerca del punto fisso che consiste nella costruzione di una successione nella seguente forma

$$u_k = G(u_{k-1}) \quad (48)$$

Che, fornito un qualsiasi spostamento  $u_0$  di input all'interno dell'intervallo di ricerca e una tolleranza massima tra due valori consecutivi della successione, converge alla soluzione del problema  $\bar{u}$ .

# LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

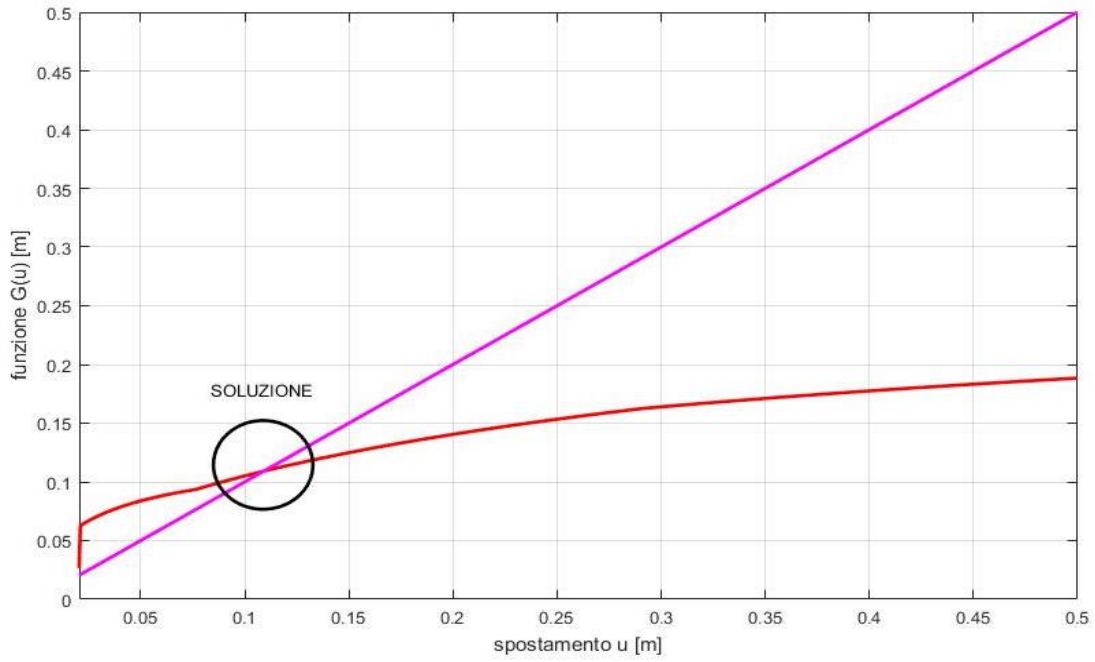


Grafico 22. 1° parte dell' algoritmo: grafico sinottico soluzione

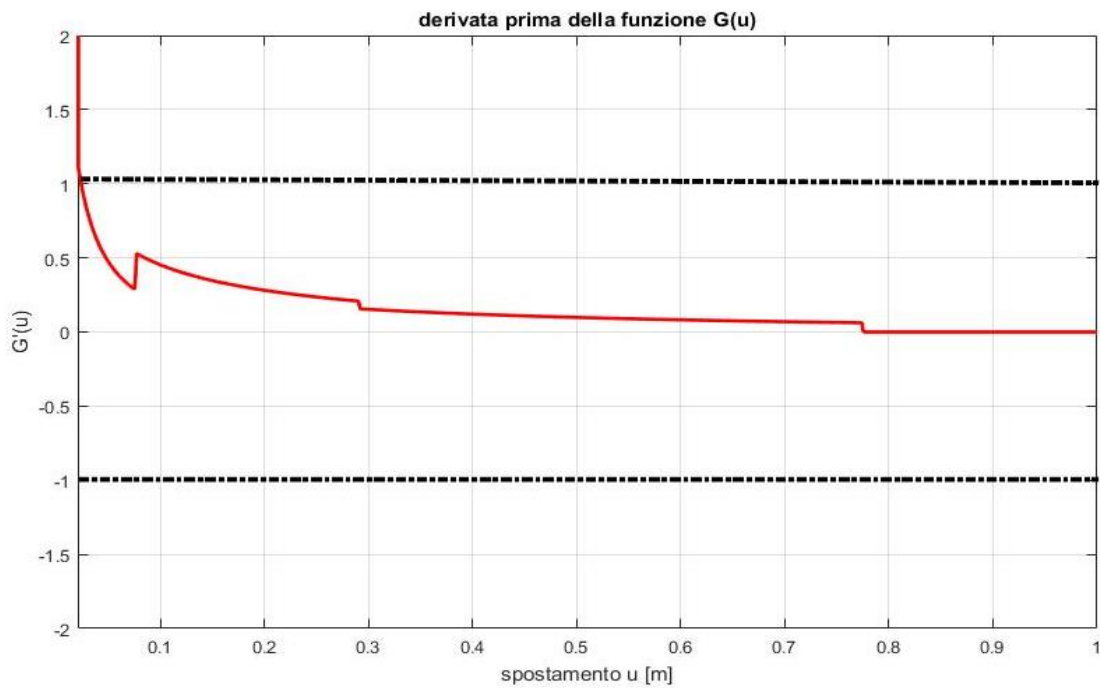


Grafico 23. 1° parte dell' algoritmo: grafico derivata prima di  $G(u)$

Sempre nella prima parte, per verificare la condizione 39, è inserito un “ciclo for” che non appena riscontra la violazione della condizione si ferma e restituisce un messaggio di allerta.

```

for i=1:nn(1,1)
    if(G(i,1)~=0)
        if(G(i,1)<Max_csi) || (G(i,1)>xf)
            fprintf('WARNING: ipotesi G(u) incluso in [xi,xf] non verificata')
            break
        end
    end
end
end
end

```

Figura 7. stralcio codice Matlab per la verifica della condizione (38)

### 2.1.4 Validazione del modello

Come detto in precedenza, per valutare l’accuratezza dei risultati del modello equivalente, questi vengono confrontati con quelli forniti dalle analisi modali time history non lineari del software SAP2000. Vengono eseguite 14 prove, ogni volta variando le caratteristiche dell’isolatore che tuttavia deve soddisfare le ipotesi del metodo equivalente. Per ognuno vengono eseguite dodici analisi modali non lineari time history in cui ogni accelerogramma di input è indipendente dagli altri undici e tutti risultano essere spettro – compatibili con lo spettro usato per l’analisi lineare. Da ogni analisi si estrae il valore di spostamento massimo in metri; quindi si ricava la media degli spostamenti ottenuti per ogni isolatore che sarà il parametro di paragone tra i due modelli. Di seguito vengono riportati i valori di spostamento a confronto per ogni isolatore, prima ricavati tramite l’analisi FNA (Fast Nonlinear Analysis) in SAP2000 poi con il codice Matlab per la linearizzazione equivalente.

	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>D300_1</b>	0,1620	0,1563	-3,68	3,51
<b>D350_1</b>	0,1420	0,1458	2,62	3,17
<b>D400_1</b>	0,1393	0,1633	14,71	2,66
<b>D450_1</b>	0,1193	0,1488	19,82	2,35
<b>D500_1</b>	0,0997	0,1247	20,03	2,10
<b>D550_1</b>	0,0857	0,1057	18,89	1,92
<b>D600_1</b>	0,0815	0,0981	16,92	1,81
<b>D650_1</b>	0,0749	0,0851	11,94	1,67
<b>D700_1</b>	0,0681	0,0748	8,94	1,54
<b>D750_1</b>	0,0620	0,0663	6,43	1,42
<b>D800_1</b>	0,0573	0,0592	3,18	1,31
<b>D900_1</b>	0,0508	0,0510	0,47	1,16
<b>D1000_1</b>	0,0446	0,0430	-3,79	1,00
<b>D1100_1</b>	0,0414	-	-	-

Tabella 2. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente

Come mostra la *tabella 2* l'analisi lineare equivalente fornisce nella maggior parte dei casi risultati che sovrastimano quelli forniti da SAP2000 anche se per spostamenti molto piccoli o molto grandi questo metodo non risulta a favore di sicurezza sottostimando il risultato dell'analisi non lineare. Tuttavia è bene notare che gli errori per difetto corrispondono a periodi totalmente al di fuori di quelli accettabili: infatti periodi pari a 3s o oltre rendono la struttura troppo flessibile; mentre periodi sotto il secondo, sintomo di un'eccessiva rigidità, non rendono la differenza tra struttura isolata e incastrata apprezzabile. Quindi una scelta oculata e appropriata del giusto isolatore per ogni struttura può eliminare il pericolo di incappare in una stima a sfavore dello spostamento massimo. Nel capitolo seguente verrà trattato in modo approfondito la scelta ottimale dell'isolatore, aspetto cruciale in fase preliminare di progetto.

Dal momento che l'imprecisione dei risultati nei modelli lineari equivalenti costituisce un problema sistematico di tali analisi, negli anni sono stati introdotti diversi approcci che consentono di modificare il coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$  per meglio avvicinarsi al risultato dei metodi non lineari. Queste correzioni spesso vengono elaborate senza ricorrere a considerazioni fisiche o meccaniche specifiche ma solo sulla base del maggior numero di prove possibili per interpolare al meglio i risultati. Sebbene questi approcci violino il principio su cui si basa la ricerca dello smorzamento equivalente, ovvero l'uguaglianza tra l'energia dissipata per ogni ciclo dal sistema isteretico e da quello lineare (*cf* equazione 23), si preferisce conseguire risultati migliori sugli spostamenti anche se l'energia dissipata non sarà esattamente uguale. Già nel 1992 il manuale redatto dal Japanese Public Works Research Institute (JPWRI) conteneva il concetto di "spostamento di progetto", ovvero il 70% dello spostamento ottenuto tramite l'analisi lineare equivalente. Sostanzialmente questo approccio prevede che al posto del rapporto di duttilità  $\frac{u}{u_y}$  all'interno della definizione dello smorzamento equivalente venga sostituito  $0.7 \frac{u}{u_y}$  che modifica l'equazione 27 in

$$\xi_{eq} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{K_r}{K_l}\right) \cdot \left(0.7 \frac{u}{u_y}\right)}{\pi \cdot \left(0.7 \frac{u}{u_y}\right) \cdot \left[\frac{K_r}{K_l} \cdot \left(0.7 \frac{u}{u_y} - 1\right)\right]} \quad (49)$$

Tuttavia, sebbene questa modifica migliori i risultati corrispondenti a periodi prossimi ai 2s, in molti casi la correzione risulta troppo marcata portando il metodo a sfavore di sicurezza. La carenza fondamentale del un coefficiente costante 0.7 è l'impossibilità nel tenere conto della dipendenza dell'errore dall'entità dello spostamento. Infatti alcuni casi, come si evince dalla *tabella 2* avrebbero bisogno di una correzione più marcata mentre altri sarebbero già accettabili senza la modifica dello smorzamento equivalente

	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
D300_1	0,1620	0,1371	-18,19	3,46
D350_1	0,1420	0,1289	-10,14	3,12
D400_1	0,1393	0,1430	2,56	2,63
D450_1	0,1193	0,1276	6,51	2,31
D500_1	0,0997	0,1074	7,16	2,05
D550_1	0,0857	0,0920	6,88	1,88
D600_1	0,0815	0,0860	5,21	1,77
D650_1	0,0749	0,0757	1,09	1,63
D700_1	0,0681	0,0677	-0,57	1,50
D750_1	0,0620	0,0611	-1,49	1,39
D800_1	0,0573	0,0556	-3,06	1,29
D900_1	0,0508	0,0493	-3,03	1,14
D1000_1	0,0446	0,0430	-3,66	1,00
D1100_1	0,0414	-	-	-

Tabella 3. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coeff correttivo 0.7

Un'evoluzione del concetto di spostamento di progetto fu introdotta prima nel 1994 con il nome di Caltrans94 poi migliorata nel 1996 da Hwang e al. nel modello denominato Caltrans 96. In tale modello il coefficiente riduttivo costante da applicare al rapporto di duttilità lascia il posto ad una funzione  $f\left(\frac{u}{u_y}; \alpha\right)$  che moltiplica lo smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$ . Per determinare questa funzione correttiva gli autori hanno cercato quella che meglio approssimasse i risultati di un campione rappresentativo senza sviluppare alcuna considerazione fisica o meccanica particolare.

$$f = \frac{\frac{u}{u_y}^a}{b - c \cdot \alpha} \quad (50)$$

Questa funzione effettivamente soddisfa l'esigenza di far diminuire lo smorzamento equivalente per valori bassi del rapporto di duttilità, ovvero nella zona appena appena oltre la fase elastica e contemporaneamente aumentare lo smorzamento per valori elevati (grafico 24) in quanto, come si evince dalla tabella 2 gli errori per eccesso maggiori si hanno per valori elevati dello spostamento e quindi per valori elevati del rapporto di duttilità. Gli autori suggeriscono un valore di  $a = 0.58$ ,  $b = 6$  e  $c = 10$  per valori del rapporto di duttilità studiato tra 0 e 50 e del parametro  $\alpha$  variabile tra 0.05 e 0.15.

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

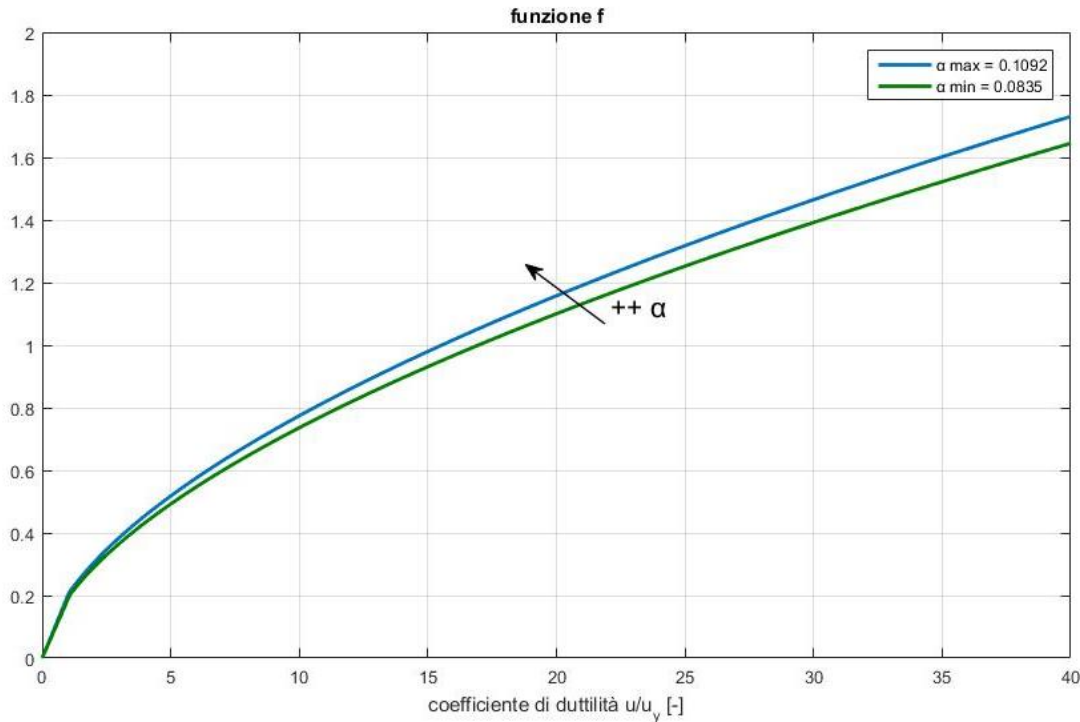


Grafico 24. valore coefficiente correttivo  $f$  in funzione del rapporto di duttilità per diversi valori del parametro  $\alpha$

	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>D300_1</b>	0,1620	0,1279	-26,70	3,43
<b>D350_1</b>	0,1420	0,1257	-12,92	3,10
<b>D400_1</b>	0,1393	0,1316	-5,88	2,61
<b>D450_1</b>	0,1193	0,1196	0,22	2,29
<b>D500_1</b>	0,0997	0,1057	5,70	2,05
<b>D550_1</b>	0,0857	0,0965	11,21	1,89
<b>D600_1</b>	0,0815	0,0932	12,55	1,80
<b>D650_1</b>	0,0749	0,0863	13,21	1,67
<b>D700_1</b>	0,0681	0,0805	15,43	1,56
<b>D750_1</b>	0,0620	0,0755	17,89	1,46
<b>D800_1</b>	0,0573	0,0711	19,43	1,37
<b>D900_1</b>	0,0508	0,0659	22,89	1,24
<b>D1000_1</b>	0,0446	0,0598	25,46	1,11
<b>D1100_1</b>	0,0414	0,0550	24,75	0,99

Tabella 4. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione della funzione  $f$

Dopo l'introduzione di questa funzione correttiva sullo smorzamento equivalente si nota che rispetto al coefficiente costante 0.7 questa correzione riporta il metodo a favore di sicurezza nella maggior parte dei casi. Tuttavia gli errori percentuali risultano incrementati in certi casi anche oltre il valore che si avrebbe non modificando lo smorzamento. Quindi sebbene questo approccio non risulti ottimo per lo studio che si sta svolgendo, l'idea di un coefficiente variabile applicato allo smorzamento ha le potenzialità per diventare la soluzione al problema della ricerca di una funzione correttiva dello smorzamento. Infatti l'idea è quella di mutuare da ognuno di questi due approcci il punto di forza per creare un



coefficiente  $\beta \left( \frac{u}{u_y} \right)$  riduttivo che applicato al rapporto di duttilità non lo riduca oltre il 70% (metodo JPWRI 1992) ma che al contempo tenga conto della dipendenza dallo spostamento. Della funzione correttiva  $f$  si perde la variabilità dal parametro  $\alpha$  poiché come si nota dal *grafico 24* l'esigua escursione ( $0.1092 \div 0.0835$ ) non influenza in modo marcato la correzione apportata. Successivamente verrà anche considerata anche la dipendenza della funzione correttiva da  $\alpha$ .

$$\xi_{eq} = \frac{2 \cdot \left( 1 - \frac{K_r}{K_l} \right) \cdot \left( \beta \frac{u}{u_y} \right)}{\pi \cdot \left( \beta \frac{u}{u_y} \right) \cdot \left[ \frac{K_r}{K_l} \cdot \left( \beta \frac{u}{u_y} - 1 \right) \right]} \quad (51)$$

La funzione viene cercata facendo sì che siano rispettate alcune caratteristiche: innanzitutto per valori del rapporto di duttilità bassi, che indicano una soluzione vicina allo spostamento di snervamento, il coefficiente deve essere maggiore all'unità in quanto in tale situazione l'energia dissipata in un ciclo di isteresi risulta troppo bassa rispetto a quella di un sistema lineare soggetto allo stesso spostamento e con rigidità pari a quella equivalente, il che porta ad avere un coefficiente di smorzamento  $\xi_{eq}$  troppo piccolo. Per quanto riguarda valori più elevati di spostamento, associati a rapporti di duttilità compresi tra 15 e 35 si verifica la situazione opposta alla precedente, piccoli incrementi di spostamento fanno aumentare molto l'area di un ciclo di isteresi, ma influenzano molto meno la rigidità del sistema lineare equivalente. Ciò porta ad avere un valore dello smorzamento equivalente troppo alto, motivo per cui per questi valori del rapporto di duttilità è necessario un fattore  $\beta$  minore dell'unità. Si decide di imporre come limite inferiore un valore prossimo a 0.7 in quanto una ulteriore diminuzione porterebbe a risultati dell'algoritmo che sottostimano quelli dell'analisi non lineare. Cercando di interpolare al meglio i risultati ottenuti tramite il software SAP2000, dopo diversi tentativi si giunge a definire la funzione  $\beta$  come

$$\beta = \frac{\left[ \ln \left( \frac{\frac{u}{u_y} + 39}{105} \right) \right]^2 - 1.3}{\frac{\frac{u}{u_y} + 39}{105}} + 2.4 \quad (52)$$

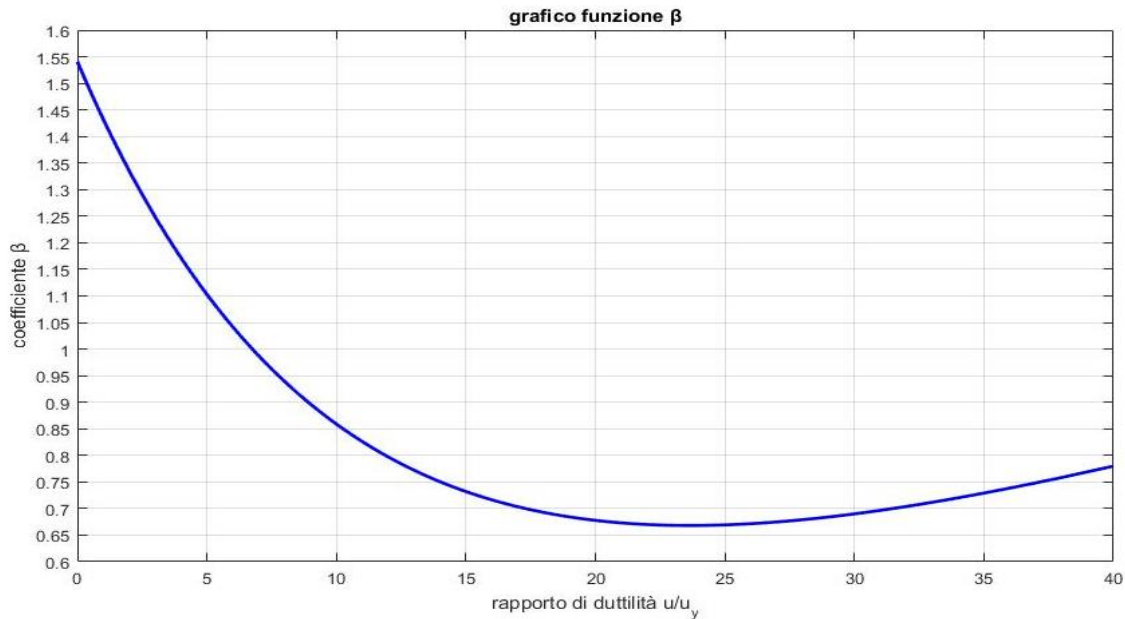


Grafico 25. valore coefficiente  $\beta$  in funzione del rapporto di duttilità

Dopo l'introduzione di questo coefficiente correttivo i risultati dell'analisi lineare risultano sempre maggiori rispetto a quelli dell'analisi FNA per periodi d'interesse (circa 2s), garantendo quindi che il metodo sia a favore di sicurezza, e con un errore massimo del' 6% invece che del 20% come nella prima analisi. Come si nota comunque dalla *tabella 5* qualora la struttura sia troppo rigida o troppo flessibile, nonostante l'introduzione del coefficiente  $\beta$ , il metodo resta a sfavore di sicurezza. Tali casi però non assumono particolare significato pratico dal momento che ricadere in periodi superiori a 3s o inferiori a 1s dovrebbe portare ad un'attenta verifica e modifica della progettazione in modo da raggiungere un periodo ottimale vicino ai 2s a cui sono associati errori positivi nell'ordine del 5%.

	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>D300_1</b>	0,1620	0,1386	-16,89	3,46
<b>D350_1</b>	0,1420	0,1275	-11,34	3,11
<b>D400_1</b>	0,1393	0,1459	4,52	2,63
<b>D450_1</b>	0,1193	0,1277	6,56	2,31
<b>D500_1</b>	0,0997	0,1056	5,61	2,05
<b>D550_1</b>	0,0857	0,0911	5,97	1,87
<b>D600_1</b>	0,0815	0,0861	5,35	1,77
<b>D650_1</b>	0,0749	0,0772	2,92	1,64
<b>D700_1</b>	0,0681	0,0699	2,56	1,52
<b>D750_1</b>	0,0620	0,0635	2,43	1,40
<b>D800_1</b>	0,0573	0,0579	1,11	1,30
<b>D900_1</b>	0,0508	0,0511	0,49	1,16
<b>D1000_1</b>	0,0446	0,0433	-2,99	1,00
<b>D1100_1</b>	0,0414	-	-	-

Tabella 5. confronto spostamenti analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente  $\beta$

Per completezza, dopo aver tarato l'algoritmo sullo spostamento massimo, è bene verificare anche la bontà del taglio alla base in quanto costituisce un'informazione essenziale per la

progettazione tanto quanto lo spostamento massimo. Dal momento che il taglio alla base generato dagli isolatori è direttamente proporzionale allo spostamento mediante la rigidità, è prevedibile che gli errori commessi sul taglio non siano così diversi da quelli commessi sullo spostamento. A suffragio di quanto detto si riposta la *tabella 6* di seguito che mostra proprio un errore percentuale, la cui variazione nelle diverse prove ricalca quella ottenuta per gli spostamenti, ma con valori in modulo minori rispetto a quelli ottenuti per lo spostamento.

	<b>Analisi FNA [KN]</b>	<b>Analisi lineare eq. [KN]</b>	<b>Errore [%]</b>	<b>Periodo [s]</b>
<b>D300_1</b>	463,04	410,77	-12,73	3,46
<b>D350_1</b>	505,69	468,34	-7,97	3,11
<b>D400_1</b>	719,69	746,81	3,63	2,63
<b>D450_1</b>	808,76	853,00	5,19	2,31
<b>D500_1</b>	856,23	892,86	4,10	2,05
<b>D550_1</b>	884,45	921,87	4,06	1,87
<b>D600_1</b>	939,02	973,26	3,52	1,77
<b>D650_1</b>	1005,5	1023,6	1,77	1,64
<b>D700_1</b>	1065,9	1081,3	1,43	1,52
<b>D750_1</b>	1131,9	1146,2	1,25	1,40
<b>D800_1</b>	1211,9	1218,0	0,50	1,30
<b>D900_1</b>	1352,9	1356,5	0,26	1,16
<b>D1000_1</b>	1549,9	1536,4	-0,88	1,00
<b>D1100_1</b>	1788,5	-	-	-

Tabella 6. confronto taglio alla base analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente  $\beta$

### 2.1.5 Ottimizzazione scelta isolatore

Un altro aspetto saliente in fase preliminare di progettazione è la determinazione dell'isolatore più appropriato tra quelli disponibili sul mercato. Di seguito si cerca di sistematizzare questa scelta costruendo un algoritmo che forniti i dati sulla geometria della struttura, la sollecitazione sismica, l'entità delle forze in fase di esercizio e un database di isolatori fornisca la soluzione ottimale da adottare. Per valutare la scelta ottimale si decide di introdurre quattro coefficienti ognuno dei quali possa cogliere un fattore che influenza la scelta dell'isolatore.

Per valutare tutti i parametri vengono eseguite tante analisi usando l'algoritmo di linearizzazione equivalente quanti sono i dispositivi isolanti inserirsi nel database (nella fattispecie 148). Di seguito per ogni coefficiente e ognuno dei 148 dispositivi viene riportato un grafico che mostra la variabilità di tale fattore in funzione del periodo relativo allo spostamento massimo.

- 1) Il primo considera la presenza dei carichi di esercizio, come vento e forze dovute alla frenatura, che vengono rapportati al carico di snervamento del sistema in esame. In particolare tale coefficiente vale 1 se i carichi di esercizio sono assenti, vale 0 se carico di snervamento e carichi d'esercizio coincidono, mentre risulta negativo quando questi ultimi superano la soglia di attivazione degli isolatori.

$$f_1 = \frac{f_B - W}{f_B} \quad (54)$$

In cui si definisce il carico di snervamento del sistema  $f_B = F_y \cdot n^\circ \text{ isolatori}$  e il carico che la struttura dovrà sopportare in fase di esercizio  $W$ .

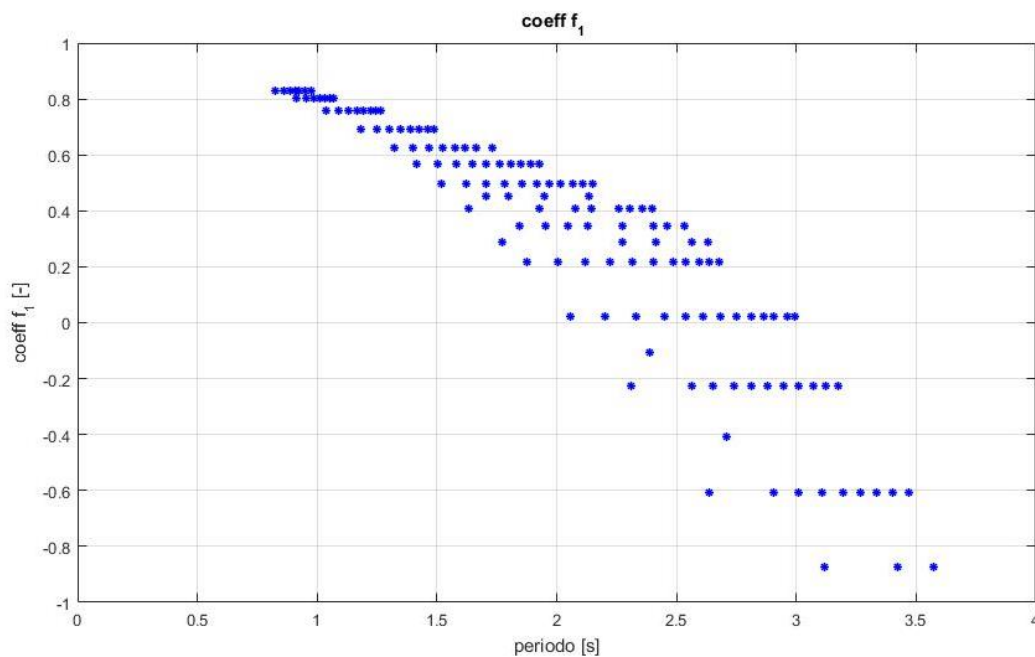


Grafico 26. variabilità coefficiente f1 in funzione del periodo

- 2) Il secondo coefficiente rappresenta l'efficacia dell'isolamento, ovvero quanto il sistema una volta attivato lavori al di fuori dalla zona elastica. Infatti una struttura isolata che dopo l'attivazione degli isolatori sviluppi forze poco superiori a quelle necessarie allo snervamento non risulta una scelta appropriata, dal momento che gli isolatori non riuscirebbero a sviluppare ampi cicli di isteresi.

$$f_2 = (f_A - f_B) \cdot \frac{2}{(f_A + f_B) \cdot (t_A - t_B)} \quad (55)$$

Si definiscono la forza sviluppata dagli isolatori corrispondente allo spostamento massimo  $f_A$ , il periodo del sistema isolato  $t_A$  e il periodo equivalente alla rigidità iniziale (fase elastica)  $t_B$ .

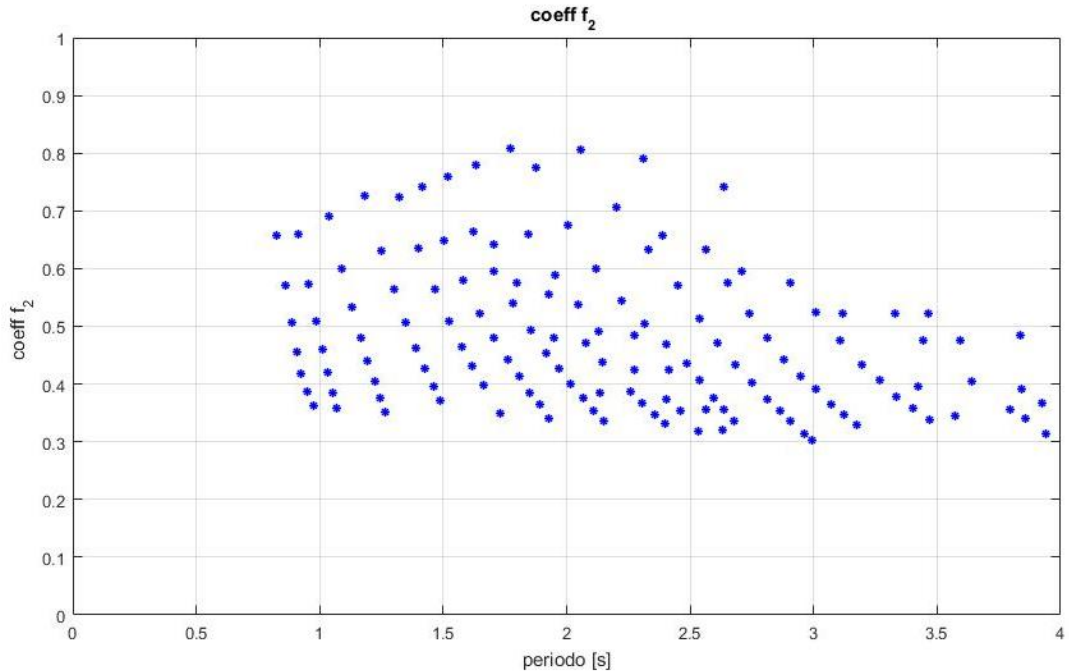


Grafico 27. variabilità coefficiente f2 in funzione del periodo

- 3) Il terzo coefficiente concerne anch'esso l'efficacia dell'isolamento ma sotto un altro punto di vista, ovvero quello dell'allungamento del periodo. Come si è già accennato qualora si opti per l'isolamento i periodi target entro cui dovrebbe lavorare la struttura sono nell'ordine dei 2 s. Periodi più bassi devono destare il sospetto che l'isolamento non sia la strada corretta, periodi più alti rendono la struttura troppo flessibile. Questo coefficiente assume valore unitario se il periodo del sistema, una volta attivati gli isolatori, risulta pari a 2s, quindi decresce fino a zero per periodi di 1.5 s e 2.5 s. Al di fuori dell'intervallo 1.5 – 2.5 il coefficiente assume valori negativi.

$$f_3 = \frac{1}{(T_o - T_i) \cdot (T_o - T_s)} \cdot [t_A^2 - (T_i + T_s) \cdot t_A + T_i T_s] \quad (56)$$

In cui  $T_o$  è il periodo ideale pari a 2 s;  $T_i = 1.5$  s e  $T_s = 2.5$  s sono rispettivamente il limite inferiore e superiore.

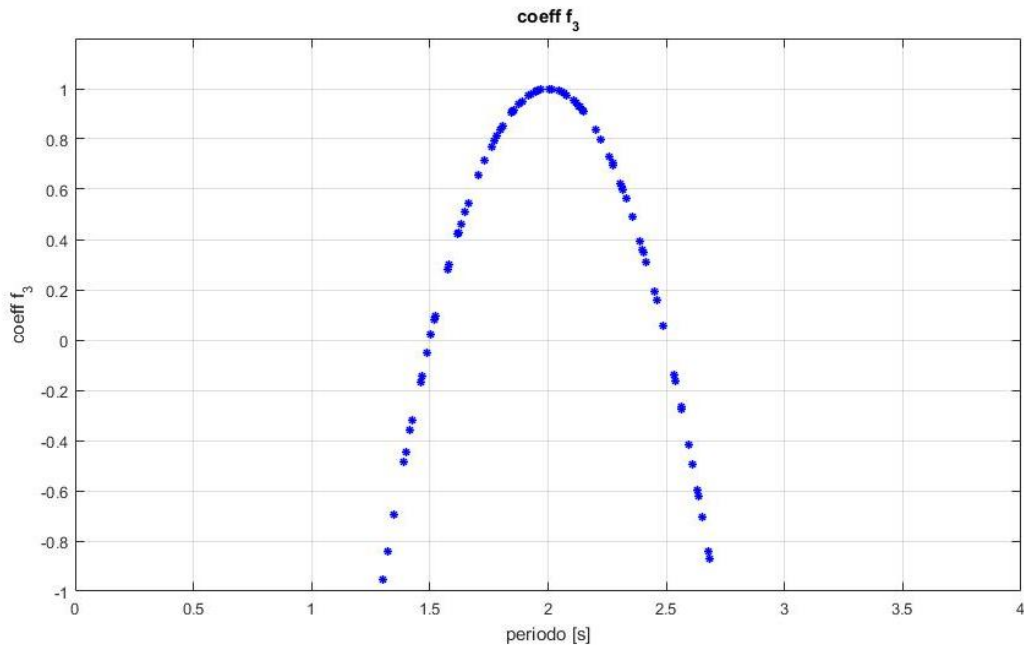


Grafico 28. variabilità coefficiente f3 in funzione del periodo

- 4) Infine il quanto coefficiente valuta se lo spostamento trovato è compatibile con quello massimo fornito dal produttore. Viene fornito un valore pari a 0 per spostamento nullo e quando questo eguaglia quello massimo consentito. Qualora lo spostamento sia la metà di quello ammissibile il coefficiente vale 1.

$$f_4 = 4 \cdot \left[ - \left( \frac{u}{S_{max}} \right)^2 + \frac{u}{S_{max}} \right] \quad (57)$$

Vengono definiti  $u$  lo spostamento massimo valutato con il metodo equivalente e  $S_{max}$  lo spostamento ammissibile per l'isolatore fornito dal produttore.

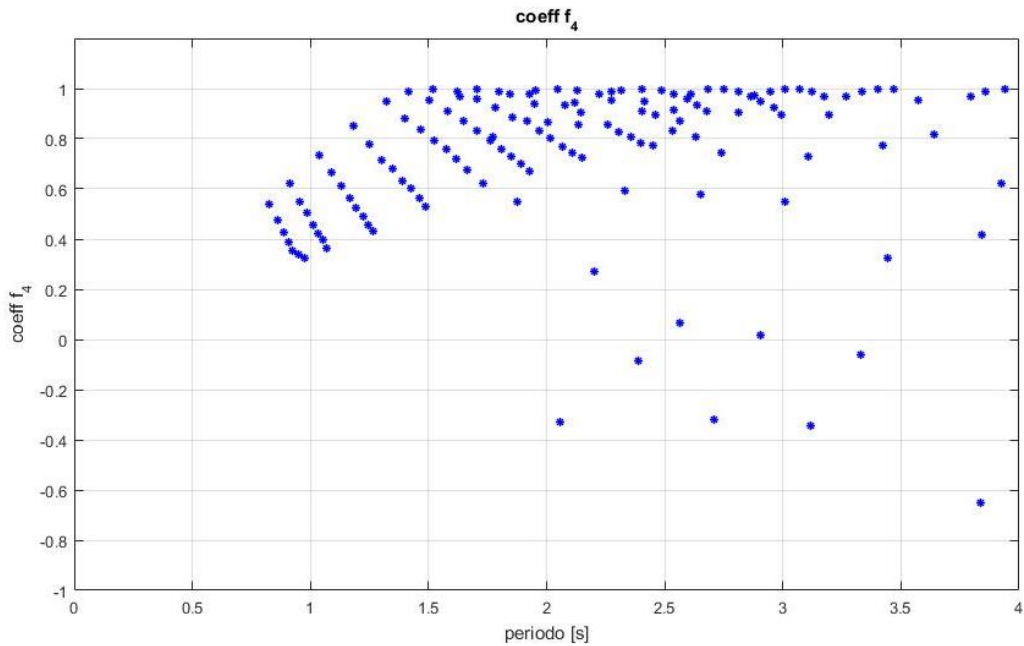


Grafico 29. variabilità coefficiente f4 in funzione del periodo

Un altro parametro da considerare durante la scelta degli isolatori è il carico massimo verticale sopportabile da ogni unità durante l'evento sismico. Tuttavia si decide di non tenerne conto nell'indice di bontà poiché il comportamento verticale dell'isolatore non influenza le sue proprietà di protezione sismica, quindi una volta scelto il dispositivo migliore in termini di rigidità e smorzamento si andrà a verificare la resistenza verticale. Queste scelte permettono anche di non rendere troppo severa e restrittiva la scelta dell'isolatore. Per valutare la massima azione assiale sopportabile durante l'evento sismico si fa riferimento al concetto di "area ridotta  $A_r$ ": questo concetto deriva dal fatto che durante la deformazione il movimento relativo delle due basi porta ad una riduzione della superficie tramite cui le azioni verticali possono essere scaricate al suolo e quindi ad un conseguente aumento dello sforzo assiale nell'elemento.

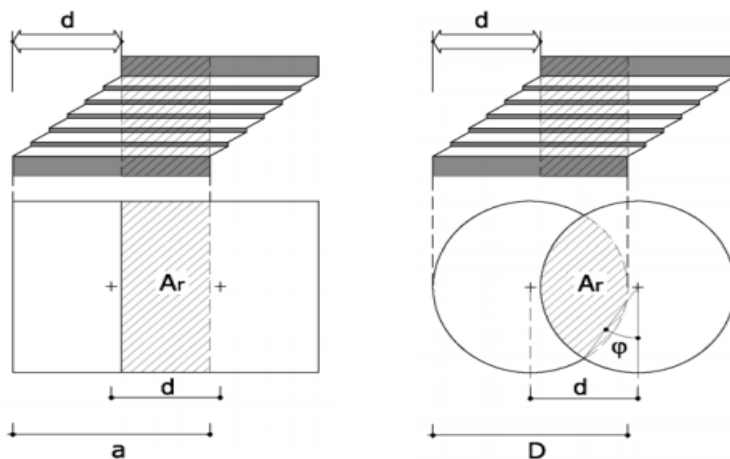


Figura 8. area ridotta per isolatori quadrato (sinistra) e circolari (destra)

Le aree ridotte per un isolatore quadrato ed uno circolare vengono ricavate rispettivamente dalle seguenti relazione

$$A_{r,q} = a \cdot (a - d) \quad (58)$$

$$A_{r,c} = \frac{D^2}{4} (\varphi - \text{sen}\varphi) \quad (59)$$

$$\varphi = 2\text{arccos}\left(\frac{d}{D}\right) \quad (60)$$

Per ricavare il carico verticale critico sismico, che verrà poi confrontato con l'azione assiale gravante su ogni isolatore, basta moltiplicare l'area  $A_r$  appena trovata per lo smorzo massimo verticale ammissibile fornito dal produttore.

Una volta valutati i quattro coefficienti si ricava l'indice di bontà IB come prodotto dei quattro termini; si aggiunge anche un fattore 100 solo per rendere più agevole la comprensione dei risultati.

$$IB = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot 100 \quad (61)$$

L'algoritmo è scritto in modo che si svolgano tante analisi quanti sono i dispositivi nel database; per ognuno vengono calcolati i coefficienti e quindi l'indice di bontà. Infine il programma riconosce l'isolatore associato al valore massimo di IB tra tutti quelli calcolati e lo restituisce in output come scelta ottimale. Nella procedura è anche inserita una condizione per cui qualora anche uno solo dei 4 coefficienti che compone l'indice di bontà sia minore di zero viene associato automaticamente a quell' IB il valore di zero. Questa scelta è subordinata all'assunzione che se anche una sola delle quattro condizioni non risulta verificata allora l'isolatore non è adatto alla struttura e/o alle sollecitazioni. Infine l'algoritmo fornisce anche un grafico, che può essere funzione sia dello spostamento che del periodo, in cui si può apprezzare la variabilità dell'indice IB su tutti i casi provati. Il risultato è un grafico a campana con un punto di ottimo. Svolgendo numerosi test si nota come i valori massimi dell'indice IB si raggiungano quando il carico in fase di esercizio tende a zero; mentre per valori di tale carico prossimi al 10% della massa della struttura l'indice di bontà risulta uguale a zero. Ciò rafforza anche la veridicità di questa procedura, infatti un indice pari a zero per tutti gli isolatori presenti nel database significa che l'isolamento non è la modalità giusta per proteggere la struttura dai sismi. Analogamente molti testi e trattati indicano il 10% come limite massimo alle forze in fase di esercizio affinché possano essere applicate tecniche di isolamento.



## LINERIZZAZIONE EQUIVALENTE

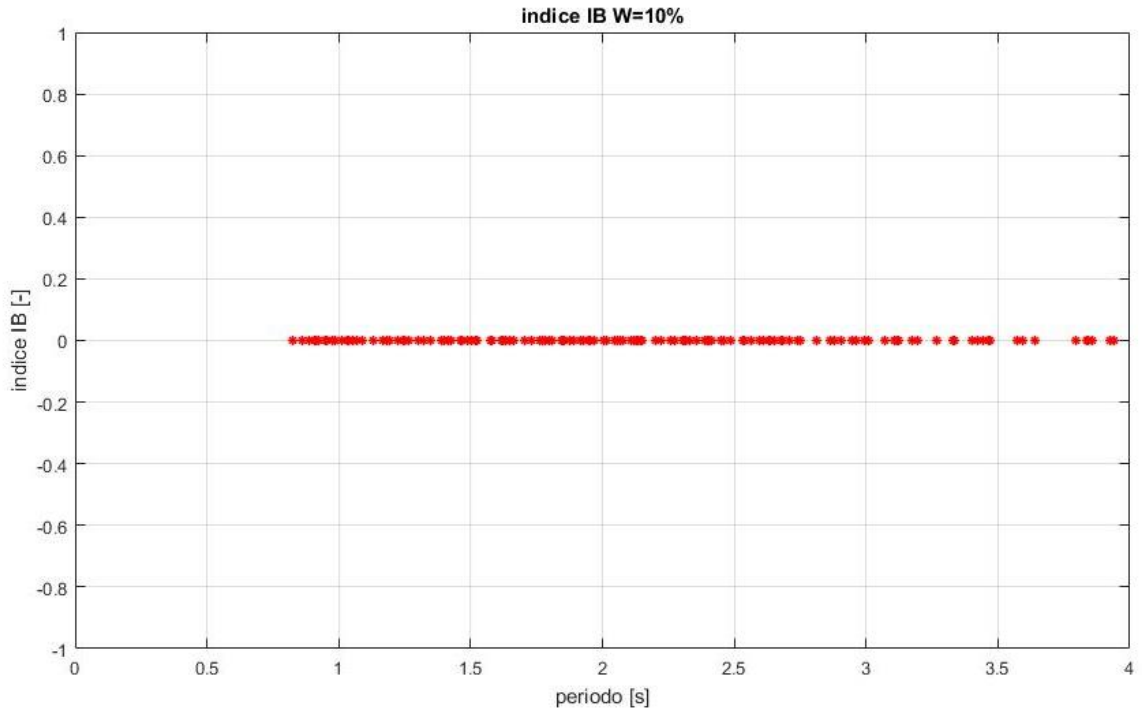


Grafico 30. Variabilità indice IB in funzione del tempo per carico d'esercizio pari al 10% della massa della struttura

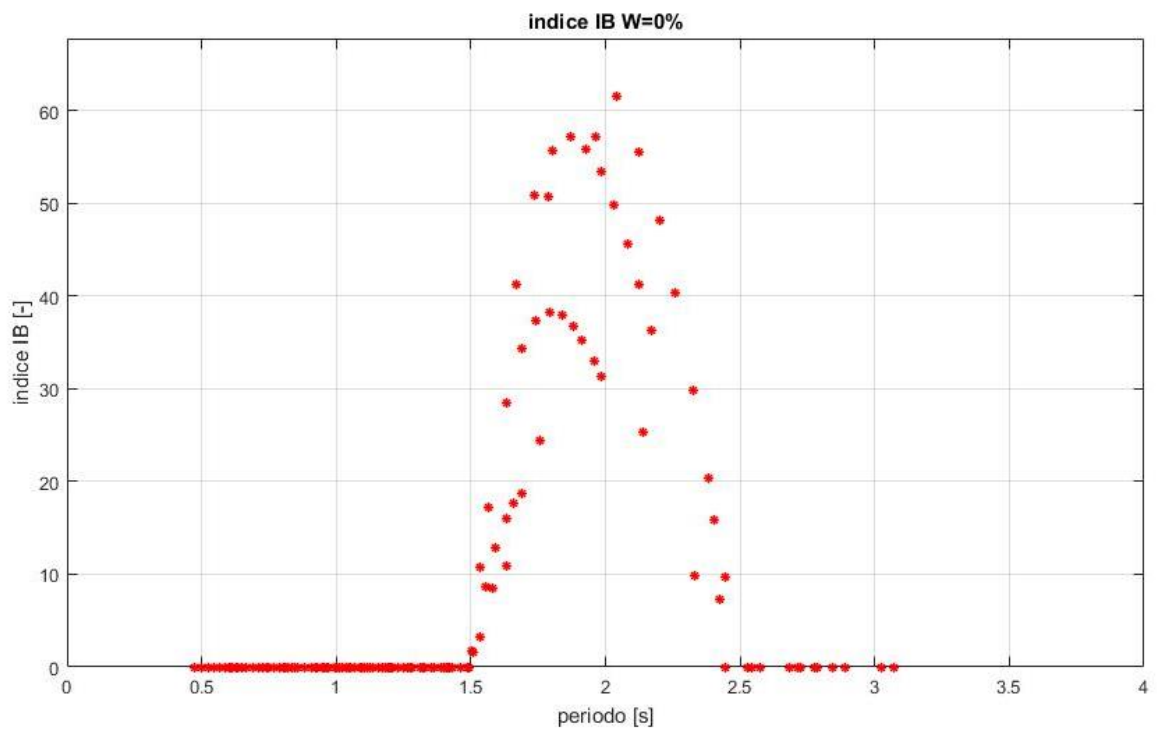


Grafico 31. Variabilità indice IB in funzione del tempo per carico d'esercizio pari al 0% della massa della struttura

Come si nota dal *grafico 31* la situazione migliore che si possa presentare è quella in cui i carichi di esercizio sono pari a zero. Per questo scenario si noti la moltitudine di punti con indice IB diverso zero, sintomo che le quattro condizioni sono ben equilibrate e non si escludono a vicenda dando origine a numerose soluzioni possibili. La migliore ha un indice di bontà pari a 60, che dallo studio svolto, si può dire sia il massimo raggiungibile e che denota una condizione in cui l'isolamento sismico è una scelta realistica e percorribile. Man mano che il carico d'esercizio aumenta, le quattro condizioni cominciano ad entrare in conflitto tra loro e si notano sempre meno isolatori idonei con indici IB via via decrescenti. Questa tendenza raggiunge il suo massimo quando si applicano carichi di esercizio nell'ordine del 9 – 10% della massa della struttura (*grafico 30*): tutti i punti hanno indice IB uguale a zero e ciò deve suonare come un campanello d'allarme sulla necessità di trovare altri metodi di protezione sismica poiché l'isolamento non può essere una strada percorribile. Esistono tuttavia scenari in cui il valore dell'indice di bontà è diverso da zero ma che comunque necessitano di attenta riflessione sulla scelta o meno dell'isolamento. Per indici compresi tra 0 e 15 è sconsigliabile comunque l'isolamento per cui un buon range in cui l'isolamento si possa dire una scelta azzeccata è 15 – 60.

Una volta costruito l'algoritmo si passa a valutare quanto lo spostamento calcolato con l'isolatore "ottimo" grazie alla procedura di linearizzazione equivalente si discosti dal risultato dell'analisi non lineare svolta in SAP2000 con il medesimo isolatore. Vengono creati 88 scenari per eseguire questo studio facendo variare la massa del ponte e le forze in fase di esercizio. Partendo dalla massa base di 900 ton si creano casi con il 20%, 50%, 80%, 100%, 120%, 150%, 180%, 200% della massa base. A ognuno di questi casi viene poi associato un carico di esercizio pari ad una percentuale compresa tra 0% e 10% della massa della struttura.

Esempio

Massa 50% e carico d'esercizio al 3%

$$M = 0.5 \cdot 900 \text{ [ton]}$$

$$W = M \cdot 10 \cdot 0.03 \text{ [KN]}$$

In cui la massa del ponte è calcolata come il 50% della massa base, da questo risultato si ricavano le forze in fase di esercizio (KN) calcolandone il 3%.

I risultati ottenuti per gli 88 scenari vengono elencati nelle *tabelle 7 – 8* seguenti

% W	massa 20%		massa 50%		massa 80%		massa 100%	
	IB	err %	IB	err %	IB	err %	IB	err %
0	60,3	7,6	61,5	7,7	57,4	7,9	58,5	7,6
1	48	7,6	45	7,7	44,6	5,8	45,4	6
2	35,7	7,6	33,3	6,8	32,8	5,8	32,7	6
3	23,3	7,6	21,8	6,8	20,9	5,8	21,2	7,5
4	12,8	2,5	11,6	2,5	12	3,8	11,9	3,2
5	5,1	2,5	6,18	2,5	6,46	2	2,85	-1,6
6	1,57	-0,44	2,57	-5,3	2,92	-4,4	2,84	-1,6
7	0	0	1,01	-5,3	0,9	-4,4	1,01	-7,1
8	0	0	0,14	-7,9	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 7. tabelle errore % - indice IB per valori di massa della struttura (20% - 100%) e carichi d'esercizio (0% - 10%)

% W	massa 120%		massa 150%		massa 180%		massa 200%	
	IB	err %	IB	err %	IB	err %	IB	err %
0	58,3	6,4	60	7,7	59,8	7,7	56,4	7,1
1	45,4	6,9	45,7	6,2	46,3	7,7	44,8	7,1
2	32,7	5,8	33,1	6,2	32,9	7,7	33,3	7,1
3	21,6	5,8	20,8	5,1	20,7	5,8	21,8	7,1
4	12,3	3,4	11,9	5,1	12,2	5,8	11,6	2,3
5	6,16	0	6,36	1,1	5,99	-1,1	6,25	2,3
6	2,47	0	2,17	1,1	2,78	-1,1	2,81	-6,6
7	0,95	-7,3	0,86	-8	0,45	-8,9	1,05	-6,6
8	0,12	-7,3	0,16	-8	0,14	-8,9	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 8. tabelle errore % - indice IB per valori di massa della struttura (120% - 200%) e carichi d'esercizio (0% - 10%)

Dall'analisi dei risultati emerge che per valori significativi dell'indice di bontà (10 – 60) l'algoritmo di linearizzazione equivalente sovrastima sempre i risultati forniti da SAP2000. In più si può notare come il range di variabilità dell'errore sia piuttosto stretto, 2 – 8%. Per quanto riguarda i valori dell'indice di bontà sotto 10 si noti come l'errore tenda sempre a diminuire, tanto che in molti casi l'algoritmo equivalente sottostima l'analisi non lineare. Tuttavia come detto in precedenza tali valori dell'indice di bontà assumono scarso significato quindi riflessioni sulla coincidenza o meno del risultato delle due analisi risultano prive di senso. Perciò focalizzando l'attenzione solo su valori realistici e utili dell'indice IB, è apprezzabile in primo luogo che il modello lineare sovrastimi sempre quello non lineare e in secondo luogo che lo sovrastimi con un errore compreso in range stretto. Di seguito si riporta il grafico in cui sono mostrati i valori delle *tabelle 7 e 8* in forma sinottica che vengono raggruppati in set, ognuno corrispondente ad un valore di massa della struttura.

LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

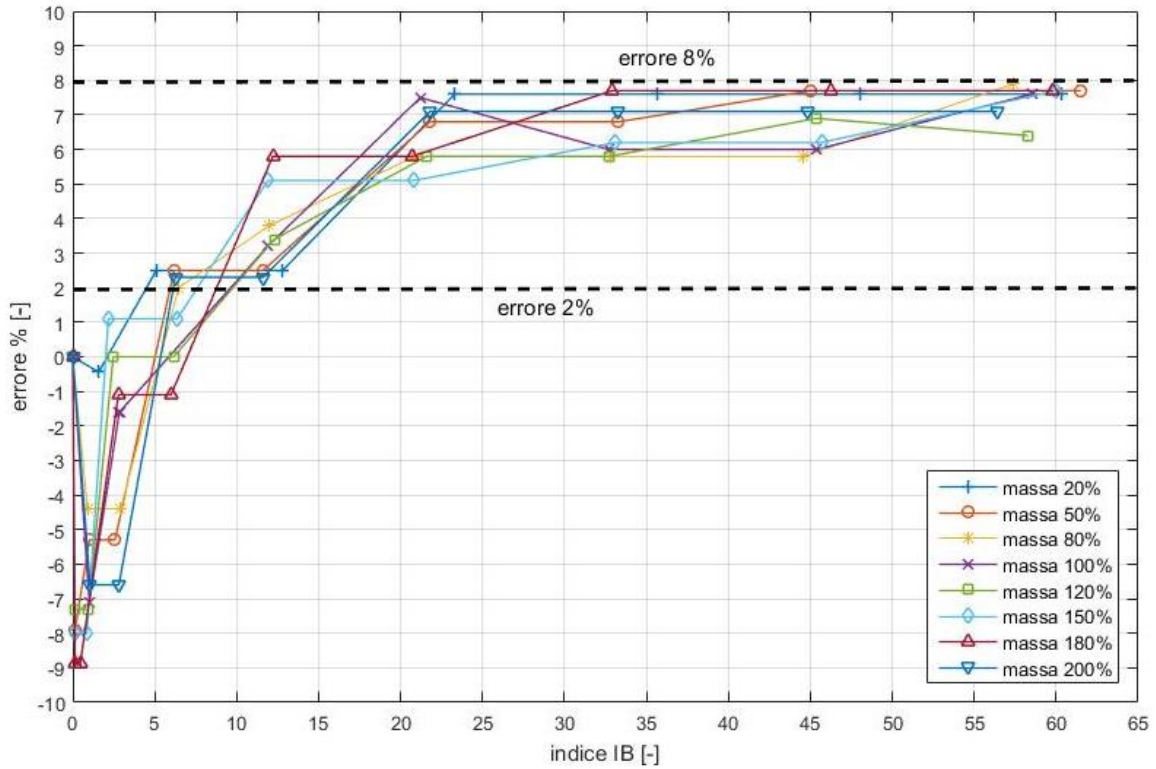


Grafico 32. Variabilità errore% sugli spostamenti in funzione dell'indice di bontà IB database LRS

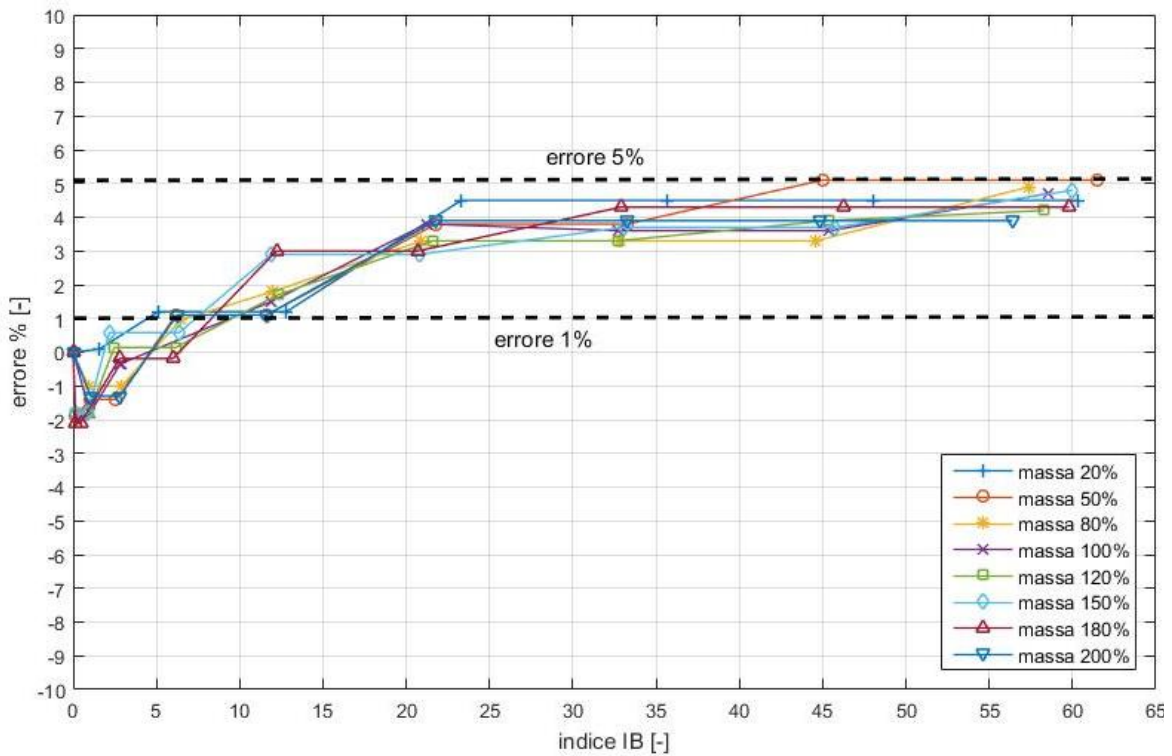


Grafico 33. Variabilità errore% sul taglio alla base in funzione dell'indice di bontà IB database LRS

Nonostante i risultati fossero soddisfacenti sia in termini di spostamenti che forze, si è deciso di indagare anche la variabilità della funzione  $\beta$  rispetto al rapporto di rigidezza  $\alpha = \frac{K_r}{K_l}$  sebbene in precedenza sia stato affermato che questa dipendenza risulti poco rilevante. Questa che all' apparenza sembra una contraddizione, trova invece spiegazione nel fatto che fino ad ora sia stata utilizzata nel database degli isolatori solo una serie (serie LRS) di dispositivi, tutti accomunati da un rapporto  $\alpha$  molto simile ( $\approx 0.096$ ). Al fine di ampliare il database e familiarizzare con il coefficiente  $\beta$  funzione di due variabili, che sarà essenziale nel capitolo seguente, si trasforma la funzione  $\beta$  (equazione 52) attraverso un parametro  $c$  nella seguente espressione

$$\beta = \frac{\left[ \ln \left( \frac{\left(1 + \frac{c}{a_1}\right) \frac{u}{u_y} + 39 \left(1 + \frac{c}{a_2}\right)}{105 \left(1 + \frac{c}{a_3}\right)} \right) \right]^2 - 1.3}{\frac{\left(1 + \frac{c}{a_1}\right) \frac{u}{u_y} + 39 \left(1 + \frac{c}{a_2}\right)}{105 \left(1 + \frac{c}{a_3}\right)}} + (2.4 - a_4 c) \quad (62)$$

Svolgendo numerose prove come quelle svolte in precedenza ma questa volta su una nuova serie di isolatori caratterizzati da un  $\alpha$  medio pari a 0.055 (serie LRN), si giunge a definire il set di parametri che ben approssimano i risultati di SAP2000 come segue:  $c = 5$ ;  $a_1 = 0.8$ ;  $a_2 = 3$ ;  $a_3 = 1.55$ ;  $a_4 = 0.001$ . Infine affinché il coefficiente  $\beta$  diventi una funzione  $\beta\left(\frac{u}{u_y}; \alpha\right)$  si impone che quando  $\alpha$  è pari al massimo della serie LRS il parametro  $c$  valga zero (il che riconduce la funzione alla forma dell' equazione 52) e che quando  $\alpha$  equivale alla media della serie LRN il parametro  $c$  assuma valore pari a 5.

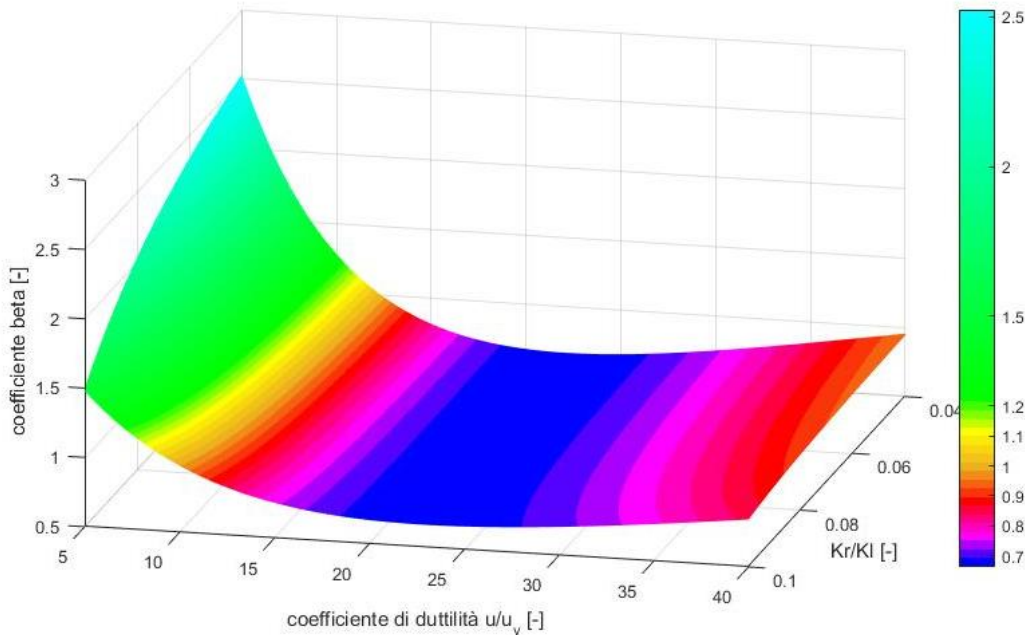


Grafico 34. coefficiente correttivo  $\beta$  in funzione del rapporto di duttilità  $\frac{u}{u_y}$  e del rapporto di rigidezza  $\alpha$

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

Di seguito vengono riportati i grafici dell'errore percentuale in funzione dell'indice di bontà IB per lo spostamento e il taglio alla base. Come si evince confrontando i *grafici 35 e 36* con i *grafici 32 e 33*, l'integrazione del database e la conseguente evoluzione del coefficiente correttivo  $\beta$  inducono degli errori maggiori sia negli spostamenti (5 – 13%) che nelle forze (2 – 7%). Tuttavia a seconda delle esigenze si potrà scegliere se utilizzare un database ridotto ma più preciso oppure uno più ricco ma meno accurato.

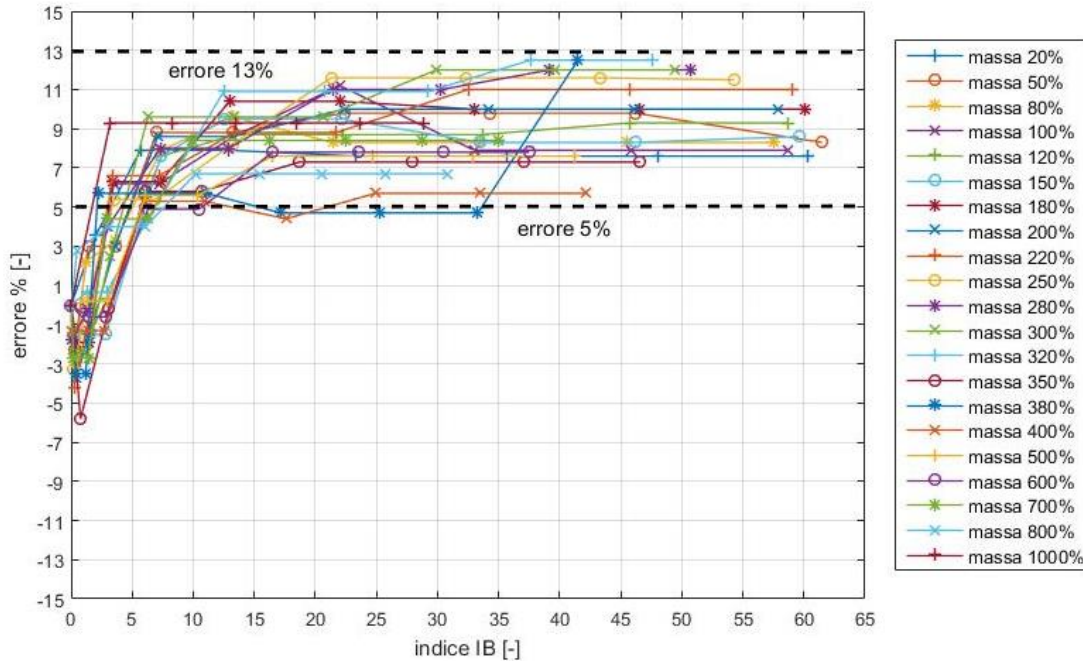


Grafico 35. Variabilità errore% sugli spostamenti in funzione dell'indice di bontà IB database LRS+LRN

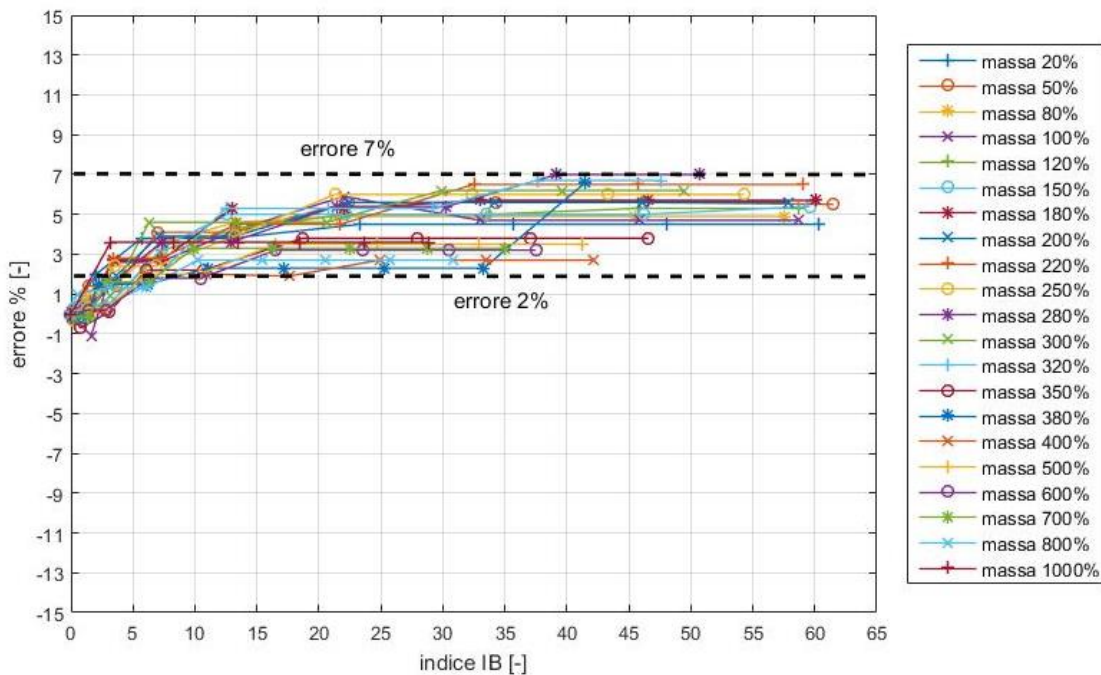


Grafico 36. Variabilità errore% sul taglio alla base in funzione dell'indice di bontà IB database LRS+LRN

## 2.2 Analisi spettrale con sistema FPS + FVS

In questa seconda parte della trattazione sull'uso dell'analisi spettrale, si investigherà un diverso tipo di isolatori, ovvero quello a scorrimento con superfici concave (FPS). Nel panorama commerciale, oggi si possono trovare due famiglie di tali dispositivi, quelli le cui superfici di scorrimento sono costruite in acciaio lucidato e quelli in cui il pattino e/o le superfici concave vengono trattate con PTFE. Quest'ultima famiglia non verrà analizzata in quanto formalmente simile, da un punto di vista computazionale, a quella degli LRB. Infatti il trattamento con teflon (PTFE) migliora fortemente il coefficiente di attrito dinamico e di conseguenza anche la capacità dissipativa dell'isolatore che è assolutamente paragonabile a quella di un LRB (20 – 30%). Lo studio seguente si concentrerà sui dispositivi a scorrimento con superfici lucidate in quanto tale sistema non raggiunge i livelli di dissipazione del precedente, e quindi nella pratica è buona norma affiancarvi dei dispositivi che sopperiscano a questa carenza; così sarà possibile indagare anche le procedure per la linearizzazione equivalente di dispositivi come i damper viscosi non lineari. Nello specifico verrà trattato un sistema in parallelo con dispositivi a scorrimento (FPS) atti ad abbattere la rigidità orizzontale e smorzatori viscosi non lineari (FVD) con il solo compito di aumentare la dissipazione di energia. In un primo momento verrà studiato solo il sistema composto dagli isolatori FPS, così da poter valutare l'accuratezza dei parametri per la linearizzazione equivalente ed eventuali interventi necessari a migliorare la congruenza tra i risultati dell'analisi non lineare FNA e quella lineare equivalente. Successivamente verranno aggiunti anche gli FVD e si procederà nuovamente ad una taratura dei parametri.

### 2.2.1 FPS superfici lucidate

I dispositivi FPS sono caratterizzati da una legge costitutiva rigido – plastico con softening una volta superato il carico di snervamento. In particolare il carico di snervamento viene calcolato moltiplicando il coefficiente di attrito del dispositivo per l'azione assiale gravante su di esso, mentre la rigidità post – yielding risulta essere il rapporto tra azione assiale e raggio di curvatura delle superfici. Una legge costitutiva siffatta, sebbene modelli accuratamente il comportamento reale di tali isolatori, non risulta idonea a procedure di calcolo. Infatti il comportamento "rigido" iniziale presuppone una rigidità infinita finché non viene raggiunto il carico di snervamento; questo può indurre instabilità negli algoritmi di calcolo ed errori nella soluzione. Per evitare tale inconveniente è pratica corrente imporre uno spostamento di snervamento fittizio (pari a 0.5 mm) tale da fornire una rigidità del ramo iniziale molto grande ma non infinita.

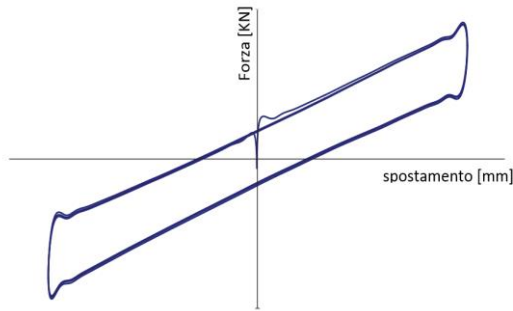


Grafico 37. legge costitutiva FPS

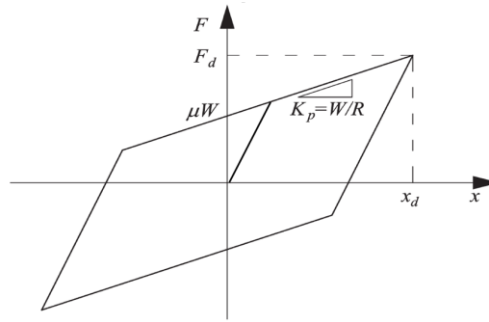


Grafico 38. legge costitutiva usata nel modello

Al fine poter riutilizzare l'algoritmo studiato per gli isolatori LRB è necessario ripotare la legge costitutiva nella forma utilizzata durante lo studio precedente (*cf*r grafico 16); quindi vengono definite le seguenti grandezze

$$K_l = \frac{\mu N}{u_y} + \frac{N}{R} \quad (63)$$

$$K_r = \frac{N}{R} \quad (64)$$

$$F_y = \mu N + \frac{N}{R} u_y \quad (65)$$

Dove  $F_y$  rappresenta il carico di snervamento,  $K_l$  la pendenza del primo ramo della legge bilineare,  $K_r$  la pendenza del ramo in fase di softening,  $\mu$  è il coefficiente di attrito dinamico,  $N$  rappresenta l'azione assiale dell'isolatore,  $R$  il raggio di curvatura equivalente e  $u_y = 0.5 \text{ mm}$  è lo spostamento corrispondente allo snervamento.

Come si evince dal *grafico 38*, e dalle equazioni sopra elencate, i due parametri che caratterizzano un isolatore FPS sono il raggio equivalente  $R$  ed il coefficiente di attrito  $\mu$ . Al fine di rimanere aderenti alla realtà e nell'ottica di creare un metodo che funga da supporto durante le fasi preliminari della progettazione, per la taratura del modello sono stati usati i dispositivi FPS prodotti dalla ditta FIP i cui raggi di curvatura sono compresi tra 2.5 m e 3.7 m. Per quanto riguarda il coefficiente di attrito, i parametri fondamentali che lo caratterizzano sono la pressione di contatto e la velocità di scorrimento: una pressione di contatto elevata tende a far diminuire il coefficiente di attrito e di conseguenza la sua efficienza dissipativa, così come velocità di scorrimento ridotte (*cf*r *grafico 8*). Sebbene per le velocità di scorrimento generate da un sisma la dipendenza dalla velocità diventi trascurabile, la pressione di contatto, l'usura e la temperatura possono degradare notevolmente il coefficiente di attrito, quindi nella pratica, a scopo precauzionale, spesso viene posto pari all' 1 – 2%. Nel catalogo fornito dalla ditta viene certificato un coefficiente di attrito uguale per tutti i dispositivi e pari al 2.5%. Per la taratura del modello si sono comunque usati coefficienti di attrito pari a 1%, 2%, 3%. Sebbene fin ora la legge costitutiva degli FPS e quella degli LRB sembrano formalmente uguali, la differenza sostanziale risiede



nel fatto che per gli FPS la legge costitutiva non può essere definita “a priori”, in quanto dipende dalla massa attraverso il carico assiale. Questa proprietà risulta molto vantaggiosa, in quanto rende la massa invariante nella definizione del periodo della struttura e del coefficiente di smorzamento equivalente, come si può verificare dalla breve dimostrazione di seguito.

Supponendo di avere una massa unitaria  $M$  che genera un carico  $N$  sull’isolatore

$$F_N = \mu N + \frac{N}{R} u \quad (66)$$

$$K_{eq,N} = \frac{F_N}{u} = \frac{\mu N}{u} + \frac{N}{R} \quad (67)$$

$$T_{eq,N} = \sqrt{\frac{K_{eq,N}}{M}} \quad (68)$$

Raddoppiando ora la massa l’equazione 66 si trasformerebbe in

$$F_{2N} = \mu(2N) + \frac{2N}{R} u = 2 \left( \mu N + \frac{N}{R} \right) \quad (69)$$

$$K_{eq,2N} = \frac{F_{2N}}{u} = 2K_{eq,N} \quad (70)$$

$$T_{eq,2N} = \sqrt{\frac{K_{eq,2N}}{2M}} = \sqrt{\frac{2K_{eq,N}}{2M}} = T_{eq,N} \quad (71)$$

Nella definizione di  $\xi_{eq}$  l’unico parametro in cui rientra la massa è il rapporto di rigidezza  $\alpha$ , però dal momento un qualsiasi incremento di massa induce uguali incrementi nelle rigidezze  $K_l$  e  $K_r$ , il loro rapporto rimarrà costante, e quindi si è dimostrato che anche  $\xi_{eq}$  non dipende dalla massa. Perciò si può affermare per questo particolare tipo di isolatori la massa è un’invariante nella procedura di calcolo lineare e equivalente.

Per valutare l’accuratezza del modello, la campagna di raccolta dei dati viene condotta attraverso prove in cui si mantiene il coefficiente di attrito costante facendo variare il raggio di curvatura delle superfici. Nello specifico sono stati utilizzati cinque diversi raggi: 2500 mm, 2800 mm, 3100 mm, 3400 mm e 3700 mm; combinati con coefficienti di attrito pari a 1%, 2% e 3% per un totale di 25 campioni. Si può notare dalle tabelle seguenti, che riportano il confronto tra lo spostamento calcolato con il modello lineare equivalente e quello generato da un’analisi FNA, come lo spostamento previsto d’analisi lineare sovrastimi sempre quello dell’analisi fatta con SAP2000 in misura sempre maggiore all’aumentare del coefficiente di attrito.

<b>attrito 1%</b>				
$R_{eq}$ [mm]	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>2500</b>	0,1730	0,1880	8,02	2,95
<b>2800</b>	0,1682	0,1804	6,77	3,09
<b>3100</b>	0,1649	0,1735	4,95	3,22
<b>3400</b>	0,1608	0,1674	3,93	3,34
<b>3700</b>	0,1596	0,1618	1,40	3,45

Tabella 9. confronto spostamenti per diversi raggi di curvatura e attrito 1%

<b>attrito 2%</b>				
$R_{eq}$ [mm]	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>2500</b>	0,1156	0,1434	19,41	2,71
<b>2800</b>	0,1137	0,1372	17,13	2,80
<b>3100</b>	0,1119	0,1320	15,22	2,89
<b>3400</b>	0,1104	0,1276	13,47	2,96
<b>3700</b>	0,1096	0,1238	11,48	3,02

Tabella 10. confronto spostamenti per diversi raggi di curvatura e attrito 2%

<b>attrito 3%</b>				
$R_{eq}$ [mm]	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
<b>2500</b>	0,0883	0,1232	28,32	2,48
<b>2800</b>	0,0884	0,1186	25,53	2,54
<b>3100</b>	0,0880	0,1149	23,37	2,60
<b>3400</b>	0,0875	0,1118	21,68	2,65
<b>3700</b>	0,0870	0,1092	20,28	2,69

Tabella 11. confronto spostamenti per diversi raggi di curvatura e attrito 3%

Per migliorare la corrispondenza tra i risultati, si opera con la stessa procedura già introdotta per gli LRB: per ogni set di dati, corrispondente a prove con coefficiente di attrito costante si studia una funzione  $\beta$  correttiva da applicare al rapporto di duttilità  $\frac{u}{u_y}$  nella definizione del coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$ . Si decide di utilizzare delle funzioni polinomiali di secondo grado dipendenti dal rapporto di duttilità, i cui parametri vengono tarati svolgendo numerosi test fino al raggiungimento dello scarto desiderato tra i risultati.

$$\mu = 1 \rightarrow \beta\left(\frac{u}{u_y}\right) = 2.917 \cdot 10^{-5} \left(\frac{u}{u_y}\right)^2 - 2.387 \cdot 10^{-2} \frac{u}{u_y} + 5.753 \quad (72)$$

$$\mu = 2 \rightarrow \beta\left(\frac{u}{u_y}\right) = 1.670 \cdot 10^{-5} \left(\frac{u}{u_y}\right)^2 - 1.180 \cdot 10^{-2} \frac{u}{u_y} + 2.551 \quad (73)$$

$$\mu = 3 \rightarrow \beta\left(\frac{u}{u_y}\right) = 1.670 \cdot 10^{-5} \left(\frac{u}{u_y}\right)^2 - 1.030 \cdot 10^{-2} \frac{u}{u_y} + 1.779 \quad (74)$$

Successivamente, al fine di creare una funzione di correzione dipendente da due variabili, il rapporto di duttilità e il coefficiente di attrito, si procede andando a definire altre tre

funzioni polinomiali di secondo grado ausiliare  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$  e  $C(\mu)$  dipendenti dal solo coefficiente di attrito. Per definire i parametri vengono poste le seguenti condizioni

$$A \begin{cases} A(1) = +2.917 \cdot 10^{-5} \\ A(2) = +1.670 \cdot 10^{-5} \\ A(3) = +1.670 \cdot 10^{-5} \end{cases} \quad B \begin{cases} B(1) = -2.387 \cdot 10^{-2} \\ B(2) = -1.180 \cdot 10^{-2} \\ B(3) = -1.030 \cdot 10^{-2} \end{cases} \quad C \begin{cases} C(1) = +5.753 \\ C(2) = +2.551 \\ C(3) = +1.779 \end{cases} \quad (75)$$

E le funzioni così trovate sono

$$A(\mu) = 6.235 \cdot 10^{-6} \mu^2 - 3.117 \cdot 10^{-5} \mu + 5.411 \cdot 10^{-5} \quad (76)$$

$$B(\mu) = -5.285 \cdot 10^{-3} \mu^2 + 2.793 \cdot 10^{-2} \mu - 4.651 \cdot 10^{-2} \quad (77)$$

$$C(\mu) = 1.215 \mu^2 - 6.846 \mu + 11.38 \quad (78)$$

Infine si definisce la funzione  $\beta$  ricercata come combinazione delle equazioni 72 – 74 con le equazioni 76 – 78 definendo così il paraboloide

$$\beta \left( \frac{u}{u_y}; \mu \right) = A(\mu) \cdot \left( \frac{u}{u_y} \right)^2 + B(\mu) \cdot \left( \frac{u}{u_y} \right) + C(\mu) \quad (79)$$

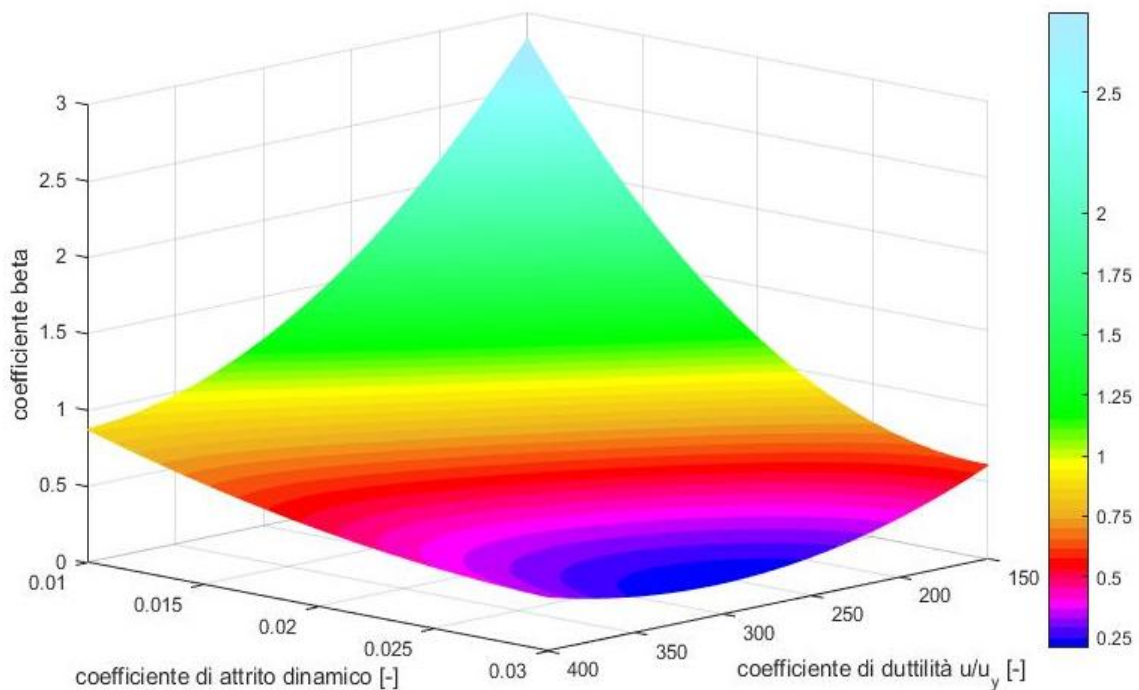


Grafico 39. funzione di correzione del coefficiente  $\xi$  in funzione di  $\frac{u}{u_y}$  e  $\mu$

Come si nota dal *grafico 39* i rapporti di duttilità rilevanti nel caso degli FPS sono circa dieci volte più grandi di quelli riscontrati nel sistema LRB; questo fatto è dovuto soltanto alla variazione dello spostamento di snervamento che nel presente caso è posto circa pari ad un decimo di quello degli LRB. Dopo l'introduzione del coefficiente correttivo, si nota un netto

miglioramento della congruenza tra i risultati in termini di spostamenti massimi con un errore medio pari al 5% con uno scarto di circa  $\pm 2.5\%$ . Dopo aver tarato il modello sullo spostamento massimo, per completezza si valuta anche quale sia l'errore relativo al taglio alla base. Analogamente a quanto osservato per gli isolatori LRB, il taglio alla base risulta ben predetto dal modello con un errore medio poco inferiore a quello sugli spostamenti, ovvero  $3.5\% \pm 2\%$ . Di seguito sono riportate le tabelle in cui vengono riassunti i risultati delle 25 prove, sia in termini di spostamento massimo che gli alla base, una volta aggiunto all'algoritmo il coefficiente correttivo  $\beta$ .

	$R_{eq}$ [mm]	Analisi FNA [m]	Analisi lineare eq. [m]	Errore [%]	Periodo [s]
$\mu = 1\%$	2500	0,1730	0,1829	5,45	2,95
	2800	0,1682	0,1775	5,24	3,09
	3100	0,1649	0,1728	4,57	3,22
	3400	0,1608	0,1688	4,73	3,34
	3700	0,1596	0,1652	3,40	3,45
$\mu = 2\%$	2500	0,1156	0,1231	6,11	2,65
	2800	0,1137	0,1199	5,16	2,74
	3100	0,1119	0,1171	4,47	2,83
	3400	0,1104	0,1148	3,80	2,90
	3700	0,1096	0,1127	2,73	2,97
$\mu = 3\%$	2500	0,0883	0,0929	4,89	2,34
	2800	0,0884	0,0943	6,31	2,42
	3100	0,0880	0,0951	7,43	2,49
	3400	0,0875	0,0940	6,91	2,54
	3700	0,0870	0,0931	6,55	2,58

Tabella 12. confronto spostamento massimo analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente  $\beta$

	$R_{eq}$ [mm]	Analisi FNA [KN]	Analisi lineare eq. [KN]	Errore [%]	Periodo [s]
$\mu = 1\%$	2500	711,0	748,5	5,01	2,95
	2800	629,1	660,4	4,75	3,09
	3100	569,6	591,7	3,74	3,22
	3400	515,8	536,7	3,90	3,34
	3700	477,1	491,8	2,98	3,45
$\mu = 2\%$	2500	595,9	623,2	4,39	2,65
	2800	545,5	565,4	3,51	2,74
	3100	504,9	520,1	2,92	2,83
	3400	472,3	483,8	2,37	2,90
	3700	446,5	454,1	1,67	2,97
$\mu = 3\%$	2500	587,8	604,3	2,74	2,34
	2800	554,1	573,1	3,32	2,42
	3100	525,6	546,1	3,76	2,49
	3400	501,7	518,9	3,32	2,54
	3700	481,4	496,5	3,04	2,58

Tabella 13. confronto taglio alla base analisi FNA e lineare equivalente con applicazione del coefficiente  $\beta$

Come si può notare dalla *tabella 12* per coefficienti di attrito bassi, la struttura sperimenta spostamenti rilevanti, anche nell'ordine delle decine di centimetri; questo è dovuto essenzialmente al fatto che l'attrito basso implica poca capacità dissipativa e quindi spostamenti considerevoli. Per tale motivo spesso il sistema FPS ad acciaio lucidato viene affiancato in parallelo a smorzatori viscosi non lineari che hanno il solo compito di sopperire alla carenza di capacità dissipativa e limitare gli spostamenti. Nel seguente paragrafo verrà proprio trattato il sistema studiato ora con l'aggiunta di quattro damper in corrispondenza di ogni isolatore.

### 2.2.2 FPS superfici lucidate + FVD

L'elemento più interessante del sistema in parallelo FPS – FVD è senza dubbio lo smorzatore viscoso, in quanto ci permette di andare ad analizzare come sia possibile inserire in un algoritmo di linearizzazione equivalente un elemento che per sua natura non modifica la rigidità della struttura ma apporta solo una maggior capacità dissipativa. I damper viscosi sono formati da un cilindro cavo in cui è libero di muoversi un pistone alla cui estremità è saldata una flangia munita di valvole; l'intercapedine tra pistone e cilindro viene riempita di fluido (solitamente a base siliconica). La dissipazione dell'energia avviene grazie impiego dell'attrito viscoso; ciò è possibile grazie al passaggio del fluido da una parte all'altra della flangia attraverso valvole di laminazione. Diversamente dai dispositivi come LRB o FPS, gli smorzatori viscosi sono prodotti su ordinazione secondo le specifiche che richiede il progettista; infatti una volta individuato il dissipatore che più si confà alle necessità in termini di coefficiente di smorzamento  $C_\alpha$  e grado di non linearità  $\alpha$  la ditta progetterà il circuito idraulico e le proprietà del fluido affinché siano rispettate le specifiche richieste. Per questo motivo, non esistono cataloghi con FVD commerciali standardizzati e suddivisi per capacità dissipativa tra cui scegliere, e perciò viene meno anche la necessità di creare un algoritmo di ottimizzazione come si era fatto invece per gli LRB.

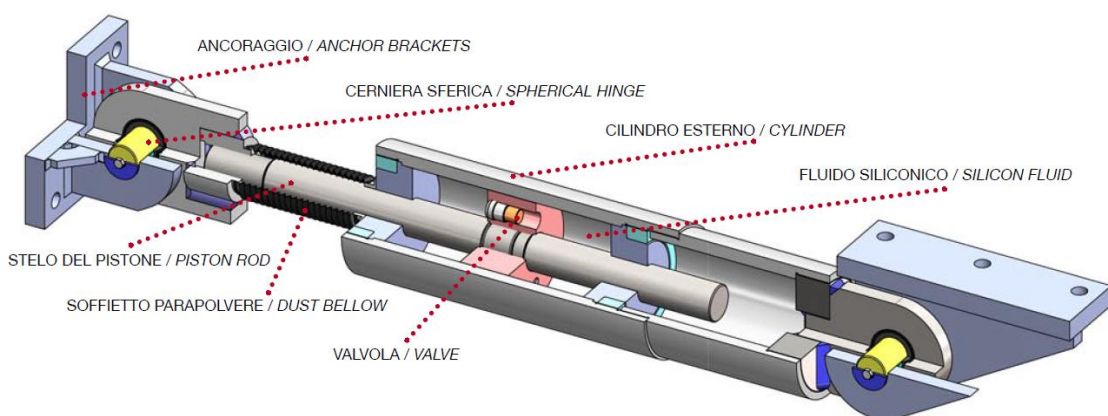


Figura 9. schema costruttivo di uno smorzatore viscoso

Prima di addentrarsi nei calcoli è necessario soffermarsi e comprendere la funzione dei due parametri fondamentali che caratterizza un damper; il coefficiente di smorzamento  $C_\alpha$  ed il grado di non linearità  $\alpha$ . Un progettista teoricamente potrebbe creare molteplici soluzioni variando la coppia di parametri per raggiungere il medesimo risultato di dissipazione;

tuttavia nella pratica se vi è una grande libertà nella scelta de coefficiente di smorzano, dall'altra il grado di non linearità è un parametro piuttosto fisso che merita un'attenta riflessione. Il motivo per cui va applicata tanta cautela in questa scelta sta nel fatto che piccole variazioni di tale parametro comportano grandi differenze dei picchi di forza trasmessi dal damper come si può notare analizzando la relazione costitutiva ed il *grafico 40*.

$$F_D = C_\alpha \dot{u}^\alpha \tag{80}$$

In cui  $C_\alpha$  è espresso in  $\left[KN \left(\frac{s}{m}\right)^\alpha\right]$  ed  $\alpha$  è un parametro adimensionale

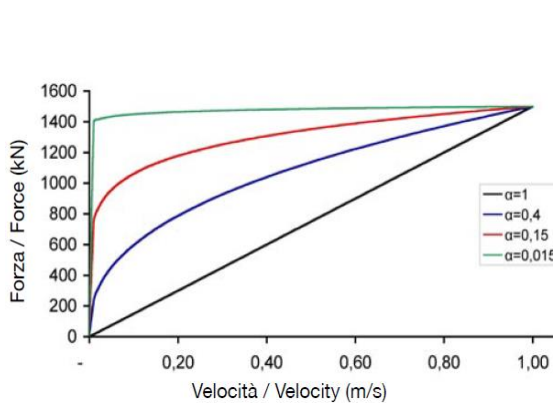


Grafico 40. legame forza - velocità al variare di  $\alpha$

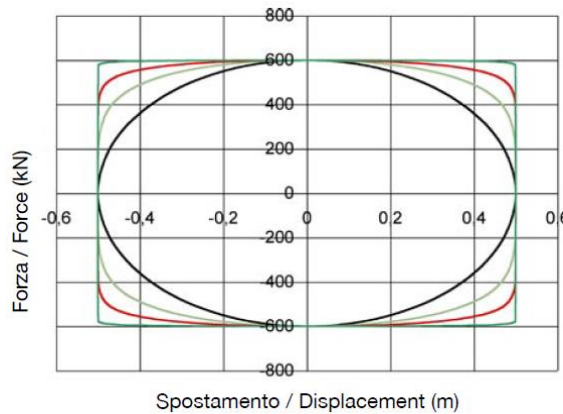


Grafico 41. grafico forza - spostamento al variare di  $\alpha$

Il contenimento dei picchi della forza trasmessa dal damper è essenziale, in quanto maggiori sono i picchi trasmessi alla struttura, tanto più l'isolamento perderà di efficienza. Infatti avendo ben chiaro lo schema in parallelo FPS e FVD. Come detto più volte la funzione principale di un isolatore è quella di creare una "strato" con una rigidità orizzontale molto bassa, se questo venisse accoppiato in parallelo con un damper che generi forze molto alte, l'isolatore sarà sempre meno efficace poiché gran parte delle forze sismiche si trasferirebbero attraverso il damper. Ragionando all'estremo si potrebbe pensare ad una situazione in cui tutte le forze vengano trasmesse attraverso lo smorzatore e l'isolatore non entri neppure in funzione. Quindi picchi di forza elevati tendono ad annullare il disaccoppiamento tra struttura e terreno che è il cardine su cui si basa l'isolamento sismico. Pertanto nella pratica non verranno mai scelti valori per il grado di non linearità maggiori di 1, in quanto si passerebbe da dispositivi di tipo damper a shock transmitter che hanno proprio la particolarità di trasmettere elevatissime forze raggiunta una certa velocità. Solitamente si tende a usare valori di  $\alpha$  piuttosto bassi e prossimi allo zero, intorno a 0.15 – 0.2, che come si evince dal *grafico 41* aumentano anche l'energia dissipata rispetto a quelli con coefficiente  $\alpha$  maggiore. Alla luce di quanto detto, tutte le successive prove vengono svolte mantenendo un valore di  $\alpha$  costante pari a 0.2.

Dal momento che come si è detto il damper fornisce solo un contributo allo smorzamento e non alla rigidità, nell'algoritmo di linearizzazione equivalente rientra sotto forma di un coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{sd}$  che si va a sommare al coefficiente  $\xi_0$  frutto degli isolatori FPS. La dissipazione energetica è una quantità che gode della proprietà di additiva, quindi nell'algoritmo per calcolare il coefficiente  $\xi_{sd}$  del sistema non si fa altro che sommare tutti gli  $\xi_{sd,i}$  di ogni dissipatore. Nello specifico il modello studiato in SAP2000 necessario al confronto è stato dotato di 4 dissipatori, uno per ogni FPS presente, prestando attenzione alle proprietà che il programma di calcolo richiede. Infatti SAP2000 implementa dissipatori come elementi di tipo Maxwell, quindi con una molla in serie ad un dissipatore; per eliminare la componente di rigidità, ed avere quindi un damper solo dissipativo, la guida al programma suggerisce di inserire una rigidità che sia  $10^2 - 10^4$  volte maggiore di quella degli elementi che deve connettere per evitare instabilità ed errori nel processo di calcolo. Alla luce di quanto detto, per ogni dissipatore viene inserita una rigidità che è sempre 10 volte maggiore di  $K_l$ , nell'ottica che durante la procedura di calcolo la rigidità equivalente tenderà a scendere per portarsi a circa 1/100 di quella del damper in corrispondenza della soluzione.

Come si è visto nel capitolo introduttivo, anche per i damper il coefficiente di smorzamento viene calcolato imponendo l'uguaglianza di energia dissipata per un ciclo di isteresi, giungendo a definire  $\xi_{sd}$  come segue

$$\xi_{sd} = \frac{\beta_\alpha C_\alpha}{2\pi M \omega} (\omega u_0)^{\alpha-1} \quad (81)$$

$$\beta_\alpha = \frac{2^{2+\alpha} \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(2+\alpha)} \quad (82)$$

In cui  $\beta_\alpha$  è un coefficiente dipendente dal solo grado di non linearità,  $M$  è la massa della struttura,  $\omega$  la pulsazione,  $u_0$  lo spostamento massimo e  $C_\alpha$  il coefficiente di smorzamento.

La campagna di indagine che si desidera condurre è volta in primo luogo, a trovare un metodo per capire quanto un sistema di smorzatori sia idoneo e ben dimensionato rispetto alla struttura su cui andrà installato, considerando che nella pratica un sistema equipaggiato così può raggiungere valori massimi di  $\xi_{sd}$  nell'ordine del 60 – 70%. Il secondo obiettivo che si vuole raggiungere è fornire un metodo che produca risultati ragionevolmente corretti, una volta scelto il sistema idoneo. Il sistema FPS + FVD si configura come una miglioria del solo sistema FPS studiato nel paragrafo precedente, quindi gli isolatori scelti per le prove sono gli stessi:  $R_{eq} = 2500 - 2800 - 3100 - 3400 - 3700 \text{ mm}$  e coefficienti di attrito  $\mu = 1 - 2 - 3\%$ . Per quanto riguarda gli smorzatori viene assunto un unico valore per  $\alpha$  pari a 0.2 e 5 diversi valori di  $C_\alpha = 10 - 30 - 50 - 70 - 100$ , per poter avere una discreta variabilità del coefficiente  $\xi_{sd}$  raggiungendo e superando anche il 70%. Particolare attenzione in questo caso va prestata anche alla massa; infatti l'introduzione dei damper porta la massa a non essere più un invariante del processo, come si nota dall' *equazione 81* in cui la massa  $m$

compare al denominatore dell'espressione di  $\xi_{sd}$ . Per questo motivo sono stati studiati due casi, uno con massa pari a 900 ton e un altro con massa pari al 20% della prima.

Per quanto riguarda il primo obiettivo dello studio, si nota che il parametro  $\gamma = \frac{C_\alpha}{M}$  potrebbe fungere da indice sull'adeguatezza di un sistema di damper o meno. Infatti andando a plottare un grafico in cui  $\xi_{sd}$  varia in funzione di tale parametro si nota una forte dipendenza più che lineare. Ciò non stupisce più di tanto, anzi suffraga l'affermazione che la massa non è più un'invariante, questo perché se la massa fosse invariante nel processo, la pulsazione non dipenderebbe da essa ed il rapporto  $\frac{\xi_{sd}}{\gamma}$  sarebbe costante. Mentre la dipendenza più che lineare dimostra che  $\omega = \omega(M)$ . In ogni caso questo fattore ci permette di associare ad ogni coppia  $(C_\alpha; M)$  un valore di smorzamento equivalente  $\xi_{sd}$  con un piccolo scarto.

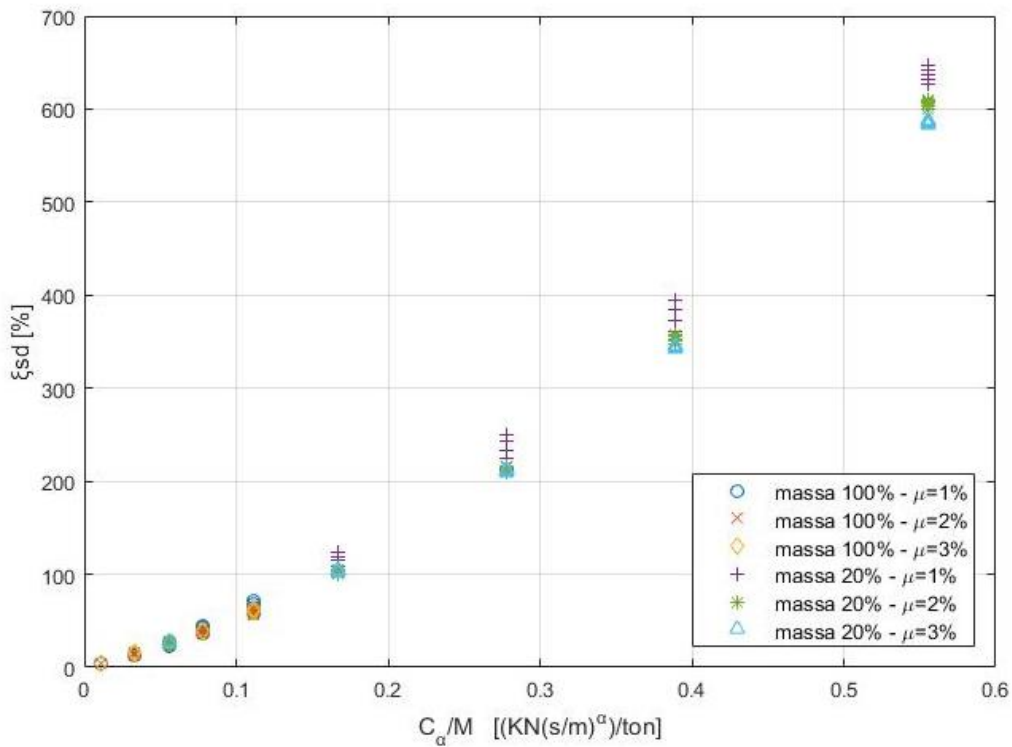


Grafico 42. Relazione tra coefficiente  $\gamma$  e  $\xi_{sd}$  per diversi valori di massa, attrito e raggio equivalente



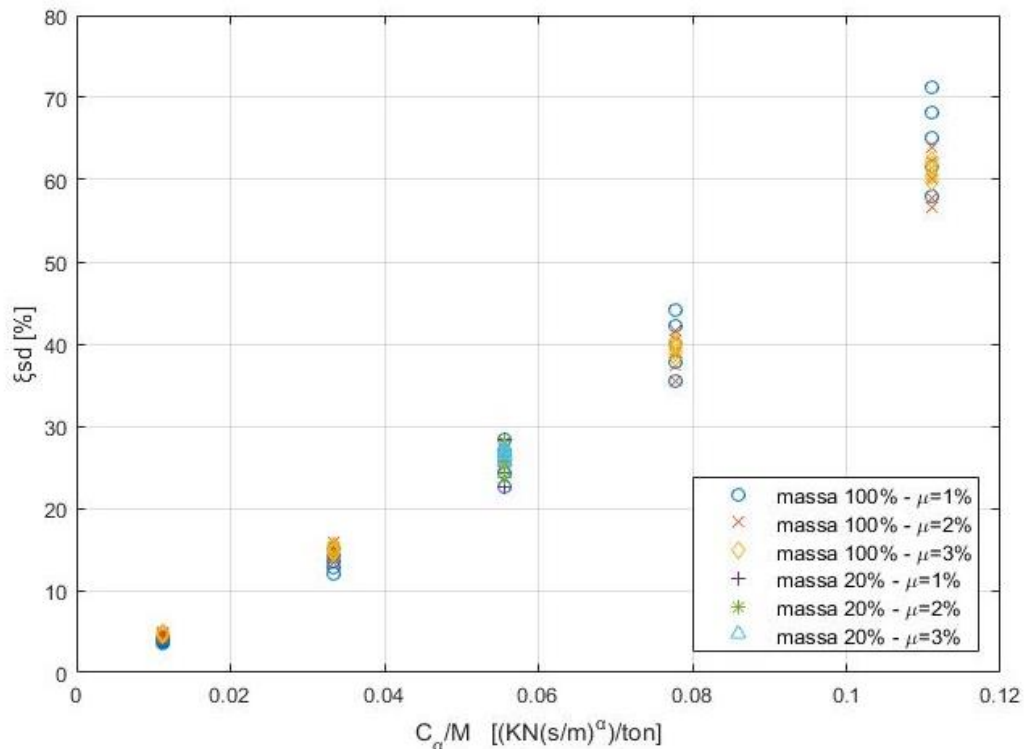


Grafico 43. Particolare per valori di  $\xi_{sd}$  fino a 80% del grafico 42

A questo punto bisogna valutare la variabilità del coefficiente  $\gamma$  e come possa misurare la bontà di un sistema di smorzamento. Ragionando al limite, un valore di massa infinita, porterebbe tale coefficiente a tendere a zero e di conseguenza anche  $\xi_{sd}$  tenderebbe a zero in quanto la pulsazione e lo spostamento sono entità finite. Ciò significa che lo smorzamento apportato dai dissipatori viscosi sarebbe trascurabile in rapporto a quello fornito dagli isolatori FPS il che porta a concludere che un coefficiente  $\gamma$  tendente a zero corrisponde ad un sistema con smorzatori troppo piccoli. Infatti quando questo accade, i valori di spostamento convergono a quelli ricavati nell'analisi con soli isolatori FPS. D'altro canto, quando la massa tende a zero accade l'esatto opposto: come si nota dal *grafico 42* per valori sempre maggiori del coefficiente  $\gamma$  gli smorzatori forniscono dissipazioni altissime; questo denota un sovradimensionamento dei dissipatori rispetto al sistema struttura – isolatori FPS. Per questi motivi si ritiene che il coefficiente  $\gamma$  sia un buon indicatore su quanto la scelta di un sistema di dissipatori sia azzeccata o meno ed alla luce di quanto detto sui valori di  $\xi_{sd}$  che vengono impiegati nella pratica corrente, facendo riferimento al *grafico 43*, si suggerisce una limitazione su tale coefficiente pari a 0.1. E' bene precisare che il rapporto  $\frac{C_a}{M}$  non è adimensionale e la sua l'unità di misura è  $\left[ \frac{KN \left( \frac{s}{m} \right)^\alpha}{ton} \right]$ .

A questo punto, dopo aver indagato un criterio per decidere appropriatezza o meno dei dampers, è necessario concentrarsi nella ricerca di un metodo che fornisca risultati realistici per sistemi adeguatamente dimensionati rispetto alla struttura. Di seguito vengono riportati i risultati in termini di errore percentuale sugli spostamenti dei 150 casi presi in esame; ogni caso è individuato da un set di 4 parametri ( $R_{eq}$ ;  $\mu$ ;  $M$ ;  $C_{\alpha}$ ) variabili secondo quanto specificato in precedenza. L'errore viene relazionato alla pulsazione  $\omega$ , in quanto è una variabile che racchiude in un unico valore tutte le caratteristiche fornite dal set di 4 valori.

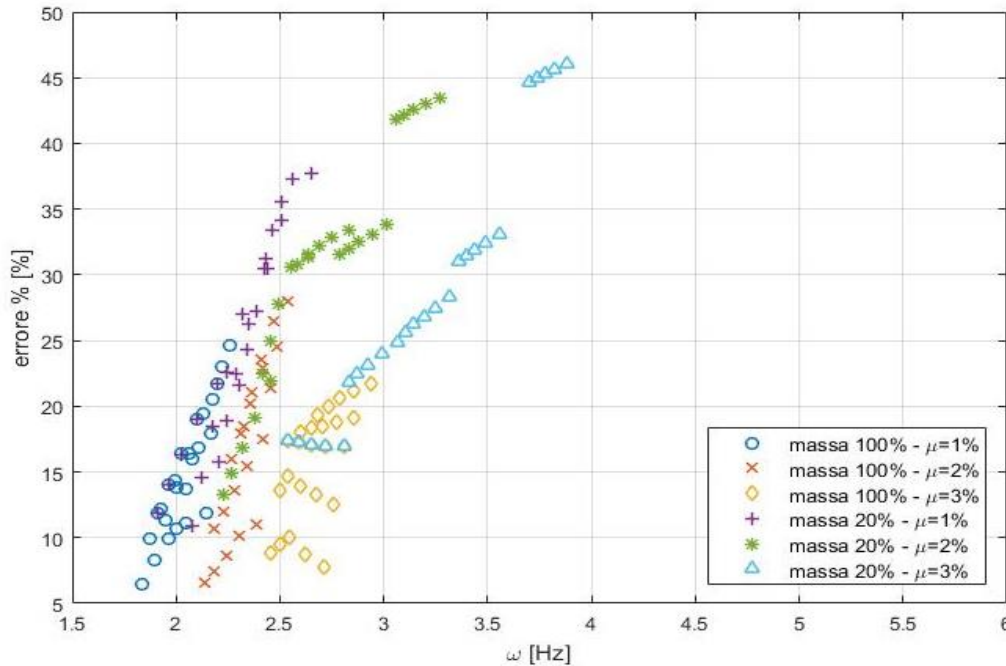


Grafico 44. errore % in funzione della pulsazione  $\omega$  al variare di massa, attrito e raggio equivalente, senza correzione

Come si nota dal *grafico 44* il metodo di linearizzazione sovrastima sempre lo spostamento fornito dall'analisi FNA (analisi non lineare time history) e se ciò da un lato è un pregio, perché porta a risultati a favore di sicurezza, dall'altro uno scostamento troppo grande dalla risultato reale porta il metodo a perdere di valore e utilità. Quindi è necessario mantenere sempre gli spostamenti calcolati con il metodo lineare e equivalente maggiori di quelli forniti da SAP2000 ma al contempo diminuire lo scarto tra i risultati. Per raggiungere tale scopo, si decide di operare in modo analogo a quanto fatto per gli LRB, introducendo un fattore correttivo  $\beta_{sd}$ , che sarà una funzione della pulsazione  $\omega$ , ed andrà a moltiplicare il coefficiente  $\xi_{sd}$ . Per questa correzione si è scelta la seguente formulazione

$$\beta_{sd} = 0.458 \omega + 0.255 \tag{83}$$

Di seguito viene riportato il grafico con gli errori percentuali in funzione della pulsione una volta apporta la suddetta modifica al fattore  $\xi_{sd}$ . Come si nota dal *grafico 45* l'entità dell'errore percentuale è di molto diminuita non superando mai il 20% quando prima raggiungeva picchi del 40 – 45%. Tuttavia si nota anche che per valori di  $\omega$  maggiori di 3 Hz il metodo non risulta più a favore di sicurezza, sottostimando anche del 20% lo spostamento.

Per evitare questo inconveniente si decide di limitare il campo applicativo di questo algoritmo a casi i cui la pulsione sia compresa tra 1.75 Hz e 3 Hz che corrispondono a periodi di 3.6 s e 2.1 s.

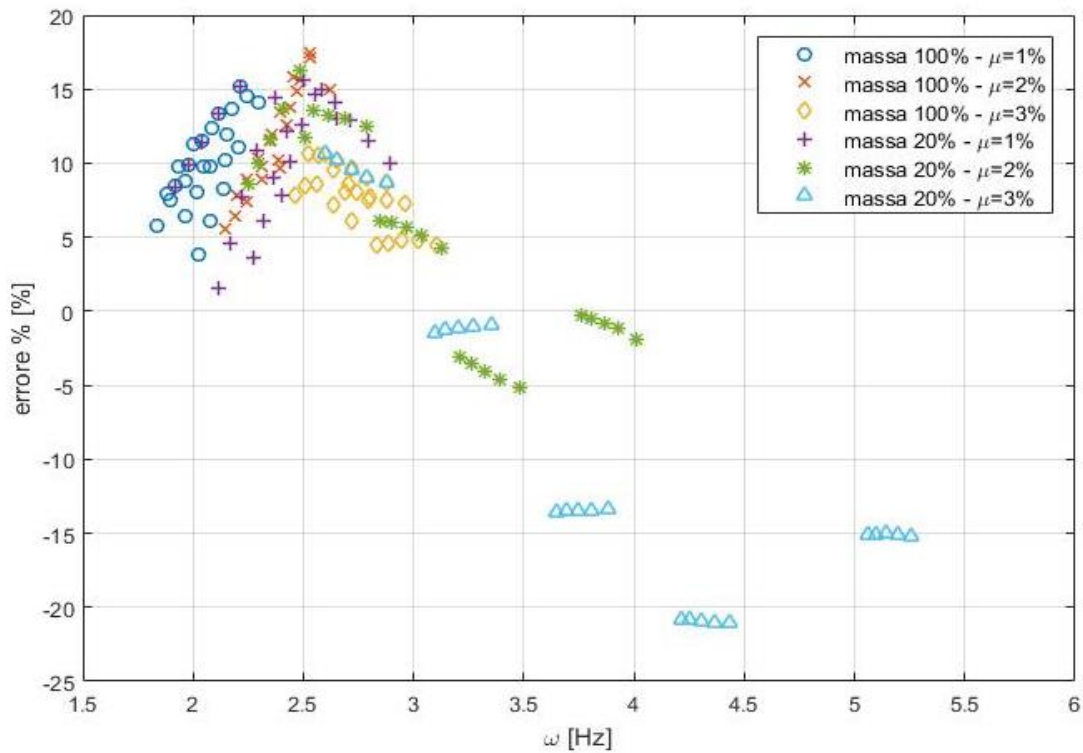


Grafico 45. errore % in funzione della pulsazione  $\omega$  al variare di massa, attrito e raggio equivalente, con correzione

A questo punto è bene riepilogare i capisaldi che stanno alla base del metodo, ovvero le ipotesi secondo cui il metodo può essere applicato e fornisce risultati ragionevoli a favore di sicurezza

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_\alpha}{M} < 0.1 \\ 1.75 < \omega < 3 \end{cases} \quad (84)$$

Dato che le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, c'è da accertarsi in primo luogo che non si escludano a vicenda e in secondo luogo c'è da valutare quel è l'errore associato a coefficienti  $\gamma$  minori di 0.1.

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

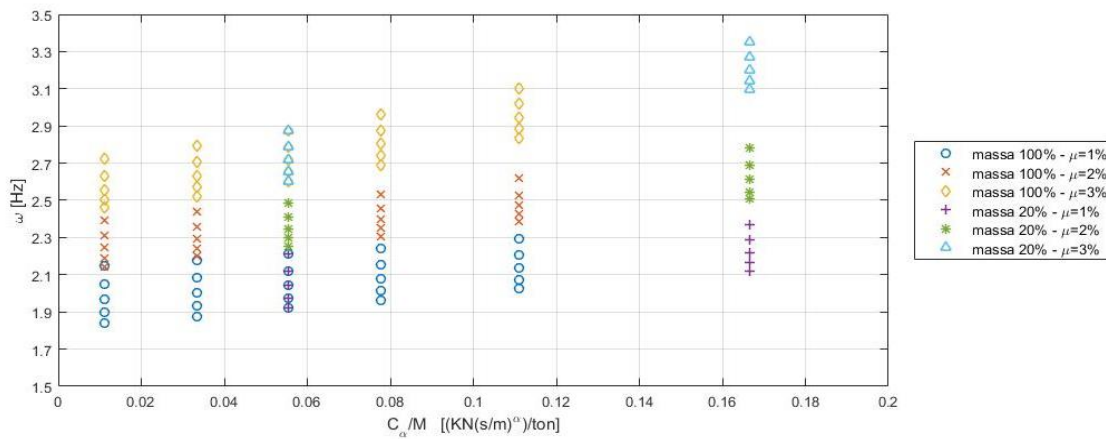


Grafico 46. relazione tra coefficiente  $\gamma$  e la pulsazione  $\omega$

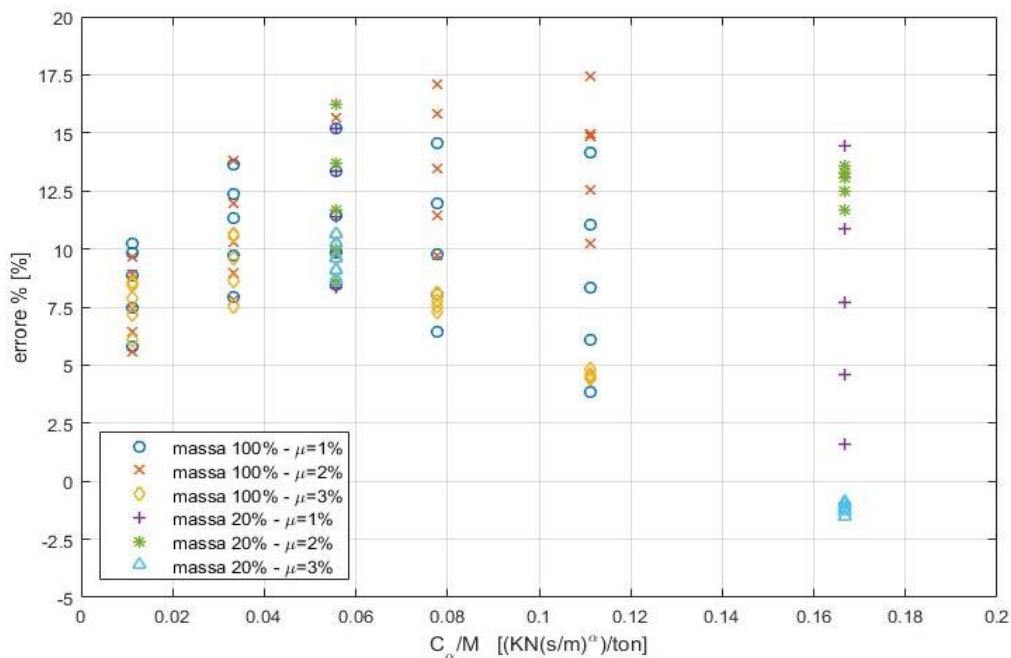


Grafico 47. relazione tra coefficiente  $\gamma$  ed errore %

Come si nota dal *grafico 46* la limitazione posta su  $\omega$  non va a compromettere il campo di applicabilità del metodo in modo rilevante, infatti mantenendo un rapporto  $\frac{C_\alpha}{M}$  minore di 0.1 si nota come la pulsazione sia nella maggioranza dei casi compresa tra 1.8 Hz e 3.2 Hz. Per quanto riguarda l'accuratezza del metodo associata a valori del coefficiente  $\frac{C_\alpha}{M}$  minore di 0.1, il *grafico 47* mostra che il metodo sia a favore di sicurezza, con errori massimi minori del 18%. Da notare la tendenza degli errori a coincidere con quelli trovati per il sistema con solo FPS per valori di  $\gamma$  prossimi allo zero che appunto rappresenta il sistema in cui non sono presenti dissipatori viscosi.

Nell'appendice A vengono riportate le tabelle, una per ogni set  $(R_{eq}; \mu; M)$  in cui sono elencati i risultati per valori di  $C_\alpha$  pari a 0 – 10 – 30 – 50 – 70 – 100.

Prima di concludere questo paragrafo vorrei focalizzare l'attenzione su un possibile approfondimento e sviluppo dello studio svolto sin ora. Soffermandosi ad analizzare il *grafico 43* si aprono diversi interrogativi; in primo luogo si potrebbe pensare che la dipendenza più che lineare tra  $\xi_{sd}$  e  $\frac{C_\alpha}{M}$  per valori di tale parametro inferiori a 0.1 si possa approssimare come lineare? Ciò porterebbe a chiedersi quali fossero i parametri che influenzano la costante di proporzionalità tra  $\xi_{sd}$  e  $\frac{C_\alpha}{M}$ .

$$\frac{\xi_{sd}}{\frac{C_\alpha}{M}} \cdot \frac{2\pi}{\beta_\alpha} = cost = \frac{(\omega u)^{\alpha-1}}{\omega} \quad (85)$$

Uno sviluppo successivo a queste analisi potrebbe essere la ricerca di un modo per valutare un upper bound dello spostamento massimo in presenza di damper, conoscendo la pulsazione del sistema prima dell'introduzione di tali dispositivi. Questi quesiti, nati durante l'analisi dei dissipanti viscosi, a mio parere meriterebbero uno studio approfondito a parte in quanto potrebbero portare a risultati utili per dimensionamenti di massima o preliminari di sistemi dissipativi.

### 2.3 Analisi lineare time history

In questo nuovo capitolo verrà affrontato un tipo di analisi diverso rispetto a quella spettrale studiata fin' ora, infatti se da un lato i metodi basati sullo spettro di risposta sono semplici ed efficaci, dall'altro danno solo informazioni su valori massimi della variabile di output del processo. Nella maggior parte dei casi queste sono le informazioni principali che servono per la progettazione; tuttavia vi sono situazioni in cui l'utilizzo di tali dati porterebbe ad una progettazione troppo conservativa e ad un conseguente aumento dei costi. Un caso lampante di quanto detto fin qui è il problema relativo al dimensionamento del giunto di connessione tra diverse campate di un ponte o viadotto. Una tale sfida presenta fondamentalmente due requisiti da soddisfare, il primo è che durante un ipotetico evento sismico di progetto le campate adiacenti non debbano collidere (fenomeno del martellamento) e quindi il giunto deve essere abbastanza spazioso per consentire un certo movimento relativo tra le due parti; la seconda caratteristica che viene richiesta è che lo spazio tra gli elementi sia il minore possibile, capace comunque di evitare il martellamento, ma riducendo i costi di pile troppo grandi e coprigiunto molto costosi. Un approccio progettuale basato sull'analisi spettrale imporrebbe di progettare un giunto la cui dimensione è la somma degli spostamenti massimi delle due campate, sottendendo l'ipotesi che le due parti adiacenti vibrino in opposizione di fase. Dal momento che l'analisi spettrale non fornisce alcuna informazione sulla fase di vibrazione è necessario porsi nella condizione più sfavorevole considerando che i massimi spostamenti delle campate l'una verso l'altra si verifichino nel medesimo istante temporale. Senza ombra di dubbio un tale strategia progettuale è a favore di sicurezza ma conduce anche a dover costruire pile molto più grosse, installando coprigiunti più lunghi e costosi.

Quanto detto mostra la necessità di applicare un'analisi più approfondita che permetta di raffinare la progettazione. Rimanendo nell'ambito dell'analisi lineare un'evoluzione dell'analisi spettrale è l'analisi lineare time history, che usando come dati di input le quantità equivalenti come rigidità e coefficiente di smorzamento trovate mediante lo spettro ed un accelerogramma per l'azione sismica, restituisce una funzione temporale dello spostamento, velocità o accelerazione. In questo modo è possibile valutare accuratamente, seppur ancora in termini preliminari e approssimati, la fase di vibrazione e studiare in modo più accurato del precedente lo spostamento relativo tra due strutture limitrofe.

L'idea su cui si basano le analisi time history è quella di imporre l'equilibrio dinamico in ogni istante temporale conoscendo le condizioni al contorno nell'istante precedente. Una volta trovata, questa soluzione diventerà la condizione iniziale per l'equilibrio dell'istante successivo continuando finché non sarà finita la forzante. Basandosi su questo schema molti metodi sono stati studiati e si differenziano secondo le ipotesi sulla variazione di parametri del problema all'interno di uno step temporale. Il metodo che si decide di implementare per il presente studio è quello dell'"accelerazione lineare", che come si evince dal nome, presuppone una variazione lineare dell'accelerazione tra step di calcolo successivi. Di seguito vengono riportate le equazioni risolventi di tale metodo

$$M\ddot{u}_{i+1} + C_{eq}\dot{u}_{i+1} + K_{eq}u_{i+1} = -g_{i+1}(t)M \quad (86)$$

In cui  $M$  è la massa della struttura,  $C_{eq}$  il coefficiente di smorzamento calcolato mediante  $\xi_{eq}$  ricavato dall'analisi spettrale,  $K_{eq}$  è la rigidità sempre ricavata dall'analisi spettrale e  $g(t)$  è l'accelerogramma di input della sollecitazione sismica

$$C_{eq} = 2\xi_{eq}\sqrt{K_{eq}M} \quad (87)$$

Dopo aver imposto l'equilibrio dinamico (equazione 86) si sviluppano in serie di Taylor lo spostamento e la velocità

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \ddot{u}_i\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right) + \ddot{\ddot{u}}_i\left(\frac{\Delta t^3}{6}\right) \quad (88)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\Delta t + \ddot{\ddot{u}}_i\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right) \quad (89)$$

Dove le quantità indicate con il pedice  $i$  sono note dal passo temporale precedente, quelle indicate con  $i + 1$  rappresentano le incognite e  $\Delta t$  è lo step temporale.

Infine si impone che l'accelerazione vari linearmente tra due step successivi di calcolo

$$\ddot{\ddot{u}}_i = \frac{\ddot{\ddot{u}}_{i+1} - \ddot{\ddot{u}}_i}{\Delta t} \quad (90)$$

Così facendo si hanno 4 equazioni (86 – 88 – 89 – 90) in quattro incognite  $u_{i+1}$ ;  $\dot{u}_{i+1}$ ;  $\ddot{u}_{i+1}$ ;  $\ddot{\ddot{u}}_i$  ed il sistema risolvibile si presenta nella forma

$$\begin{bmatrix} K_{eq} & C_{eq} & M \\ 1 & 0 & -\frac{\Delta t^2}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{i+1}(t)M \\ u_i + \dot{u}_i\Delta t + \ddot{u}_i\left(\frac{\Delta t^2}{3}\right) \\ \dot{u}_i + \ddot{u}_i\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (91)$$

Come si può notare il metodo è effettivamente lineare in quanto la matrice del sistema è costante per ogni passo di calcolo non dipendendo da nessuna delle tre incognite. Un parametro su cui è necessario soffermarsi e prestare molta attenzione nella scelta è l'incremento temporale  $\Delta t$ . Infatti un problema che affligge tutti i metodi basati sull'integrazione al passo è la stabilità; ovvero la condizione per cui un errore piccolo nello step temporale comporta errori cumulativi minori nei passi successivi. In base a questa caratteristica si definiscono due famiglie di metodi, quelli condizionatamente stabili e quelli incondizionatamente stabili: nel primo caso la stabilità è garantita per qualsiasi valore dell'incremento  $\Delta t$ , mentre nel secondo caso affinché il metodo sia stabile il passo temporale deve essere minore di una certa quantità definita dalla seguente relazione

$$\Delta t < \Delta t_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-2\beta}} \cdot \frac{T_{min}}{2\pi} \quad (92)$$

In cui  $T_{min}$  è il periodo più piccolo della struttura, mentre  $\gamma$  e  $\beta$  sono due fattori priori di ogni metodo, che sotto l'ipotesi di accelerazione lineare valgono rispettivamente  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{6}$ . Svolgendo i calcoli si può verificare che per questo metodo il  $\Delta t_{max}$  è uguale a  $0.55 T_{min}$  e considerando che nello scenario analizzato i periodi variano da un massimo di 4 s ad un minimo di 1 s, il passo temporale massimo da assumere sarebbe 0.55 s. Di solito nell'applicazione di tale metodo è prassi usare passi di integrazione dell'ordine di  $\frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$  del periodo minimo; tuttavia in modo cautelativo, nell' algoritmo si decide di assumere un  $\Delta t$  pari a 0.01 s.

Al fine di valutare l'accuratezza del metodo, intesa come congruenza tra il segnale di output fornito dopo l'analisi non lineare in SAP2000 e quello fornito dal metodo lineare time history, è necessario introdurre dei parametri utili al confronto di due segnali nel dominio del tempo. Per descrivere in modo sufficientemente accurato un segnale è necessario un parametro di posizione dei dati ed uno che ne descriva la dispersione. Facendo un parallelismo con un segnale periodico nel tempo, il parametro di posizione fornisce informazione su periodo e fase, mentre quello di dispersione sull'ampiezza dell'onda. Di seguito si farà riferimento a queste quantità, sebbene siano proprie dei segnali periodici, per meglio comprendere, riferendosi ad un ambito più semplice, le caratteristiche che ogni parametro riesce ad evidenziare.

Il parametro posizionale scelto per descrivere i dati è il coefficiente di correlazione incrociata  $R_{xy}$  che valuta quanto i punti di zero di una funzione siano sfasati rispetto a quelli del segnale obiettivo. Tale coefficiente vale 1 quando tutti i punti di zero dei due segnali coincidono e le oscillazioni sono in fase. Assume il valore -1 quando invece le oscillazioni sono in opposizione di fase. Pertanto questo coefficiente può variare tra 1 e -1 e più il valore è prossimo all'unità positiva, più i due segnali sono congruenti in termini di periodo e fase.

$$R_{xy} = \frac{\sum_i [(u_{li} - \bar{u}_l) \cdot (u_{ni} - \bar{u}_n)]}{\sqrt{\sum_i (u_{li} - \bar{u}_l)^2 \cdot \sum_i (u_{ni} - \bar{u}_n)^2}} \quad (93)$$

In cui  $u_{li}$  sono gli spostamenti predetti dal modello lineare,  $\bar{u}_l$  è la media degli spostamenti del modelli lineare,  $u_{ni}$  sono gli spostamenti predetti dal modello generato in SAP2000 e  $\bar{u}_n$  è la loro media.

Una grandezza che il coefficiente di correlazione incrociata non riesce a cogliere è l'ampiezza delle oscillazioni. Infatti due onde periodiche con uguale fase e periodo ma diversa ampiezza avranno lo stesso valore di  $R_{xy}$ ; perciò è necessario introdurre un altro parametro che misuri la dispersione dei dati. Il parametro scelto viene chiamato  $\chi$  ed è definito come segue



$$\chi = 1 - \frac{\sum_i |u_{li} - u_{ni}|}{\sum_i |u_{li}| + |u_{ni}|} \quad (94)$$

Tale valore non è altro che lo scarto medio assoluto tra i due segnali diviso per la media della somma dei valori assoluti degli spostamenti nell'istante  $i$ -esimo. La variabilità di questo fattore è compresa tra 0 e 1: quando due segnali sono identici il valore sarà pari all'unità, viceversa più  $\chi$  sarà prossimo allo zero più le funzioni temporali saranno diverse tra loro.

A differenza del parametro  $R_{xy}$  che misura solo la congruenza dei punti di nullo dei due segnali senza dare informazioni sull'ampiezza, il fattore  $\chi$ , oltre a fornire informazioni sull'uguaglianza o meno dei valori di picco tra i segnali, in parte racchiude anche informazioni sulla fase; infatti, per esempio, due segnali periodici uguali in ampiezza ma in opposizione di fase avranno coefficiente  $\chi$  nullo. Quanto detto potrebbe indurre a considerare come unico parametro rappresentativo quest'ultimo dal momento che racchiude contemporaneamente informazioni posizionali e di dispersione. Tuttavia si decide di mantenere entrambi i parametri per una caratterizzazione più completa dei segnali, lasciando al coefficiente di correlazione incrociata il compito di definire la congruenza in termini di periodo e fase ed al parametro  $\chi$  la verifica sull'uguaglianza tra i valori di picco. In questo modo, usando due fattori è possibile comprendere se una eventuale incongruenza sia imputabile ad un errore su fase o periodo oppure sull'ampiezza di oscillazione.

Per valutare l'accuratezza del metodo, si decide di impiegare gli stessi accelerogrammi di input dell'analisi FNA usata per tarare i parametri del modello basata sullo spettro. Innanzitutto la prima prova svolta è tesa a valutare quanto la risposta lineare nel tempo vari per diversi input, mantenendo le caratteristiche del sistema di isolamento costanti. A tale scopo si decide di impegnare un sistema LRB con indice di bontà IB pari circa 60. Come si evince da due delle 14 time history che vengono di seguito riportate come campioni, per alcuni segnali di input il metodo restituisce una risposta nel tempo che ben approssima la fase ed anche i picchi (*grafico 48*), sovrastimando questi ultimi, mentre in altri casi i picchi possono essere sottostimanti di quantità considerevoli (*grafico 49*).

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

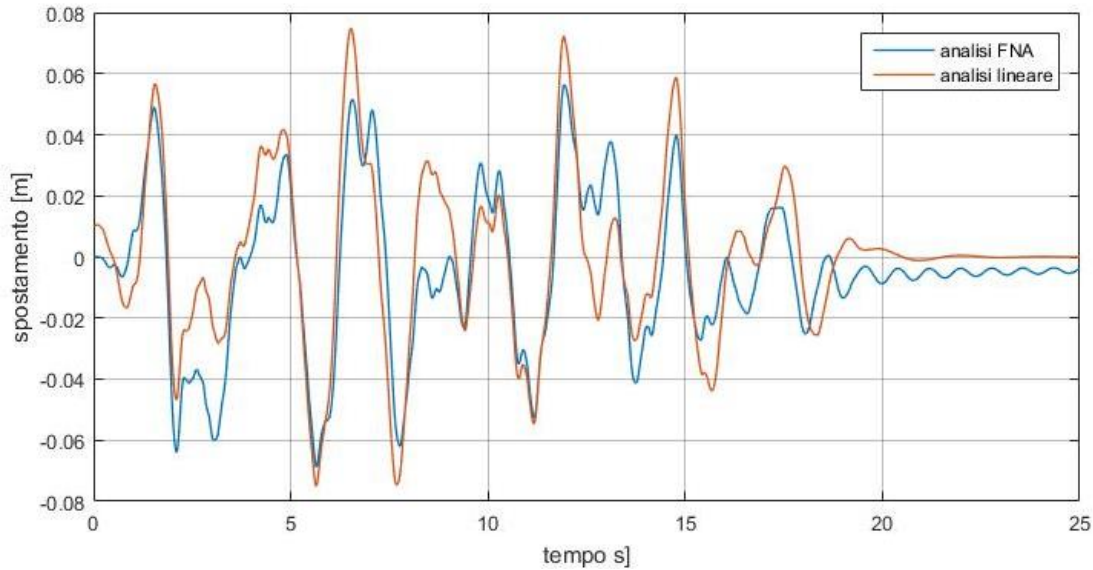


Grafico 48. Time history lineare, LRB indice 60, in cui vengono approssimate bene fase e picchi assoluti

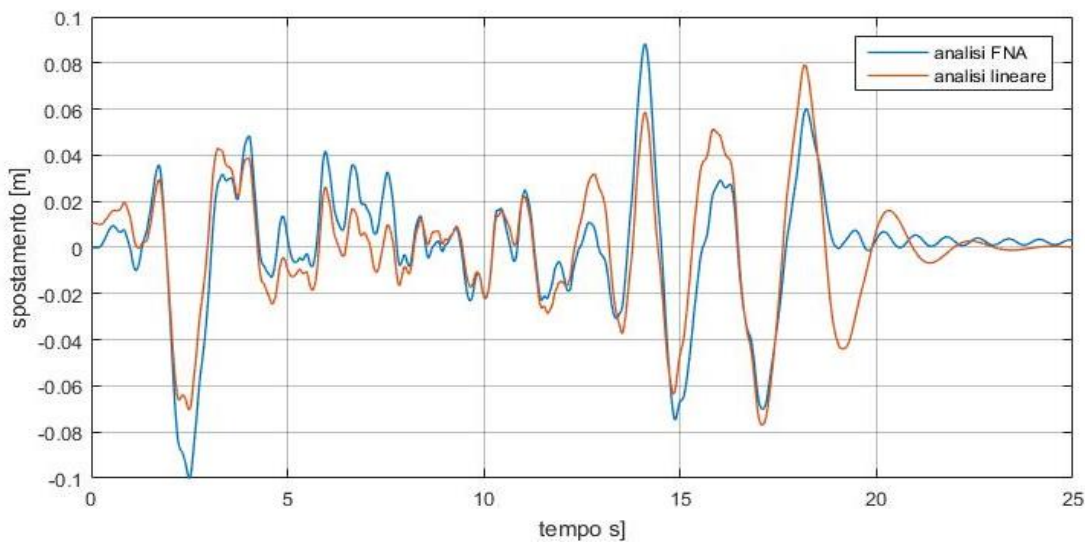


Grafico 49. Time history lineare, LRB indice 60, in cui viene approssimata bene fase ma non i picchi

Quanto mostrato nei due grafici precedenti lo si riscontra anche in altri set di test in cui vengono presi sistemi di isolatori con minore indice di bontà. In ogni caso tale tendenza non può considerarsi inaspettata; infatti tutto il procedimento di taratura del modello spettrale si basa su un valore di spostamento che è la media tra i massimi spostamenti delle 14 time history non lineari calcolate in SAP2000. Quindi a causa della filosofia che si è scelta per procedere è normale e fisiologico che alcuni segnali di output approssimino meglio i picchi di altri; perciò l'unico modo per raggiungere un risultato veritiero è svolgere più analisi ed operare sempre una media sulle quantità trovate grazie a questo metodo. Pensare che una sola analisi possa descrivere in modo efficace un fenomeno può portare a grossolani errori anche a sfavore di sicurezza.

	<i>indice IB = 60</i>		<i>indice IB = 10</i>	
	$R_{xy}$	$\chi$	$R_{xy}$	$\chi$
<i>acc_X_1</i>	0,846	0,521	0,740	0,490
<i>acc_X_2</i>	0,869	0,550	0,776	0,506
<i>acc_X_3</i>	0,856	0,520	0,750	0,490
<i>acc_X_4</i>	0,820	0,515	0,736	0,474
<i>acc_X_5</i>	0,835	0,499	0,772	0,431
<i>acc_X_6</i>	0,850	0,561	0,733	0,518
<i>acc_X_7</i>	0,868	0,536	0,815	0,464
<i>acc_Y_1</i>	0,841	0,588	0,725	0,519
<i>acc_Y_2</i>	0,801	0,519	0,715	0,471
<i>acc_Y_3</i>	0,865	0,531	0,791	0,485
<i>acc_Y_4</i>	0,764	0,520	0,743	0,482
<i>acc_Y_5</i>	0,827	0,527	0,722	0,477
<i>acc_Y_6</i>	0,869	0,525	0,753	0,456
<i>acc_Y_7</i>	0,842	0,508	0,741	0,433
<b>MEDIA</b>	0,839	0,530	0,751	0,478
<b>SCARTO MEDIO</b>	0,022	0,017	0,022	0,020

Tabella 14. valori di  $R_{xy}$  e  $\chi$  per diversi accelerogrammi e indici IB pari 60 e 10

Come si può evincere dalla *tabella 14*, in cui sono riportati i fattori di congruenza per tutte le prove svolte, un altro aspetto che hanno evidenziato i due set di prove, con indice IB pari a 60 e 10, è che variando gli accelerogrammi, i fattori  $R_{xy}$  e  $\chi$  varino molto poco e ciò suggerisce che le uniche quantità idonee ad una relazione con tali fattori siano le proprietà equivalenti di ogni sistema.

A questo punto ciò che ci si prefigge di far nei prossimi capitoli è cercare un legame tra le quantità equivalenti usate come input per questo metodo e gli indici di congruenza  $R_{xy}$  e  $\chi$  tra i segnali. Indagare tali relazioni è importante al fine di fornire uno strumento capace di verificare l'accuratezza di una time history a priori, conoscendo solo le proprietà efficaci. In questo modo si procede criticamente, senza mai affidarsi ad occhi chiusi ai risultati, che possono essere controllati tramite i parametri di congruenza.

### 2.3.1 Sistema LRB

Il primo sistema che si considera è quello costituito da isolatori elastomerici con nucleo in piombo; per analizzare come varino i fattori di congruenza tra i segnali in funzione di  $\xi_{eq}$  e  $K_{eq}$  si procede svolgendo un set di prove mantenendo costante l'accelerogramma di input e variando il tipo di isolatore dal meno rigido al più rigido che permetta l'applicazione dell'algoritmo di linearizzazione equivalente spettrale. Di seguito vengono riportati tre segnali di output in termini di spostamento per l'isolatore meno rigido, medio e più rigido (D300\_1; D600\_1; D1000\_1)

## LINEARIZZAZIONE EQUIVALENTE

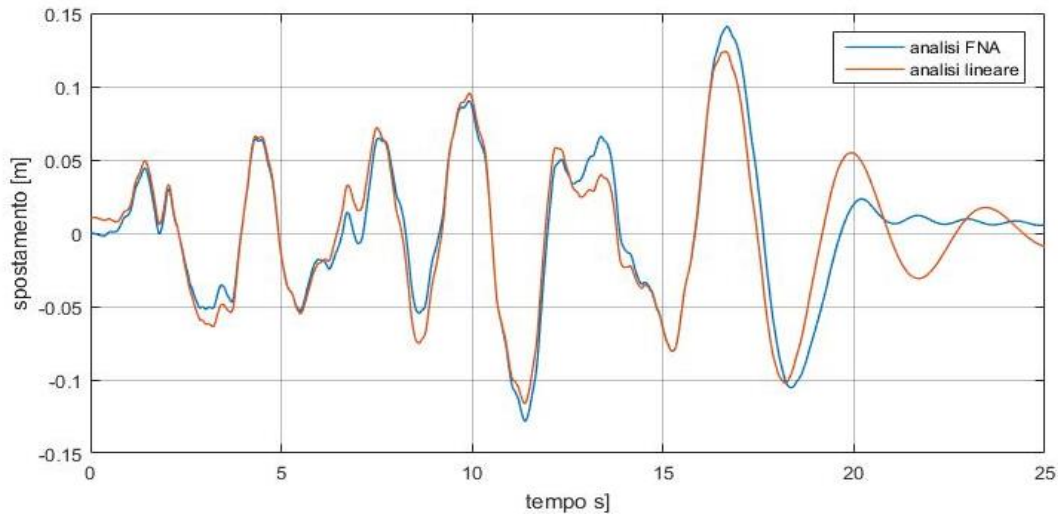


Grafico 50. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D300\_1.  $R_{xy} = 0.954$   $\chi = 0.761$

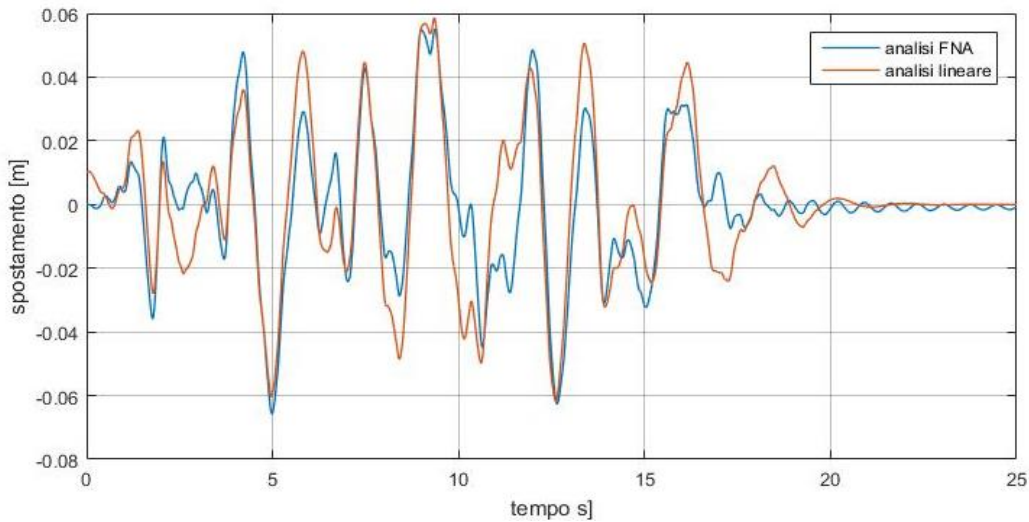


Grafico 51. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D600\_1.  $R_{xy} = 0.847$   $\chi = 0.513$

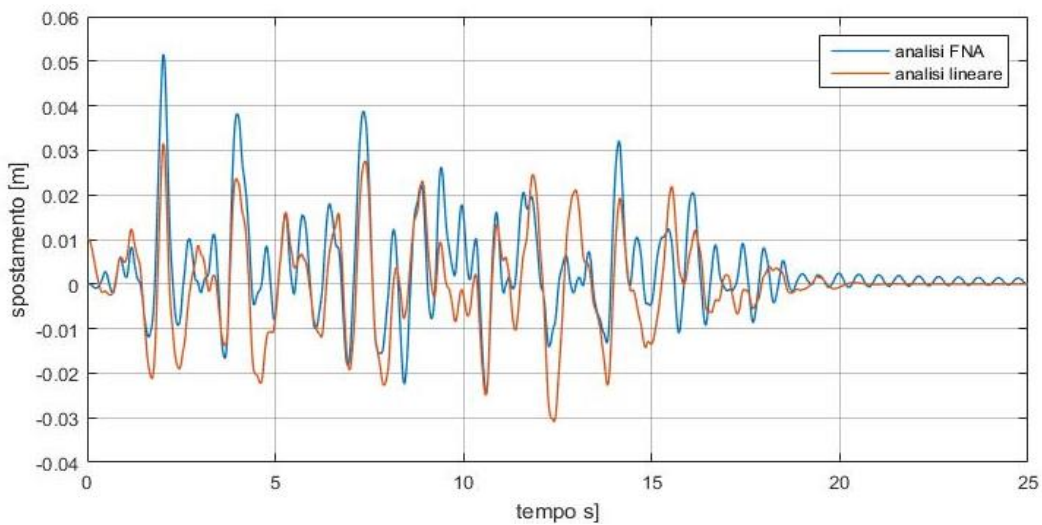


Grafico 52. Confronto segnale analisi non lineare e lineare per LRB D1000\_1.  $R_{xy} = 0.722$   $\chi = 0.431$

Confrontando i tre grafici precedenti, si nota come l'accuratezza della soluzione diminuisca man mano che aumentino rigidità e smorzamento equivalente, perciò al fine di relazionare gli indici di congruenza con le quantità lineari equivalenti, sarebbe indifferente usare la rigidità equivalente  $K_{eq}$  o lo smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$ . Si opta per l'uso del coefficiente  $\xi_{eq}$  in quanto essendo una percentuale, attraverso una variazione ridotta (0 – 80%) si possono rappresentare efficacemente molti sistemi, piuttosto che attraverso un valor assoluto come la rigidità. Di seguito viene riportato il grafico in cui è mostrata la relazione che intercorre tra il coefficiente di smorzamento equivalente e i fattori di congruenza  $R_{xy}$  e  $\chi$  per il set di prove svolto con un unico accelerogramma e vari sistemi LRB con rigidità sempre crescente.

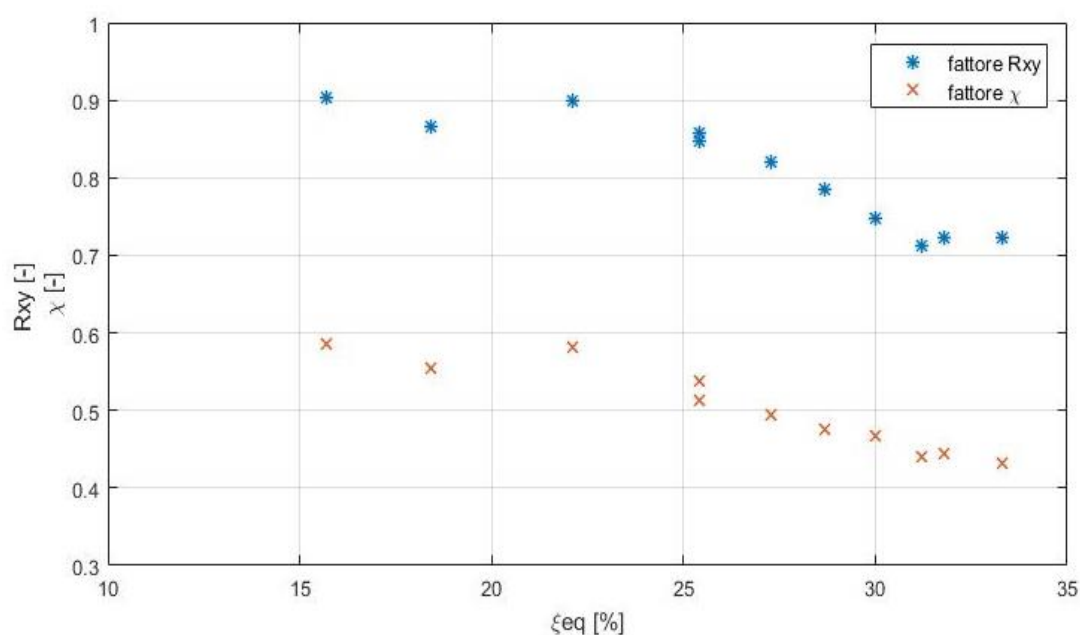


Grafico 53. relazione tra  $R_{xy}$ ;  $\chi$  e smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$  per sistema LRB

Al fine di poter fornire una relazione che permetta di predire con un certo grado di accuratezza i parametri di congruenza, i risultati del *grafico 53* sono stati interpolati con funzioni polinomiali di secondo grado, che come si nota seguono bene la decrescita di  $R_{xy}$  e  $\chi$  all'aumentar del coefficiente di smorzamento equivalente. Le espressioni analitiche sono le seguenti in cui lo smorzamento è espresso in percentuale

$$R_{xy} = -8 \cdot 10^{-4} \xi_{eq}^2 + 2.70 \cdot 10^{-2} \xi_{eq} + 6.64 \cdot 10^{-1} \quad (95)$$

$$\chi = -4 \cdot 10^{-4} \xi_{eq}^2 + 1.11 \cdot 10^{-2} \xi_{eq} + 5.09 \cdot 10^{-1} \quad (96)$$

### 2.3.2 Sistema FPS + FVD

Il sistema FPS + FVD viene studiato in modo simile a quanto fatto per gli LRB; ovvero si eseguono 3 diversi set di prove in cui viene fatto variare il coefficiente di attrito da 1 a 3. All'interno di ogni set si decide di mantenere la massa costante e pari a 900 ton, variando i raggi equivalenti (2500 – 2800 – 3100 – 3400 – 3700 mm) e il coefficiente di smorzamento  $C_\alpha$  (0 – 50 – 100) al fine di rispettare le ipotesi dell'analisi spettrale e utilizzare i dati equivalenti generati da essa nell'algorithm time history lineare. Anche in questo caso si riscontra lo stesso comportamento incontrato per gli LRB; ovvero un progressivo degrado della congruenza tra il segnale lineare e quello generato dall'analisi FNA all'aumentare di rigidezza e smorzamento equivalenti. Nei seguenti due grafici si mostra la time history del sistema con solo FPS nella condizione di minima ( $R_{eq} = 3700; \mu = 1\%$ ) e massima rigidezza ( $R_{eq} = 2500; \mu = 3\%$ ).

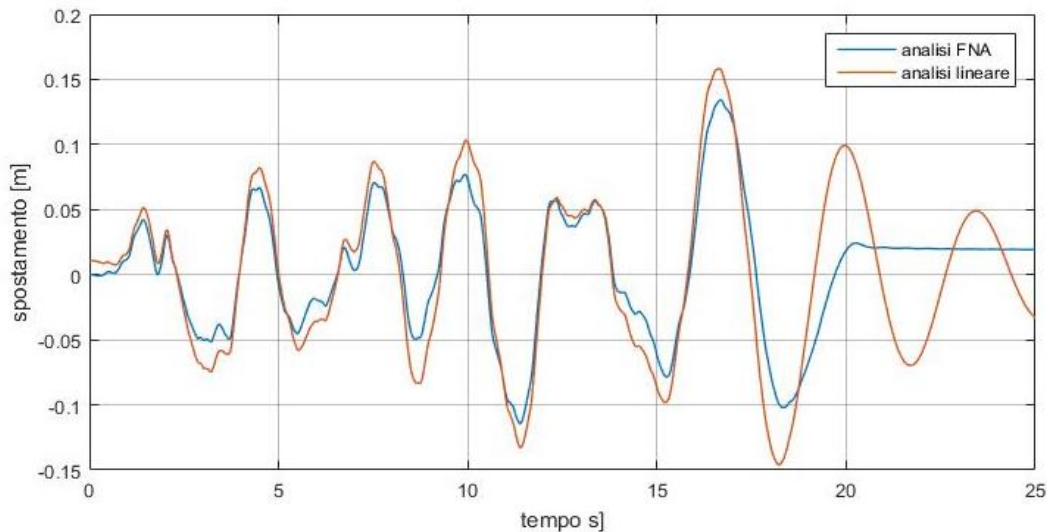


Grafico 54. segnale analisi non lineare e lineare per FPS  $R_{eq} = 3700 \text{ mm}$  e  $\mu = 1\%$ .  $R_{xy} = 0.942$   $\chi = 0.733$

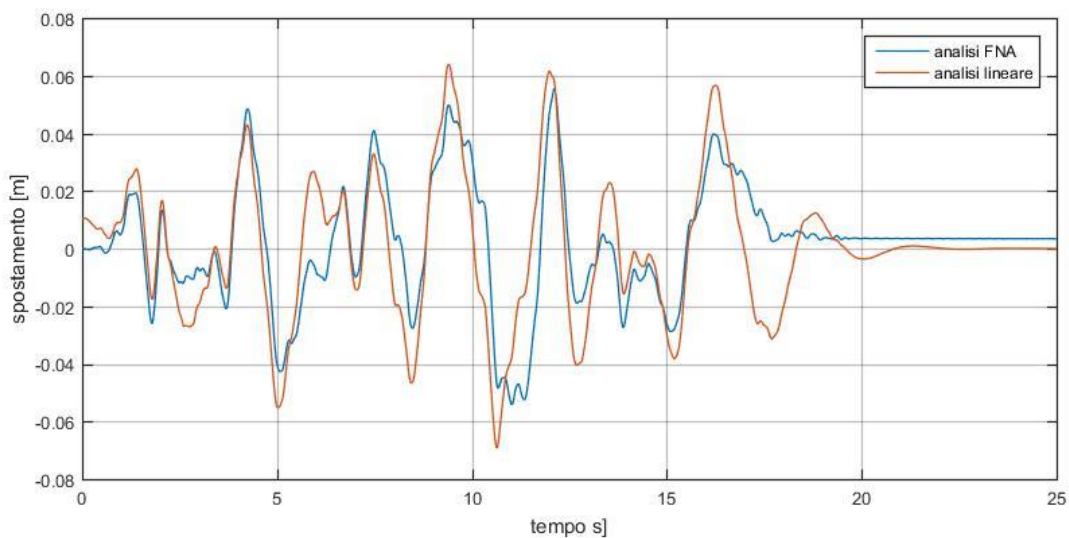


Grafico 55. segnale analisi non lineare e lineare per FPS  $R_{eq} = 2500 \text{ mm}$  e  $\mu = 3\%$ .  $R_{xy} = 0.794$   $\chi = 0.539$

Come si nota confrontando i *grafici 54 e 55* per valori di rigidità e coefficiente di smorzamento equivalente minore si hanno picchi di ampiezza maggiore, oscillazioni più lunghe e un minor rumore nel segnale. Quest'ultimo aspetto è una caratteristica che il metodo lineare equivalente non riesce ad evidenziare; infatti sia per gli FPS + FVD che per gli LRB (cfr *grafici 50 – 52*) si nota un'attenuazione del rumore (piccole oscillazioni che si verificano attorno al segnale portante). Nei casi in cui tali piccole oscillazioni non siano presenti nel segnale obiettivo (bassa rigidità e smorzamento) il metodo tenderà a dare risultati più congruenti. Nella seguente *tabella 15* vengono riportati per completezza tutti i risultati, in termini di  $R_{xy}$  e  $\chi$ , della campagna di prove svolta.

$R_{eq}$	$C_\alpha$	$\mu = 1\%$		$\mu = 2\%$		$\mu = 3\%$	
		$R_{xy}$	$\chi$	$R_{xy}$	$\chi$	$R_{xy}$	$\chi$
<b>2500</b>	<b>0</b>	0,898	0,642	0,843	0,513	0,794	0,539
	<b>50</b>	0,894	0,546	0,834	0,560	0,722	0,446
	<b>100</b>	0,847	0,514	0,763	0,453	0,638	0,397
<b>2800</b>	<b>0</b>	0,929	0,684	0,837	0,517	0,799	0,554
	<b>50</b>	0,894	0,576	0,832	0,550	0,713	0,433
	<b>100</b>	0,841	0,497	0,752	0,442	0,620	0,387
<b>3100</b>	<b>0</b>	0,943	0,709	0,835	0,521	0,802	0,560
	<b>50</b>	0,897	0,597	0,827	0,535	0,705	0,424
	<b>100</b>	0,835	0,489	0,742	0,435	0,604	0,378
<b>3400</b>	<b>0</b>	0,946	0,728	0,836	0,526	0,801	0,560
	<b>50</b>	0,898	0,604	0,821	0,523	0,698	0,417
	<b>100</b>	0,828	0,486	0,733	0,429	0,590	0,369
<b>3700</b>	<b>0</b>	0,942	0,733	0,837	0,556	0,798	0,555
	<b>50</b>	0,897	0,603	0,815	0,511	0,691	0,412
	<b>100</b>	0,821	0,481	0,724	0,423	0,578	0,361

Tabella 15. Confronto valori  $R_{xy}$  e  $\chi$  delle prove sul sistema FPS + FVD

Infine anche per il sistema FPS + FVD si è cercato di esprimere i fattori di congruenza in funzione del coefficiente di smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$ . Per quanto riguarda il parametro  $\chi$ , la procedura impiegata è la medesima degli LRB, che porta ad finire la funzione interpolante i dati come

$$\chi = -2.9 \cdot 10^{-3} \xi_{eq} + 6.76 \cdot 10^{-1} \quad (97)$$

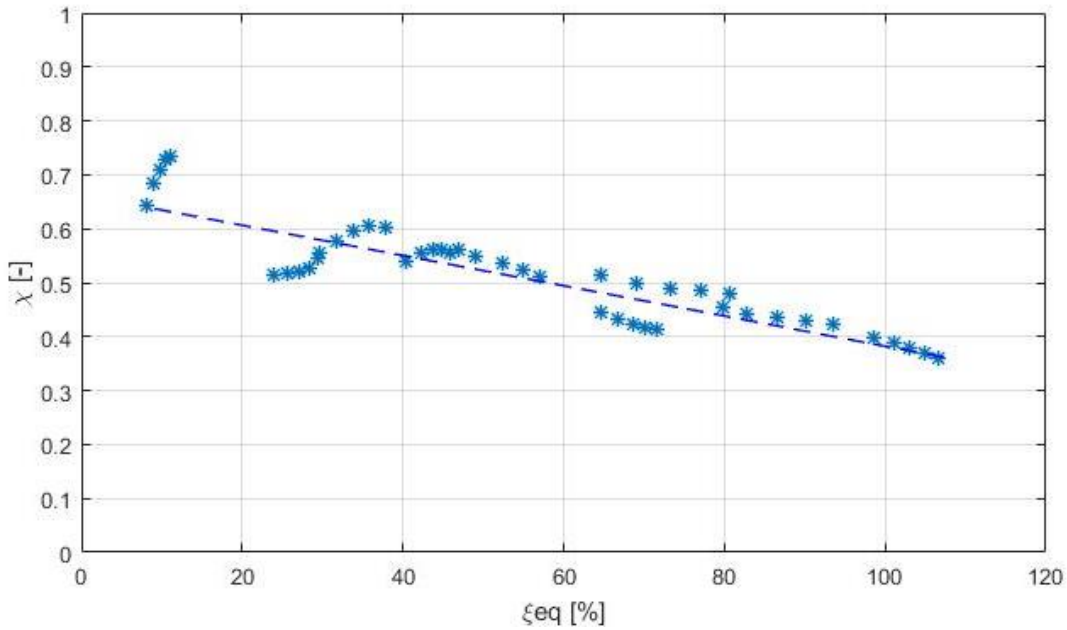


Grafico 56. relazione tra  $\chi$  e smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$  per sistema FPS+FVD

Per quanto riguarda invece il coefficiente  $R_{xy}$ , si deve operare in modo diverso da quanto fatto finora. Infatti da un'attenta osservazione dei dati, si nota come sia più efficace dividere i risultati in famiglie, ognuna con un coefficiente di attrito costante, e quindi interpolare i risultati all'interno della stessa famiglia. Come si può evincere dal *grafico 57*, si decide di utilizzare funzioni di interpolazione polinomiali del 2° ordine. Dopo averle trovate, al fine di trovare una relazione  $R_{xy}$  funzione di due variabili indipendenti ( $\xi_{eq}; \mu$ ), si opera con la stessa procedura utilizzata per trovare la funzione correttiva  $\beta$  nel caso di isolatori FPS a superfici lucidate (cfr *equazione 79*)

$$R_{xy}(\xi_{eq}; \mu) = A(\mu) \cdot (\xi_{eq})^2 + B(\mu) \cdot (\xi_{eq}) + C(\mu) \tag{98}$$

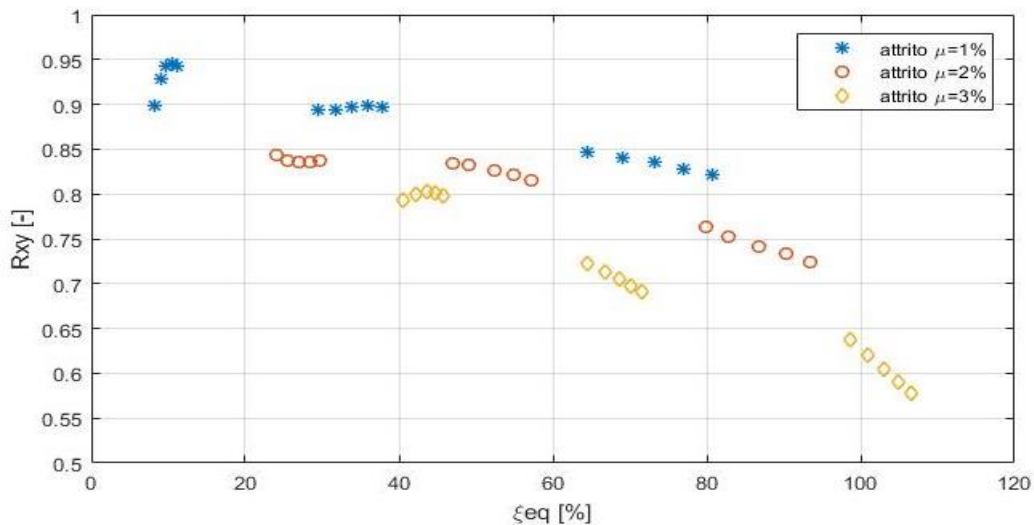


Grafico 57. relazione tra  $R_{xy}$  e  $\xi_{eq}$  per sistema FPS+FVD per diversi coefficienti di attrito  $\mu$



Le funzioni interpolanti per i diversi valori di attrito sono le seguenti

$$\mu = 1 \rightarrow R_{xy}(\xi_{eq}) = -4.0 \cdot 10^{-6}(\xi_{eq})^2 - 1.2 \cdot 10^{-3}\xi_{eq} + 9.4 \cdot 10^{-1} \quad (99)$$

$$\mu = 2 \rightarrow R_{xy}(\xi_{eq}) = -3.0 \cdot 10^{-5}(\xi_{eq})^2 + 1.8 \cdot 10^{-3}\xi_{eq} + 8.1 \cdot 10^{-1} \quad (100)$$

$$\mu = 3 \rightarrow R_{xy}(\xi_{eq}) = +8.0 \cdot 10^{-6}(\xi_{eq})^2 - 4.4 \cdot 10^{-3}\xi_{eq} + 9.7 \cdot 10^{-1} \quad (101)$$

Al fine di trovare le funzioni ausiliare  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$  e  $C(\mu)$  dipendenti dal solo coefficiente di attrito si utilizzano ancora relazioni polinomiali di secondo grado con le seguenti condizioni al contorno

$$A \begin{cases} A(1) = -4.0 \cdot 10^{-6} \\ A(2) = -3.0 \cdot 10^{-5} \\ A(3) = +8.0 \cdot 10^{-6} \end{cases} \quad B \begin{cases} B(1) = -1.2 \cdot 10^{-3} \\ B(2) = +1.8 \cdot 10^{-3} \\ B(3) = -4.4 \cdot 10^{-3} \end{cases} \quad C \begin{cases} C(1) = +9.4 \cdot 10^{-1} \\ C(2) = +8.1 \cdot 10^{-1} \\ C(3) = +9.7 \cdot 10^{-1} \end{cases} \quad (102)$$

E le funzioni così trovate sono

$$A(\mu) = 10^{-4}(0.32 \mu^2 - 1.22 \mu + 0.86) \quad (103)$$

$$B(\mu) = 10^{-2}(-0.46 \mu^2 + 1.68 \mu - 1.34) \quad (104)$$

$$C(\mu) = 0.15 \mu^2 - 0.57 \mu + 1.37 \quad (105)$$

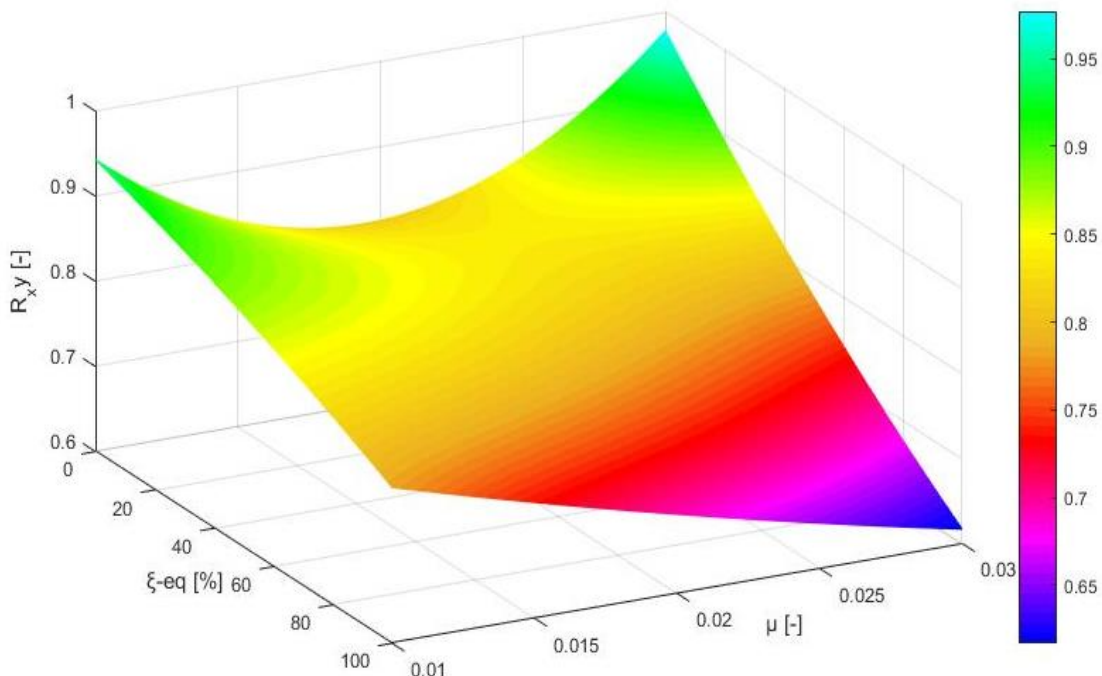


Grafico 58. valori  $R_{xy}$  in funzione del coefficiente  $\xi_{eq}$  e  $\mu$

Nell'appendice B, vengono riportati tutte le time history nella la campagna di prove svolta.



### 3. MARTELLAMENTO IN FASE PRELIMINARE DI PROGETTO

In quest' ultimo capito si affronterà un problema molto importante che si può manifestare tra strutture limitrofe durante un evento sismico, che però a causa della complessità spesso viene trascurato in fase preliminare di progetto. Con il termine martellamento si definisce l'atto dello scontro tra due o più strutture limitrofe a causa degli spostamenti indotti della sollecitazione sismica. Questo fenomeno assume ancor più rilevanza nei casi in cui le strutture vengano isolate; infatti la peculiarità di tale metodologia risiede proprio nel minimizzare le forze indotte dal sisma sulla struttura, al prezzo però di grandi spostamenti. In termini pratici, questo fenomeno si manifesta molto spesso nei ponti o nei lunghi viadotti di più campate; infatti al fine di minimizzare i costi si tende a costruire giunti il più stretto possibile, in primo luogo per poter installare coprigiunti più corti ed in secondo luogo per poter costruire pile più strette risparmiando così materiale. Tuttavia sottovalutare questo problema può portare a conseguenze catastrofiche dal momento che l'impatto tra le strutture adiacenti può indurre delle forze impulsive anche 10 volte maggiori di quelle generate dal sisma causando anche la perdita dell'appoggio.

La causa che fondamentale genera il martellamento è la diversa risposta sismica di strutture vicine e ciò può essere causato da diversi fattori. Innanzitutto quando si considerano strutture molto lunghe cade l'ipotesi che tutti i punti del sistema vengano sollecitati simultaneamente dallo stesso accelerogramma sismico poiché l'onda sismica impiega un certo lasso di tempo a percorrere la distanza che separa i corpi, colpendo prima uno e poi quello vicino. Un altro aspetto da considerare è che un'onda sismica non rimane immutata durante il suo percorso nello spazio; ciò è causato sia dall'azione filtrante su diverse frequenze che operano differenti tipi di terreno, sia da fenomeni di riflessione e/o rifrazione che mutano il segnale nel passaggio tra zone di diversa densità. Infine l'ultimo fattore da considerare è che strutture vicine potrebbero avere diversi valori di rigidità e smorzamento che quindi farebbero differire la risposta anche se l'accelerogramma di input fosse il medesimo.

Per migliorare la risposta a tale fenomeno si può agire in diversi modi: il primo ed immediato è quello di lasciare uno spazio sufficientemente grande tra le due strutture che permetta loro di sviluppare i movimenti previsti in fase sismica senza entrare però in contatto. Un secondo modo all'apparenza controtendenza è quello di avvicinare molto le strutture così da aumentare il numero di collisioni durante il sisma ma diminuire i picchi di forza impulsiva. Questo approccio però può causare effetti indesiderati durante il normale funzionamento della struttura; infatti considerando ad esempio due campate di un viadotto, l'espansione e il ritiro longitudinale dovuti a variazioni termiche devono essere lasciati liberi di verificarsi. Accostando troppo le strutture queste entrando in contatto impedirebbero i fisiologici movimenti dell'impalcato, causando azioni assiali parassite anche di notevole entità. Infine un'altra strategia per evitare il martellamento è quella di solidarizzare mediante travature rigide tutte le strutture vicine così da trasformarle in un unico corpo che si muova mantenendo le distanze relative invariate.

Per quanto riguarda i metodi di analisi, la norma consente di utilizzare sia un approccio basato sull'analisi spettrale che uno di tipo time history lineare oppure non lineare. Una costante che viene adottata in tutti i metodi applicabili è quella di considerare i segnali di risposta in termini di spostamento totalmente incorrelati se la distanza che separa le due strutture supera quella prestabilita per il tipo di terreno (in media 500m). Considerare le risposte sempre incorrelate porta ad operare in modo prudentiale e a favore di sicurezza, in quanto così facendo si ipotizza lo scenario peggiore. Ciò si può spiegare ragionando all'estremo: considerare le risposte nel tempo in termini di spostamento uguali (e quindi altamente correlate) significherebbe annullare ogni probabilità che si verifichi la collisione tra le strutture, in quanto si muoverebbero simultaneamente mantenendo invariata la loro distanza relativa. Ciò spiega perché spostarsi da una situazione di completa correlazione ad una in cui la correlazione è assente porti ad una probabilità di contatto sempre maggiore su cui è bene basare la progettazione.

Lo studio che si desidera condurre ha come primo obiettivo quello di fornire un algoritmo che permetta di prevedere dato un certo numero di funzioni di risposta in termini di spostamento delle due strutture lo spazio minimo da lasciare libero  $\Delta_{min}$  per evitare la collisione. L'altro scopo che ci si pone è quello di verificare se la procedura semplificata che forniscono i codici, basata sulla combinazione SRSS degli effetti massimi possa essere considerata come un upper bound del problema e quanto il grado di correlazione tra i segnali influisca su tale risultato.

### 3.1 Metodo basato su time history lineare

In questo paragrafo verrà spiegato come è costruito l'algoritmo per calcolare il massimo spostamento relativo tra due strutture utilizzando come dati di input i risultati di varie time history lineari. Si decide di utilizzare tutti i segnali ricavati nel precedente capitolo, combinandoli a coppie e valutando la correlazione in termini di  $R_{xy}$  e  $\chi$ . Considerando che si può attingere ad un bacino di 86 time history le possibili combinazioni semplici ( $C_{86,2}$ ) sono fornite dalla formula

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (106)$$

In cui  $n$  il numero di elementi dell'insieme da cui attingere ( $n = 86$ ) e  $k$  è la classe della combinazione. Nel nostro caso  $k = 2$  poiché i segnali vengono presi a coppie. Quindi svolgendo i calcoli le prove a suffragio delle future considerazioni sono in tutto 3655.

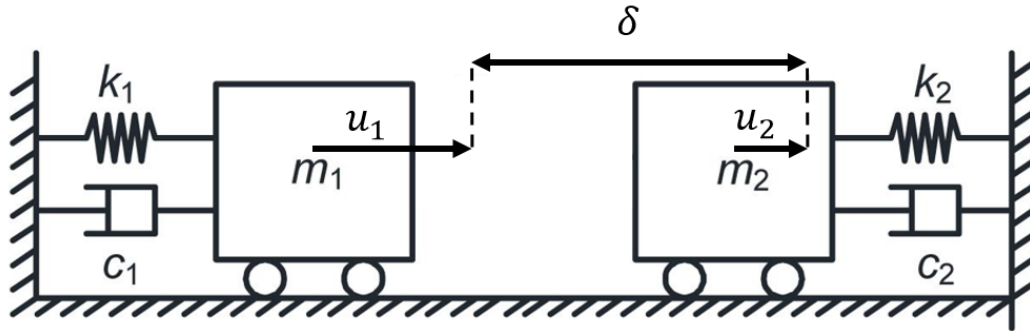


Figura 10. schematizzazione del problema del martellamento tra due strutture attigue

Per ogni coppia di segnali  $(u_1(t); u_2(t))$  si calcola la funzione differenza, in quanto questa rappresenta lo spostamento relativo  $\delta(t)$  tra le due strutture.

$$\delta(t) = u_2(t) - u_1(t) \quad (107)$$

Impostando un distanza iniziale tra le due masse pari a zero e per come vengono assunti sistema di riferimento (spostamenti positivi verso destra) e coordinate, un allontanamento di due corpi è manifestato da un  $\delta$  positivo, mentre la collisione si ha per valori di  $\delta$  inferiori allo zero. Quindi si potrebbe pensare che la distanza minima ( $\Delta_{min}$ ) a cui posizione le due masse affinché non si tocchino sia il minimo assoluto della funzione  $\delta(t)$ . Tuttavia vi sono le stesse probabilità che gli accelerogrammi di input siano opposti ai primi considerati, generano così funzioni temporali dello spostamento antipodali rispetto alle prime. Ciò significa che quello che era il minimo assoluto, ora è il massimo assoluto e viceversa. Tale considerazione porta a concludere che entrambi gli scenari, egualmente possibili, vanno considerati; perciò la distanza minima tra i due corpi affinché non vi sia martellamento deve essere il massimo della funzione  $\delta(t)$  in valore assoluto.

$$\Delta_{min} = \max|\delta(t)| \quad (108)$$

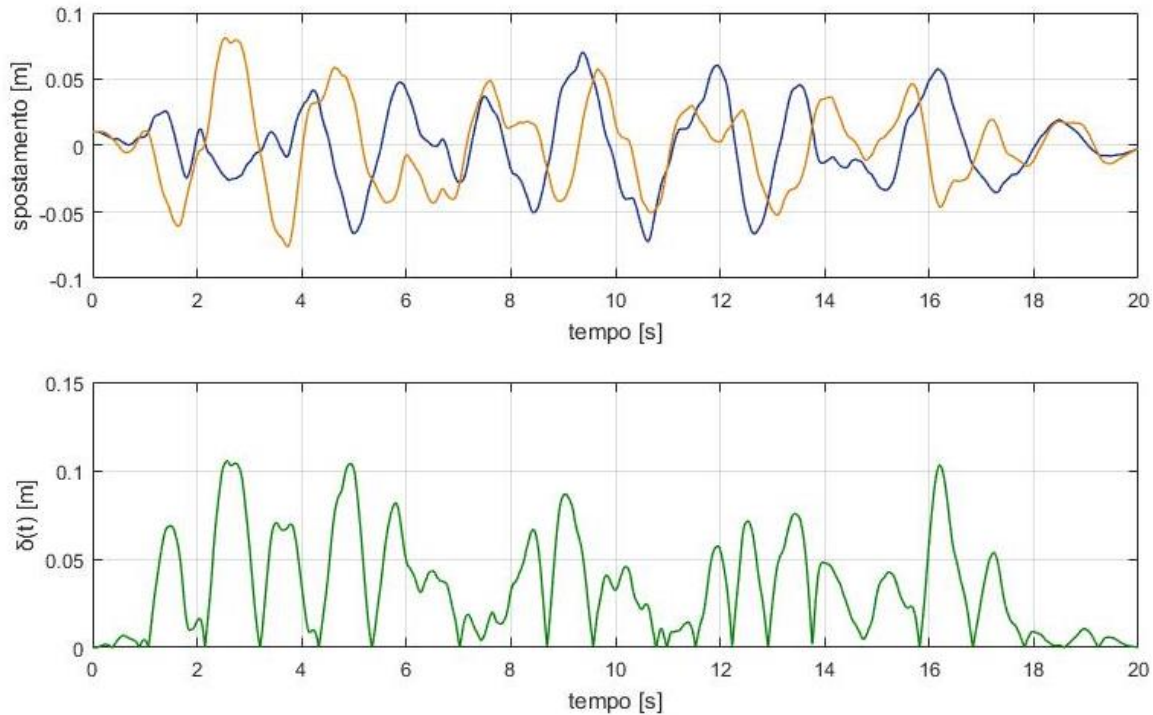


Grafico 59. grafico superiore - due segnali campione; grafico inferiore - valore assoluto della loro differenza

Dal momento che questo metodo utilizza come dati i risultati di una analisi time history lineare e visto che, come si era detto nel paragrafo precedente, non si può considerare rappresentativa di un problema una sola analisi time history ma la media di più risultati, anche nella ricerca della distanza minima tra le due strutture è necessario applicare il concetto di media a più test. Ciò viene anche specificato dalle normative che impongono di volgere un numero minimo di test tale che la media dei risultati sia stabile, e solo allora quel risultato può considerarsi rappresentativo del problema. L'algoritmo studiato fa proprio questo, inserendo un set di funzioni dello spostamento nel tempo, che sono il frutto di precedenti analisi lineari al passo, crea tutte le combinazioni possibili tra i segnali e calcola per ognuna la spaziatura minima necessaria ad impedire il martellamento. Una volta fatto ciò, tra tutti i  $\Delta_{min,i}$ , viene calcolata la media che è il dato finale  $\Delta_{min}$ .

### 3.2 Ricerca upper bound del problema

I codici prevedono anche la possibilità di adottare un approccio semplificato per valutare lo spostamento relativo massimo tra due sistemi. Tali metodi si basano sull' utilizzo della combinazione degli effetti mediante la regola SRSS. Innanzitutto si vuole andare ad indagare quanto questo tipo di combinazione sia veritiera a seconda del grado di correlazione tra i segnali. Per ogni coppia di segnali (3655) è stato calcolato lo spostamento relativo massimo prima adottando il metodo esposto nel capitolo precedente (equazione 109), poi attraverso la combinazione SRSS (equazione 110) ed infine i coefficienti di congruenza  $R_{xy}$  e  $\chi$ .

$$\Delta_{min,i,\delta} = \max |u_j(t) - u_k(t)| \quad (109)$$

In cui  $\Delta_{min,i,\delta}$  è la spaziatura minima relativa alla i-esima coppia e  $u_j(t), u_k(t)$  rappresentano gli spostamenti di due time history  $j$  e  $k$ .

$$\Delta_{min,i,SR} = \sqrt{u_{j,max}^2 + u_{k,max}^2} \quad (110)$$

$$u_{j,max} = \max|u_j(t)| \quad (111)$$

In cui  $\Delta_{min,i,SR}$  è la spaziatura minima relativa alla i-esima coppia e  $u_{j,max}, u_{k,max}$  rappresentano gli spostamenti massimi di due time history  $j$  e  $k$  prese in valore assoluto.

Dopo aver calcolato queste quantità per tutte le 3655 coppie di segnali, viene calcolato l'errore relativo tra ogni coppia e lo si grafica in funzione degli indici di correlazione  $R_{xy}$  e  $\chi$ . Come si può notare dal *grafico 60*, all'aumentare della correlazione l'errore relativo tende a crescere fino al 100% per valori di  $R_{xy}$  pari a 1. Questo è ovviamente dettato dal fatto che qualora i segnali fossero perfettamente uguali non sarebbe necessario lasciare uno spazio libero minimo in quanto i due sistemi si muoverebbero perfettamente in fase lasciando invariate le distanze relative. Quindi si è dimostrato come la combinazione SRSS tra gli effetti sia applicabile solo se i segnali di input sono incorrelati ed infatti le norme impongono di utilizzare time history di input incorrelate qualora si utilizza tale metodologia.

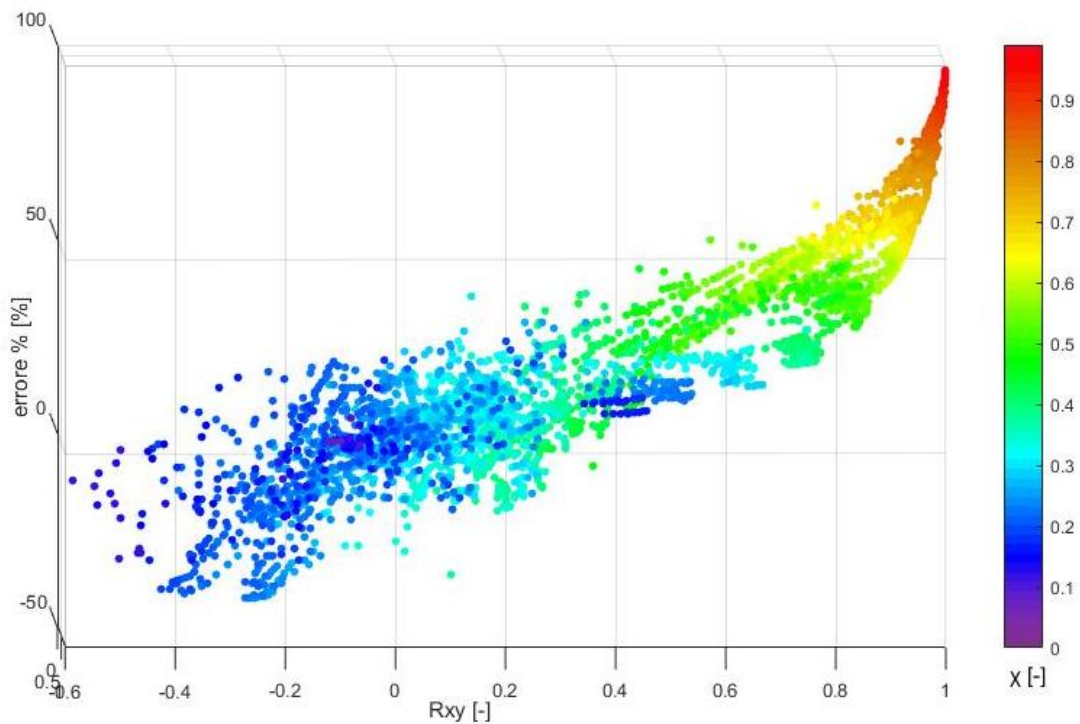


Grafico 60. dipendenza dell' errore relativo tra  $\Delta_{min,i,\delta}$  e  $\Delta_{min,i,SR}$  dai parametri  $R_{xy}$  e  $\chi$

A suffragio di quanto detto prima, viene calcolata la media tra gli errori del *grafico 60* per valori di  $R_{xy}$  maggiori (segnali correlati) e minori (segnali incorrelati) di 0.6. Nel primo caso l'errore medio riscontrato è del 55%; mentre nel secondo caso solo del 2%; sebbene per valori di correlazione bassa non sempre la combinazione SRSS fornisca una stima per eccesso del metodo più preciso.

A questo punto, dopo aver indagato e confermato che il metodo basato sulla combinazione SRSS può essere usato solo se i segnali di input sono incorrelati, ci si vuole interrogare sull'esistenza di un metodo più semplice che dia come risultato un upper bound di tale problema. Ovviamente dovendo ammettere un grado, di approssimazione maggiore per poter semplificare il metodo, il risultato auspicabilmente sarà maggiore di quello frutto del metodo più rigoroso. Gli approcci che si andranno a studiare sono tre in ordine decrescente di precisione.

Il primo e più accurato tra i tre, è quello esposto nel paragrafo precedente in quanto fornisce risultati veritieri sia che i segnali siano incorrelati che totalmente correlati, dato che considera la reale progressione temporale dei due segnali, misurando in ogni istante la distanza relativa tra i due corpi. Il secondo metodo è quello basato in primo luogo sulla combinazione SRSS di time history non correlate ed in secondo luogo il risultato viene ricavato andando ad estrarre dai segnali di input i massimi valori senza però riconoscere se questi si verificano simultaneamente e sfasati nel tempo. Queste due peculiarità lo rendono meno preciso e stringono il campo di applicazione, ma rendono il risultato più snello da un punto di vista computazionale. Entrambi i primi due metodi sono basati su analisi time history in cui coppie di segnali vengono analizzate, fornendo dei risultati che poi saranno mediati sul campione di coppie analizzate per ricavare il dato finale.

Il terzo ed ultimo metodo si discosta dai precedenti poiché non utilizza più una famiglia di segnali temporali come dato iniziale ma solo gli spostamenti massimi ricavati da un'analisi spettrale, combinandoli con il metodo SRSS. La norma prevede che si possa usare questo approccio, moltiplicando il valore così ottenuto per un coefficiente di sicurezza  $\gamma_c$  pari a circa 1.25 – 1.3.

$$\Delta_{min,SP} = \gamma_c \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (112)$$

Dove  $u_1, u_2$  sono gli spostamenti della struttura 1 e 2 ricavati con un'analisi spettrale.

A titolo di esempio vengono riportati i valori di apertura minima  $\Delta_{min}$  calcolati nei 3 modi per un sistema formato da due strutture uguali dotata entrambe degli stessi LRB con indice IB pari prima a 60 poi a 10 e soggetto a 14 accelerogrammi di input non correlati, che sono gli stessi adottati ogniqualvolta è stato necessario tarare dei parametri.



	$\Delta_{min} IB = 60$	$\Delta_{min} IB = 10$
<b>Metodo <math>\delta</math></b>	0.1162	0.0957
<b>Metodo SRSS</b>	0.1189	0.0948
<b>Metodo Spettrale (<math>\gamma_c = 1</math>)</b>	0.1350	0.1112
<b>Metodo Spettrale (<math>\gamma_c = 1.3</math>)</b>	0.1755	0.1445

Tabella 16. confronto valori di apertura minima libera per i diversi approcci di calcolo

Di seguito vengono riepiloga in un quadro sinottico i 3 metodi per calcolare lo spazio minimo da lasciare libero per evitare il martellamento tra due strutture.

$$\Delta_{min,\delta} = \frac{\sum \max |u_j(t) - u_k(t)|}{N} \quad (113)$$

In cui  $u_j(t), u_k(t)$  rappresentano gli spostamenti di due time history  $j$  e  $k$  ed  $N$  il numero di coppie di segnali utilizzate.

$$\Delta_{min,SR} = \frac{\sum \sqrt{u_{j,max}^2 + u_{k,max}^2}}{N} \quad (114)$$

In cui  $u_{j,max}, u_{k,max}$  rappresentano gli spostamenti massimi di due time history  $j$  e  $k$  prese in valore assoluto ed  $N$  il numero di coppie di segnali utilizzate.

$$\Delta_{min,SP} = \gamma_c \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (115)$$

Dove  $u_1, u_2$  sono gli spostamenti della struttura 1 e 2 ricavati con un'analisi spettrale e  $\gamma_c$  un coefficiente di sicurezza.



## 4. CONCLUSIONI

### 4.1 Analisi lineare equivalente basata sullo spettro

- Al fine di avere un metodo lineare equivalente globalmente convergente è necessario ridurre l'intervallo di ricerca della soluzione ai soli spostamenti maggiori del picco di  $\xi_{eq}$  così da avere una funzione  $\xi_{eq}(u)$  monotona decrescente. Questa riduzione del range di ricerca della soluzione non comporta gravi limitazioni, infatti gli spostamenti minori del picco sono quelli in cui il sistema sta reagendo ancora in campo elastico e trovare una soluzione tale significherebbe avere usato un sistema di isolamento inappropriato.
- Per fare sì che il metodo equivalente lineare predica con più verosimiglianza i risultati si applica un coefficiente correttivo  $\beta\left(\frac{u}{u_y}\right)$  al coefficiente di duttilità  $\frac{u}{u_y}$  così da modificare lo smorzamento equivalente.
- Modificare  $\xi_{eq}$  significa però implicitamente violare la conservazione dell'energia che sta alla base del metodo lineare equivalente. Tuttavia dal momento che l'uguaglianza energetica è solo un mezzo per raggiungere l'obiettivo che fondamentalmente è conoscere lo spostamento massimo, violare tale principio per migliorare la soluzione risulta comunque un approccio valido.
- La correzione che si apporta allo smorzamento equivalente è mirata a correggere maggiormente le soluzioni corrispondenti a periodi di interesse per strutture isolate che si aggirano intorno ai 2s. Considerare soluzioni con periodi molto lontano da quello target ( $T < 1.5s$  o  $T > 3.5s$ ) comporta avere un metodo che non solo risulta inefficace ma a volte anche dannoso.
- L'indice di bontà IB è un fattore che permette di eseguire una cernita preliminare in un database di isolatori lead rubber in base a diverse caratteristiche, così da poter focalizzare l'attenzione in fase progettuale solo su un numero ridotto di dispositivi idonei alla situazione.
- Dopo numerosi test il metodo lineare equivalente per un sistema dotato di LRB mostra che si possono raggiungere delle soluzioni con errori massimi del 15% sugli spostamenti e del 10% sulle forze. Riducendo il database è possibile migliorare ulteriormente la soluzione.
- Il sistema FPS considerato è a piatti concavi in acciaio lucidato con coefficienti di attrito massimi del 3%. Per tale sistema si nota che la massa è un'invariante per quanto riguarda l'aspetto sismico, continua tuttavia a giocare un ruolo fondamentale nell'analisi statica, dal momento che ogni isolatore può sopportare un certo carico assiale.
- Per il sistema di soli FPS viene applicato un coefficiente correttivo  $\beta\left(\frac{u}{u_y}; \mu\right)$  funzione del rapporto di duttilità stesso e del coefficiente di attrito al rapporto di duttilità  $\frac{u}{u_y}$  al fine di migliorare l'accuratezza dei risultati. In questo caso si riescono a

## CONCLUSIONI

trovare soluzione con errori percentuali massimi del 5% sugli spostamenti e del 3% sulle forze.

- Nel sistema FPS+FVD viene considerato solo un indice di non linearità  $\alpha = 0.2$ . Questo approccio è dettato dal fatto che avere valori di  $\alpha$  maggiori implicherebbe picchi di forza maggiori trasmessi dei damper alla struttura con un progressivo e sempre più accentuato annullamento dei benefici indotti dall'isolamento. In aggiunta valori simili vengono adottati molto frequentemente nella pratica corrente.
- Nel sistema FPS+FVD la massa non è più un'invariante, in quanto rientra nella definizione del coefficiente di smorzamento equivalente viscoso addizionale  $\xi_{sd}$ .
- Il parametro  $\gamma = \frac{C_\alpha}{M}$  viene individuato come un buon indicatore di quanto il sistema smorzante sia commisurato alla struttura. Valori tendenti a zero suggerirebbero che i damper adottati non sarebbero in grado di fornire tutta la dissipazione necessaria. Al contrario valori più alti (0.6 – 0.7) indicherebbero un sistema con damper troppo grandi rispetto alle necessità.
- Si nota che vi è uno stretto legame tra questo coefficiente e  $\xi_{sd}$ , tanto che per avere valori di smorzamento intorno al 60 – 70% (valori massimi per questi dispositivi) si deve limitare il rapporto  $\frac{C_\alpha}{M}$  a 0.1.
- Anche per il sistema FPS+FVD viene applicato un fattore  $\beta_{sd}$  che questa volta moltiplica l'intero coefficiente di smorzamento equivalente viscoso  $\xi_{sd}$  ed è funzione della pulsazione  $\omega$ .
- Affinché il metodo di linearizzazione equivalente con sistema FPS+FVD fornisca risultati verosimili (errore % minore del 15 – 20%) ed a favore di sicurezza devono essere soddisfatte due ipotesi:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{C_\alpha}{M} < 0.1 \\ 1.75 < \omega < 3 \end{cases}$$

### 4.2 Analisi lineare time history

- In questo approccio vengono usati come dati i risultati in termini di proprietà equivalenti ( $K_{eq}, \xi_{eq}$ ) calcolati con il metodo spettrale così da avere ad ogni passo temporale una matrice dei coefficienti indipendente dallo spostamento, velocità e accelerazione.
- Il metodo scelto per la risoluzione dell'equazione di moto dal passo è quella dell'accelerazione lineare. Questo metodo risulta condizionatamente stabile e di solito nella pratica si usano passi temporali nell'ordine di  $\frac{1}{10} \div \frac{1}{20} T_{min}$  e dal momento che strutture isolate la variabilità del periodo è compresa tra 1s e 4s, si sceglie un passo temporale pari a 0.01s
- Al fine di valutare la congruenza tra il segnale di output del metodo e quello target del metodo FNA, si adottano due coefficienti:  $R_{xy}$  è il coefficiente di correlazione incrociata e misura quanto sono sfasati i punti di nullo dei segnali; l'altro è  $\chi$  che

## CONCLUSIONI

dipende anch'esso dalla sfasatura tra i segnali ma racchiude al suo interno anche informazioni sull'ampiezza delle oscillazioni.

- Utilizzando il metodo time history lineare la soluzione fornita sarà una funzione temporale dello spostamento. Tale risultato, preso singolarmente, non va mai considerato come rappresentativo del problema. Per avere valori di output verosimili è sempre necessario mediare con i risultati di altre time history le quantità di cui si desidera la soluzione.
- Questo metodo si nota che riesce a cogliere abbastanza accuratamente i picchi, mentre risulta più impreciso nelle piccole oscillazioni che compongono il rumore del segnale.
- Si può notare come sussista una relazione tra i parametri di congruenza e le proprietà equivalenti. Al fine di trovare delle funzioni che note le proprietà equivalenti forniscano una stima verosimile dei fattori  $R_{xy}$  e  $\chi$  si decide di utilizzare come variabile indipendente lo smorzamento equivalente. Ciò è dettato dal fatto che in primo luogo le due quantità equivalenti sono dipendenti, e quindi ne basta una per descrivere il fenomeno in modo univoco ed in secondo luogo lo smorzamento si presta meglio in quanto è un parametro espresso in percentuale e non un valore assoluto come la rigidità.
- Dai test svolti si nota che maggiore è il coefficiente di smorzamento equivalente, peggiore sarà la congruenza tra i due segnali. Per ogni sistema di isolamento vengono studiate delle funzioni che predicano il valore di  $R_{xy}$  e  $\chi$  al variare di  $\xi_{eq}$  ed eventualmente altri parametri propri di ogni sistema.

### 4.3 Martellamento

- Vengono studiati diversi metodi per predire verosimilmente l'apertura minima da lasciare tra due strutture per evitare che si verifichi la collisione. I tre metodi analizzati sono via via più semplici e di veloce applicazione ma al contempo meno precisi.
- Il metodo delta è quello più rigoroso, basato sulla valutazione dello spostamento relativo tra le strutture in ogni istante temporale e non è influenzato dal grado di correlazione tra i segnali di input.
- Il metodo SRSS è meno preciso del precedente poiché considera solo i massimi assoluti dei due segnali senza valutare se si verificano nel medesimo istante temporale o sfasati. Tale metodo è applicabile solo se i segnali usati come dato iniziale sono incorrelati, infatti quando raggiungono gradi di correlazione elevati ( $R_{xy} > 0.6$ ) il metodo fornisce risultati errati in media del 50%.
- I risultati di entrambi i precedenti metodi essendo basati su dati di input che sono time history, non vanno mai considerati singolarmente, ma sempre nell'ottica di una media tra più test, come specificano anche le norme.
- L'ultimo metodo ha come dati di input non più time history, ma gli spostamenti massimi delle due strutture calcolati mediante un'analisi spettrale che vengono

## CONCLUSIONI

combinati mediante la formula SRSS. Il metodo è molto semplice e veloce da applicare ma che più impreciso. Tuttavia le norme consentono che corredandolo di un opportuno coefficiente di sicurezza è può essere usato come metodo di analisi vero e proprio.

## 5. APPENDICI

## 5.1 Appendice A

In questa appendice vengono riportati i risultati, in termini di spostamento massimo, dei test svolti nell'ambito dell'analisi spettrale per un sistema in parallelo FPS + FVD. Di seguito ogni tabella sarà associata ad un set di tre valori: ( $R_{eq}$ ;  $\mu$ ;  $M$ ) ed all'interno verranno elencati i risultati corrispondenti a 6 valori del coefficiente di smorzamento ( $C_\alpha = 0 - 10 - 30 - 50 - 70 - 100$ ). Gli spostamenti sono espressi in metri, i coefficienti di smorzamento equivalenti  $\xi$  e l'errore in percentuale, il periodo in secondi e  $\frac{C_\alpha}{M}$  in  $\left[\frac{KN\left(\frac{s}{m}\right)^\alpha}{ton}\right]$ .

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500</math>; <math>\mu = 1\%</math></b>								
$C_\alpha$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_\alpha}{M}$	$T$	err %
0	0,1730	0,1829	8,16	0,00	8,16	0,000	2,95	5,45
10	0,1470	0,1637	7,95	3,47	11,42	0,011	2,93	10,23
30	0,1164	0,1348	7,25	11,99	19,24	0,033	2,89	13,63
50	0,0959	0,1130	6,79	22,67	29,45	0,056	2,84	15,16
70	0,0827	0,0968	6,60	35,41	42,01	0,078	2,80	14,54
100	0,0683	0,0796	6,63	57,92	64,55	0,111	2,74	14,15

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800</math>; <math>\mu = 1\%</math></b>								
$C_\alpha$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_\alpha}{M}$	$T$	err %
0	0,1682	0,1775	8,98	0,00	8,98	0,000	3,09	5,24
10	0,1435	0,1591	8,67	3,72	12,38	0,011	3,07	9,83
30	0,1146	0,1308	7,90	12,83	20,74	0,033	3,02	12,38
50	0,0949	0,1095	7,45	24,24	31,69	0,056	2,97	13,36
70	0,0825	0,0937	7,29	37,81	45,10	0,078	2,92	11,99
100	0,0686	0,0771	7,37	61,66	69,03	0,111	2,85	11,04

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100</math>; <math>\mu = 1\%</math></b>								
$C_\alpha$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_\alpha}{M}$	$T$	err %
0	0,1649	0,1728	9,74	0,00	9,74	0,000	3,22	4,57
10	0,1414	0,1551	9,35	3,95	13,30	0,011	3,19	8,83
30	0,1129	0,1273	8,54	13,63	22,17	0,033	3,14	11,31
50	0,0943	0,1065	8,09	25,72	33,81	0,056	3,08	11,45
70	0,0822	0,0911	7,97	40,04	48,01	0,078	3,02	9,80
100	0,0688	0,0750	8,10	65,09	73,19	0,111	2,94	8,31

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1608	0,1688	10,46	0,00	10,46	0,000	3,34	4,73
10	0,1402	0,1515	10,00	4,17	14,17	0,011	3,31	7,47
30	0,1121	0,1242	9,16	14,39	23,54	0,033	3,25	9,73
50	0,0936	0,1038	8,73	27,11	35,84	0,056	3,18	9,85
70	0,0817	0,0889	8,63	42,12	50,75	0,078	3,12	8,06
100	0,0688	0,0732	8,81	68,26	77,07	0,111	3,03	6,06

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1596	0,1652	11,14	0,00	11,14	0,000	3,45	3,40
10	0,1397	0,1483	10,63	4,38	15,01	0,011	3,42	5,81
30	0,1118	0,1214	9,76	15,10	24,86	0,033	3,35	7,92
50	0,0929	0,1015	9,36	28,41	37,76	0,056	3,27	8,44
70	0,0813	0,0869	9,29	44,06	53,34	0,078	3,20	6,41
100	0,0689	0,0717	9,51	71,19	80,70	0,111	3,10	3,87

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1156	0,1231	24,04	0,00	24,04	0,000	2,65	6,11
10	0,1045	0,1157	23,76	4,12	27,88	0,011	2,63	9,68
30	0,0886	0,1028	23,31	13,33	36,64	0,033	2,58	13,81
50	0,0777	0,0921	23,07	23,83	46,90	0,056	2,53	15,67
70	0,0690	0,0832	23,01	35,54	58,55	0,078	2,48	17,09
100	0,0593	0,0698	23,28	56,54	79,83	0,111	2,40	14,98

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1137	0,1199	25,63	0,00	25,63	0,000	2,74	5,16
10	0,1026	0,1126	25,34	4,35	29,69	0,011	2,72	8,89
30	0,0880	0,1000	24,92	14,06	38,99	0,033	2,66	11,99
50	0,0774	0,0896	24,72	25,09	49,81	0,056	2,61	13,68
70	0,0682	0,0810	24,71	37,35	62,06	0,078	2,56	15,82
100	0,0585	0,0708	24,93	57,80	82,73	0,111	2,48	17,43



APPENDICI

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1119	0,1171	27,08	0,00	27,08	0,000	2,83	4,47
10	0,1019	0,1100	26,81	4,56	31,37	0,011	2,80	7,43
30	0,0876	0,0977	26,42	14,72	41,14	0,033	2,74	10,31
50	0,0773	0,0875	26,25	26,22	52,47	0,056	2,68	11,66
70	0,0685	0,0792	26,28	38,96	65,23	0,078	2,62	13,47
100	0,0590	0,0693	26,55	60,12	86,67	0,111	2,54	14,82

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1104	0,1148	28,43	0,00	28,43	0,000	2,90	3,80
10	0,1008	0,1078	28,16	4,75	32,91	0,011	2,87	6,42
30	0,0871	0,0957	27,80	15,32	43,12	0,033	2,80	8,94
50	0,0772	0,0857	27,67	27,24	54,91	0,056	2,74	10,00
70	0,0687	0,0776	27,73	40,40	68,13	0,078	2,67	11,46
100	0,0595	0,0680	28,05	62,18	90,22	0,111	2,59	12,57

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1096	0,1127	29,67	0,00	29,67	0,000	2,97	2,73
10	0,0999	0,1058	29,42	4,93	34,34	0,011	2,93	5,57
30	0,0865	0,0939	29,09	15,86	44,95	0,033	2,86	7,81
50	0,0770	0,0842	28,99	28,15	57,15	0,056	2,79	8,57
70	0,0688	0,0762	29,08	41,69	70,77	0,078	2,72	9,75
100	0,0600	0,0669	29,43	64,02	93,45	0,111	2,63	10,23

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0883	0,0929	40,46	0,00	40,46	0,000	2,34	4,89
10	0,0825	0,0879	39,98	4,53	44,51	0,011	2,31	6,09
30	0,0726	0,0786	39,24	14,50	53,74	0,033	2,25	7,55
50	0,0641	0,0702	38,81	25,75	64,55	0,056	2,18	8,65
70	0,0582	0,0628	38,66	38,33	76,99	0,078	2,12	7,28
100	0,0509	0,0533	38,87	59,75	98,61	0,111	2,02	4,51

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0884	0,0943	42,21	0,00	42,21	0,000	2,42	6,31
10	0,0828	0,0892	41,72	4,62	46,35	0,011	2,39	7,21
30	0,0729	0,0798	40,97	14,76	55,73	0,033	2,32	8,60
50	0,0648	0,0713	40,51	26,18	66,69	0,056	2,25	9,07
70	0,0590	0,0638	40,33	38,92	79,25	0,078	2,18	7,51
100	0,0516	0,0542	40,49	60,53	101,02	0,111	2,08	4,80

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0880	0,0951	43,67	0,00	43,67	0,000	2,49	7,43
10	0,0827	0,0905	43,24	4,70	47,94	0,011	2,46	8,57
30	0,0731	0,0809	42,47	15,00	57,47	0,033	2,39	9,60
50	0,0653	0,0723	42,00	26,56	68,55	0,056	2,31	9,62
70	0,0596	0,0647	41,79	39,42	81,22	0,078	2,24	7,75
100	0,0523	0,0549	41,91	61,21	103,12	0,111	2,13	4,79

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0875	0,0940	44,78	0,00	44,78	0,000	2,54	6,91
10	0,0825	0,0901	44,43	4,81	49,25	0,011	2,51	8,43
30	0,0732	0,0819	43,80	15,20	59,00	0,033	2,44	10,58
50	0,0657	0,0732	43,31	26,89	70,19	0,056	2,37	10,23
70	0,0602	0,0654	43,08	39,87	82,96	0,078	2,29	8,08
100	0,0531	0,0556	43,16	61,81	104,98	0,111	2,18	4,59

<b><math>M = 100\% = 900 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0870	0,0931	45,77	0,00	45,77	0,000	2,58	6,55
10	0,0821	0,0892	45,44	4,93	50,37	0,011	2,55	7,88
30	0,0733	0,0821	44,92	15,46	60,37	0,033	2,49	10,66
50	0,0661	0,0740	44,47	27,18	71,65	0,056	2,42	10,63
70	0,0609	0,0662	44,23	40,27	84,50	0,078	2,34	8,02
100	0,0537	0,0562	44,27	62,35	106,62	0,111	2,22	4,44

APPENDICI

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1730	0,1829	8,16	0,00	8,16	0,000	2,95	5,45
10	0,0959	0,1130	6,79	22,67	29,45	0,056	2,84	15,18
30	0,0530	0,0619	7,03	102,82	109,85	0,167	2,65	14,45
50	0,0372	0,0441	8,10	213,12	221,22	0,278	2,51	15,61
70	0,0287	0,0330	9,50	356,36	365,86	0,389	2,37	13,01
100	0,0207	0,0230	11,88	626,36	638,24	0,556	2,17	9,97

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1682	0,1775	8,98	0,00	8,98	0,000	3,09	5,24
10	0,0949	0,1095	7,45	24,24	31,69	0,056	2,97	13,34
30	0,0536	0,0601	7,84	108,92	116,76	0,167	2,75	10,89
50	0,0378	0,0430	9,05	224,00	233,05	0,278	2,59	12,17
70	0,0291	0,0341	10,26	360,42	370,68	0,389	2,46	14,61
100	0,0209	0,0236	12,78	632,14	644,92	0,556	2,25	11,52

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1649	0,1728	9,74	0,00	9,74	0,000	3,22	4,57
10	0,0944	0,1065	8,09	25,72	33,81	0,056	3,08	11,40
30	0,0541	0,0586	8,64	114,44	123,08	0,167	2,83	7,68
50	0,0383	0,0421	9,98	233,67	243,65	0,278	2,65	9,02
70	0,0294	0,0337	11,24	372,51	383,75	0,389	2,52	12,57
100	0,0211	0,0242	13,64	637,37	651,00	0,556	2,32	12,93

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1608	0,1688	10,46	0,00	10,46	0,000	3,34	4,73
10	0,0936	0,1038	8,73	27,11	35,84	0,056	3,18	9,88
30	0,0547	0,0573	9,43	119,45	128,88	0,167	2,90	4,59
50	0,0388	0,0413	10,88	242,32	253,19	0,278	2,71	6,15
70	0,0297	0,0331	12,23	384,59	396,82	0,389	2,57	10,14
100	0,0213	0,0248	14,46	642,12	656,58	0,556	2,38	14,10

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 1\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1596	0,1652	11,14	0,00	11,14	0,000	3,45	3,40
10	0,0930	0,1015	9,36	28,41	37,76	0,056	3,27	8,35
30	0,0553	0,0562	10,20	124,04	134,24	0,167	2,97	1,61
50	0,0392	0,0406	11,76	250,09	261,84	0,278	2,76	3,56
70	0,0301	0,0326	13,19	395,35	408,54	0,389	2,62	7,86
100	0,0215	0,0253	15,25	646,48	661,74	0,556	2,43	14,99

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1156	0,1231	24,04	0,00	24,04	0,000	2,65	6,11
10	0,0771	0,0921	23,07	23,83	46,90	0,056	2,53	16,24
30	0,0466	0,0533	24,50	99,30	123,81	0,167	2,26	12,46
50	0,0331	0,0345	28,01	209,73	237,74	0,278	2,01	4,23
70	0,0259	0,0247	31,64	348,24	379,89	0,389	1,81	-5,19
100	0,0169	0,0166	36,45	600,51	636,96	0,556	1,57	-1,87

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1137	0,1199	25,63	0,00	25,63	0,000	2,74	5,16
10	0,0774	0,0896	24,72	25,09	49,81	0,056	2,61	13,68
30	0,0474	0,0545	26,09	100,75	126,84	0,167	2,33	13,03
50	0,0335	0,0353	29,58	211,84	241,41	0,278	2,07	5,10
70	0,0263	0,0251	33,21	350,82	384,02	0,389	1,85	-4,60
100	0,0171	0,0169	37,97	603,51	641,48	0,556	1,60	-1,18

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1119	0,1171	27,08	0,00	27,08	0,000	2,83	4,47
10	0,0773	0,0875	26,25	26,22	52,47	0,056	2,68	11,65
30	0,0482	0,0555	27,55	102,07	129,61	0,167	2,40	13,28
50	0,0339	0,0359	31,00	213,71	244,72	0,278	2,12	5,71
70	0,0266	0,0256	34,61	353,09	387,70	0,389	1,89	-4,04
100	0,0172	0,0171	39,32	606,12	645,43	0,556	1,63	-0,82

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1104	0,1148	28,43	0,00	28,43	0,000	2,90	3,80
10	0,0772	0,0857	27,67	27,24	54,91	0,056	2,74	10,00
30	0,0488	0,0565	28,90	103,26	132,15	0,167	2,47	13,58
50	0,0343	0,0365	32,31	215,40	247,71	0,278	2,17	5,99
70	0,0268	0,0259	35,89	355,10	390,99	0,389	1,92	-3,51
100	0,0174	0,0173	40,53	608,40	648,92	0,556	1,65	-0,54

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 2\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,1096	0,1127	29,67	0,00	29,67	0,000	2,97	2,73
10	0,0769	0,0842	28,99	28,15	57,15	0,056	2,79	8,57
30	0,0493	0,0559	30,29	105,72	136,01	0,167	2,51	11,69
50	0,0347	0,0370	33,52	216,92	250,44	0,278	2,21	6,10
70	0,0270	0,0262	37,06	356,90	393,96	0,389	1,96	-3,04
100	0,0175	0,0175	41,62	610,41	652,03	0,556	1,67	-0,31

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2500; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0883	0,0929	40,46	0,00	40,46	0,000	2,34	4,89
10	0,0641	0,0702	38,81	25,75	64,55	0,056	2,18	8,65
30	0,0418	0,0414	39,94	102,02	141,96	0,167	1,87	-0,89
50	0,0307	0,0270	43,02	208,87	251,89	0,278	1,62	-13,42
70	0,0232	0,0192	45,94	341,69	387,63	0,389	1,42	-21,10
100	0,0146	0,0127	49,28	583,31	632,59	0,556	1,19	-15,23

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 2800; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	err %
0	0,0884	0,0943	42,21	0,00	42,21	0,000	2,42	6,31
10	0,0648	0,0713	40,51	26,18	66,69	0,056	2,25	9,07
30	0,0425	0,0421	41,48	103,06	144,55	0,167	1,92	-1,00
50	0,0311	0,0274	44,40	210,23	254,64	0,278	1,65	-13,47
70	0,0235	0,0194	47,18	343,21	390,39	0,389	1,44	-21,03
100	0,0147	0,0128	50,32	584,87	635,20	0,556	1,21	-15,08

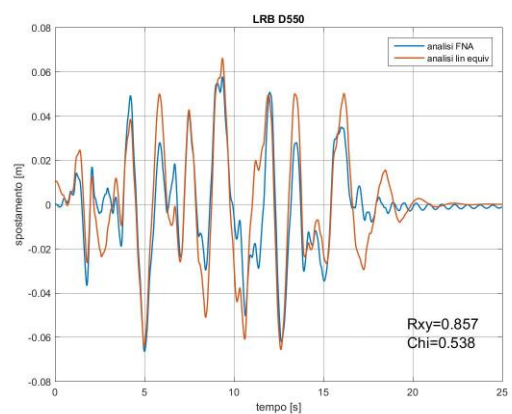
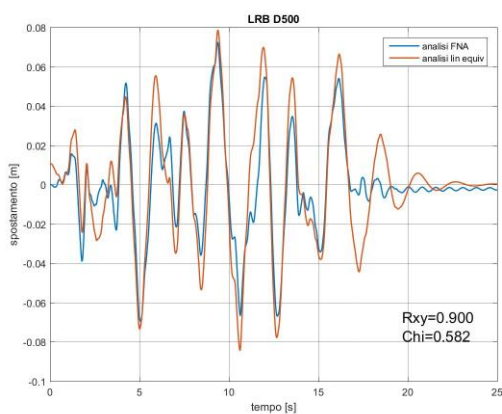
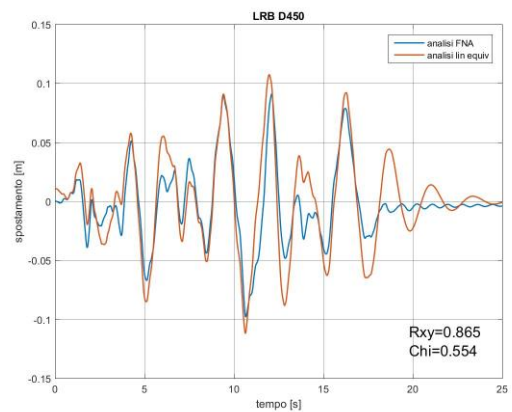
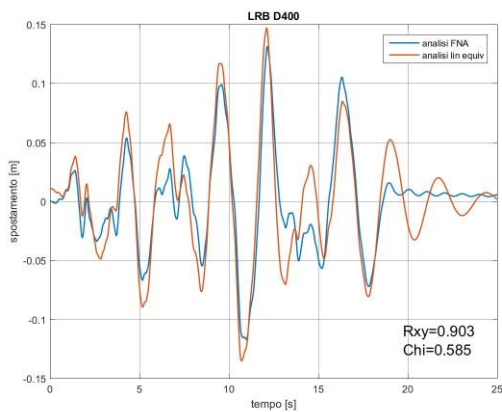
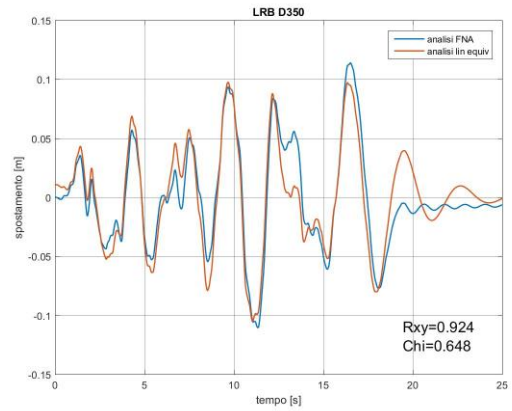
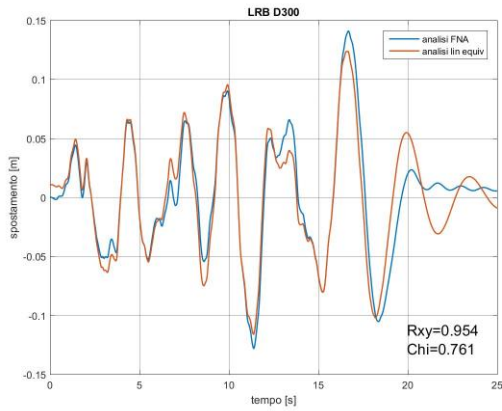
<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3100; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	$err \%$
<b>0</b>	0,0880	0,0951	43,67	0,00	43,67	0,000	2,49	7,43
<b>10</b>	0,0653	0,0723	42,00	26,56	68,55	0,056	2,31	9,61
<b>30</b>	0,0432	0,0427	42,83	103,97	146,80	0,167	1,96	-1,17
<b>50</b>	0,0315	0,0278	45,60	211,41	257,01	0,278	1,68	-13,47
<b>70</b>	0,0237	0,0196	48,24	344,50	392,74	0,389	1,46	-20,97
<b>100</b>	0,0149	0,0129	51,20	586,19	637,40	0,556	1,22	-15,04

<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3400; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	$err \%$
<b>0</b>	0,0875	0,0940	44,78	0,00	44,78	0,000	2,54	6,91
<b>10</b>	0,0657	0,0732	43,31	26,89	70,19	0,056	2,37	10,22
<b>30</b>	0,0437	0,0432	44,01	104,77	148,78	0,167	2,00	-1,29
<b>50</b>	0,0318	0,0281	46,66	212,43	259,09	0,278	1,70	-13,45
<b>70</b>	0,0239	0,0198	49,17	345,61	394,79	0,389	1,48	-20,88
<b>100</b>	0,0150	0,0130	51,96	587,32	639,29	0,556	1,23	-15,09

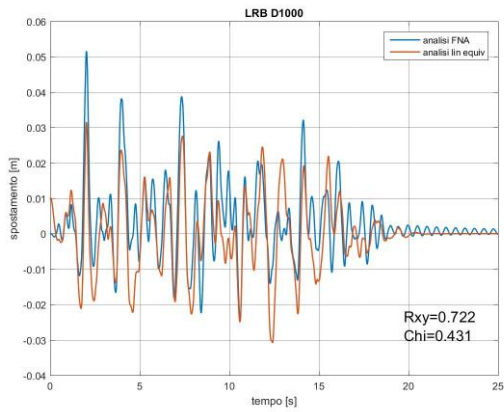
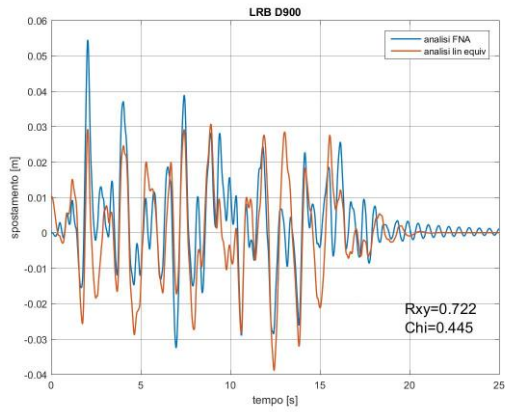
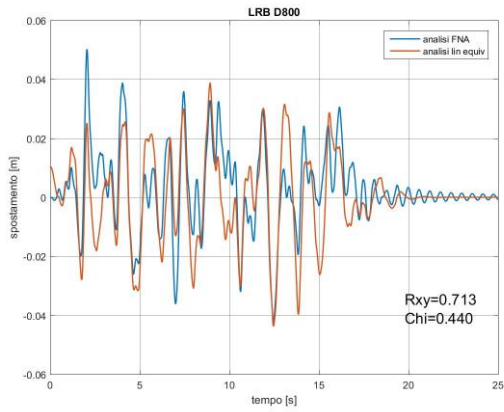
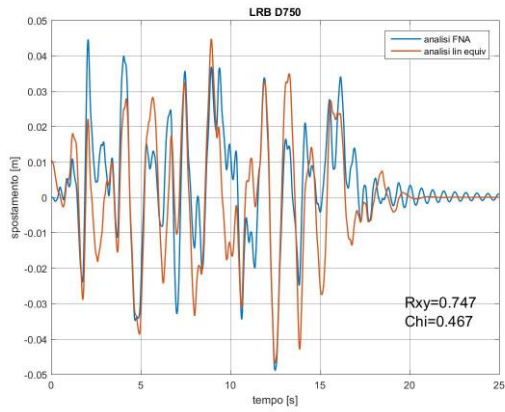
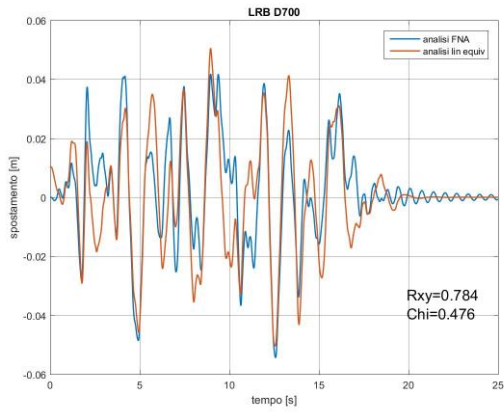
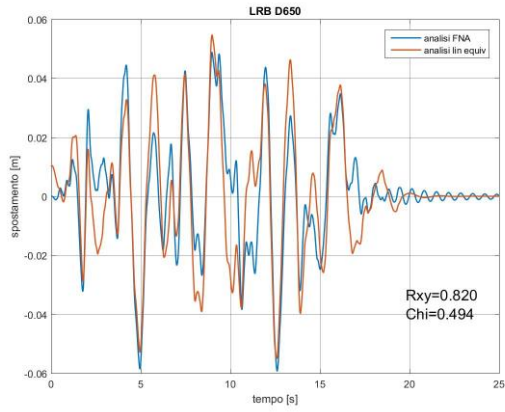
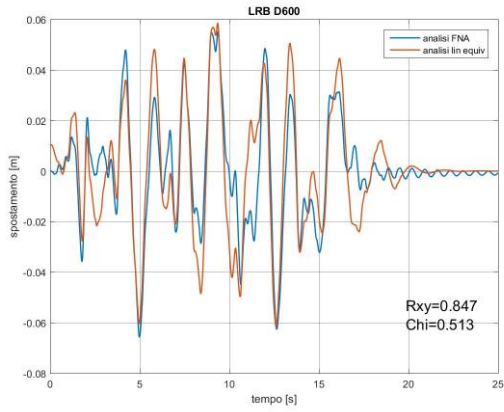
<b><math>M = 20\% = 180 \text{ ton}</math></b>								
<b><math>R_{eq} = 3700; \mu = 3\%</math></b>								
$C_a$	Analisi FNA	Analisi lin equiv	$\xi_0$	$\xi_{sd}$	$\xi$	$\frac{C_a}{M}$	$T$	$err \%$
<b>0</b>	0,0870	0,0931	45,77	0,00	45,77	0,000	2,58	6,55
<b>10</b>	0,0661	0,0740	44,47	27,18	71,65	0,056	2,42	10,63
<b>30</b>	0,0443	0,0436	45,07	105,47	150,54	0,167	2,03	-1,51
<b>50</b>	0,0322	0,0283	47,59	213,33	260,92	0,278	1,72	-13,55
<b>70</b>	0,0241	0,0199	49,99	346,59	396,57	0,389	1,49	-20,84
<b>100</b>	0,0151	0,0131	52,62	588,30	640,92	0,556	1,24	-15,14

## 5.2 Appendice B

In questa appendice sono riportati tutti i segnali in termini di spostamento che sono stati impigrati per tarare il modello lineare time history per il sistema LRB e FPS+FVD. Nella prima sezione di seguito sono riportate le time history lineari per diversi LRB soggetti allo stesso accelerogramma di input sismico.



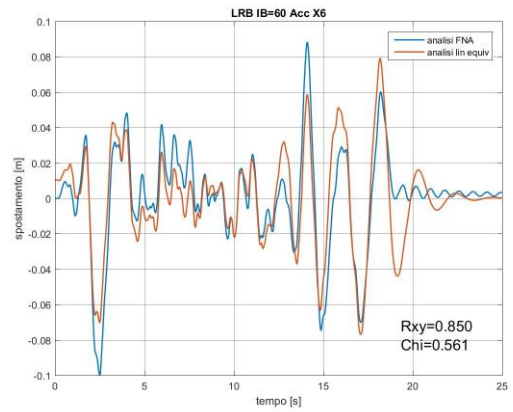
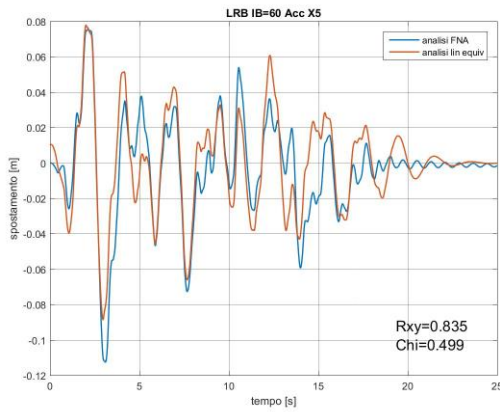
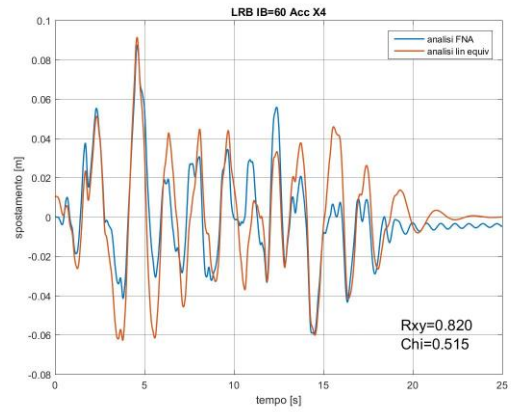
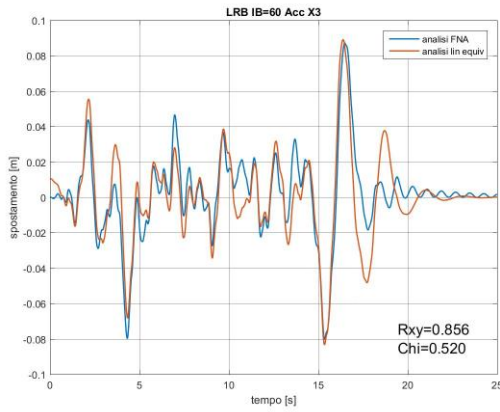
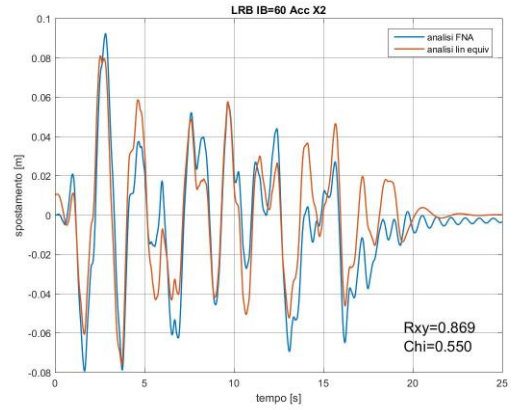
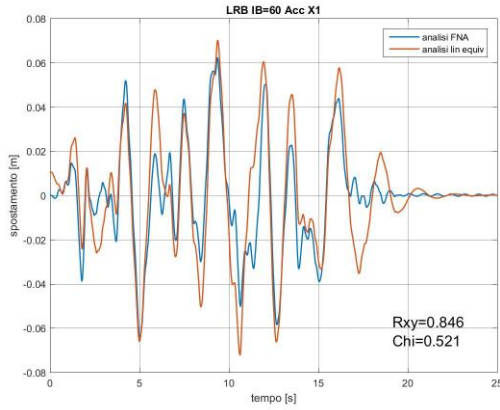
# APPENDICI



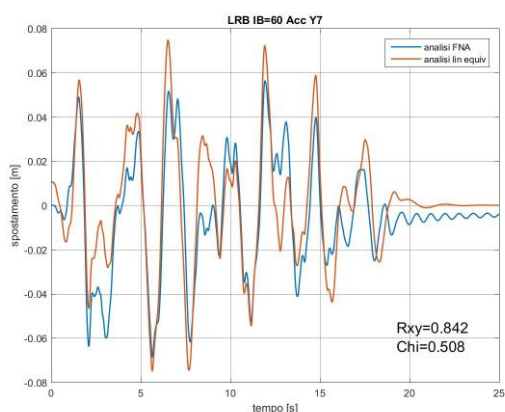
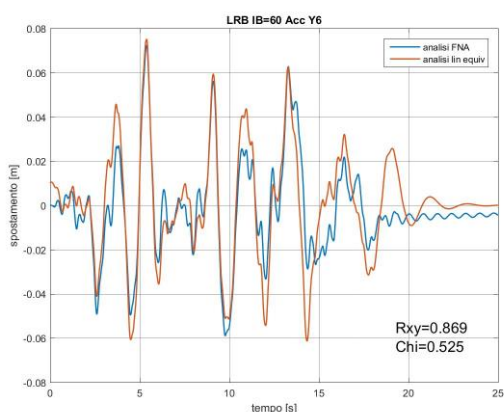
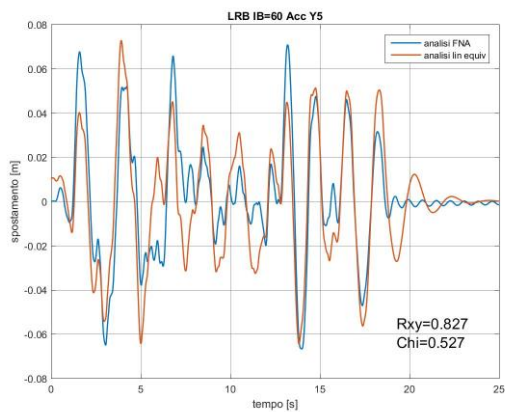
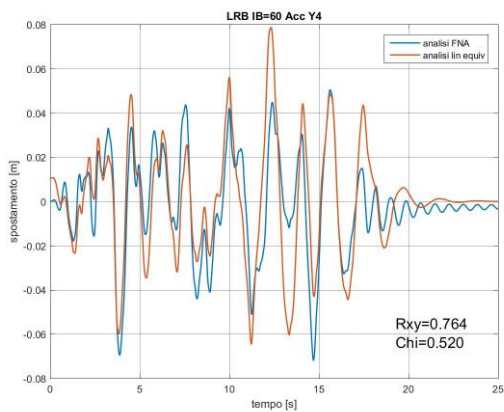
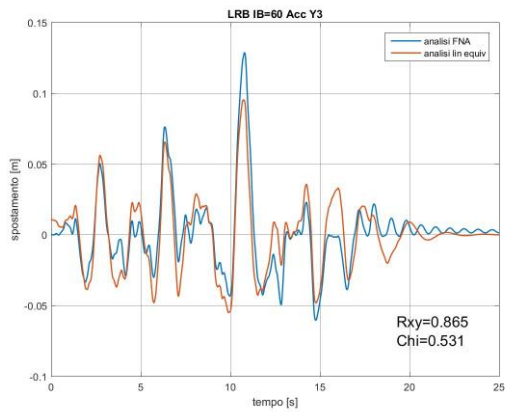
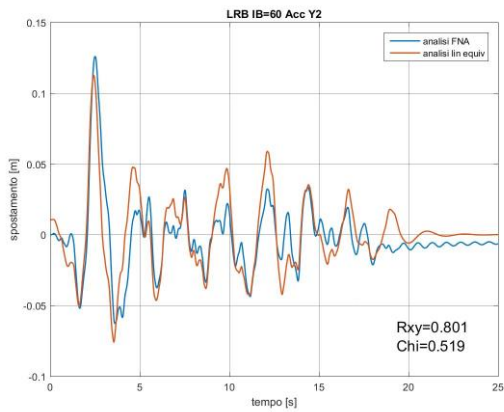
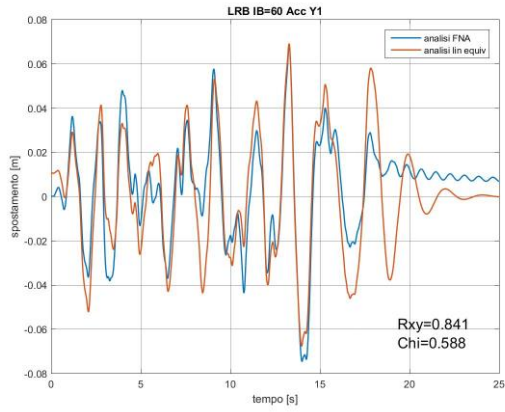
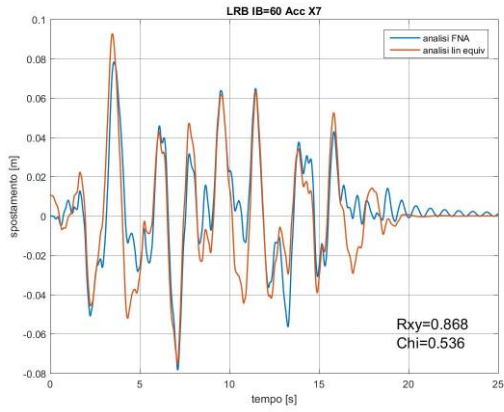


## APPENDICI

Nella seconda sezione vengono mostrate le time history lineari di un medesimo LRB con indice IB pari a 60 sollecitato con 14 diversi accelerogrammi

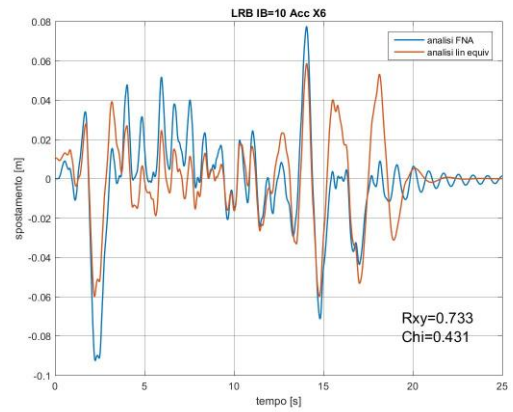
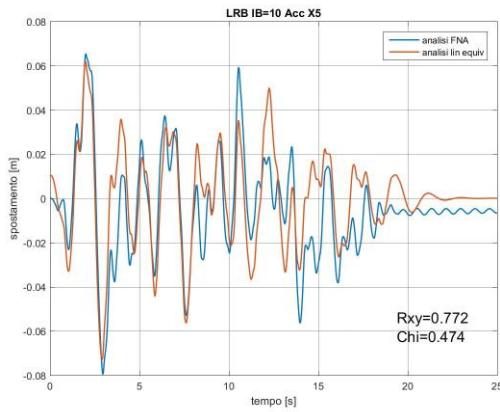
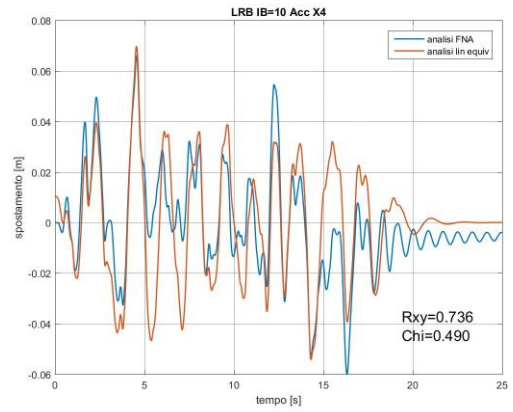
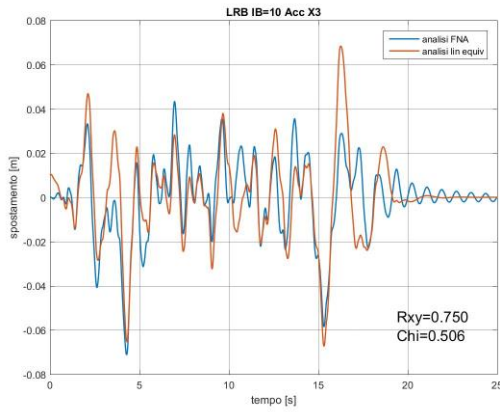
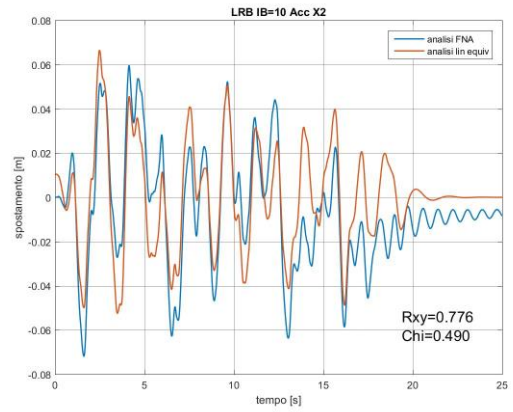
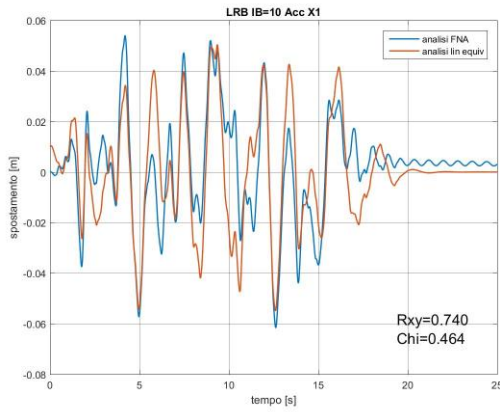


# APPENDICI

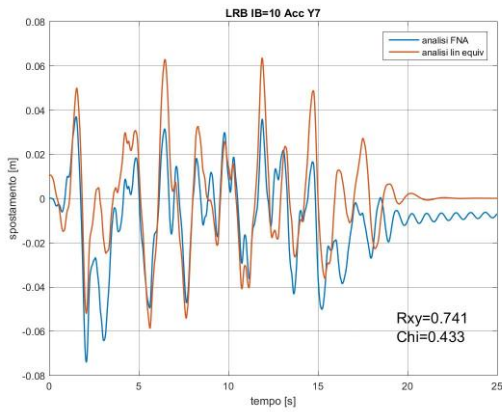
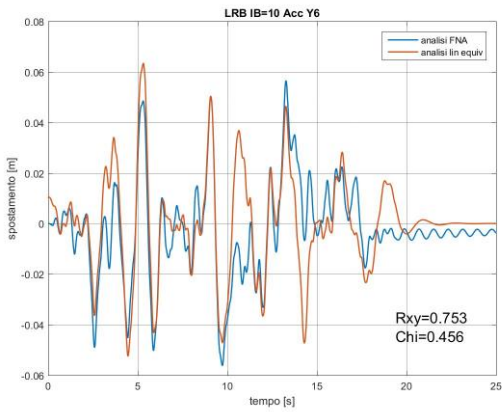
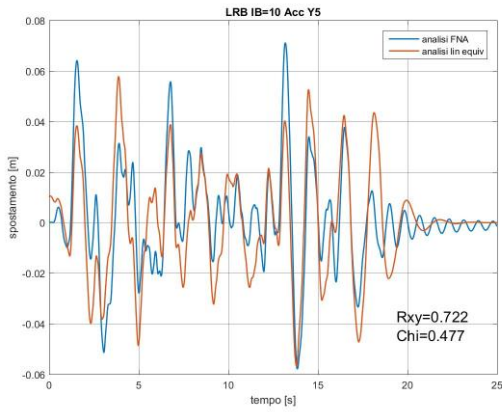
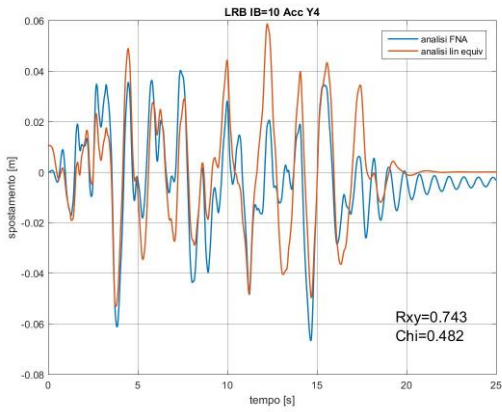
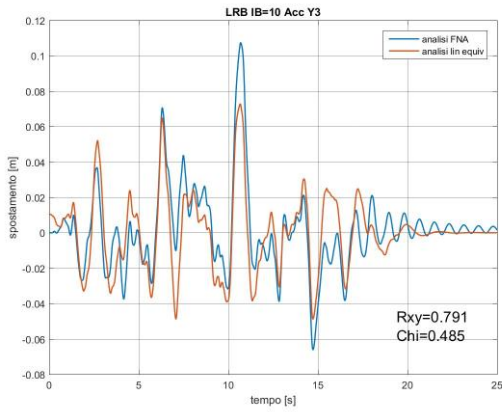
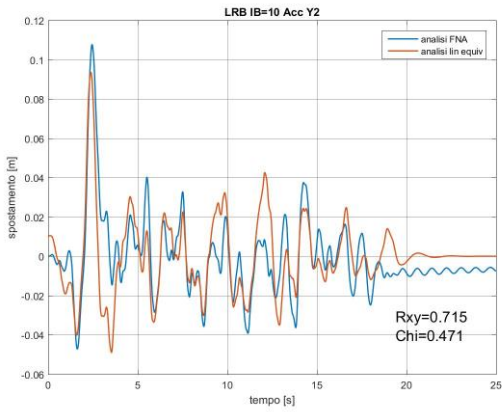
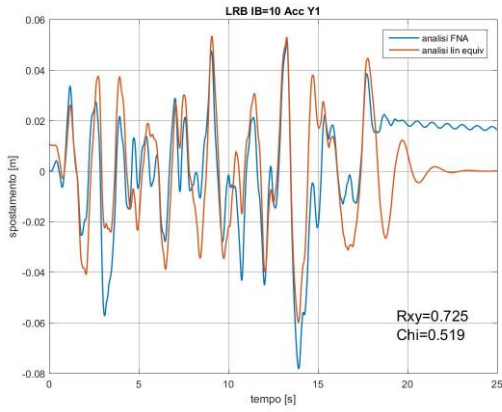
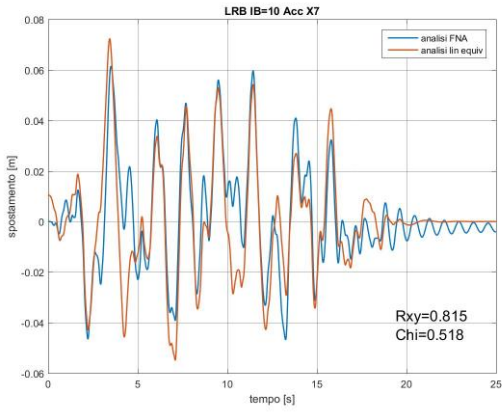


## APPENDICI

Nella terza sezione vengono, come in precedenza, sono riportate le funzioni tempo – spostamento di un medesimo LRB con indice IB pari a 10 sollecitato con 14 diversi accelerogrammi.

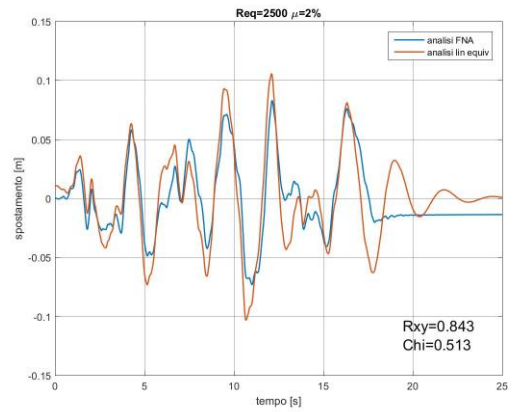
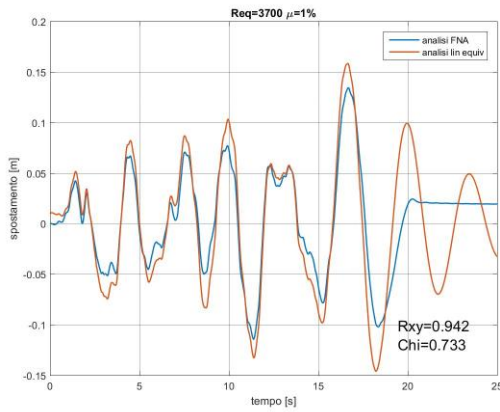
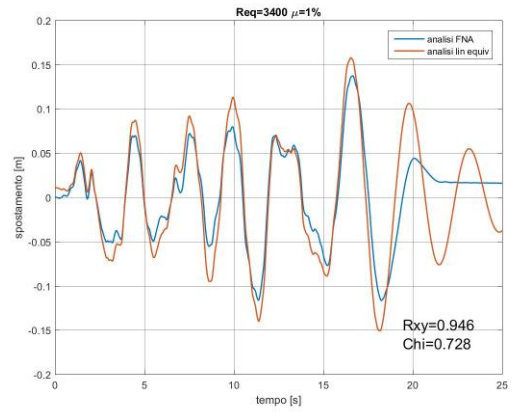
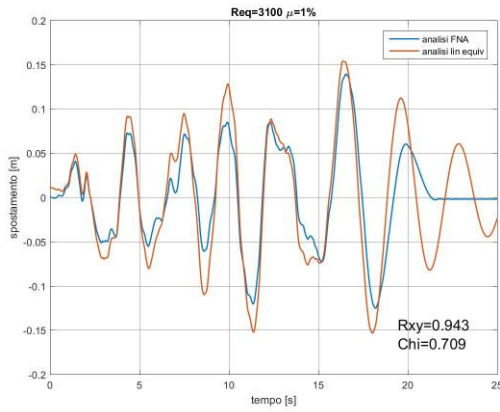
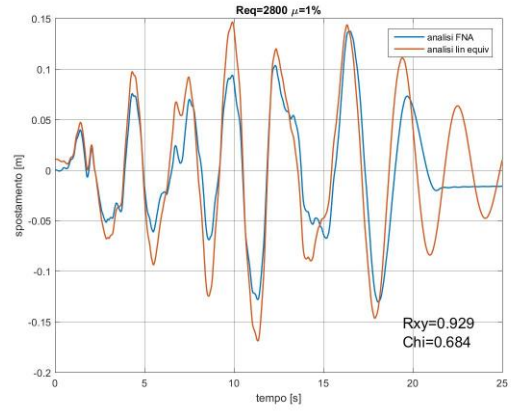
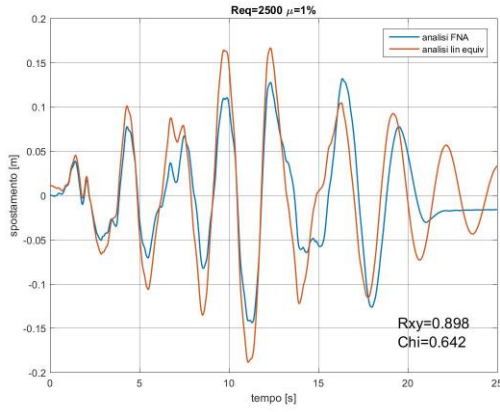


# APPENDICI

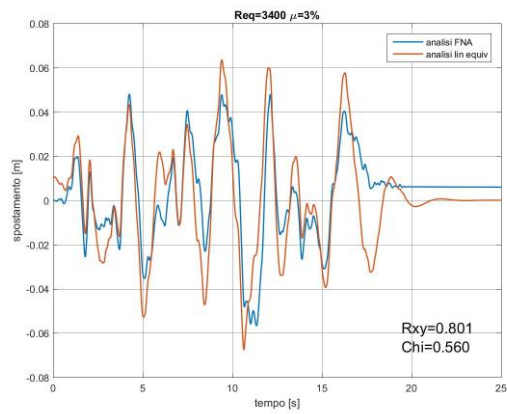
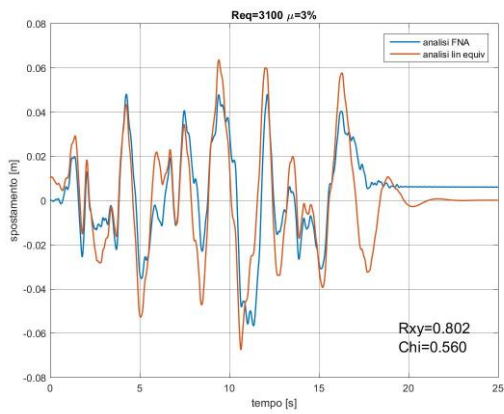
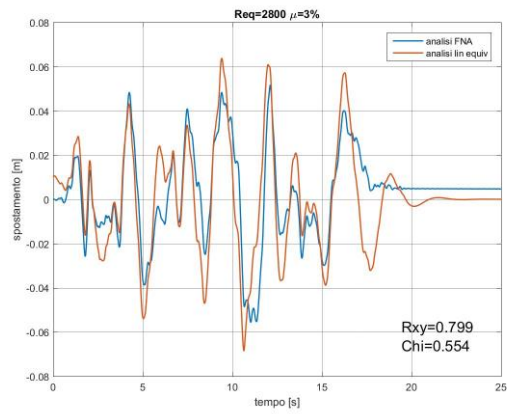
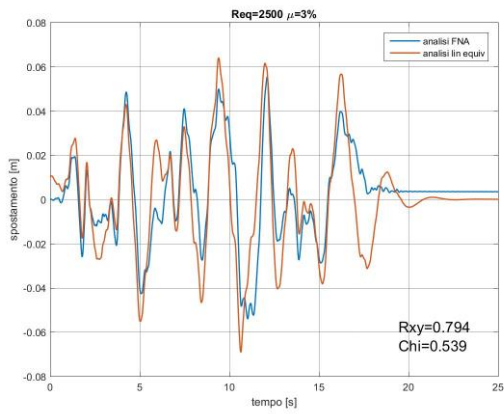
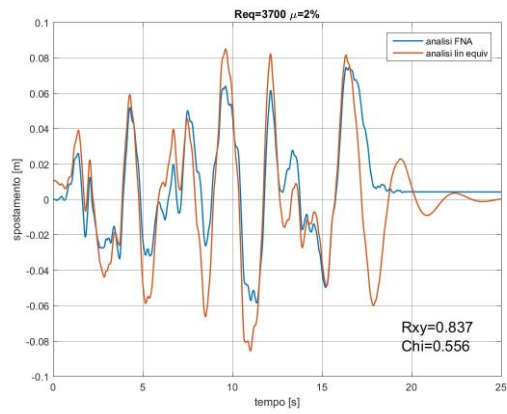
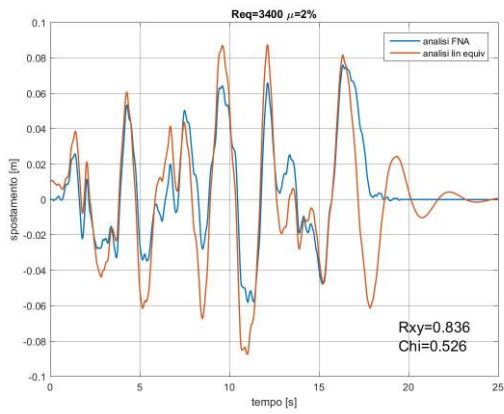
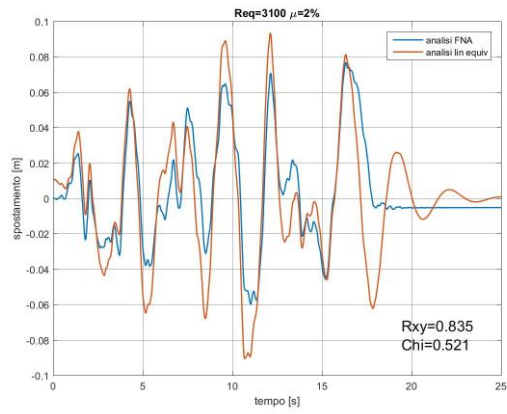
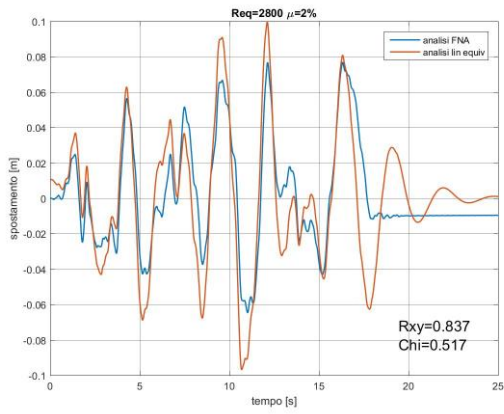


## APPENDICI

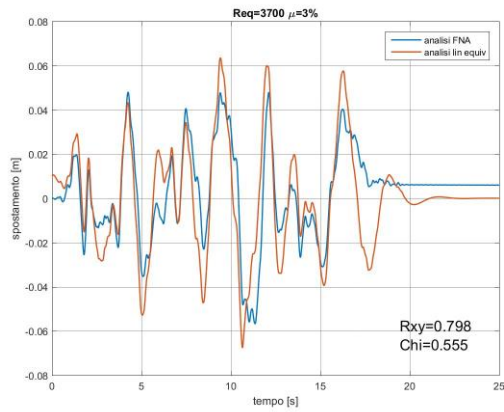
Dalla quarta sezione si passa al sistema FPS che viene prima studiato senza l'aggiunta di FVD. Di seguito le time history lineari per diversi FPS per lo stesso accelerogramma di input sismico



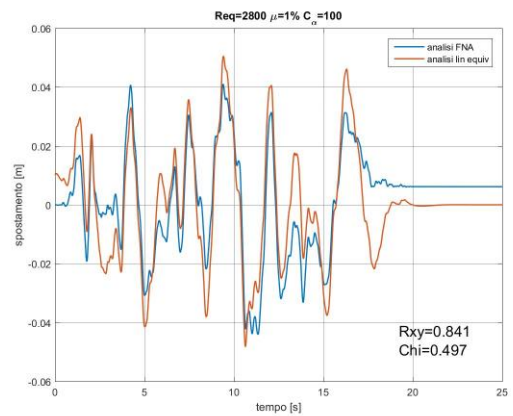
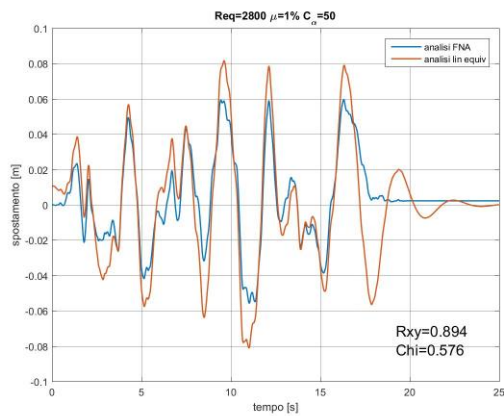
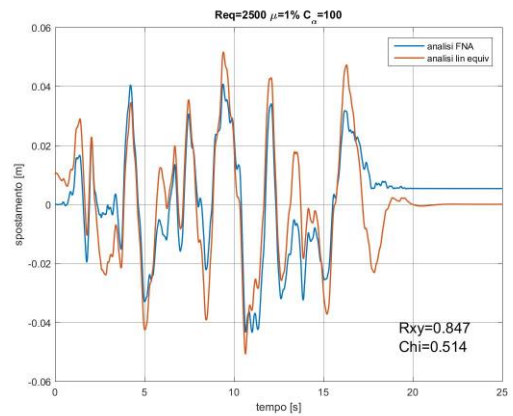
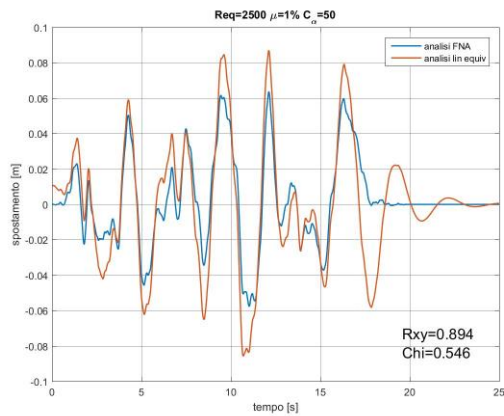
# APPENDICI



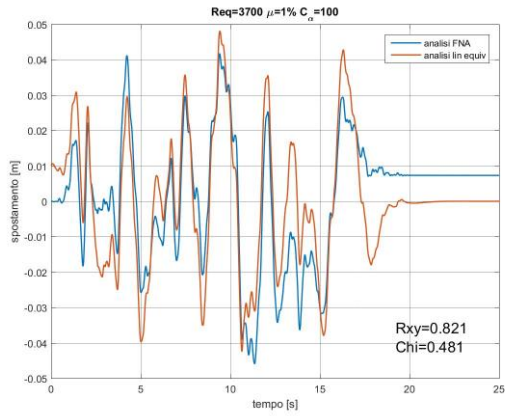
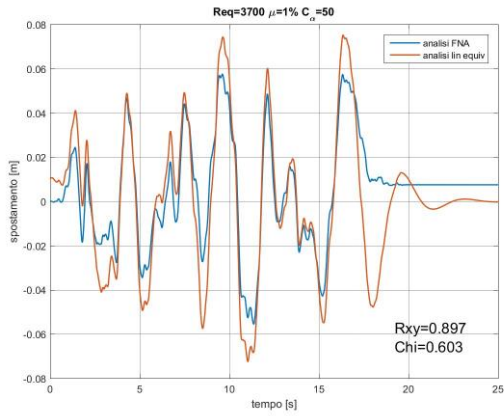
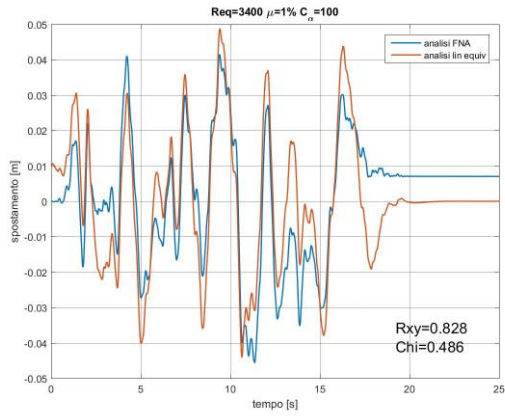
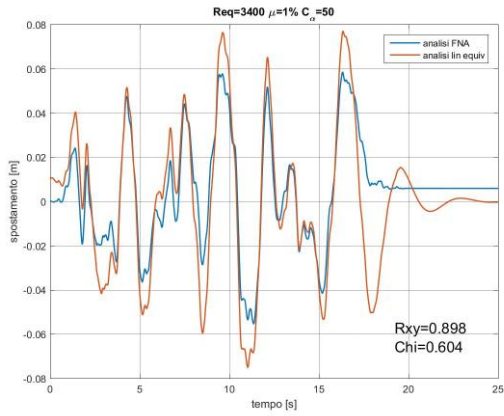
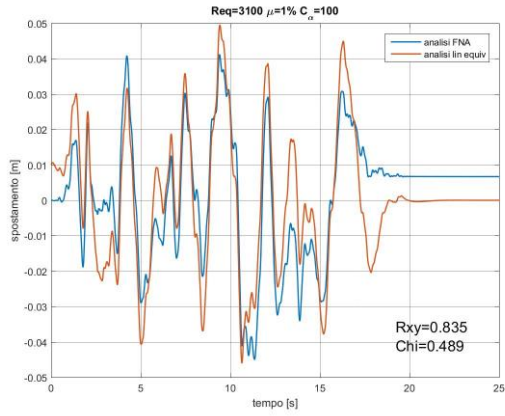
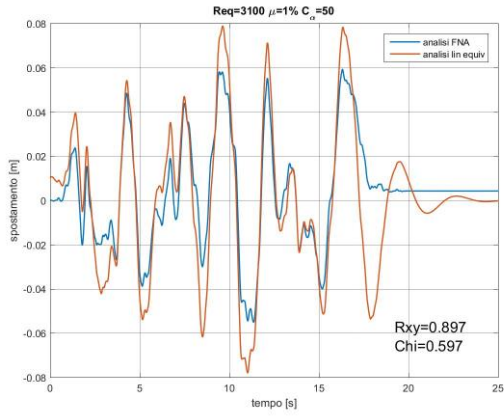
## APPENDICI



Mella quinta sezione si introducono anche gli smorzatori viscosi eseguendo delle prove per diverse coppie FPS e FVD mantenendo costante l'attrito  $\mu$  pari all' 1% e l'accelerogramma di input.



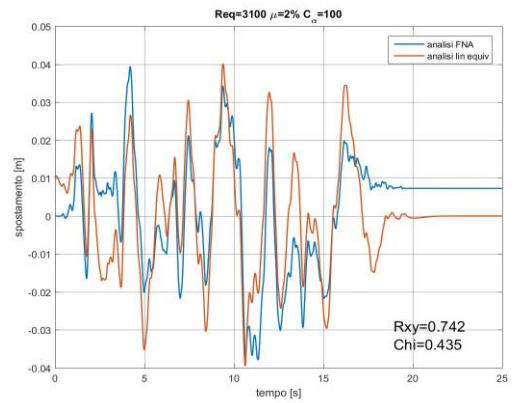
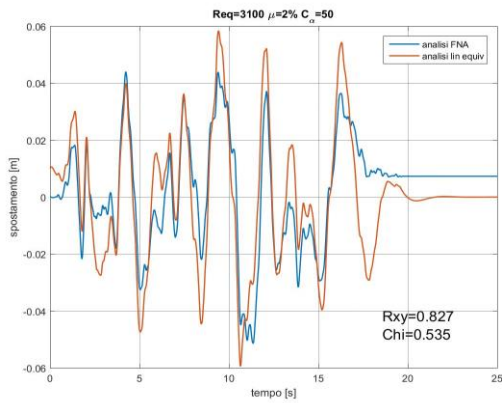
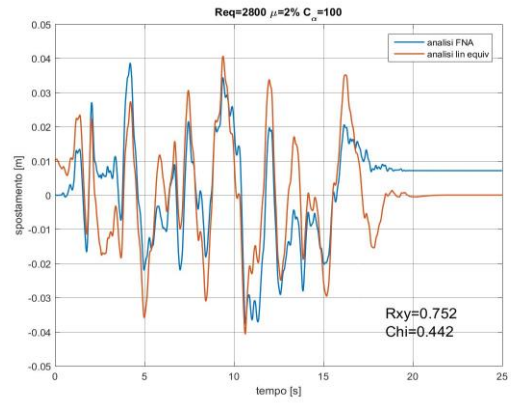
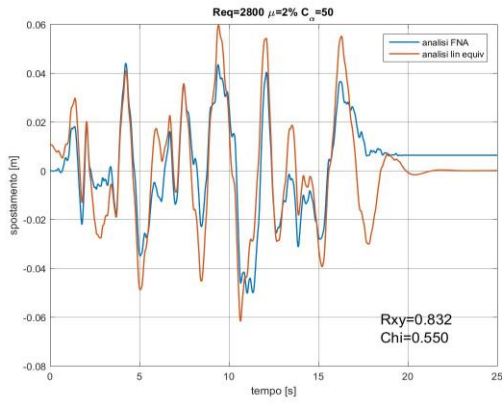
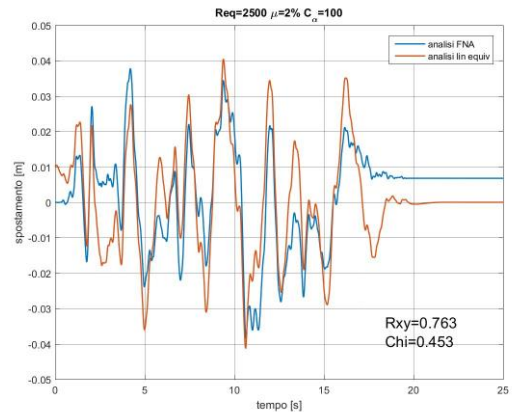
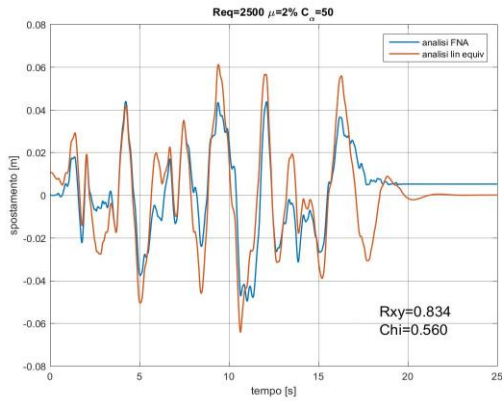
# APPENDICI



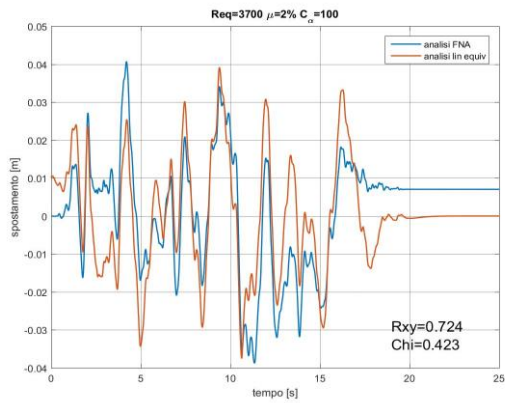
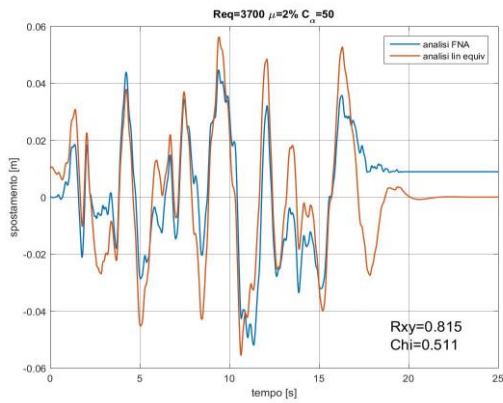
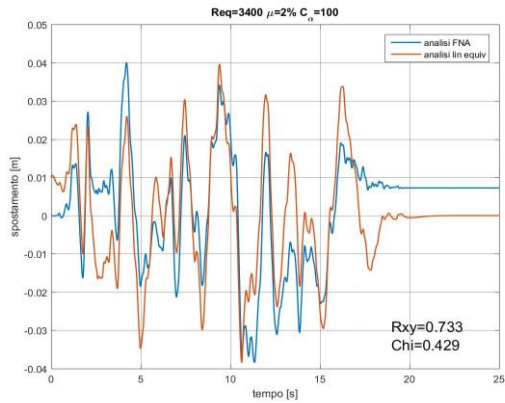
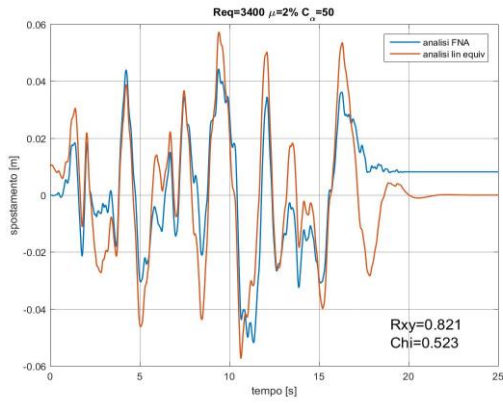


## APPENDICI

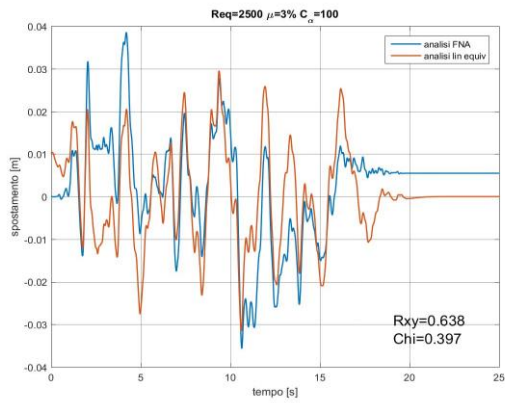
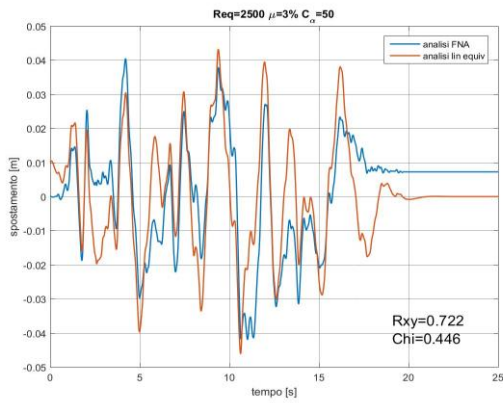
In questa sesta sezione sono riportati i risultati di una prova con le stesse modalità della precedente, ma con un coefficiente di attrito pari al' 2%.



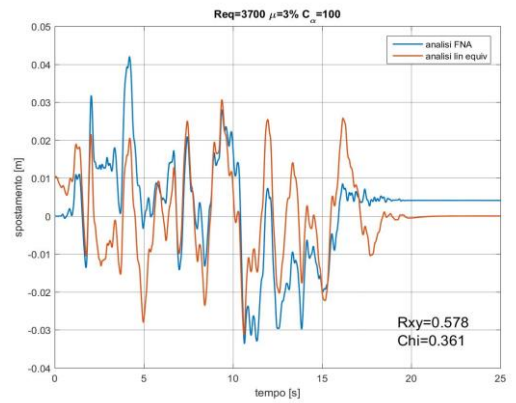
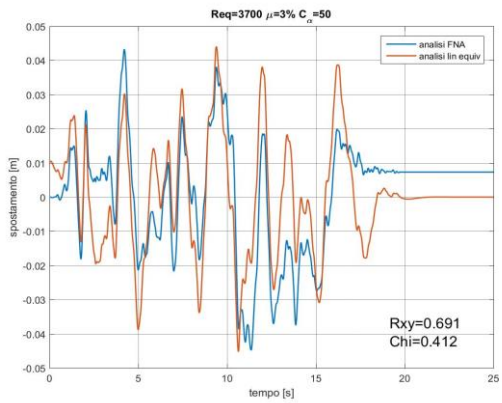
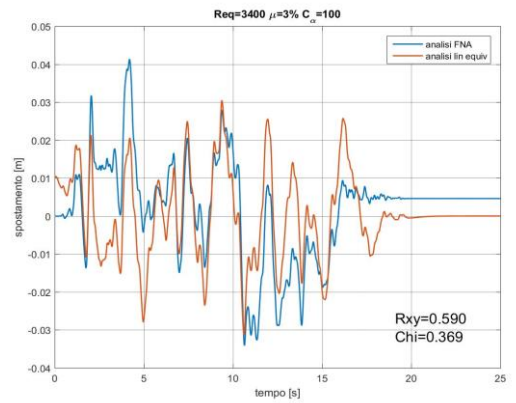
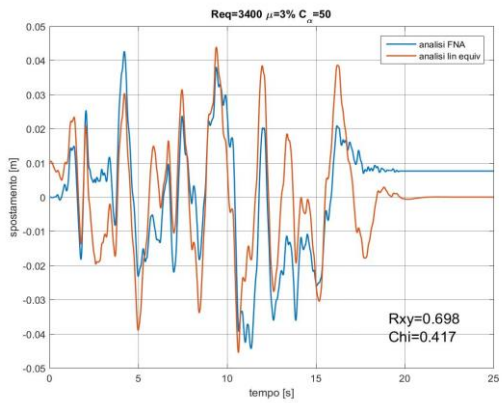
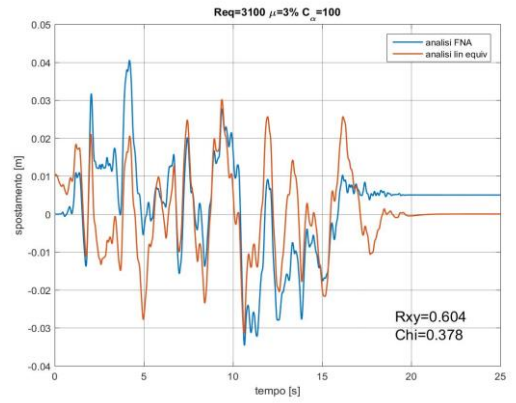
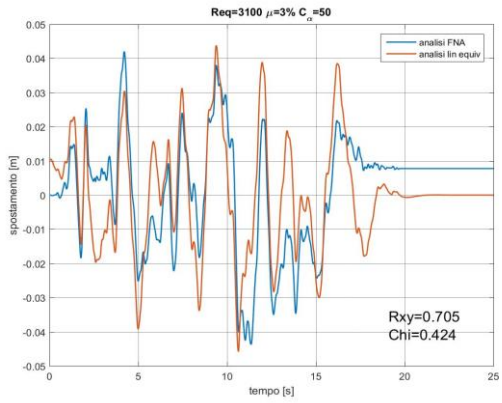
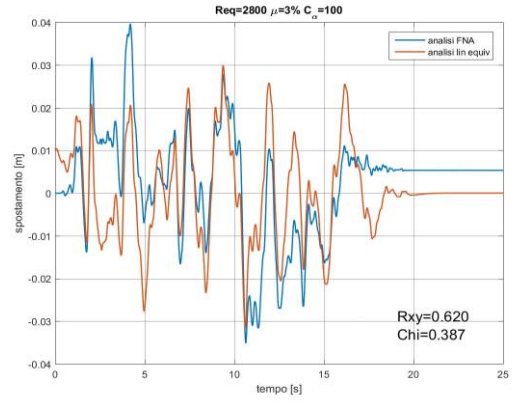
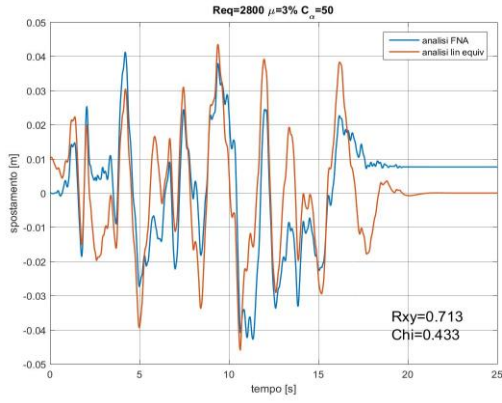
# APPENDICI



Nella settima e ultima sezione si trovano le time history lineari per FPS+FVD diversi con lo stesso accelerogramma di input sismico e  $\mu$  pari all' 3%



# APPENDICI





## 6. BIBLIOGRAFIA

- Briseghella B., Liu T., Zhang Q., Zordan, T., *Simplified Linear Static Analysis for Base-Isolated Buildings with Friction Pendulum System*, in “Structural Engineering International”, vol. 24, n.4, November 2014.
- Anoop M., Andrei R., Michalakis C., *Teflon Bearings in Base Isolation. II; Modeling*, in “Journal of Structural Engineering”, vol. 116, n.2, February 1990.
- Anil K.C, Wen-Hsiung L., Earthquake response of elastic SDF systems with non-linear fluid viscous dampers, in “Earthquake Engineering & Structural Dynamics”, vol. 32, n.9, September 2002.
- Gokhan P., John B.M., Stuart S.C., Fundamental considerations for the design of non-linear viscous dampers, in “Earthquake Engineering & Structural Dynamics”, vol. 28, n.11, November 1999.
- Farzad Naeim, Ronald L. M., *Design of Structures with Seismic Isolation. Da The Seismic Design Handbook*, Springer US,2001.
- Abdel R., Shehata E., Pounding mitigation and unseating prevention at expansion joints of isolated multi-span bridges, in “Engineering Structures”, vol.31, n.10, October 2009.
- Fujino Y., Jankowski R., Wilde K., Pounding of superstructure segments in isolated elevated bridge during earthquakes, in “Earthquake Engineering & Structural Dynamics”, vol.27, n.5, May 1998.
- Ruangrassamee A., Kawashima K., Relative displacement response spectra with pounding effect, in “Earthquake Engineering & Structural Dynamics”, vol.30, n.10, October 2001.
- Forni M., Martelli A., Seismic isolation and other antiseismic systems: Recent applications in Italy and worldwide, in “The Journal of Anti-SeismicSystem International Society”, vol.1, October 2010.
- Sommariva A., Equazioni e Sistemi non lineari, November 2011, from [http://www.math.unipd.it/~alvise/CN\\_2013/EQUAZIONI/EQUAZIONI\\_NONLINEARI\\_2013\\_BEAMER/eqnonlineari\\_beamer\\_2013.pdf](http://www.math.unipd.it/~alvise/CN_2013/EQUAZIONI/EQUAZIONI_NONLINEARI_2013_BEAMER/eqnonlineari_beamer_2013.pdf)
- Algasism, High Damping Rubber Bearings and Lead Rubber Bearings, from [http://www.elemka.gr/Uploads/materials/4.3\\_proionta\\_efedrana/4.3.4\\_Seismikis%20monosis/ALGASISM\\_HDRB\\_AND\\_LRB.pdf](http://www.elemka.gr/Uploads/materials/4.3_proionta_efedrana/4.3.4_Seismikis%20monosis/ALGASISM_HDRB_AND_LRB.pdf)
- Algasism, Ammortizzatori Viscosi Fluidodinamici- Fluid Viscous Dampers, from [http://www.alga.it/uploads/474\\_catalogo\\_FD\\_rev4.pdf](http://www.alga.it/uploads/474_catalogo_FD_rev4.pdf)
- Liu T., Equivalent Linearization Analysis Method for Base-Isolated Buildings, 2014, form [http://eprints-phd.biblio.unitn.it/1240/1/Equivalent\\_Linearization\\_Analysis\\_Method\\_for\\_Base-isolated\\_Buildings.pdf](http://eprints-phd.biblio.unitn.it/1240/1/Equivalent_Linearization_Analysis_Method_for_Base-isolated_Buildings.pdf)
- Fip-Group, Isolatori a Scorrimento a Superficie Curva per Edifici serie FIP-D, from [http://www.edilportale.com/csmartnews/download/3301\\_FIP-D.pdf](http://www.edilportale.com/csmartnews/download/3301_FIP-D.pdf)

## BIBLIOGRAFIA

- DesRoches R., Eröz M., Bridge seismic response as a function of the Friction Pendulum System (FPS) modeling assumptions, in *“Engineering Structures”*, vol.30, n.11, November 2008.
- Simon J., G. Vigh L., Response spectrum analysis of girder bridges with seismic isolators using effective stiffness, from [https://www.researchgate.net/publication/277774820\\_Response\\_spectrum\\_analysis\\_of\\_girder\\_bridges\\_with\\_seismic\\_isolators\\_using\\_effective\\_stiffness](https://www.researchgate.net/publication/277774820_Response_spectrum_analysis_of_girder_bridges_with_seismic_isolators_using_effective_stiffness)
- Atkinson K., Han W., Theoretical Numerical Analysis -A Functional Analysis Framework, Springer, New York, 2001.
- Franchin P., Giannini R., Lupoi A., Mancini G., Pavese A., Pinto P.E., Spacone E., Vulcano A., Linee guida e manuale applicativo per la valutazione della sicurezza sismica e il consolidamento dei ponti esistenti in c.a., march 2009, from [http://www.reluis.it/Report\\_2005-2008/Linea\\_03/LineeGuida\\_e\\_Manuale\\_PontiEsistenti.pdf](http://www.reluis.it/Report_2005-2008/Linea_03/LineeGuida_e_Manuale_PontiEsistenti.pdf)