

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



MODELLAZIONE ANALITICA DI UNO PNEUMATICO AUTOMOBILISTICO PER LA STIMA DELLE FORZE SCAMBIATE CON IL CERCHIO DELLA RUOTA

Relatore: Prof. Gianpiero Mastinu

Correlatore: Ing. Federico Ballo

Tesi a cura di:

Sandro Tagliaferri

Matricola N°: 804520

Anno Accademico 2016-2017

INDICE

Abstract	IX
Introduzione	1
1. Stato dell'arte	3
1.1 Modellazione dell'interfaccia pneumatico-cerchio.....	4
1.1.1 Modellazione analitica di uno pneumatico motociclistico per la stima delle forze scambiata con il cerchio della ruota.....	4
1.1.2 Modellazione analitica dell'interfaccia pneumatico-cerchio (<i>Shell Theory</i>).....	8
1.1.3 Modello ad elementi finiti dell'interfaccia pneumatico-cerchio..	14
1.1.3.1 Modello per elastomero (mescola).....	15
1.1.3.2 Modello elementi composti (tela della carcassa e sede del tallone).....	15
1.1.3.3 Modello per il gap.....	16
1.2 Altre applicazioni di modelli di pneumatico.....	18
1.2.1 Modello ad anello rigido su fondazione elastica per il calcolo di fenomeni vibratorii.....	18
1.2.2 Modello bidimensionale ad anello rigido.....	21
2. Modello analitico radiale	23
2.1 Modello a trave curvilinea.....	23
2.1.1 Equazione della linea elastica.....	24
2.1.2 Equazioni di equilibrio dell'arco.....	25
2.1.3 Soluzione dell'equazione differenziale.....	29
2.1.4 Estensione del modello per il carico distribuito.....	33
2.2 Definizione orma di contatto.....	35
2.2.1 Modello di Pacejka.....	35
2.2.2 Discretizzazione dell'orma di contatto.....	40
2.3 Applicazione del carico.....	44
2.3.1 Carico uniformemente distribuito.....	44
2.3.2 Carico parabolico.....	45
2.4 Identificazione dei parametri.....	48

2.4.1	Definizione della funzione obiettivo.....	49
2.4.2	Risultati dell'identificazione.....	51
2.4.3	Confronto risultati del parametro EJ.....	53
2.5	Calcolo delle reazioni viste dal cerchio.....	54
2.5.1	Calcolo reazioni in direzione radiale (contributo del carico).....	55
2.5.2	Calcolo reazioni in direzione radiale (contributo della pressione).....	56
2.5.3	Calcolo reazioni in direzione assiale.....	59
3	Prove sperimentali.....	61
3.1	Sistema di misura completo.....	61
3.1.1	Torretta di fissaggio.....	62
3.1.2	Cella di carico.....	63
3.1.3	Potenziometro.....	65
3.1.3.1	Taratura del potenziometro.....	65
3.2	Curve di rigidezza in direzione radiale.....	66
3.2.1	Pressione 2.1 bar.....	66
3.2.2	Pressione 2.5 bar.....	67
3.2.3	Pressione 3.0 bar.....	68
3.2.4	Pressione 4.5 bar.....	68
3.2.5	Risultati complessivi e osservazioni.....	69
4	Validazione risultati.....	71
4.1	Modello ad elementi finiti.....	71
4.2	Confronto risultati.....	75
4.2.1	Pressione 4,5 bar, carico 12990 N.....	75
4.2.2	Pressione 4,5 bar, carico 8690 N.....	77
4.2.3	Pressione 2,5 bar, carico 8690 N.....	78
	Conclusioni.....	80
	Bibliografia.....	82

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1: schema del modello a trave curvilinea.....	5
Figura 1.2: bilancio di forze applicato al fianco dello pneumatico motociclistico.....	6
Figura 1.3: bilancio di forze in direzione assiale.....	7
Figura 1.4: modello ad elementi finiti dello pneumatico motociclistico.....	8
Figura 1.5: valori delle reazioni radiali ed assiali a confronto con il modello FEM, alla pressione di 1,8	8
Figura 1.6: modello semplificato del cerchio.....	9
Figura 1.7: convenzioni di segno per il modello a membrana.....	10
Figura 1.8: forze assiali applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare).....	13
Figura 1.9: forze circonferenziali applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare).....	13
Figura 1.10: forze radiali applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare).....	13
Figura 1.11: modellazione ad elementi finiti della gomma e del tallone del cerchio (1/4 di pneumatico).....	14
Figura 1.12: confronto tra il gap modellato e quello fisico.....	16
Figura 1.13: confronto tra dati sperimentali e analitici ad una certa pressione di gonfiaggio di 241 kPa.....	17
Figura 1.14: confronto tra ruota ferma e in movimento a 160 km/h.....	17
Figura 1.15: confronto analitico-sperimentale lungo tutto il cerchio.....	18
Figura 1.16: anello rigido su fondazione elastica	19
Figura 1.17: elemento infinitesimo.....	19
Figura 1.18: rappresentazione dei primi tre modi di vibrare dello pneumatico, le frequenze naturali sono rispettivamente 63,89 e 109 Hz.....	20

Figura 1.19: trasmissibilità di uno pneumatico radiale FR70-14 con pressione di gonfiaggio di 165 kPa.....	20
Figura 1.20: anti-risonanze dei primi tre modi di vibrare 80,99 e 120 Hz.....	20
Figura 1.21: modello bidimensionale dello pneumatico.....	21
Figura 2.1: schema collegamento trave-cerchio.....	23
Figura 2.2: definizione della cinematica della trave deformata.....	24
Figura 2.3: tratto infinitesimo della trave ad asse curvilineo soggetto ad azioni interne....	26
Figura 2.4: carico concentrato applicato alla trave.....	29
Figura 2.5: carichi concentrati applicati in diversi punti della trave.....	34
Figura 2.6: carico distribuito visto come somma di carichi concentrati.....	34
Figura 2.7: definizione fisica dell'impronta di contatto.....	35
Figura 2.8: test generico di uno pneumatico su superficie piatta.....	36
Figura 2.9: andamento di L al variare dell'affondamento ΔZ	37
Figura 2.10: schema di calcolo del metodo iterativo.....	38
Figura 2.11: descrizione angolo AlfaL.....	41
Figura 2.12: suddivisione dell'orma con un numero limitato di punti.....	42
Figura 2.13: suddivisione dell'orma con un numero considerevole di punti.....	42
Figura 2.14: risultati discretizzando la cintura in 401 punti.....	43
Figura 2.15: risultati discretizzando la cintura in 801 punti.....	43
Figura 2.16: carico uniformemente distribuito.....	44
Figura 2.17: carico parabolico.....	45
Figura 2.18: confronto distribuzione del carico per due diversi valori di intensità.....	48
Figura 2.19: partizione delle curve di rigidezza.....	50
Figura 2.20: confronto curve di rigidezza sperimentali con quelle ottenute dal modello...	52

Figura 2.21: Deformata della cintura dello pneumatico sottoposta ad un carico radiale di 10000 N alla pressione di 4.5 bar.....	52
Figura 2.22: dimensioni della sezione approssimata della trave.....	53
Figura 2.23: sezione del cerchio e relative convenzioni di segno per gli sforzi.....	54
Figura 2.24: andamento delle reazioni in direzione radiale considerando solo il contributo dovuto al carico.....	55
Figura 2.25: approssimazione angolo cerchio all'interfaccia con lo pneumatico.....	56
Figura 2.26: equilibrio applicato al fianco del cerchio.....	57
Figura 2.27: andamento delle reazioni totali in direzione radiale.....	58
Figura 2.28: sezione dello pneumatico sottoposto a pressione.....	59
Figura 2.29: andamento delle reazioni in direzione assiale per tutti i valori di pressione analizzati.....	60
Figura 3.1: vista frontale del sistema di misura.....	61
Figura 3.2: vista laterale del sistema di misura.....	62
Figura 3.3: schema torretta di fissaggio.....	63
Figura 3.4: schema della cella di carico a sei assi.....	63
Figura 3.5: schema dei vincoli della cella di carico.....	64
Figura 3.6: potenziometro a filo.....	65
Figura 3.7: curva di rigidezza radiale alla pressione di 2.1 bar.....	66
Figura 3.8: curva di rigidezza radiale alla pressione di 2.5 bar.....	67
Figura 3.9: curva di rigidezza radiale alla pressione di 3.0 bar.....	68
Figura 3.10: curva di rigidezza radiale alla pressione di 4.5 bar.....	68
Figure 3.11: curve di rigidezza ottenute sperimentalmente.....	69
Figura 3.12: andamento della rigidezza in funzione della pressione.....	70
Figura 4.1: assieme dei componenti del modello ad elementi finiti.....	71

Figura 4.2: configurazione deformata dello pneumatico.....	72
Figura 4.3: particolare del tallone. I nodi vincolati.....	74
Figura 4.4: confronto curve in direzione radiale: pressione 4,5 bar, carico 12990 N.....	75
Figura 4.5: confronto curve in direzione assiale: pressione 4,5 bar, carico 12990 N.....	76
Figura 4.6: confronto curve in direzione radiale: pressione 4,5 bar, carico 8690 N.....	77
Figura 4.7: confronto curve in direzione assiale: pressione 4,5 bar, carico 8690 N.....	77
Figura 4.8: confronto curve in direzione radiale: pressione 2,5 bar, carico 8960 N.....	78
Figura 4.9: confronto curve in direzione assiale: pressione 2,5 bar, carico 8690 N.....	78

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 2.1: confronto tra l'affondamento sperimentale e quello ottenuto mediante fsolve.	40
Tabella 2.2: valori a confronto del parametro EJ.....	54
Tabella 2.3: valore della reazione radiale per il solo contributo della pressione.....	58
Tabella 3.1: specifiche cella di carico.....	64
Tabella 4.1: caratteristiche dei fili che compongono la cintura.....	73
Tabella 4.2: caratteristiche dei materiali che compongono il modello FEM.....	73

ABSTRACT

L'obiettivo che negli ultimi anni il settore inerente la progettazione di cerchi automobilistici si sta ponendo viene riassunto dal termine *Lightweighting*. La riduzione di peso, traduzione letterale della parola, è una tematica molto importante nella progettazione di componenti automobilistici, soprattutto per un corpo rotante quale è il cerchio. La riduzione di peso non si traduce solamente in una minore massa, ma anche in un minor momento d'inerzia che garantisce maggiori prestazioni al veicolo.

Lo scopo del presente lavoro è lo studio delle forze scambiate all'interfaccia pneumatico/cerchio durante le normali condizioni di esercizio.

È stato sviluppato un modello analitico dello pneumatico. La struttura dello pneumatico è descritta da una trave curvilinea rappresentante il battistrada, sostenuta da un letto di molle che approssimano il contributo di rigidità dato dal fianco.

Data in input la pressione di gonfiaggio e la distribuzione di carico verticale agente nell'orma di contatto, il modello fornisce in output la distribuzione delle forze scambiate all'interfaccia con il cerchio della ruota.

Il modello analitico sviluppato è stato validato con un modello numerico ad elementi finiti che considera la reale struttura dello pneumatico e con prove sperimentali eseguite presso il laboratorio La.S.T. (Laboratorio per la Sicurezza dei Trasporti) del Politecnico di Milano.

Parole chiave: Modello di pneumatico, forze sul cerchio, Pneumatico automobilistico

INTRODUZIONE

Il presente lavoro di tesi vuole porre l'attenzione su una tematica che si sta sempre di più affermando sia per quanto riguarda la progettazione di veicoli ad uso stradale, sia per quanto riguarda l'ottimizzazione di autovetture sportive da corsa. Tale tematica è comunemente chiamata *Lightweighting*, termine che letteralmente significa "alleggerimento" e che trova largo uso in numerosi sotto settori dell'ambito automobilistico. La ricerca dell'alleggerimento di un componente generico ha obiettivi diversi a seconda che si tratti di veicoli stradali o di veicoli da competizione. Per la prima categoria la riduzione di peso è rivolta al miglioramento dell'efficienza del veicolo in termini di consumi, mentre per i veicoli da competizione i vantaggi dell'alleggerimento si traducono in una migliore tenuta di strada e maggiori accelerazioni.

Lo scopo di questa tesi è fornire un buon punto di partenza per la definizione della sezione del cerchione, componente automobilistico preso in considerazione in questo lavoro. Essendo i cerchi corpi rotanti è facile intuire come l'alleggerimento degli stessi sia vantaggioso: riducendo il peso del componente, infatti, viene ridotto anche il momento d'inerzia della ruota e quindi, a parità di coppia motrice, la ruota sarà in grado di avere un'accelerazione angolare maggiore.

Al fine di ottenere i vantaggi in termini di prestazioni sopracitati, la definizione del carico e la relativa distribuzione sarà di fondamentale importanza: tanto più la distribuzione si avvicina alla realtà, tanto più l'ottimizzazione risulta accurata. L'accuratezza nella distribuzione del carico renderà più veritiera la distribuzione degli sforzi sul cerchio e sarà quindi possibile conoscere con più precisione le zone che si possono alleggerire.

Il modello analitico proposto, per il raggiungimento dello scopo prefissato, ha come obiettivo il calcolo delle reazioni all'interfaccia pneumatico-cerchio. In output verranno forniti i valori delle reazioni in direzione assiale e in direzione radiale, dovute alla pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso e al contatto pneumatico-strada. L'andamento delle reazioni e i rispettivi valori saranno la base da cui partire per progettare l'intero cerchione.

Nel primo capitolo si sono cercati dei modelli di pneumatico che rappresentassero l'interazione con il cerchio sia di natura analitica che di natura numerica. Essendo una tematica di recente studio, non sono stati trovati molti modelli analitici per il calcolo delle forze agenti sul cerchione. Nello specifico di questo lavoro si è voluto presentarne due, uno analitico e uno ad elementi finiti.

Al contrario ne sono stati trovati molti che riguardano studi di natura diversa, come per esempio il comfort del veicolo e lo studio dell'interazione pneumatico-strada.

Oltre a quelli inerenti la descrizione del sistema pneumatico-cerchio, si sono volute riportare anche le tipologie di modelli che mostrano i diversi campi applicativi in cui essi possono sconfinare, al fine di evidenziare quanto la modellazione sia ancora molto diffusa per la progettazione di componenti.

Il secondo capitolo presenta il modello vero e proprio. La prima parte è incentrata sulla teoria della trave curvilinea che rappresenta la cintura dello pneumatico. Essa è caratterizzata da un momento d'inerzia proprio EJ ed è vincolata radialmente al cerchio mediante delle molle distribuite lungo tutta la circonferenza. Dalla modellazione della trave curvilinea si ottiene l'equazione caratteristica del quinto ordine, che descrive lo spostamento radiale u per ogni posizione sulla circonferenza, in funzione del carico applicato.

Definito analiticamente il problema è necessario conoscere l'orma di contatto e la tipologia di carico applicato. La semilunghezza di contatto è stata definita utilizzando il modello sviluppato da Pacejka [8]. All'interno della definizione dell'orma è stato applicato un carico di tipo parabolico, che sta a rappresentare uno schiacciamento in direzione radiale dello pneumatico.

La risoluzione dell'equazione differenziale della trave porterà come risultato le curve di rigidezza e la deformata dello pneumatico. Mediante un processo di identificazione di tipo iterativo è possibile identificare i parametri k ed EJ della trave affinché i risultati in output dal modello analitico si avvicinino ai dati sperimentali ottenuti mediante prove, presentate nel terzo capitolo.

Ottenuti i valori dei parametri è stato possibile arrivare al calcolo delle reazioni presenti sul cerchio. Questa parte è stata sviluppata sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti in modo da poter considerare separatamente il contributo del carico da quello della pressione.

Le prove sperimentali di cui si è parlato sono state svolte presso il Laboratorio del Politecnico di Milano, che prende il nome di L.A.S.T (Laboratorio per la sicurezza dei trasporti). Le attrezzature fornite dal laboratorio stesso hanno permesso la realizzazione di prove con lo scopo di ottenere le curve di rigidezza dello pneumatico per quattro diversi valori di pressione (2.1, 2.5, 3.0 e 4.5 bar).

Nel quarto capitolo è stato invece presentato il confronto tra le curve ottenute mediante l'implementazione del modello e le curve ricavate da un modello ad elementi finiti. Questo modello FEM, studiato da un collega in dipartimento, rappresenta l'intero pneumatico, considerando sia la struttura della gomma che la configurazione del cerchio.

CAPITOLO 1

Stato dell'arte

Lo scopo di questo capitolo è di illustrare i modelli più utilizzati al giorno d'oggi che studiano le problematiche relative al comportamento di uno pneumatico. Il capitolo si focalizzerà principalmente sull'esposizione di modelli inerenti allo studio del lavoro di tesi proposto, ovvero l'interazione tra pneumatico e cerchio. Verrà comunque data una panoramica relativa ad altri campi applicativi che si possono studiare mediante i modelli di pneumatico possono fornire, come ad esempio, lo studio di vibrazioni della ruota in ottica del comfort del veicolo.

A valle di ricerche in letteratura, ciò che si evince è che sono presenti numerosissimi modelli di pneumatici, sia di natura numerica che analitica. Nella prima parte del capitolo sono stati riportati due modelli che studiano l'interazione tra pneumatico e cerchio. Il primo, puramente analitico, consiste nel modellare il cerchio come un guscio, al fine di calcolare gli stati di sforzo su di esso. Il secondo introduce lo pneumatico completo modellato mediante elementi finiti. La seconda parte del capitolo è volta a mostrare alcune applicazioni differenti del modello analitico ad anello rigido.

Prima di procedere con la descrizione dei modelli veri e propri si è voluto focalizzare l'attenzione sull'importanza della scelta della tipologia di modello da utilizzare. La spiegazione mette a confronto i vantaggi e gli svantaggi nell'utilizzo di una modellazione di tipo analitico piuttosto che una di tipo numerico.

I modelli analitici, seppur essendo i primi tipi di modello sviluppati nella storia, ancora oggi ricoprono una discreta parte dei campi di applicazione ingegneristici. Il grande vantaggio del modello analitico rispetto ad un qualsiasi modello numerico consiste nei ridotti tempi di calcolo. Questo approccio può essere perciò un buon punto di partenza per approssimare un qualsiasi tipo di problema prima di ricorrere a onerose verifiche sperimentali o numeriche.

I modelli di natura numerica invece hanno trovato un 'importante sviluppo negli ultimi anni grazie all'avvento di tecnologie sempre più avanzate. Tutti i fenomeni fisici che si incontrano in campo ingegneristico sono modellati tramite equazioni differenziali e in molti casi i problemi considerati sono troppo complicati per essere risolti mediante approccio analitico [6]. Solo in alcuni semplici casi la soluzione è trovata in forma chiusa. La modellazione tramite elementi finiti è un approccio di tipo numerico che consiste nella risoluzione di queste equazioni differenziali in modo approssimato. La premessa è che il dominio di una soluzione può essere modellato come tanti elementi discreti assemblati tra di loro [7].

Il grande vantaggio dei modelli numerici è che si è in grado di risolvere, seppur con un certo grado di approssimazione, la quasi totalità dei problemi fisici incontrati, al contrario della modellazione analitica. L'avvento di calcolatori sempre più potenti ha permesso di ridurre gli oneri temporali del calcolo e ha fatto sì che questo approccio venga preferito in molti casi all'approccio analitico.

1.1 Modellazione dell'interfaccia pneumatico cerchio

Lo studio delle forze agenti sul cerchio è la risposta al problema del *Lightweighting* [5]. Quest'ultimo è di fondamentale importanza per vetture ad alte prestazioni non solo per la riduzione di peso in se, ma anche per la riduzione del momento d'inerzia associato alla ruota. Ne consegue che una riduzione di questi due fattori, aumenti la prestazione di un veicolo a parità degli altri parametri. Conoscere perciò le forze all'interfaccia pneumatico-cerchio è un ottimo punto di partenza per il dimensionamento del cerchio stesso. Si possono infatti individuare, a valle dello studio, le zone che necessitano di una quantità di materiale maggiore dovuto a stati di sforzo più elevati e dove invece è possibile alleggerire il componente (in caso di sforzi di entità minore).

1.1.1 Modellazione analitica di uno pneumatico motociclistico per la stima delle forze scambiata con il cerchio della ruota

Il seguente modello ha lo scopo principale di fornire una prima e significativa valutazione dei carichi agenti sul cerchio in base alla pressione di gonfiaggio, al carico verticale applicato e alle caratteristiche geometriche e di rigidità dello specifico pneumatico montato sul cerchio.

Il modello analitico complessivo si compone di tre sotto-modelli, ciascuno dei quali in grado di fornire uno specifico contributo al calcolo delle forze risultanti sul cerchio:

- modello per il calcolo delle forze radiali in presenza di solo carico verticale;
- modello per il calcolo delle forze radiali in presenza di sola pressione;
- modello per il calcolo delle forze assiali.

Il modello complessivo richiederà in ingresso dei semplici dati geometrici e sperimentali per l'identificazione dei propri parametri e sarà in seguito validato rispetto ai risultati di simulazioni numeriche ad elementi finiti. Lo pneumatico viene assimilato ad una trave curvilinea dotata di una rigidità flessionale EJ e connessa al cerchio (pensato come un disco rigido) tramite una rigidità radiale distribuita k .

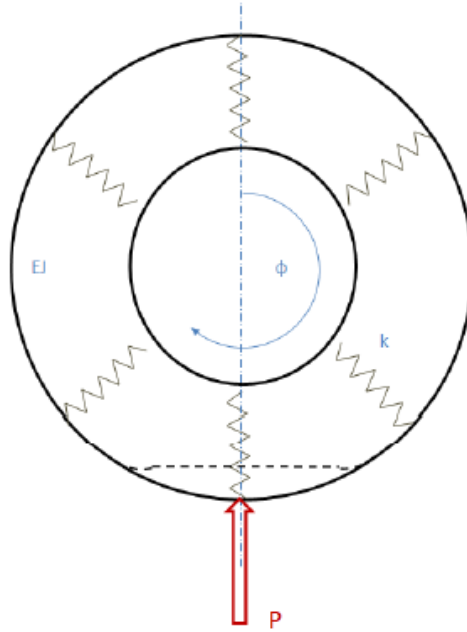


Figura 1.1: Schema del modello a trave curvilinea

Sotto l'effetto di un carico verticale P il modello deve essere in grado di calcolare la deformata radiale della trave curvilinea e quindi di risalire alle forze radiali scambiate tra pneumatico e cerchio per effetto della rigidità distribuita k . Si sottolinea che il parametro k è da intendersi come una rigidità radiale equivalente che tiene sinteticamente conto sia della rigidità del materiale del fianco dello pneumatico sia della rigidità legata alla pressione interna.

Al fine di avvicinarsi maggiormente alla realtà, in cui il carico verticale complessivo si distribuisce su un'impronta di contatto di lunghezza finita, è necessario prendere in considerazione il caso con carico distribuito.

In questa situazione è possibile semplificare il generico carico distribuito $p(\varphi)$ in una sommatoria discreta di carichi concentrati tali da rispettare la condizione sul carico risultante:

$$P = \int_{-\varphi}^{+\varphi} p(\varphi) d\varphi = \sum_{i=1}^n P_{concentrato,i} \quad (1.1)$$

Se si ipotizza una distribuzione rettangolare del carico verticale lungo l'impronta di contatto, la soluzione complessiva risulta semplicemente dalla sovrapposizione di n soluzioni:

$$\begin{cases} u(\varphi) = \sum_{i=1}^n P_{distribuito} * \bar{u}(\varphi, \varphi_{P,i}) \\ P_{distribuito} = \frac{P}{n} \end{cases} \quad (1.2)$$

Dopo aver ottenuto la deformata radiale $u(\varphi)$ secondo l'Equazione 1.2 è possibile risalire al valore delle forze radiali che si generano per effetto della rigidità distribuita:

$$S_{rad_c} = k * u(\varphi) * \frac{r}{r_{cerchio}} \quad (1.3)$$

Effettuando un bilancio sul fianco dello pneumatico è possibile ottenere il contributo di forza in presenza di sola pressione:

$$S_{rad_p} = \frac{p * h}{2} * \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1.4)$$

I valori degli angoli nella formula 1.4 sono rappresentati nella figura sottostante:

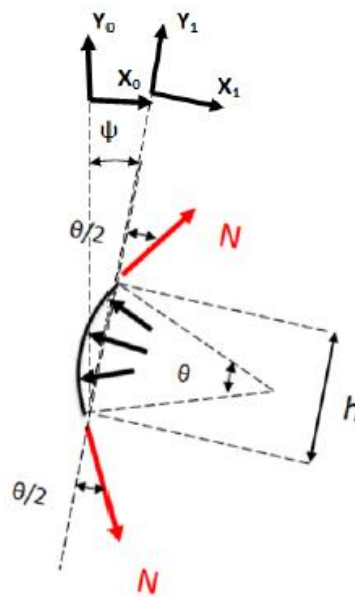


Figura 1.2: Bilancio di forze applicato al fianco dello pneumatico motociclistico

L'ultimo contributo mancante sono le forze in direzione assiale. Per ottenere i carichi assiali è possibile scrivere un'equazione di equilibrio orizzontale (Equazione 1.5) applicata ad una metà della generica sezione trasversale di pneumatico (Figura 1.3).

$$\begin{cases} S_{ax} + T_0 = p * h_0 \\ S_{ax} = T_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Da cui si ottiene:

$$S_{ax} = \frac{p * h_0}{2} \quad (1.6)$$

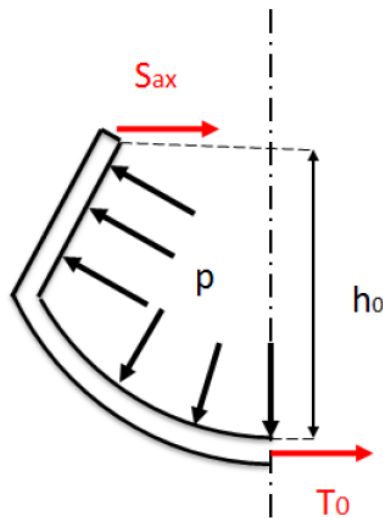


Figura 1.3: Bilancio di forze in direzione assiale

I risultati ottenuti implementando il modello sono stati validati mediante un modello ad elementi finiti. Il metodo utilizzato prevede le seguenti fasi:

- generazione di un modello assialsimmetrico bidimensionale;
- applicazione della pressione di gonfiaggio;
- generazione di un modello tridimensionale solido a partire dai risultati del modello assialsimmetrico;
- applicazione dei carichi.

Nel modello numerico è possibile introdurre la struttura dei vari *layer* che compongono la carcassa, assegnando ad essi diverse proprietà meccaniche in base ai materiali di cui sono costituiti.

Nelle figure sottostanti è mostrato lo pneumatico modellato ad elementi finiti e i risultati di forze confrontate con le curve del FEM.

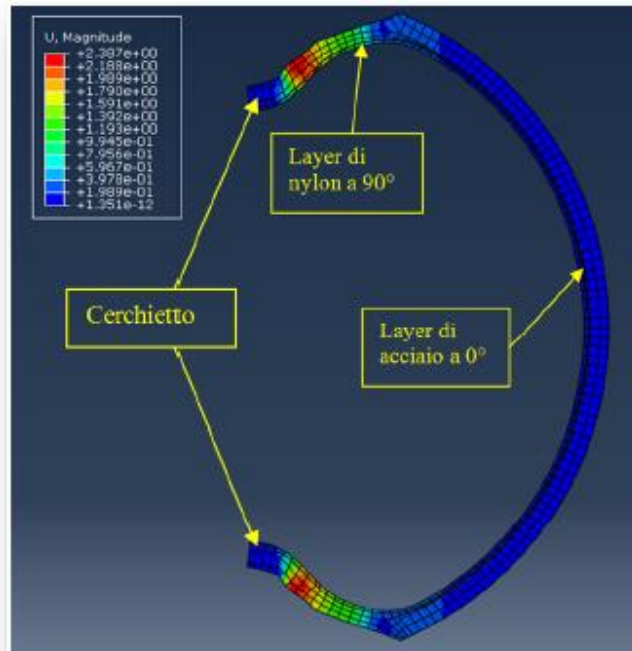


Figura 1.4: Modello ad elementi finiti dello pneumatico motociclistico

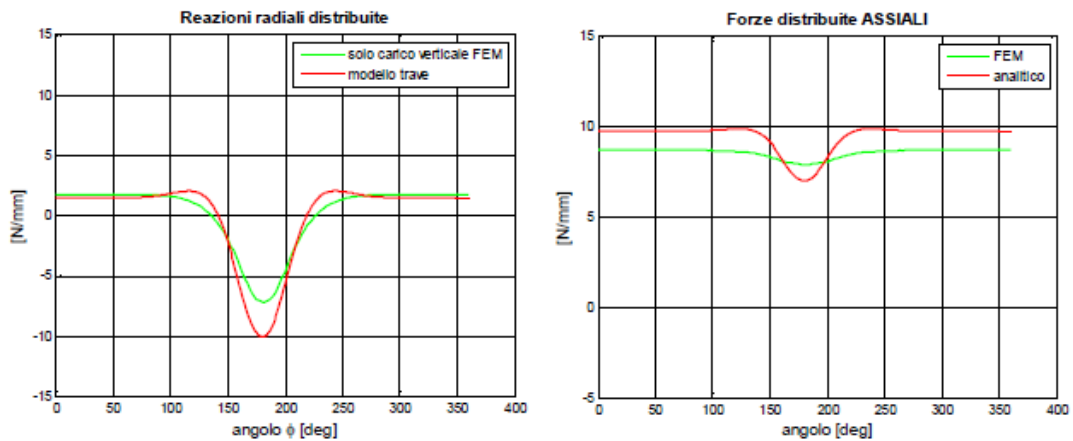


Figura 1.5: Valori delle reazioni radiali ed assiali a confronto con il modello FEM, alla pressione di 1.8 bar

1.1.2 Modellazione analitica dell'interfaccia pneumatico-cerchio (*Shell Theory*).

Per questo tipo di modello è stata scelta una configurazione semplificata del cerchio. L'ipotesi principale è che quest'ultimo operi come una cella di carico. Verranno trascurate l'anisotropia, la non omogeneità e la non linearità del materiale che compone la gomma [1].

Facendo queste ipotesi, il modello è valido solamente per stimare con buona approssimazione le forze agenti sul cerchio. Non è invece adatto per la modellazione della gomma in quanto le caratteristiche sopracitate variano, e non di poco, a seconda della configurazione delle tele e della carcassa della gomma stessa.

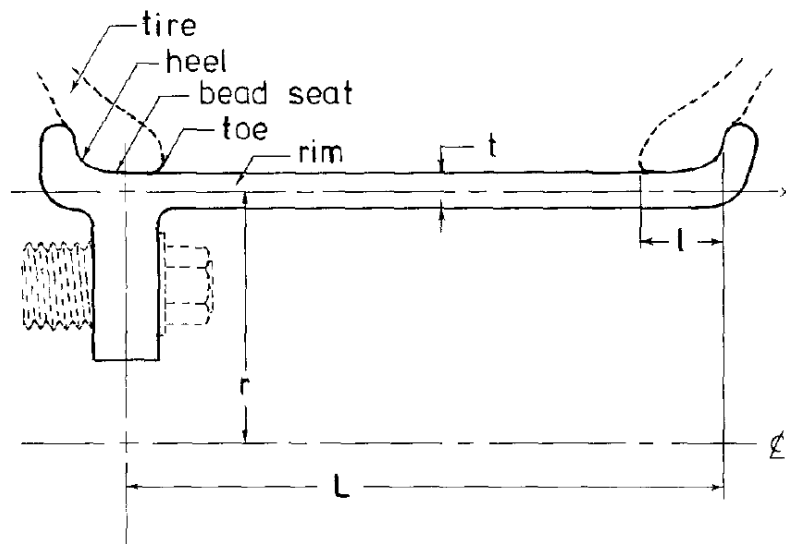


Figura 1.6: Modello semplificato del cerchio

Come è possibile vedere dalla figura sovrastante (Figura 1.6) il cerchio è modellato come un guscio cilindrico (da qui il nome *Shell Theory*) vincolato ad una delle sue estremità.

Dato il valore ridotto del rapporto tra spessore del cerchio ed il suo raggio è possibile approssimare il cilindro come un guscio di spessore infinitesimo. Sotto questa ipotesi prende forma la *teoria di Shell* per lo studio delle forze applicate al guscio.

Si inizia analizzando gli stati di sforzo su di un elemento infinitesimo. Come prima cosa si fissano le convenzioni di segno (Figura 1.7) e successivamente si procede con lo sviluppo delle equazioni.

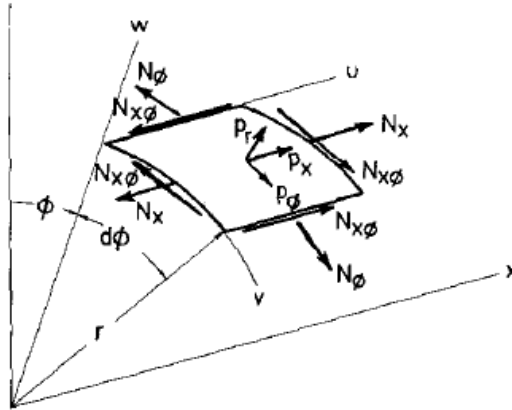


Figura 1.7: Convenzioni di segno per il modello a membrana

Considerando x la coordinata assiale e Φ quella circonferenziale, vengono definiti gli stati di sforzo N_x , N_Φ , $N_{x\Phi}$. Come forze risultanti vengono invece considerate la direzione radiale, assiale e circonferenziale, rispettivamente p_r , p_x e p_Φ .

Dopo aver definito le convenzioni è possibile scrivere le equazioni di equilibrio per l'elemento infinitesimo considerato

$$N_\Phi = r * p_r \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial N_{x\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} * \frac{\partial N_\Phi}{\partial \Phi} = -p_\Phi \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} * \frac{\partial N_{x\Phi}}{\partial \Phi} = -p_x \quad (1.9)$$

le relazioni di deformazione, in funzione dello spostamento, applicate alla membrana circolare

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} * \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \quad (1.11)$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} * \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (1.12)$$

e gli stati di sforzo in funzione dello spostamento:

$$N_x = D * (\varepsilon_x + \nu * \varepsilon_\varphi) \quad (1.13)$$

$$N_\varphi = D * (\varepsilon_\varphi + \nu * \varepsilon_x) \quad (1.14)$$

$$N_{x\varphi} = D * \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) * \gamma_{x\varphi} \quad (1.15)$$

ε_x , ε_φ e $\gamma_{x\varphi}$ stanno a rappresentare le deformazioni assiali, circonferenziali e tangenziali, u , v e w rispettivamente gli spostamenti assiali, circonferenziali e radiali dell'elemento infinitesimo. $D = E/(1-\nu^2)$ e ν il coefficiente di Poisson.

Essendo la geometria del cerchio circolare, questo tipo di modello prevede che tutte le componenti dell'interazione pneumatico cerchio siano periodiche lungo la coordinata circonferenziale, con valore 2π . Questo porta a modellare tutte le componenti in serie di Fourier (con periodo 2π).

Questo tipo di procedura può essere utilizzato per conoscere le forze d'interfaccia tra pneumatico-cerchio in tutte le condizioni (marcia rettilinea, veicolo in curva, etc.). In questo caso si è però deciso di mostrare le equazioni relative al veicolo fermo.

$$p_x(x, \varphi) = a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) * \cos(n\varphi);$$

$$p_\varphi(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) * \sin(n\varphi); \quad (1.16)$$

$$p_r(x, \varphi) = c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) * \cos(n\varphi);$$

Scrivendo in questa forma anche gli spostamenti (u, v e w), le deformazioni ($\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi$ e $\gamma_{x\varphi}$) e gli sforzi agenti sulla membrana ($N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}$) il problema si riconduce alla determinazione dei coefficienti di Fourier. In questo modo è poi possibile conoscere le forze agenti sul cerchio in funzione della coordinata angolare.

Sostituendo le equazioni in serie appena scritte (Equazioni 1.16) nelle equazioni di equilibrio, nelle definizioni delle deformazioni e negli sforzi (Equazioni 1.7, 1.8, 1.9) si ottengono due set di equazioni differenziali (un set derivato rispetto a x e uno rispetto a φ), le cui soluzioni rappresentano i coefficienti di Fourier in funzione di x . Per risolverle è possibile utilizzare metodi standard, come per esempio la trasformata di Laplace (utilizzando l'integrale di convoluzione). La soluzione delle equazioni differenziali fornirà come risultato i coefficienti $u_0(x), w_0(x), \varepsilon_{x0}(x)$ e $\varepsilon_{\varphi0}(x)$ derivanti dal primo set di equazioni e $u_n(x), v_n(x), w_n(x), \varepsilon_{xn}(x), \varepsilon_{\varphi n}(x), \gamma_{x\varphi n}(x), N_{xn}(x), N_{x\varphi n}(x)$ derivanti dal secondo. Per quanto riguarda invece i coefficienti $u_0(0), u_n(0), v_n(0), N_{x0}(0), N_{xn}(0)$ sono calcolabili imponendo le condizioni al contorno.

Con riferimento alla Figura 1.6 consideriamo che le forze d'interazione p , citate in precedenza, possano essere considerate applicate ad una distanza L dal vincolo del cerchio. Definendo il vettore x , come $x \in [-L, L]$ è possibile arrivare alla forma dei coefficienti a, b, c :

$$\begin{aligned}
 a_0(x) &= \frac{P}{2r} * A_0 * \delta * (x - L), & a_n(x) &= \frac{P}{2r} * A_n * \delta * (x - L) \\
 b_n(x) &= \frac{P}{2r} * B_n * (x - L) \\
 c_0(x) &= \frac{PC_0}{2\pi r L}, & c_n(x) &= \frac{P}{2r} * C_n * \delta * (x - L)
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

C_0 è il coefficiente che rappresenta il contributo dell'innalzamento della pressione, $\delta(x)$ la funzione Delta di Dirac e il fattore $P/2r$ è introdotto per convenienza, in quanto sperimentalmente le forze applicate all'interfaccia variano linearmente con il carico verticale applicato P .

Sostituendo i coefficienti trovati (Equazioni 1.17) nelle espressioni di forza (Equazioni 1.16) è possibile conoscerne l'andamento. Alcuni esempi trovati con questo tipo di modellazione sono rappresentati dalle figure sottostanti.

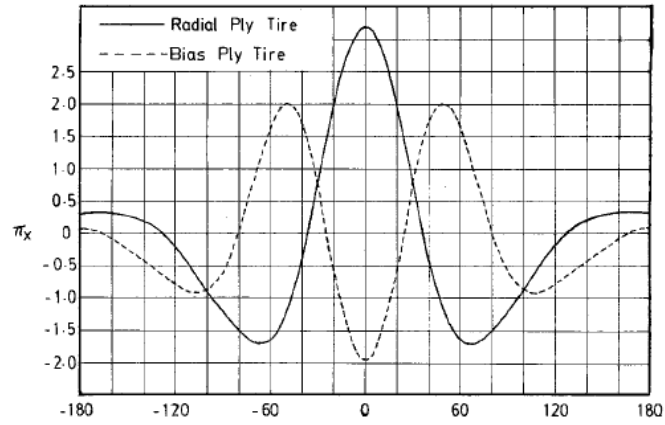


Figura 1.8: Forze assiali applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare)

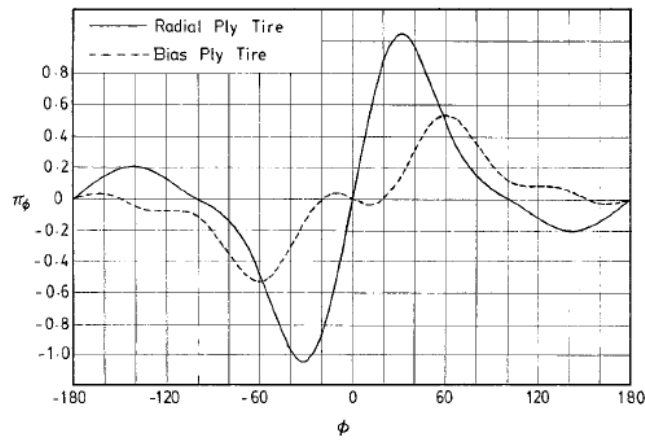


Figura 1.9: Forze circolari applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare)

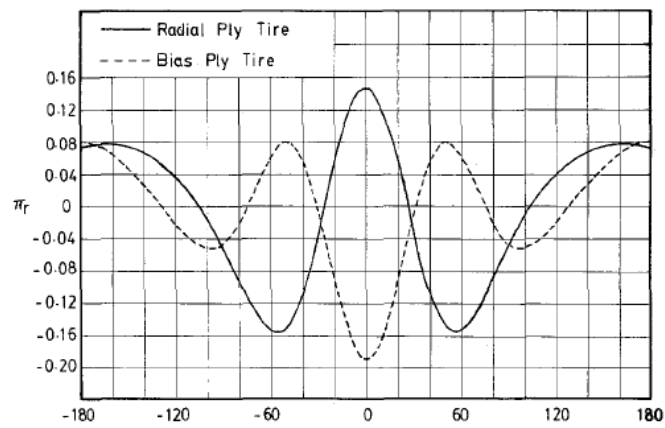


Figura 1.10: Forze radiali applicate al cerchio (in funzione della coordinata angolare)

1.1.3 Modello ad elementi finiti dell'interfaccia pneumatico-cerchio

La modellazione ad elementi finiti è uno strumento molto utilizzato in vari tipi di analisi. Con questo metodo è possibile trovare gli stati di sforzo, le deformazioni, l'andamento di temperature all'interno di un oggetto e tante altre caratteristiche, solo fornendo dati geometrici e strutturali al calcolatore. Con l'avvento di macchine sempre più potenti negli ultimi anni questo tipo di modellazione sta diventando l'alternativa più usata rispetto ad altri tipi di modelli. Anche nell'ambito dell'interazione pneumatico-cerchio sono stati sviluppati alcuni modelli fem. Uno di questi è il seguente.

Lo scopo di questo modello è di calcolare la distribuzione di pressioni nell'interfaccia pneumatico cerchio, la variazione della pressione di gonfiaggio e l'andamento delle forze centrifughe dovute ai diversi carichi applicati alla gomma.

Come è possibile notare in Figura 1.11 il sistema è stato scomposto in tre parti:

- Gomma (mescola): simulata da elementi in elastomero incomprimibili, aventi proprietà non lineari (descritte dal modello Mooney-Rivlin);
- Cintura, tele della carcassa e sede del tallone: simulata da elementi composti
- Gap *elements*: Elementi che simulano il gap tra gomma e cerchio.

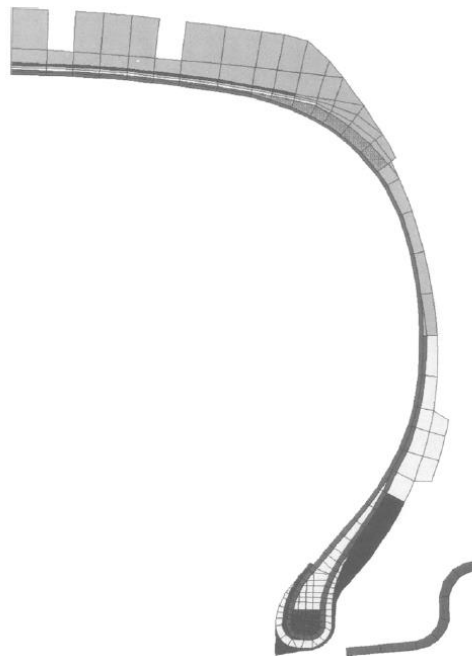


Figura 1.11: Modellazione ad elementi finiti della gomma e del tallone del cerchio (1/4 di pneumatico)

Il gap appena descritto, assumerà valore finito quando la pressione di gonfiaggio sarà nulla, mentre diminuirà mano a mano che la gomma si gonfia.

La funzione di questi elementi sarà, come descritto in seguito, di fornire le pressioni di contatto all'interfaccia [2].

1.1.3.1 Modello per elastomero (mescola)

In molte circostanze è valida l'ipotesi che essi si comportino come materiali incomprimibili. Un'ulteriore ipotesi da considerare è che gli elementi in elastomero sono considerati elasticamente non lineari con proprietà viscoelastica trascurabile.

Le proprietà non lineari di questi elementi sono descritte mediante il modello Mooney-Rivlin:

$$W(I_1, I_2) = C_{10} * (I_1 - 3) + C_{01} * (I_2 - 3) \quad (1.18)$$

I_1 e I_2 sono gli invarianti del tensore di deformazione del primo e del secondo ordine rispettivamente [2]. Il modulo di Young E è correlato alle costanti C_{10} e C_{01} secondo questa formula:

$$E = 6 * (C_{10} + C_{01}) \quad (1.18)$$

Le costanti sopracitate sono trovate sperimentalmente sottoponendo la gomma ad elongazioni quasi statiche.

1.1.3.2 Modello elementi composti (cintura, tele della carcassa e sede del tallone)

Questi elementi costituiscono la parte più sollecitata della gomma. In questo caso si è deciso di utilizzare un materiale equivalente per simulare il comportamento di questa parte di pneumatico. La formulazione delle caratteristiche di questo materiale è dettata dalle equazioni di Halpin-Tsai.

Queste equazioni derivano dal modello "A self-consistent mechanics of composite materials" sviluppato da Hill [11]. La teoria su cui si basa lo studio è che è possibile ipotizzare dei materiali, quali i polimeri cristallini come un materiale composto solido multifase [10]. Le formule proposte sono quindi in grado di ricavare il modulo di questo materiale "approssimato":

$$\frac{\bar{E}}{E_m} \cong \frac{1 + \xi\eta\varphi}{1 - \eta\varphi} \quad (1.19)$$

Con η :

$$\eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \xi} \quad (1.20)$$

1.1.3.3 Modello per il gap

Come già detto in precedenza il gap assume un valore finito quando la pressione di gonfiaggio è nulla e mano a mano che lo pneumatico viene gonfiato, questo gap si riduce. E' facile intuire che fino a che il gap rimane aperto, idealmente le forze applicate al cerchio stesso sono nulle. Inoltre, quando il gap è chiuso, le forze scambiate fra i due corpi dipendono dalla condizione di equilibrio e dalla legge di attrito fra essi [2].

Sotto le ipotesi di materiale non lineare e completamente comprimibile, la relazione sforzo deformazione è approssimata in questo modo:

$$3S = E * (1 - 1/L^2) \quad (1.21)$$

Dove S è lo stato di sforzo determinato dal modello Piola-Kirchhoff, L il rapporto di estensione ed E il modulo di Young del materiale. Per questi elementi è stato scelto un valore di quest'ultimo molto basso: da 1/10000 fino a 1/50000 dovuto al fatto che questi elementi sono fittizi e devono interferire il meno possibile nel calcolo delle forze.

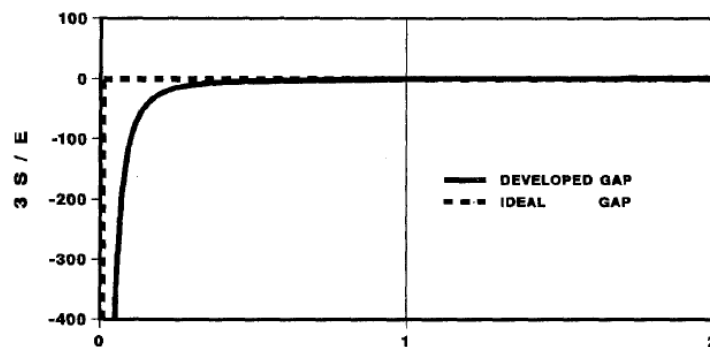


Figura 1.12: Confronto tra il gap modellato e quello fisico

Perciò la distribuzione delle pressioni sul cerchio sarà direttamente rappresentata dallo stato di sforzo degli elementi che costituiscono il gap. E' possibile notare dalle figure sottostanti come il modello riesca a stimare con buona approssimazione la pressione di contatto sul cerchio. I dati numerici sono stati confrontati con dati sperimentali ottenuti da misurazioni.

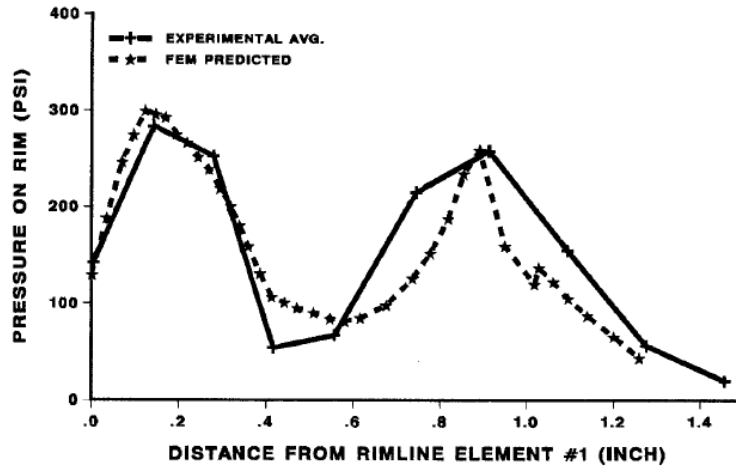


Figura 1.13: Confronto tra dati sperimentali e analitici ad una certa pressione di gonfiaggio di 241 kPa

Con quest'altro grafico invece (Figura 1.14) è possibile vedere l'influenza della pressione sul cerchio ad una certa velocità di rotazione della ruota. Lo studio è stato condotto senza carico verticale, come se la ruota fosse sollevata da terra, considerando quindi solo la componente di forza centrifuga che tende a sollevare il bordo della gomma.

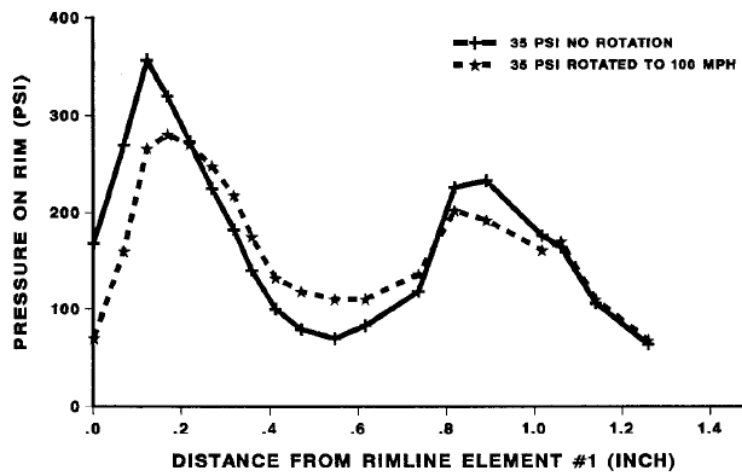


Figura 1.14: Confronto tra ruota ferma e ruota in movimento a 160 km/h

Come ultimo grafico si è deciso di presentare l'andamento della pressione in funzione della coordinata angolare considerando un carico verticale applicato (a simulare l'impronta di contatto). La coordinata 0° è quella in corrispondenza dell'orma di contatto mentre a 180° si trova la parte di gomma più lontana dall'asfalto.

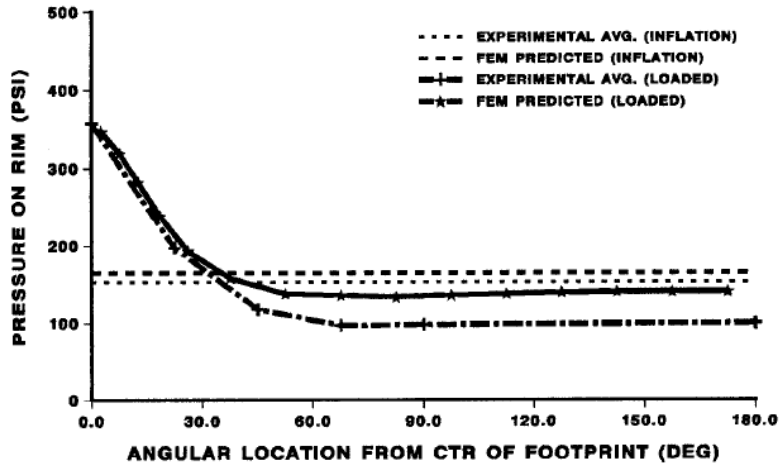


Figura 1.15: Confronto analitico-sperimentale lungo tutto il cerchio

Anche in questo caso i dati forniti dalla simulazione sono stati confrontati con dati sperimentali ottenuti mediante misure.

1.2 Altre applicazioni di modelli di pneumatico

Questa parte di lavoro ha lo scopo di illustrare i numerosi campi applicativi dei modelli analitici di pneumatico trovati in letteratura. Precisamente, i seguenti paragrafi mostrano come lo stesso modello possa essere adattato per lo studio di tematiche diverse. Il modello di cui si sta parlando, ovvero il modello ad anello rigido, sarà utilizzato nei seguenti capitoli per lo studio delle reazioni che si formano sul cerchio. Si è quindi deciso di mostrare i diversi campi di applicazione di un modello tuttora molto utilizzato.

Il primo paragrafo vuole porre l'attenzione sui fenomeni di vibrazione dello pneumatico, calcolando le risonanze e i rispettivi modi di vibrare. Nel secondo sono riportate diverse applicazioni d'interesse, quali lo studio del comfort del veicolo e le forze che si generano causate dal contatto pneumatico strada.

1.2.1 Modello ad anello rigido su fondazione elastica per il calcolo di fenomeni vibratorii

La conoscenza delle frequenze naturali e dei rispettivi modi di vibrare sono alla base dello studio delle vibrazioni di uno pneumatico. Il modello proposto utilizza un anello rigido collegato con il centro ruota mediante una fondazione elastica [3, 5].

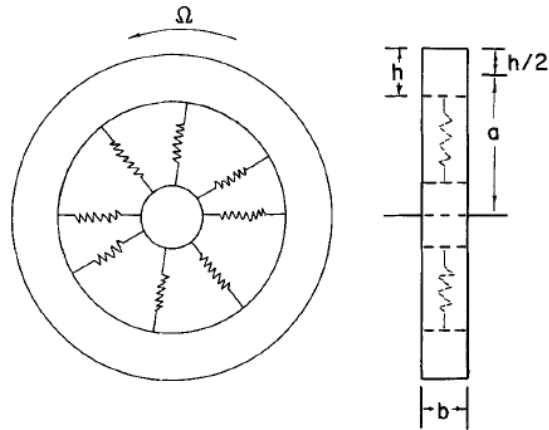


Figura 1.16: Anello rigido su fondazione elastica

Lo scopo di quest'analisi è, come specificato in precedenza, calcolare frequenze proprie relative ai modi di vibrare dello pneumatico. Esse verranno calcolate sia nel caso di rotazione libera (senza forze applicate) che nel caso in cui ci siano applicate delle forze, precisamente una forza radiale e una coppia (in modo da simulare il contatto pneumatico-strada in condizione di coppia motrice o frenante). Nel caso di rotazione libera per il calcolo delle grandezze d'interesse viene utilizzato l'approccio dei moltiplicatori di Lagrange.

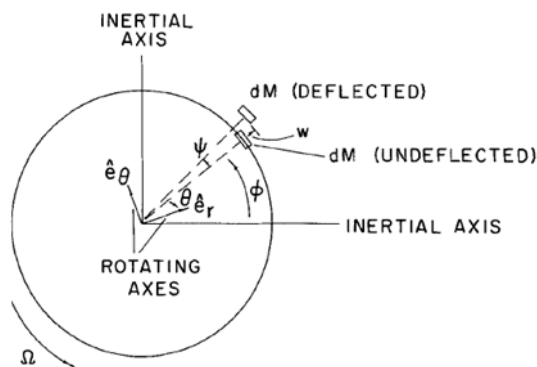


Figura 1.17: Elemento infinitesimo

Il primo passo è considerare un elemento infinitesimo dell'anello rigido di massa dM e scrivere tutti i contributi energetici che lo interessano. L'energia cinetica T e l'energia elastica V , composta da vari contributi: $V1$ e $V2$ (energie elastica della fondazione in direzione radiale e torsionale), $V3$ (energia curvatura anello rigido) e $V4$ (deformazione corda).

Dopo aver definito i contributi energetici si definisce la funzione di Lagrange come differenza tra energia cinetica e potenziale. La risoluzione di questa equazione, sviluppata in serie di Fourier, fornirà come output le frequenze proprie e i modi di vibrare dello pneumatico in rotazione libera. Per il caso di vibrazioni in moto forzato il procedimento è il medesimo, introducendo però la forza radiale e la coppia come forze generalizzate nelle equazioni di Lagrange.

Nelle figure sottostanti sono rappresentati alcuni dei modi di vibrare di uno pneumatico e la relativa frequenza propria.

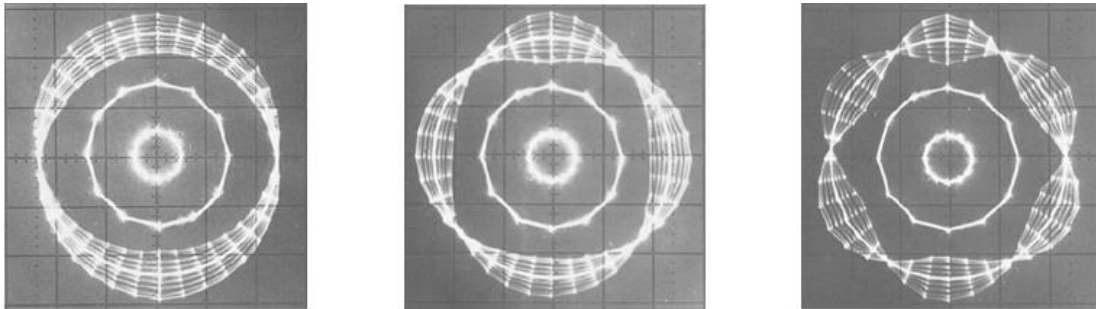


Figura 1.18: Rappresentazione dei primi tre modi di vibrare dello pneumatico, le frequenze naturali sono rispettivamente 63, 89 e 109 Hz.

Oltre a frequenze proprie e modi di vibrare è stata studiata la trasmissibilità delle vibrazioni. Essa è definita come il rapporto tra l'ampiezza di accelerazione riscontrata sull'asse del veicolo e lo spostamento effettivo (in direzione radiale) dell'impronta di contatto. Questo coefficiente va misurato per ogni frequenza ed è riportato sull'asse y del grafico sottostante.

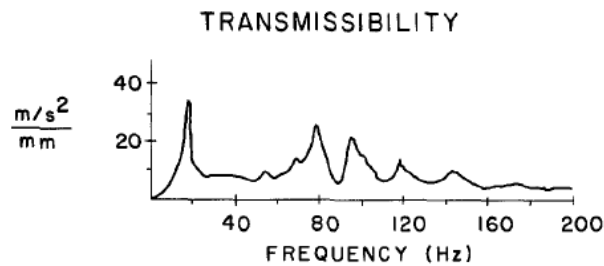


Figura 1.19: Trasmissibilità di uno pneumatico radiale FR70-14 con pressione di gonfiaggio 165 kPa.

Da questo studio risulta che la trasmissione massima delle vibrazioni si verifica in corrispondenza delle anti-risonanze dei modi di vibrare considerati.

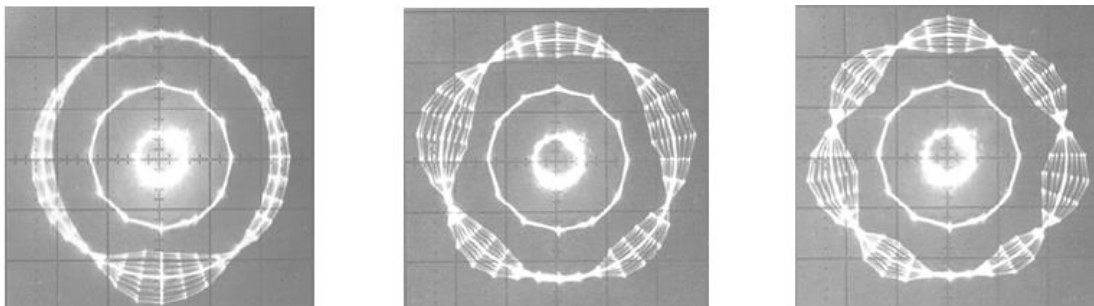


Figura 1.20: Anti-risonanze dei primi tre modi di vibrare, 80, 99 e 120 Hz

1.2.2 Modello bidimensionale ad anello rigido

Utilizza come approssimazione della carcassa un anello rigido [4, 5]. Quest'ultimo è collegato al centro ruota mediante molle e smorzatori che vincolano i due corpi sia per quanto riguarda i movimenti di traslazione, sia per quanto riguarda quelli di rotazione.

Oltre allo pneumatico, il modello propone un'approssimazione del contatto tra l'anello rigido e la superficie stradale sempre mediante molle e smorzatori.

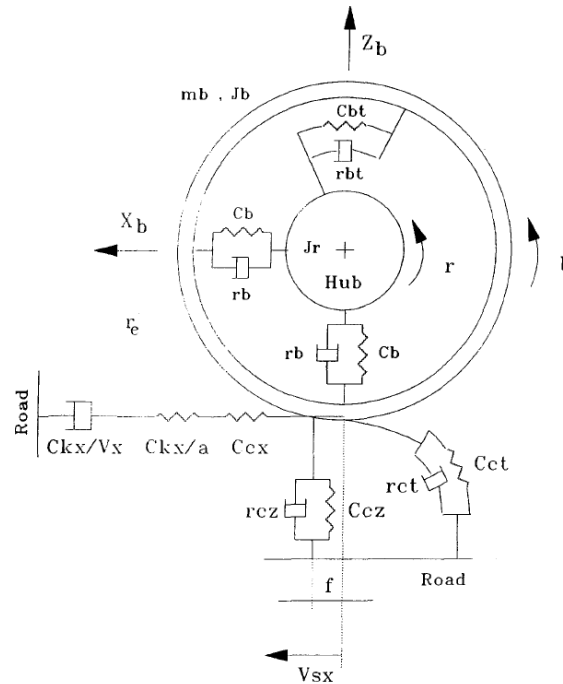


Figura 1.21: Modello bidimensionale dello pneumatico

Questo tipo di modello può essere utilizzato in svariate applicazioni, dallo studio del comfort, delle forze di contatto in accelerazione o frenata allo studio del comportamento del sistema Anti-Lock Braking System (ABS).

La configurazione mostrata in Figura 1.21 tiene conto dei seguenti parametri:

- m_b e J_b : massa e momento d'inerzia dell'anello rigido (che rappresenta il battistrada, cintura e carcassa);
- J_r : momento d'inerzia della ruota
- r_e : raggio effettivo di rotolamento
- Molle e smorzatori in direzione radiale, longitudinale e torsionale

- Un modello del primo ordine che sostituisce il modello “brush” in grado di tenere conto dello slittamento longitudinale della gomma.

Per determinare i parametri di un qualsiasi modello è possibile operare mediante misurazioni fisiche e/o mediante identificazione dei parametri. In questo preciso caso per lo studio del comfort sono stati misurati i parametri strutturali della ruota (m_b , J_b , J_r e r_e) e alcuni valori di smorzamento (r_{bt} , c_{bt} e c_{kx}). I valori di rigidezza e i rimanenti coefficienti di smorzamento sono stati trovati mediante identificazione dei parametri (C_b , C_{ct} , C_{cz} , C_{ct} , r_b , r_{cz} e r_{ct}).

CAPITOLO 2

Modello analitico radiale

In questo capitolo verrà presentato il modello a trave curvilinea che verrà utilizzato per modellare la cintura dello pneumatico e successivamente verranno calcolate le reazioni sul cerchio derivanti dal contributo del gonfiaggio e dal carico radiale applicato. I parametri di cui ha bisogno il modello sono quattro: il valore di costante elastica distribuita k , il valore di EJ della trave, il raggio dello pneumatico e quello del cerchio. I primi due parametri non sono ancora noti e verranno sottoposti ad un processo identificativo (Capitolo 2), mentre gli ultimi due assumono rispettivamente i valori di 373,8 mm e 241,3 mm.

2.1 Modello a trave curvilinea

Come prima cosa è necessario modellare la cintura dello pneumatico. Per questa parte è stato scelto un modello a trave curvilinea. Fisicamente il modello si presenta come una trave curvilinea circolare bidimensionale, caratterizzata da un proprio momento d'inerzia EJ e vincolata al cerchio mediante delle molle distribuite lungo tutta la circonferenza della trave stessa.

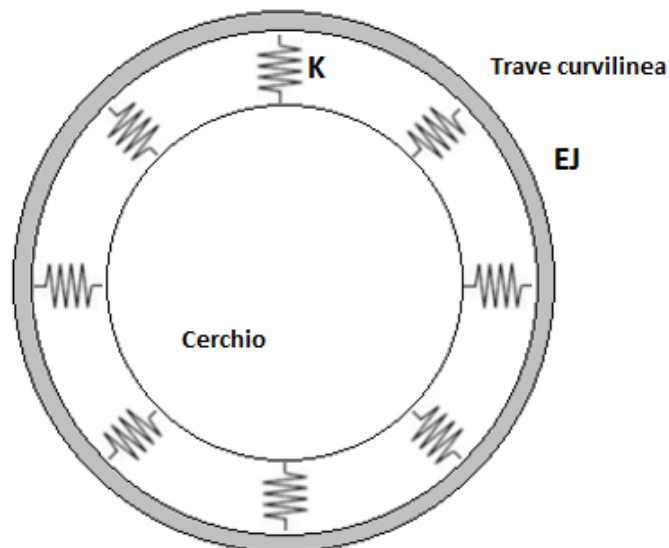


Figura 2.1: Schema collegamento trave-cerchio

2.1.1 Equazione della linea elastica

In questo paragrafo verrà analizzato il comportamento cinematico della trave per arrivare alla definizione dell'equazione della linea elastica.

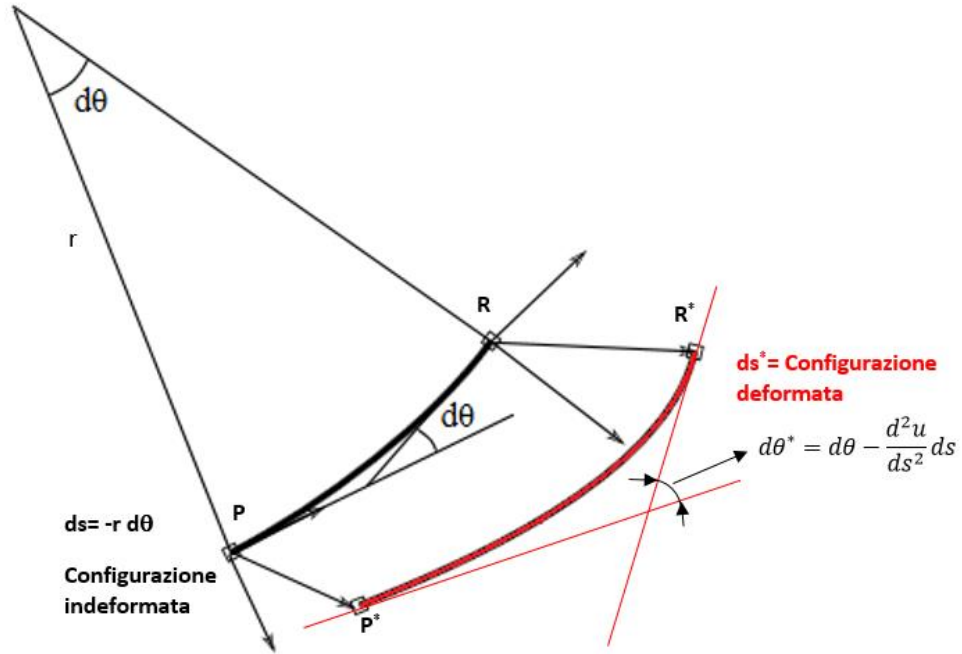


Figura 2.2: Definizione della cinematica della trave deformata

Si definisce per prima cosa il tratto ds , ovvero la parte infinitesima di trave indeformata compresa tra il punto P e il punto R .

$$ds = -r d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{ds} \quad (2.1)$$

Nel caso di configurazione deformata, i cui elementi sono definiti mediante l'apice $*$, la definizione di ds^* varia in accordo con lo spostamento radiale u :

$$ds^* = (-r + u) d\theta = (-r + u) \frac{ds}{-r} \quad \rightarrow \quad ds^* = \left(1 - \frac{u}{r}\right) ds \quad (2.2)$$

Come riporta la Figura 2.2, la configurazione deformata ha un angolo $d\theta^*$ differente, espresso in questo modo:

$$d\theta^* = d\theta - \frac{d^2u}{ds^2} ds \quad (2.3)$$

Ora è quindi possibile scrivere l'equazione n per la configurazione deformata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} &= -\frac{d\theta^*}{ds^*} = -\frac{\left(d\theta - \frac{d^2u}{ds^2} ds\right)}{\left(1 - \frac{u}{r}\right) ds} = -\frac{\left(d\theta - \frac{d^2u}{ds^2} ds\right)}{\left(1 - \frac{u}{r}\right) ds} * \frac{\left(1 + \frac{u}{r}\right)}{\left(1 + \frac{u}{r}\right)} = \\ &= -\frac{\left(d\theta - \frac{d^2u}{ds^2} ds\right)}{ds} * \frac{\left(1 + \frac{u}{r}\right)}{\left(1 + \frac{u^2}{r^2}\right)} \cong -\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2}\right) * \left(1 + \frac{u}{r}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ricordando l'equazione 2.2 e trascurando i termini di ordine superiore si ottiene:

$$\frac{1}{r^*} \cong \frac{1}{r} + \frac{1}{r} * \frac{u}{r} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{d^2u}{ds^2} * \frac{u}{r} \cong \frac{1}{r} + \frac{u}{r^2} + \frac{d^2u}{ds^2} \quad (2.5)$$

Introducendo la relazione nota [5, 13]

$$\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r} = -\frac{M}{EJ} \quad (2.6)$$

Si arriva all'equazione finale della linea elastica della trave curvilinea:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (2.7)$$

Quest'ultima può essere infine espressa in funzione della coordinata θ e risulta essere quindi:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Mr^2}{EJ} \quad (2.8)$$

2.1.2 Equazioni di equilibrio dell'arco

Al fine di ricavare le equazioni di equilibrio della trave ad asse curvilineo viene definito come prima cosa l'elemento infinitesimo di trave e le relative convenzioni di segno.

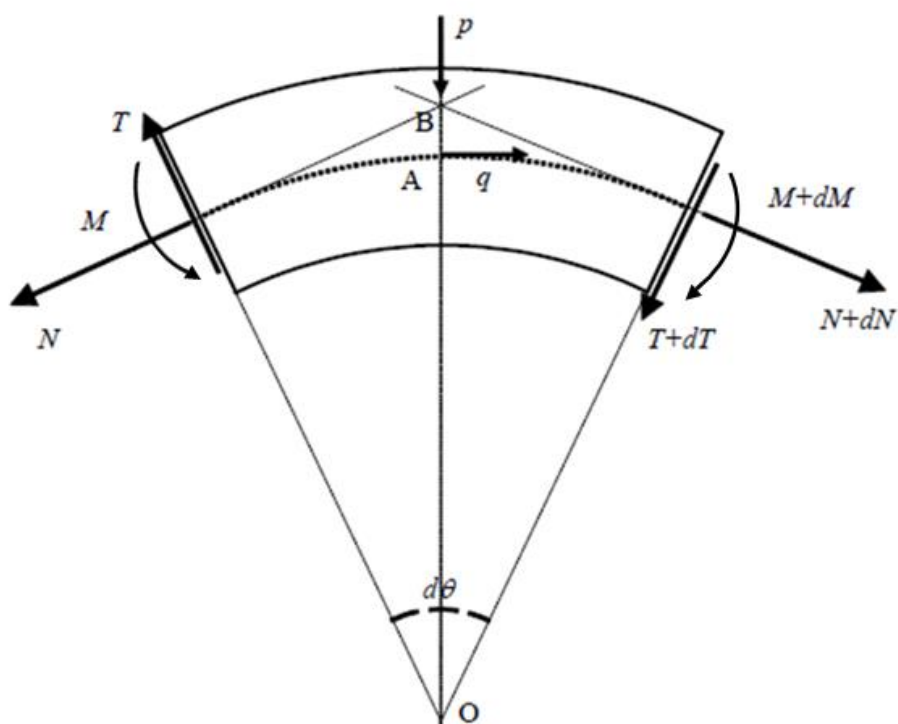


Figura 2.3: Tratto infinitesimo della trave ad asse curvilineo soggetto ad azioni interne

Il raggio r nelle equazioni è il segmento che unisce il centro O alla linea mediana dell'asse della trave, ovvero il segmento OA . Imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale, a quella orizzontale e alla rotazione si ottengono rispettivamente le seguenti equazioni:

$$T \cos \frac{d\theta}{2} + N \sin \frac{d\theta}{2} + pr d\theta - (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} + (N + dN) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2.9)$$

$$-N \cos \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} + qr d\theta + (N + dN) \cos \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} -M - Tr \tan \frac{d\theta}{2} + qr d\theta \left(\frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - (T + dT)r \tan \frac{d\theta}{2} + M + \\ + dM + mr d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Poiché si sta considerando un tratto infinitesimo di trave è possibile apporre le seguenti approssimazioni:

$$\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \quad e \quad \tan \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}. \quad (2.12)$$

Inoltre gli infinitesimi di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quelli del primo ordine e quindi non vanno presi in considerazione. Le equazioni risulteranno quindi:

$$N d\theta + pr d\theta - dT = 0 \quad (2.13)$$

$$-T d\theta + qr d\theta + dN = 0 \quad (2.14)$$

$$-Tr d\theta + dM + mr d\theta = 0 \quad (2.15)$$

Dividendo ora tutte le equazioni per il differenziale $d\theta$ si possono scrivere le equazioni in forma esplicita.

$$\frac{dT}{d\theta} = N + pr \quad (2.16)$$

$$\frac{dN}{d\theta} = T - qr \quad (2.17)$$

$$\frac{dM}{d\theta} = TR - mr \quad (2.18)$$

Nel caso specifico che si vuole analizzare il contributo di forzante esterna che viene applicato alla trave è solo quello radiale ($p \neq 0$), perciò i termini relativi alla direzione tangenziale (Equazione 2.17) e quelli relativi alla coppia (Equazione 2.18) saranno nulli ($q=0$ e $m=0$). Essendo la trave curvilinea collegata al cerchio mediante delle molle con costante elastica k si può scrivere il carico p in funzione di k e della deformata della trave stessa:

$$p = -k * u(\vartheta) \quad (2.19)$$

Sostituendo l'equazione 2.19 nell'equazione 2.16 e considerando nulli i contributi q ed m le equazioni differenziali sopra descritte assumeranno quindi la seguente forma:

$$\frac{dT}{d\theta} = N + ku(\vartheta)r \quad (2.20)$$

$$\frac{dN}{d\theta} = -T \quad (2.21)$$

$$\frac{dM}{d\theta} = Tr \quad (2.22)$$

Derivando l'equazione 2.22 e sostituendo all'interno di essa la 2.20 si ottiene:

$$\frac{d^2M}{d\theta^2} = \frac{dT}{d\theta} * r = r * (N + ku * r) = N * r + ku * r^2 \quad (2.23)$$

Derivando ora due volte l'equazione della linea elastica e sostituendone il risultato all'interno di quest'ultima l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d^4u}{d\theta^4} + \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{d^2M}{d\theta^2} * \frac{r^2}{EJ} = -(N * r + ku * r^2) * \frac{r^2}{EJ} \\ \frac{d^4u}{d\theta^4} + \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{kr^4}{EJ} * \frac{du}{d\theta} &= -\frac{r^3}{EJ} * \frac{dN}{d\theta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Considerando ora la seconda e la terza equazione di equilibrio descritta in precedenza (Equazione 2.21 e 2.22) e sostituendola all'interno della 2.24 si ottiene:

$$\frac{dN}{d\theta} = \frac{-dM}{r d\theta} = \frac{EJ}{r} * \left(\frac{d^3u}{d\theta^3 * r^2} + \frac{du}{d\theta * r^2} \right) \quad (2.25)$$

Sostituendo all'interno dell'equazione 2.24 il termine $dN/d\theta$ appena trovato (Equazione 2.25) e raccogliendo i termini opportuni è possibile arrivare alla scrittura dell'equazione differenziale omogenea del quinto ordine:

$$\frac{d^5u}{d\theta^5} + 2 \frac{d^3u}{d\theta^3} + \left(\frac{kr^4}{EJ} + 1 \right) * \frac{du}{d\theta} = 0 \quad (2.26)$$

Sarà questa l'equazione da risolvere in grado di fornire lo spostamento u di ogni punto della trave al variare della coordinata teta. Successivamente sarà poi possibile aggiungere alla destra dell'uguale un qualsiasi tipo di carico per sapere come si comporta la trave soggetta a delle forzanti esterne.

2.1.3 Soluzione dell'equazione differenziale

L'equazione differenziale di quinto ordine (Equazione 2.26) verrà risolta considerando un carico concentrato applicato alla trave (Figura 2.4). Una volta che sarà risolta sarà poi possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per trovare la soluzione con carico distribuito.

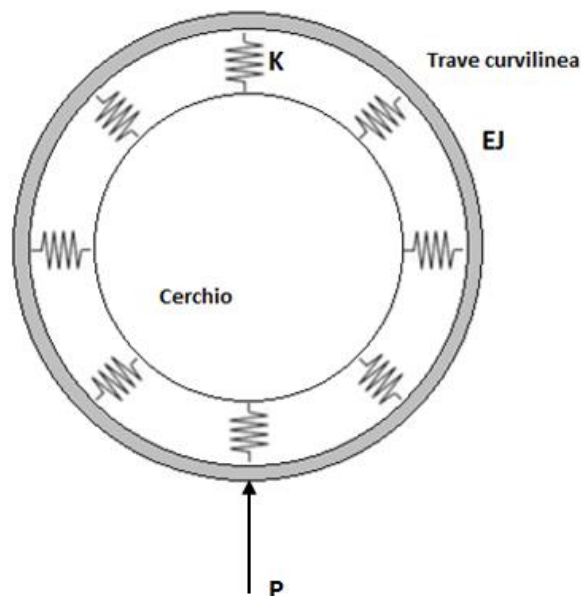


Figura 2.4: Carico concentrato applicato alla trave

Come tutte le equazioni differenziali il primo passo da fare è trovare la soluzione generale del problema per poi proseguire con la risoluzione applicando il carico.

Soluzione generale:

$$u(\vartheta) = U_0 * e^{\omega\vartheta} \quad (2.27)$$

Perciò l'equazione caratteristica, ottenuta sostituendo la soluzione generale all'interno della 2.26 e operando le opportune derivate, sarà:

$$\left(\omega^5 + 2\omega^3 + \left(\frac{kr^4}{EJ} + 1 \right) \omega \right) * U_0 * e^{\omega\vartheta} = 0 \quad (2.28)$$

Per comodità il termine $\left(\frac{kr^4}{EJ} + 1 \right)$ verrà chiamato γ^2 . Escludendo le soluzioni banali e raccogliendo ω si ottengono le cinque radici dell'equazione:

$$(\omega^4 + 2\omega^2 + \gamma^2) * \omega = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_{2,3} = \alpha \pm i\beta \\ \omega_{4,5} = -\alpha \pm i\beta \end{cases} \quad (2.29)$$

Con α e β che assumono i seguenti valori:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \end{cases} \quad (2.30)$$

Adesso è possibile scrivere la soluzione omogenea dell'equazione, conoscendone le radici:

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= U_1 * e^{\omega_1\vartheta} + U_2 * e^{\omega_2\vartheta} + U_3 * e^{\omega_3\vartheta} + \\ &\quad + U_4 * e^{\omega_4\vartheta} + U_5 * e^{\omega_5\vartheta} = \\ &= U_1 + U_2 * e^{(\alpha+i\beta)\vartheta} + U_3 * e^{(\alpha-i\beta)\vartheta} + \\ &\quad + U_4 * e^{(-\alpha+i\beta)\vartheta} + U_5 * e^{(-\alpha-i\beta)\vartheta} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La soluzione 2.31 appena trovata può essere riscritta come somma di seni e coseni in accordo con le formule di Eulero:

$$\begin{cases} e^{i\beta\vartheta} = (\cos(\beta\vartheta) + i\text{sen}(\beta\vartheta)) \\ e^{-i\beta\vartheta} = (\cos(\beta\vartheta) - i\text{sen}(\beta\vartheta)) \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} u(\vartheta) = & U_1 + U_2 * e^{\alpha\vartheta} * (\cos(\beta\vartheta) + i\text{sen}(\beta\vartheta)) + \\ & + U_3 * e^{\alpha\vartheta} * (\cos(\beta\vartheta) - i\text{sen}(\beta\vartheta)) + \\ & + U_4 * e^{-\alpha\vartheta} * (\cos(\beta\vartheta) + i\text{sen}(\beta\vartheta)) + \\ & + U_5 * e^{-\alpha\vartheta} * (\cos(\beta\vartheta) - i\text{sen}(\beta\vartheta)) = \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} = & U_1 + e^{\alpha\vartheta} * ((U_2 + U_3) * \cos(\beta\vartheta) + i * (U_2 - U_3) * \text{sen}(\beta\vartheta)) + \\ & + e^{-\alpha\vartheta} * ((U_4 + U_5) * \cos(\beta\vartheta) + i * (U_4 - U_5) * \text{sen}(\beta\vartheta)). \end{aligned}$$

Raggruppando le costanti si ottiene:

$$\begin{cases} U_2 + U_3 = B_1 \\ i * (U_2 - U_3) = B_2 \\ U_4 + U_5 = B_3 \\ i * (U_4 - U_5) = B_4 \end{cases} \quad (2.34)$$

Vengono ora introdotte altre equazioni che legano l'elemento esponenziale rimasto a funzioni di seno e coseno iperboliche.

$$\begin{cases} e^{\alpha\vartheta} = (\cosh(\alpha\vartheta) + \text{senh}(\alpha\vartheta)) \\ e^{-\alpha\vartheta} = (\cosh(\alpha\vartheta) - \text{senh}(\alpha\vartheta)) \end{cases} \quad (2.35)$$

L'equazione che si ottiene è:

$$\begin{aligned} u(\vartheta) = & U_1 + (\cosh(\alpha\vartheta) + \text{senh}(\alpha\vartheta)) * (B_1 * \cos(\beta\vartheta) + B_2 * \text{sen}(\beta\vartheta)) + \\ & + (\cosh(\alpha\vartheta) - \text{senh}(\alpha\vartheta)) * (B_3 * \cos(\beta\vartheta) + B_4 * \text{sen}(\beta\vartheta)) = \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} = & U_1 + \cos(\beta\vartheta) * ((B_1 + B_3) * \cosh(\alpha\vartheta) + (B_1 - B_3) * \text{senh}(\alpha\vartheta)) + \\ & + \text{sen}(\beta\vartheta) * ((B_2 + B_4) * \cosh(\alpha\vartheta) + (B_2 - B_4) * \text{senh}(\alpha\vartheta)). \end{aligned}$$

Infine, rinominando le costanti otteniamo la forma finale:

$$u(\vartheta) = C_0 + \cos(\beta\vartheta) * (C_1 * \cosh(\alpha\vartheta) + C_2 * \sinh(\alpha\vartheta)) + \quad (2.37)$$

$$+ \sin(\beta\vartheta) * (C_3 * \cosh(\alpha\vartheta) + C_4 * \sinh(\alpha\vartheta)).$$

Avendo definito la forma generale è necessario ora trovare i valori delle cinque costanti. Per farlo bisogna imporre altrettante condizioni al contorno e risolvere il sistema. Queste condizioni sono imposte imponendo il carico concentrato per un angolo $\theta=\pi$.

Le prime due sono di natura geometrica. Impongono la simmetria rispetto all'asse e garantiscono che non ci sia discontinuità nella deformata della trave. La terza e la quarta sono state trovate considerando le azioni interne, e l'ultima impone l'inestensibilità della trave.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=\pi} = 0 \\ \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=0} = 0 \\ T \Big|_{\vartheta=0} = 0 \\ T \Big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{P}{2} \\ \frac{r}{EJ} * \int_0^\pi M d\theta = 0 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Utilizzando ora le equazioni ricavate nel paragrafo precedente è possibile scrivere tutte e cinque le condizioni al contorno in funzione della deformata u.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=\pi} = 0 \\ \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=0} = 0 \\ -\frac{EJ}{r^3} * \left(\frac{d^3u}{d\theta^3} \Big|_{\vartheta=0} + \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=0} \right) = 0 \\ -\frac{EJ}{r^3} * \left(\frac{d^3u}{d\theta^3} \Big|_{\vartheta=\pi} + \frac{du}{d\theta} \Big|_{\vartheta=\pi} \right) = -\frac{P}{2} \\ \frac{r}{EJ} * \int_0^\pi \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) d\theta = 0 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Ora sostituendo all'interno delle condizioni al contorno l'equazione generale x e operando le opportune derivate, è possibile risolvere il sistema rispetto alle cinque incognite C . Il sistema può essere risolto a mano oppure mediante il calcolatore. In ogni caso i valori delle costanti saranno:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{P * r^3}{2\pi * EJ * \gamma^2} \\ C_1 = \frac{P * r^3 * (\alpha \cosh(\alpha\pi) * \text{sen}(\beta\pi) + \beta \cos(\beta\pi) * \text{senh}(\alpha\pi))}{2EJ\alpha\beta * (\alpha^2 + \beta^2) * (\cos(2\beta\pi) - \cosh(2\alpha\pi))} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = \frac{P * r^3 * (\beta \cosh(\alpha\pi) * \text{sen}(\beta\pi) - \alpha \cos(\beta\pi) * \text{senh}(\alpha\pi))}{2EJ\alpha\beta * (\alpha^2 + \beta^2) * (\cos(2\beta\pi) - \cosh(2\alpha\pi))} \end{cases} \quad (2.40)$$

Sostituendo i valori delle costanti appena trovate all'interno della soluzione generale dell'equazione differenziale è possibile conoscere l'andamento della deformata radiale u , in funzione di teta, per ogni valore di carico concentrato P . Oltre che dal carico l'equazione finale dipende dal raggio r dello pneumatico e dai parametri k ed EJ che verranno successivamente identificati.

2.1.4 Estensione del modello per il carico distribuito

La soluzione dell'equazione differenziale appena esposta è stata trovata considerando un solo carico concentrato P agente sulla trave. Sarà invece di fondamentale importanza conoscere come si comporta la trave soggetta ad un carico distribuito.

Mediante il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile definire il carico distribuito come somma di diversi carichi concentrati, applicati in vari punti della trave. La soluzione definitiva dell'equazione differenziale $u(\theta)$ (Equazione 2.37) sarà quindi la somma di tutte le soluzioni $u(\theta)$ per ogni carico concentrato.

La figura sottostante mostra schematicamente il principio di sovrapposizione degli effetti e la soluzione finale per il carico distribuito.

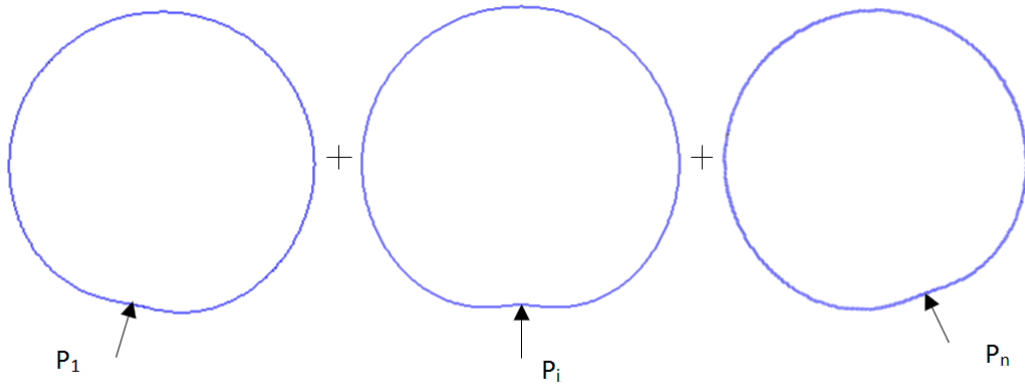


Figura 2.5: Carichi concentrati applicati in diversi punti della trave

Si considera ora un carico uniformemente distribuito in maniera simmetrica rispetto al punto centrale raffigurato nella Figura 2.5. L'intero carico sarà composto da n carichi concentrati di uguale intensità che agiranno in punti diversi della deformata. Nella figura 2.5 si sono riportati per comodità il valore dell'estremo sinistro del carico distribuito P_1 , il valore centrale P_i e il valore dell'estremo destro P_n . Ad ognuno di questi carichi concentrati corrisponde un valore di deformata $u(\vartheta)$ (Equazione 2.37), precisamente al carico P_1 sarà associata la soluzione $u_1(\vartheta)$, a P_i la soluzione $u_i(\vartheta)$ e a P_n la soluzione $u_n(\vartheta)$.

La soluzione $u(\vartheta)$ del modello a trave curvilinea sottoposto ad un carico distribuito sarà quindi la somma delle soluzioni u fornite dai singoli carichi concentrati che lo compongono (Equazione 2.41).

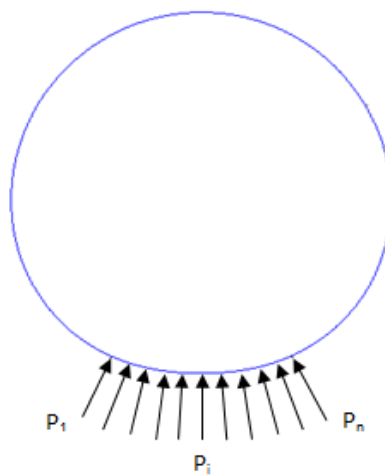


Figura 2.6: Carico distribuito visto come somma di carichi concentrati

$$u_{distr}(\vartheta) = u_1(\vartheta) + \dots + u_i(\vartheta) + \dots + u_n(\vartheta). \quad (2.41)$$

2.2 Definizione dell'orma di contatto

L'orma, per definizione, è l'unica parte dello pneumatico in contatto con il piano d'appoggio. E' perciò l'unica zona della gomma in grado di scambiare forze con il terreno. Essendo lo scopo di questo lavoro il calcolo delle reazioni all'interfaccia pneumatico cerchio, derivanti in parte dal contatto pneumatico strada, è facile intuire come l'approssimazione dell'orma di contatto influenzi il risultato finale.

Non avendo a disposizione delle misure sperimentali sono state condotte delle ricerche in letteratura volte a trovare un modello che calcoli con buona approssimazione la lunghezza dell'orma. Le caratteristiche ricercate sono state trovate nel modello empirico di H.B. Pacejka [8].

2.2.1 Modello di Pacejka

La grandezza fisica di cui si sta parlando e di cui si vuole approssimare il valore, è la lunghezza dell'orma di contatto, rappresentata nella figura 2.6:

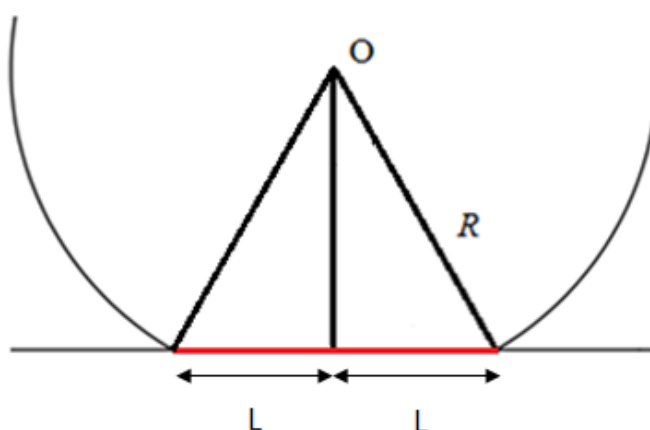


Figura 2.6: Definizione fisica dell'impronta di contatto

Il modello di Pacejka mette in relazione la semilunghezza dell'orma di contatto L con l'affondamento ΔZ e il raggio della ruota indeformata r_0 . Per completare il modello sono stati introdotti anche due coefficienti p_{a1} e p_{a2} trovati sperimentalmente. La formula che descrive la semilunghezza in funzione dei parametri descritti è la seguente:

$$L = p_{a1} \left(p_{a2} * \sqrt{\frac{\Delta Z}{r_0}} + \frac{\Delta Z}{r_0} \right) * r_0 \quad (2.42)$$

Questa forma fu proposta da Besselink (2000) e mostra come la lunghezza dell'orma di contatto sia una proprietà geometrica e che soprattutto dipende dall'affondamento imposto.

I coefficienti correttivi p_{a1} e p_{a2} sono stati ricavati sperimentalmente al banco considerando due tipi di piano d'appoggio: il primo considerando una superficie piatta e il secondo considerando l'appoggio dello pneumatico su un rullo di diametro esterno di 2,5 metri.



Figura 2.7: Test generico di uno pneumatico su superficie piatta

I coefficienti ricavati hanno i seguenti valori:

Pneumatico su superficie piatta $\longrightarrow p_{a1} = 0.35, p_{a2} = 2.25$

Pneumatico su rullo (d=2,5 m) $\longrightarrow p_{a1} = 0.45, p_{a2} = 1.25$

E' stato scoperto inoltre che questa formula è valida per un ampio *range* di pneumatici e può essere usata per diversi valori di pressione senza operare cambiamenti sui coefficienti [8]. Si adatta perciò molto bene a questo studio che comprende valori di pressione molto diversi fra loro.

Nel caso analizzato i coefficienti utilizzati per ricavare l'orma sono ovviamente quelli della superficie piatta, ovvero $p_{a1}=0.35$ e $p_{a2}=2.25$.

Di seguito è riportato l'andamento qualitativo della grandezza d'interesse in funzione dell'affondamento:

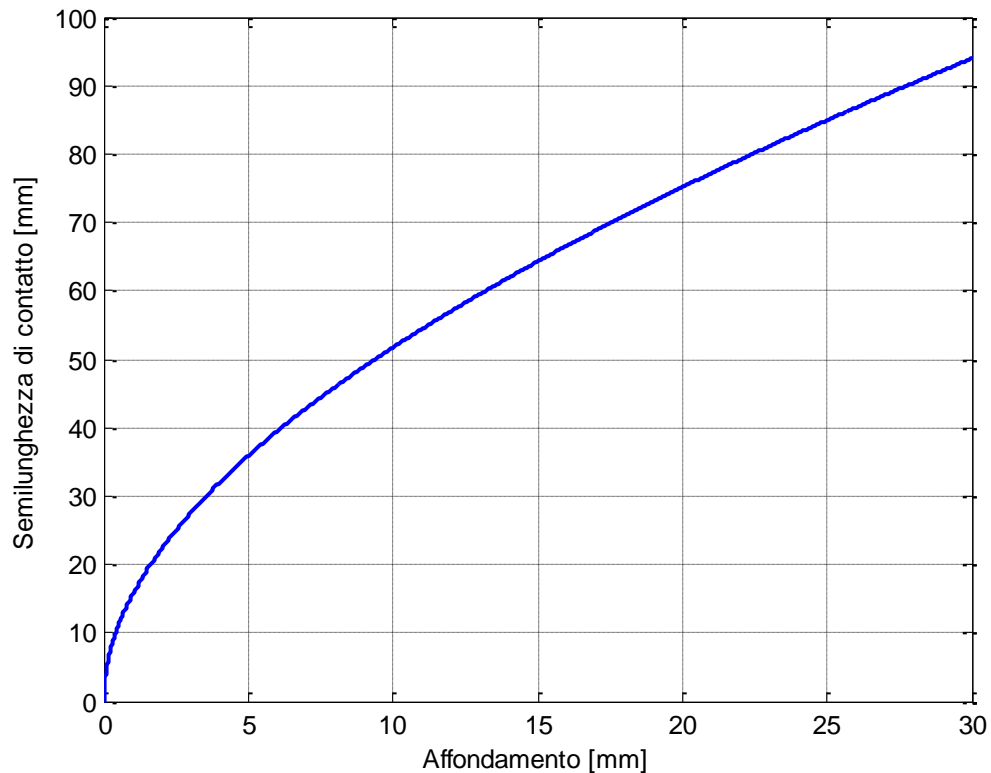


Figura 2.8: Andamento di L al variare dell'affondamento

Prima di procedere con la discretizzazione dell'orma si deve focalizzare l'attenzione sulla struttura del modello. Per come è stato concepito ha bisogno in ingresso del valore dell'orma di contatto L , in modo da poter distribuire il carico (altro input del modello) lungo quest'ultima.

Per come è stata descritta nell'equazione di Besselink (Equazione 2.42) essa vuole al suo interno il valore dell'affondamento ΔZ . Il problema sta nel fatto che ΔZ non è conosciuto prima dell'implementazione del modello. Non è quindi possibile definire il valore dell'orma di contatto.

E' stato perciò definito un metodo iterativo, implementato tramite l'algoritmo `fsolve` di Matlab, che parte da un valore di partenza di ΔZ_0 ipotizzato e arriva al valore $\Delta Z=U$ in output dal modello.

L'immagine sottostante mostra qualitativamente il metodo iterativo:

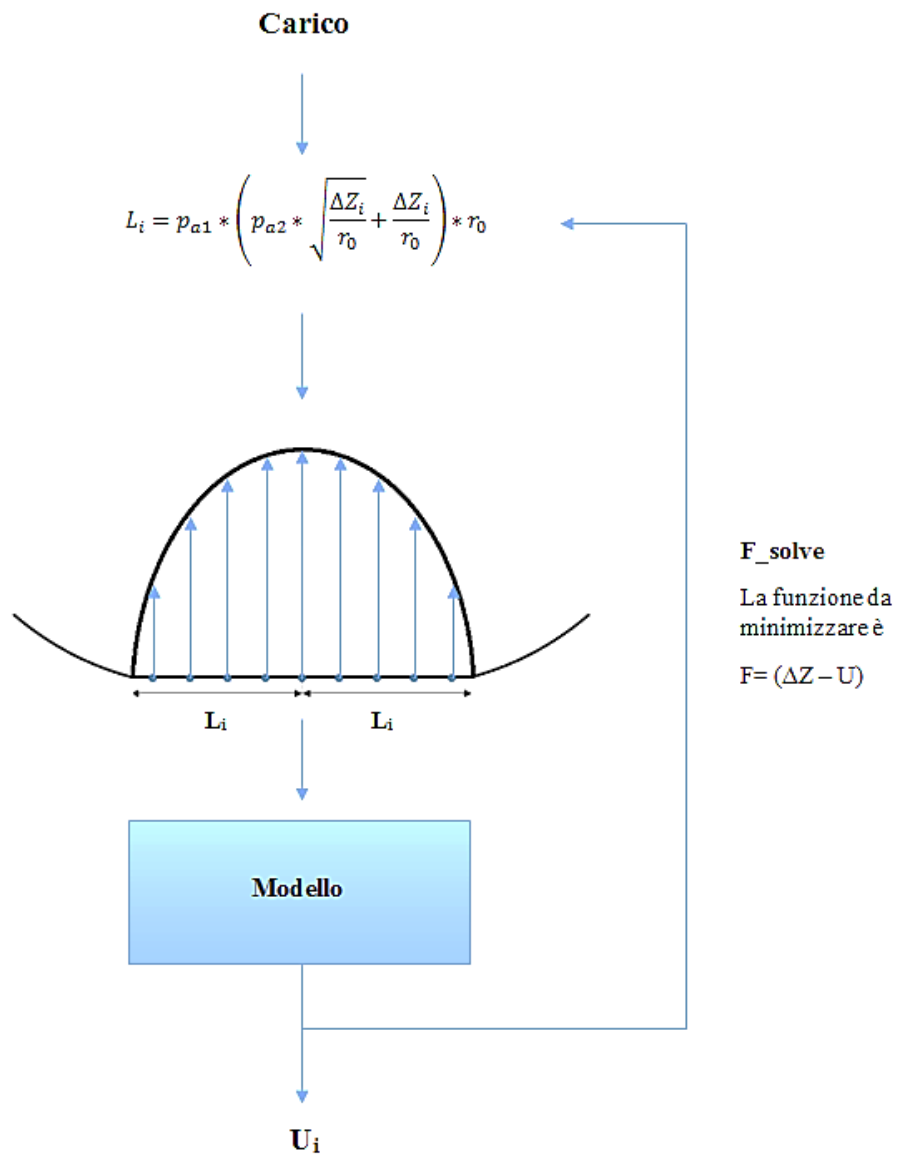


Figura 2.9: Schema di calcolo del metodo iterativo

Il primo *step* ($i=0$) sta nell'ipotizzare un valore di ΔZ_0 . E' stato scelto un valore pari a 10 mm.

$$\Delta Z_0 = 10 [mm]$$

Questo valore, inserito all'interno della formula L_i fornirà un determinato valore di L_0 :

$$L_0 = p_{a1} \left(p_{a2} * \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{r_0}} + \frac{\Delta Z_0}{r_0} \right) * r_0 \quad (2.43)$$

Utilizzando questo valore il carico verrà distribuito lungo L_0 (Figura 2.8) e verrà implementato il modello con questi valori. In output verrà fornito un valore di affondamento U_0 non necessariamente uguale a quello in ingresso ΔZ_0 . Se non sussiste l'uguaglianza l'algoritmo fsolve prenderà questo valore U_0 e lo reinsertirà a monte del modello nella formula di L_i .

Il valore di ΔZ all'iterazione successiva ($i=1$) corrisponderà al valore U all'iterazione precedente:

$$\Delta Z_1 = U_0 \quad (2.44)$$

In generale

$$\Delta Z_i = U_{i-1} \quad (2.45)$$

Questo processo iterativo si arresterà solo quando verrà trovato lo zero della funzione F , definita in questo modo:

$$F = \Delta Z - U \quad (2.46)$$

All'iterazione $i=n$ si avrà che il valore in input ΔZ_n sarà uguale al valore di output U_n

$$\Delta Z_n = U_n \quad (2.47)$$

Sarà questo ΔZ il valore corretto per lo svolgimento dei calcoli.

Sarebbe stato possibile, avendo a disposizione dei dati sperimentali (presentati nel Capitolo 3), calcolare la semi lunghezza dell'orma mediante i valori ottenuti durante le prove. In realtà nel procedimento appena svolto mediante algoritmo iterativo il modello risulta concettualmente più corretto e in grado di trovare il valore dell'affondamento semplicemente ipotizzandone uno iniziale.

I risultati ottenuti in termini di affondamento sono stati confrontati con i dati sperimentali del capitolo successivo:

Pressione 4.5		
	ΔZ sperimentale	ΔZ fsolve
Carico = 2000 N	4,78 mm	4,98 mm
Carico = 5000 N	11,96 mm	12,95 mm
Carico = 10000 N	21,52 mm	21,29 mm

Pressione 3.0		
	ΔZ sperimentale	ΔZ fsolve
Carico = 2000 N	6,45 mm	6,59 mm
Carico = 5000 N	16,12 mm	16,08 mm
Carico = 10000 N	29,01 mm	27,93 mm

Pressione 2.5		
	ΔZ sperimentale	ΔZ fsolve
Carico = 2000 N	7,32 mm	7,59 mm
Carico = 5000 N	18,31 mm	18,47 mm
Carico = 10000 N	32,96 mm	31,99 mm

Pressione 2.1		
	ΔZ sperimentale	ΔZ fsolve
Carico = 2000 N	8,03 mm	8,56 mm
Carico = 5000 N	20,07 mm	20,78 mm
Carico = 10000 N	36,13 mm	35,96 mm

Tabella 2.1: Confronto tra l'affondamento sperimentale e quello ottenuto mediante fsolve

2.2.2 Discretizzazione dell'orma di contatto

Dovendo implementare il modello utilizzando il calcolatore, è necessario discretizzare il problema. Per fare ciò la semi lunghezza dell'orma di contatto (calcolata nei paragrafi precedenti) è stata suddivisa in N punti. E' stato possibile suddividere l'orma utilizzando la definizione di AlfaL. L'angolo in questione è l'angolo che si forma, in seguito ad uno schiacciamento, tra la perpendicolare al piano d'appoggio passante per il centro della ruota e la retta che congiunge il punto più esterno dell'orma e il centro stesso della ruota.

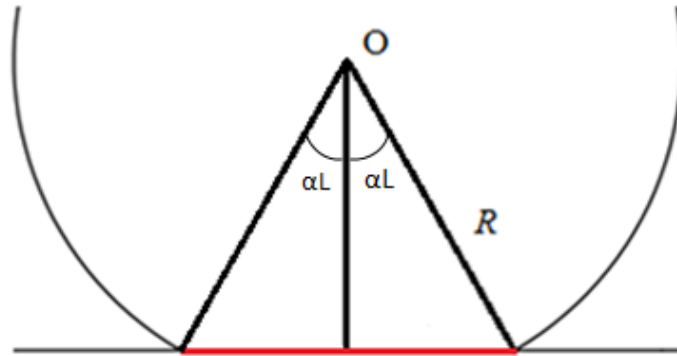


Figura 2.10: Descrizione angolo AlfaL

Dalla figura è possibile ricavare geometricamente il valore di AlfaL in funzione dell'affondamento, essendo noti il raggio r e la semi lunghezza L:

$$\begin{cases} r \cos(\alpha L) = r - \Delta Z \\ r \sin(\alpha L) = L \end{cases} \quad (2.48)$$

Dividendo le due equazioni si ottiene l'angolo d'interesse:

$$\alpha L = \arctan\left(\frac{L}{r - \Delta Z}\right) \quad (2.49)$$

Conoscendo adesso il valore di alfaL possiamo discretizzare l'orma di contatto in N punti. Si parte definendo un numero di punti totali NpuntiTOT in modo da poter suddividere il cerchio in tanti "spicchi" caratterizzati da un angolo $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N_{puntiTOT} - 1} \quad (2.50)$$

Il numero di punti in cui verrà suddivisa l'orma sarà quindi:

$$N = \frac{\alpha L}{\Delta\theta} \quad (2.51)$$

E' molto importante notare come N possa essere un qualsiasi tipo di numero reale. Ovviamente al fine di discretizzare l'orma in un numero finito di punti va approssimato il valore reale di N all'intero più vicino

$$N = \text{int}\left(\frac{\alpha L}{\Delta\theta}\right) \quad (2.52)$$

Al fine di rendere più precisa possibile l'approssimazione l'unica soluzione è di aumentare il più possibile il numero di punti N_{puntiTOT} in cui suddividere l'intero arco, in modo da diminuire il valore di $\Delta\theta$ e ridurre l'errore sull'approssimazione.

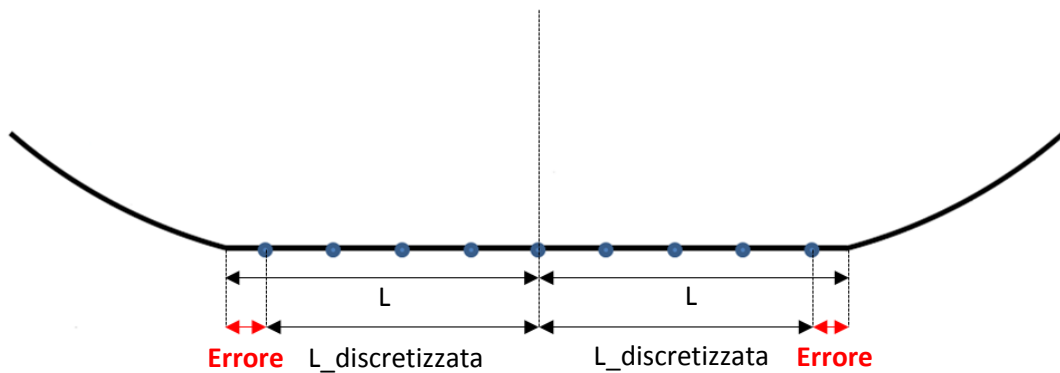


Figura 2.11: Suddivisione dell'orma con un numero limitato di punti

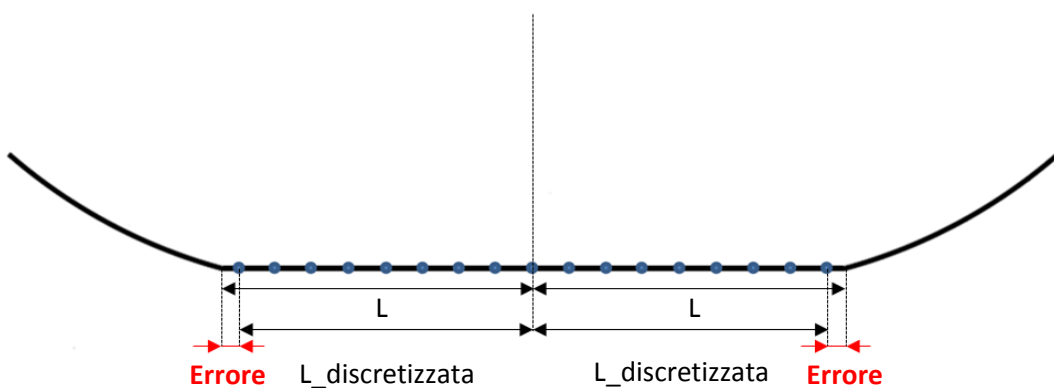


Figura 2.12: Suddivisione dell'orma con un numero considerevole di punti

Dalle figure 2.10 e 2.11 è chiaro come il numero di punti N che discretizza l'orma influisca sul valore dell'orma stessa approssimata dal calcolatore. Un numero di punti N troppo basso aumenterà tendenzialmente l'errore agli estremi, sottostimando il valore corretto trovato con la formulazione di Pacejka. Più il numero di punti è elevato e più il valore di $L_{\text{discretizzata}}$ si avvicinerà al valore di L , rendendo più preciso l'intero calcolo. Le figure sottostanti mostrano l'influenza sulle curve di rigidezza risultanti:

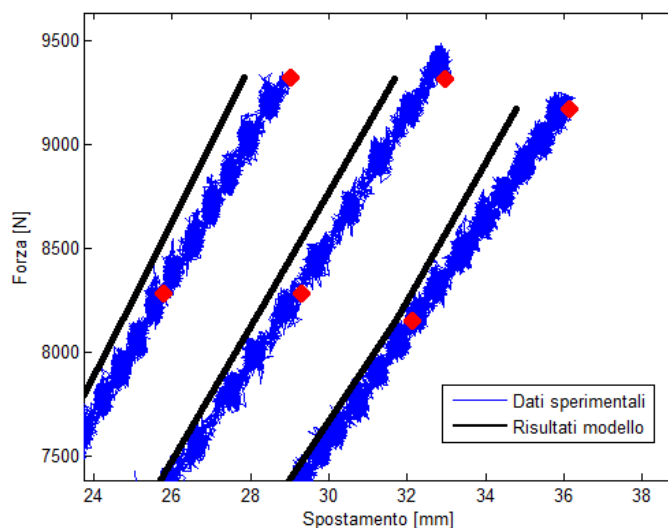


Figura 2.13: Risultati discretizzando la cintura in 401 punti

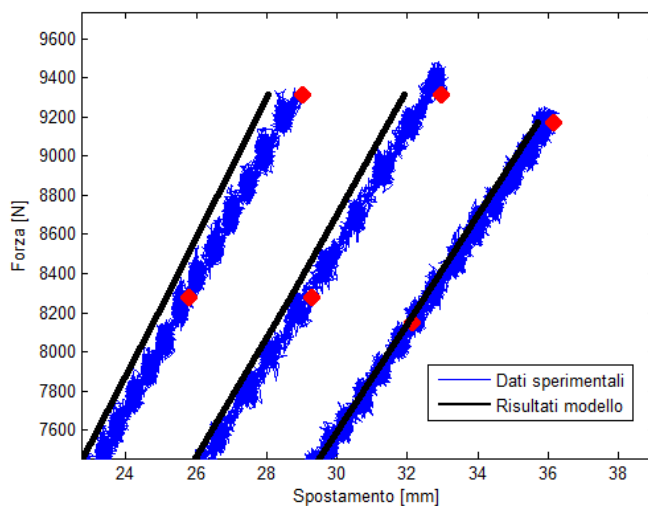


Figura 2.14: Risultati con orma con 801 punti

Lo svantaggio di adoperare N molto elevato consiste nell'aumento dei tempi di calcolo. Un buon compromesso tra queste due variabili è la suddivisione dell'intero arco di cerchio in 1601 punti, che equivale a suddividere l'orma in $2N+1$ punti, ovvero 113.

In questo paragrafo sono stati illustrati dei risultati parziali al solo scopo di spiegare la scelta del carico distribuito. La totalità dei risultati è mostrata nel paragrafo 2.4.2.

2.3 Applicazione del carico

Una volta definita la porzione di spazio sulla quale verranno scambiate le forze con il terreno è necessario capire quale sia la distribuzione di carico più vicina alla realtà. Anche in questo caso sono stati condotti due tipi di prova. Per iniziare è stato utilizzato un carico uniformemente distribuito e successivamente un carico parabolico.

2.3.1 Carico uniformemente distribuito

Il carico analizzato in questo paragrafo ha la caratteristica di essere costante in ogni punto dell'orma di contatto. Conoscendo quindi il carico radiale totale fornitomi dalla cella di carico, in ogni punto dell'orma il valore sarà:

$$y = F_v/2L \quad (2.53)$$

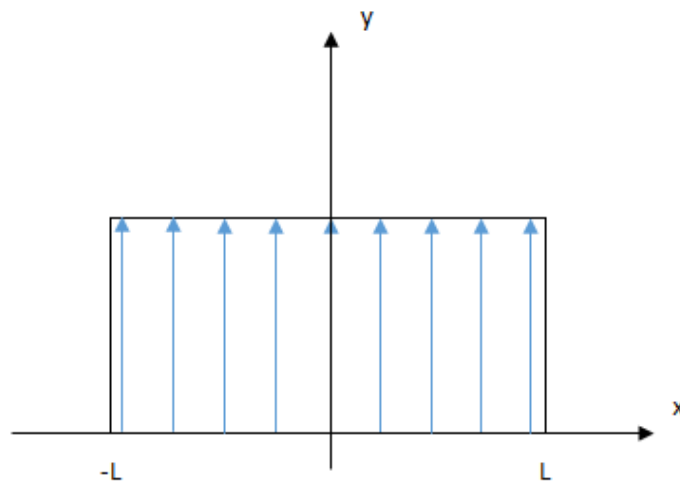


Figura 2.15: Carico uniformemente distribuito

Al fine di discretizzare il problema in modo da renderlo risolvibile al calcolatore la semi lunghezza dell'orma di contatto è stata suddivisa in N punti, in modo che risultino $2N+1$ punti lungo tutto l'arco.

In questo modo avremo sempre un punto centrale dell'orma. Per ogni punto sarà applicato quindi uno stesso valore di carico con valore pari a:

$$F_i = F_v / (2N + 1) \quad (2.54)$$

2.3.2 Carico parabolico

La seconda tipologia di carico applicata è, come già accennato, una distribuzione parabolica. E' una distribuzione simmetrica rispetto al punto centrale dell'orma ed il valore del carico non è costante lungo la lunghezza di contatto.

La coordinata x sta ad indicare la lunghezza dell'orma e la y rappresenta l'entità del carico. L'origine degli assi è fissato nel punto centrale in modo da avere una simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

Definito il sistema di riferimento è possibile dare alla parabola un'equazione generica scritta come:

$$y = -ax^2 + cmax \quad (2.55)$$

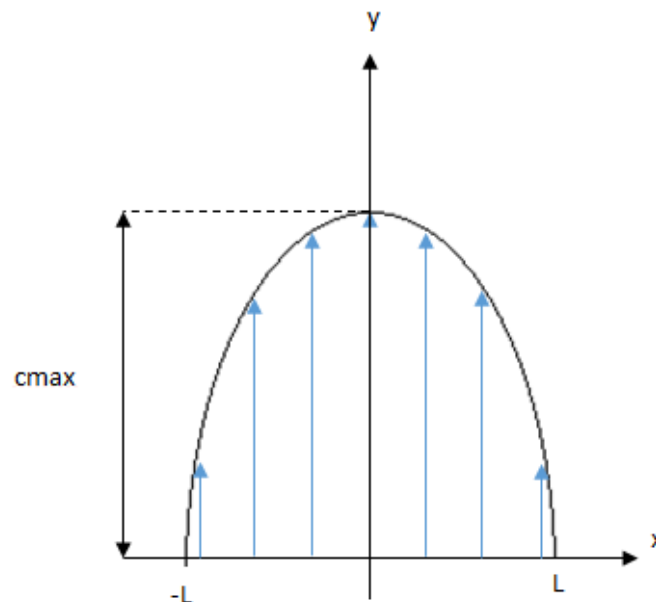


Figura 2.16: Andamento parabolico del carico

Per conoscere l'andamento del carico in ogni punto è necessario ricavare i parametri a e c_{max} , che sono rispettivamente il coefficiente della parabola (che detta la curvatura di essa) e il valore massimo.

Al fine di trovare queste due incognite sono state definite due condizioni al contorno del problema: la prima condizione sancisce che l'integrale della parabola tra i due estremi dell'orma ($-L$ ed L) abbia il valore del carico totale applicato.

$$\int_{-L}^L (-ax^2 + c_{max})dx = F_v \quad (2.56)$$

E la seconda che il valore del carico agli estremi sia nullo

$$y(\pm L) = 0 \quad (2.57)$$

Da questa seconda condizione è possibile ricavare il valore di c_{max}

$$\begin{aligned} y(-L) = 0 &\rightarrow -a(-L)^2 + c_{max} = 0 \\ y(L) = 0 &\rightarrow -a(L)^2 + c_{max} = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Da entrambe le equazioni il valore di c_{max} risultante è

$$c_{max} = aL^2 \quad (2.59)$$

Sostituendo il valore di c_{max} appena ricavato all'interno della prima condizione al contorno è possibile risolvere l'integrale e trovare il valore di a .

$$\int_{-L}^L (-ax^2 + aL^2)dx = F_v \quad (2.60)$$

$$\int_{-L}^L -ax^2 dx + \int_{-L}^L aL^2 dx = F_v \quad (2.61)$$

Essendo la funzione simmetrica rispetto all'asse y è possibile modificare l'integrale in questo modo

$$-2 \int_0^L ax^2 dx + 2 \int_0^L aL^2 dx = F_v \quad (2.62)$$

$$-2a \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L + 2aL^2 [x]_0^L = F_v \quad (2.63)$$

$$-2a \frac{L^3}{3} + 2aL^3 = F_v \quad (2.64)$$

E' ora possibile trovare il valore di a

$$a = \frac{F_v}{\frac{4}{3}L^3} \quad (2.65)$$

L'equazione che descrive l'andamento del carico in funzione della posizione all'interno dell'orma è quindi:

$$y(x) = -\frac{F_v}{\frac{4}{3}L^3} x^2 + \frac{F_v}{\frac{4}{3}L^3} L^2 \quad (2.66)$$

A valle dei risultati ottenuti dal modello implementando entrambe le distribuzioni di carico è stato deciso di utilizzare la distribuzione parabolica. Applicando il carico uniformemente distribuito (Equazione 2.54) i risultati ottenuti non risultano essere soddisfacenti: Le curve di rigidezza ottenute presentano infatti un andamento non completamente lineare.

Questo fenomeno è dovuto al fatto che le curve di rigidezza sono calcolate misurando l'affondamento nel punto centrale dell'orma. Quindi un aumento del carico totale nella configurazione uniforme non sarà uguale all'aumento di carico che invece verrà riscontrato nell'andamento parabolico. La figura sottostante mostra qualitativamente l'effetto appena spiegato.

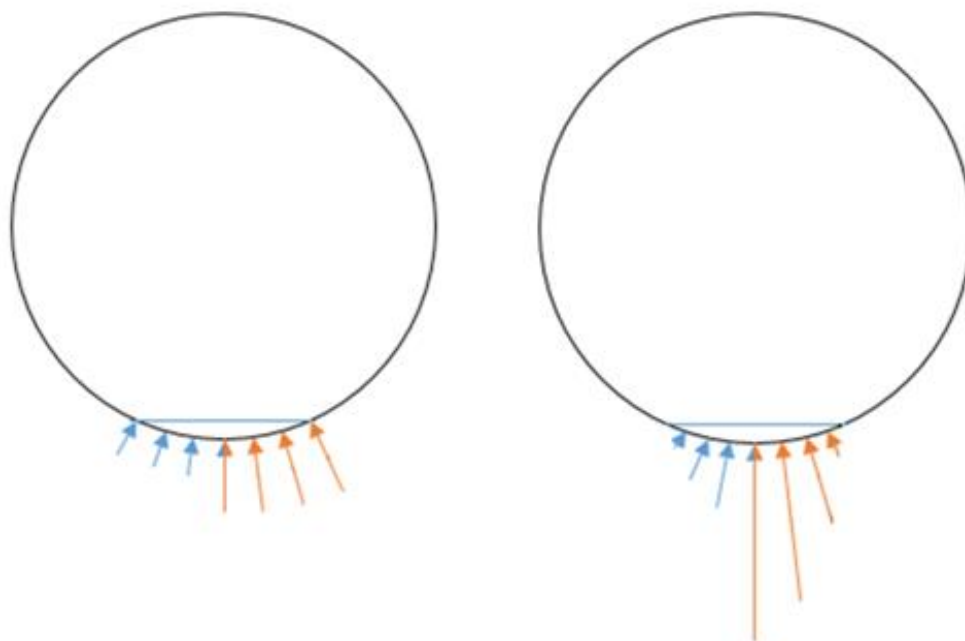


Figura 2.17: Confronto distribuzioni del carico per due diversi valori di intensità

Nella figura a sinistra sono rappresentati due carichi di intensità diversa per la configurazione a carico uniformemente distribuito, in quella a destra due carichi di intensità diversa per l'andamento parabolico (in entrambi i casi il rosso di entità maggiore e il blu di entità minore).

Quello che si vuole mostrare è che la differenza di carico (tra il maggiore e il minore) nel caso di sinistra è uguale al centro dell'orma e ai suoi estremi. Non si può dire lo stesso nel caso parabolico: la differenza riscontrata nel punto centrale è molto maggiore alla differenza riscontrata agli estremi.

La configurazione a carico uniformemente distribuito introduce per questo motivo, una non linearità nelle curve di rigidezza.

2.4 Identificazione dei parametri

Prima di procedere con l'implementazione del modello per il calcolo delle forze è necessario definire i parametri che lo caratterizzano, precisamente il valore della costante elastica distribuita k e la rigidezza flessionale della trave EJ .

A questo punto è necessario fare una considerazione: essendo il modello un'approssimazione dello pneumatico fisico non è stato possibile misurare sperimentalmente k ed EJ (in quanto sono parametri che nella realtà non esistono). E' necessario quindi calcolare queste due incognite mediante un processo di identificazione.

L'identificazione, come spiegato in seguito, consiste nel trovare i parametri sopra descritti affinché il modello analitico coincida con i dati sperimentali (presentati nel Capitolo 3). Questi ultimi dimostrano come la rigidità radiale dello pneumatico sia perfettamente lineare con la pressione. Per questo motivo il parametro k sarà funzione della pressione e descritto mediante due parametri: k_1 e k_2 (Equazione 2.71).

2.4.1 Definizione della funzione obiettivo

La funzione obiettivo, per definizione, è la funzione delle variabili del problema che riassume l'obiettivo da perseguire [12]. Essa descrive il valore dell'errore quadratico medio tra il valore di affondamento U , ricavato implementando il modello, e il valore di affondamento sperimentale misurato ΔZ .

$$err = (\Delta Z_{sperimentale}^2 - U_{modello}^2) \quad (2.67)$$

L'obiettivo è partire da dei valori di k ed EJ fisicamente fattibili ed arrivare ai valori di ottimo minimizzando l'errore, ovvero la funzione obiettivo stessa.

Le curve sperimentali sono state suddivise in un numero discreto di punti. Essendo l'andamento di ogni curva estremamente lineare è bastato dividerle tra il valore minimo e il valore massimo in dieci punti.

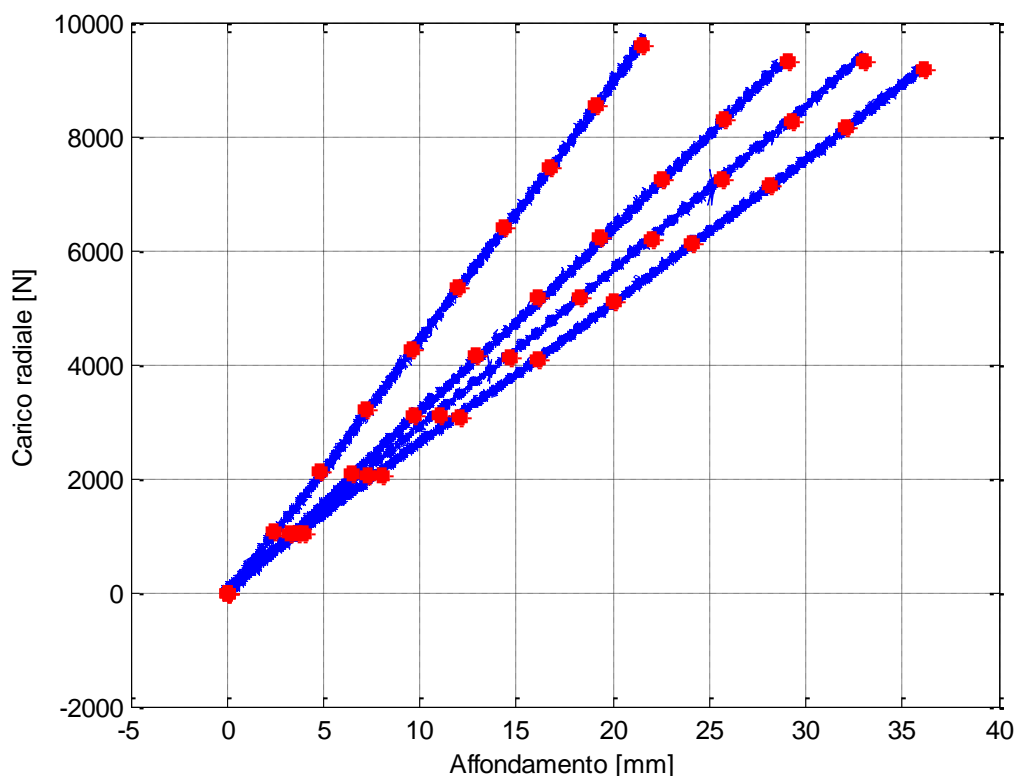


Figura 2.18: Partizione delle curve di rigidezza

Le curve di rigidezza sperimentali raffigurate sono state ottenute mediante delle prove in laboratorio (spiegate nel Capitolo 3). Avendo discretizzato ogni singola curva, l'errore calcolato sarà un vettore di lunghezza pari al valore di npunti:

$$err_{p_i}(i) = (\Delta Z_{sperimentale}^2(i) - U_{modello}^2(i)) \quad \text{per } i = 1:npunti \quad (2.68)$$

Operando un processo di media tra i valori di errore appena trovati otterremo l'errore medio per ogni singola curva:

$$err_{p_i} = mean(err) \quad (2.69)$$

Il processo di ottimizzazione viene effettuato minimizzando la funzione obiettivo per tutte e quattro le curve contemporaneamente. Sommando quindi i contributi di errore relativi ad ogni curva, possiamo scrivere la funzione obiettivo, oggetto di minimizzazione, nella sua forma finale:

$$f_{\text{obiettivo}} = \text{sum}([err_{p21} \ err_{p25} \ err_{p30} \ err_{p45}]) \quad (2.70)$$

Mediante un algoritmo iterativo il calcolatore è in grado di trovare i parametri per cui la funzione obiettivo viene minimizzata. Vista la complessità del problema bisogna prestare attenzione ai risultati in modo da non identificare dei parametri fisicamente infattibili o di incorrere in problemi di minimo locale.

2.4.2 Risultati dell'identificazione

Come già detto in precedenza i parametri sottoposti a identificazione sono k ed EJ (Figura 2.1) e si trovano all'interno dell'equazione differenziale da risolvere.

Inizialmente si è pensato di definire k in funzione della pressione mediante due coefficienti k_1 e k_2 nella seguente forma:

$$k(p) = k_1 * p[\text{bar}] + k_2 \quad (2.71)$$

EJ invece come parametro costante misurato in N/mm^2 .

È stato scelto un punto di partenza fisicamente fattibile che assume i seguenti valori:

$$k_{1_0} = 0,2$$

$$k_{2_0} = 0.02$$

$$EJ_0 = 9 * 10^7 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

All'interno del programma è stata effettuata una normalizzazione in quanto ci sono parecchi ordini di grandezza di differenza tra i parametri da ottimizzare.

A valle del processo è possibile verificare quanto sia di poco conto l'influenza del parametro k_2 . Essendo di due ordini di grandezza inferiore rispetto a k_1 , e non influenzando minimamente i risultati finali è stato deciso di escluderlo dall'ottimizzazione.

Perciò i risultati finali sono i seguenti:

$$k_{\text{ottimo}} = k_{1\text{ottimo}} = 0,1957$$

$$EJ_{\text{ottimo}} = 4,88 * 10^8 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

La deformata e le curve di rigidezza ottenute imponendo al modello i dati ottimi sono le seguenti:

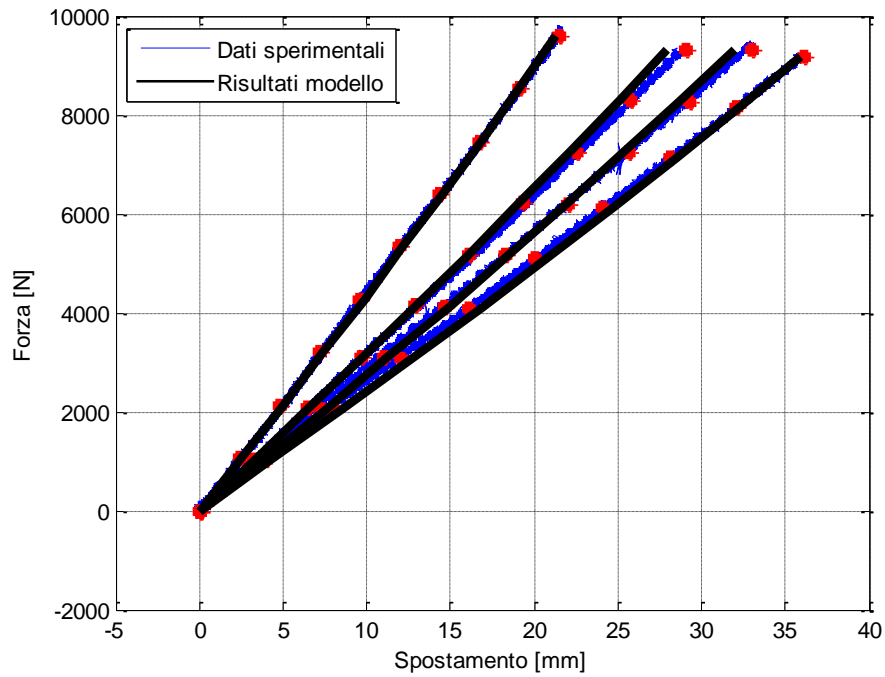


Figura 2.19: Confronto curve di rigidezza sperimentali con quelle ottenute dal modello

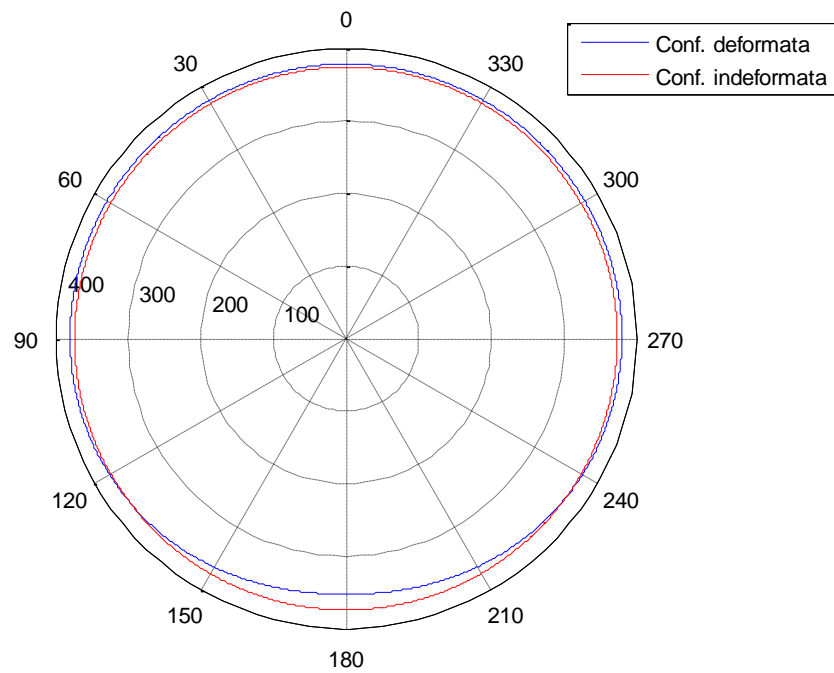


Figura 2.20: Deformata della cintura dello pneumatico sottoposta ad un carico radiale di 10000 N alla pressione di 4.5 bar

2.4.3 Confronto risultati del parametro EJ

Con lo scopo di effettuare un confronto con i risultati ottenuti nel paragrafo precedente è stato condotto uno studio sul parametro EJ. Conoscendo la sezione dello pneumatico è stato possibile, mediante un approssimazione, stimarne il valore del momento d'inerzia. Essendo una geometria molto complessa, la sezione dello pneumatico è stata semplificata come una geometria ad “U” (Figura 2.20).

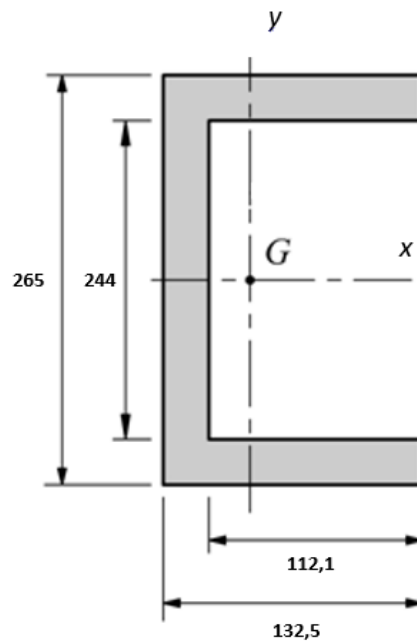


Figura 2.21: Dimensioni della sezione approssimata della trave (misure in mm)

Mediante il calcolatore è stato trovato il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse y, che assume il valore di $J_y = 9850589 \text{ mm}^4$.

Per quanto riguarda il modulo di Young della gomma sono state condotte delle ricerche in letteratura. Per il calcolo di questo valore è stato utilizzato il modello di Mooney-Rivlin [12]. Sotto l'ipotesi che l'intera sezione sia composta dallo stesso materiale E assume la seguente forma:

$$E = 6 * (C_{10} + C_{01}) \quad (2.72)$$

Per i coefficienti C_{10} e C_{01} sono stati utilizzati i valori definiti nel modello Mooney-Rivlin:

$$C_{10} = 0,806 \text{ [MPa]} \quad (2.73)$$

$$C_{01} = 1,805 \text{ [MPa]}$$

Ottenendo:

$$E = 15,67 [Mpa]$$

Nonostante si siano fatte delle approssimazioni sia sulla sezione dello pneumatico, che sul materiale i risultati ottenuti sono confortanti, in quanto sono simili ai risultati ottenuti analiticamente:

EJ Mooney Rivlin	EJ modello
$1,54 * 10^8$	$4,88 * 10^8$

Tabella 2.2: Valori a confronto del parametro EJ

2.5 Calcolo delle reazioni sul cerchio

Trovati i valori dei parametri k ed EJ ottimi è ora possibile implementare il modello al fine di trovare le reazioni vincolari viste dal cerchio calcolate in direzione assiale e in direzione radiale. Mediante il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile considerare il contributo del gonfiaggio e quello del carico radiale in maniera separata.

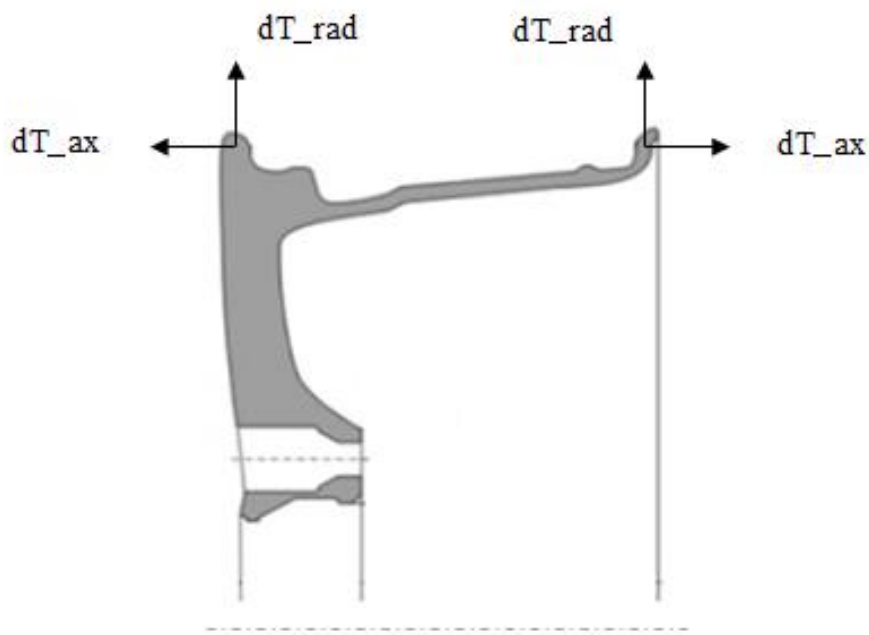


Figura 2.22: Sezione del cerchio e relative convenzioni di segno per gli sforzi

Nella figura sono riportate le convenzioni di segno utilizzate nel modello. Sia per quanto riguarda la direzione radiale, sia per quanto riguarda quella assiale le forze sono state definite positive quando tendono a porre in trazione il cerchio.

2.5.1 Calcolo reazioni in direzione radiale (contributo del carico)

Come anticipato in precedenza si analizzano i due contributi (pressione e carico) in maniera separata. Per quanto riguarda il contributo del carico la formula che descrive l'andamento delle reazioni in funzione dell'angolo teta è:

$$dT_{rad_c} = k * u(\vartheta) \quad (2.74)$$

Essendo il raggio del cerchio più piccolo rispetto a quello della trave, l'espressione trovata dovrà essere scalata affinché le reazioni siano applicate sul cerchio:

$$dT_{rad_c} = k * u(\vartheta) * \frac{r}{r_{cerchio}} \quad (2.75)$$

Per convenzione all'interno del modello il valore della deformata u assume un valore negativo quando la trave si avvicina al cerchio, viceversa sarà considerata positiva. Per questo motivo ci si aspetta che il cerchio nella zona dell'orma di contatto sia sottoposto ad uno sforzo di compressione e nella zona più lontana al piano d'appoggio ad uno di trazione.

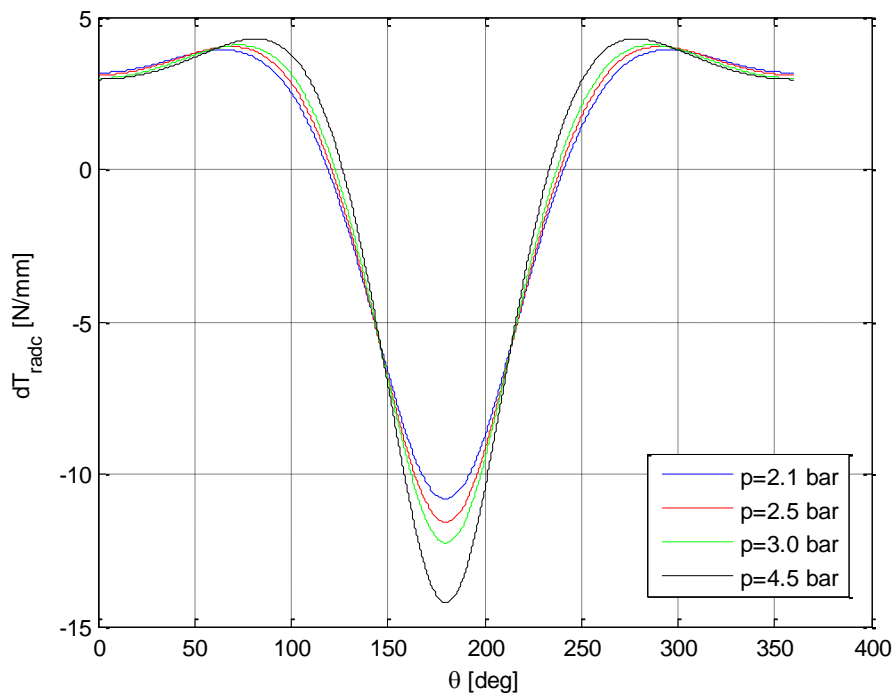


Figura 2.23: Andamento delle reazioni in direzione radiale considerando solo il contributo dovuto al carico

2.5.2 Calcolo delle reazioni in direzione radiale (contributo della pressione)

Al valore di reazione radiale appena trovato verrà sommato il contributo relativo alla pressione di gonfiaggio. Il valore di pressione influirà in maniera costante sulle reazioni in direzione radiale, essendo lo pneumatico assialsimmetrico. Al fine di quantificare questo contributo è necessario definire l'angolo all'interfaccia pneumatico cerchio. L'angolo Ω , indicato in figura, è il responsabile della ripartizione delle forze nelle due direzioni.

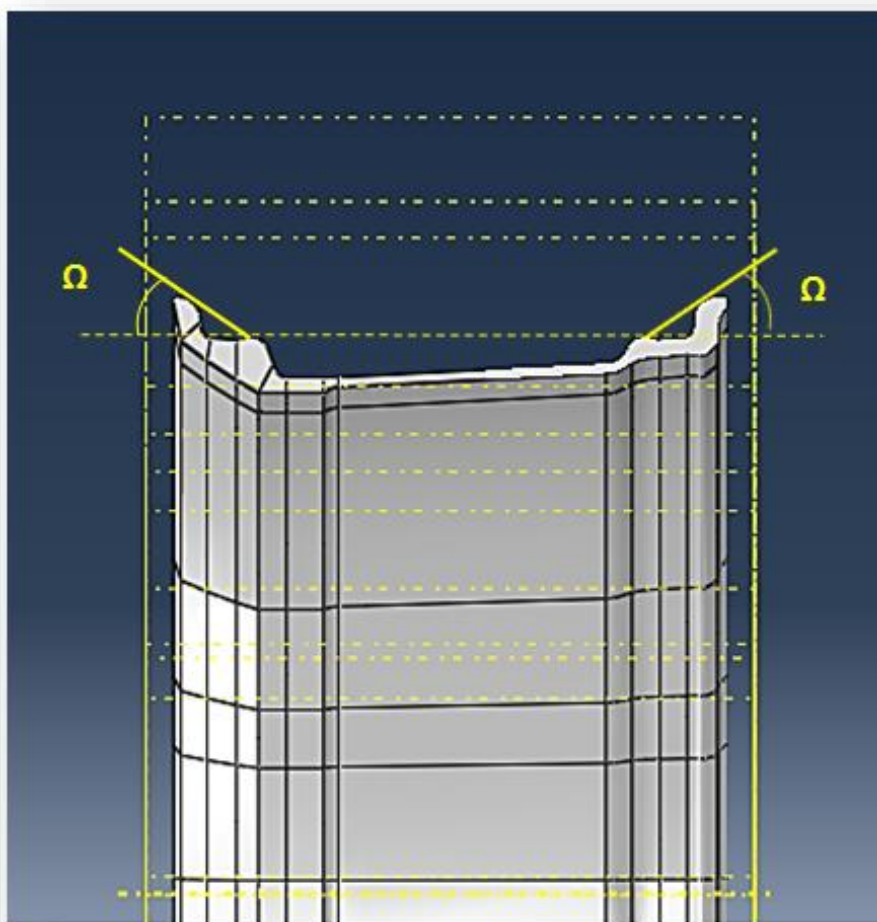


Figura 2.24: Approssimazione dell'angolo del cerchio all'interfaccia con lo pneumatico

Come è possibile notare dalla figura 2.23 i due angoli sono stati calcolati tracciando una tangente al tallone dello pneumatico e misurando l'arco sotteso fra questa linea e la parallela all'asse di simmetria. Dove poggia la gomma sul cerchio infatti il valore dell'angolo non è costante. E' stata necessaria un'approssimazione per tenere conto del cambiamento di pendenza del tallone.

Determinato l'angolo, il risultato si ottiene effettuando un bilancio sul solo fianco dello pneumatico. L'angolo appena definito (Figura 2.23) sarà uguale a l'angolo che assume la gomma nella parte in contatto con il tallone e uguale per ipotesi a quello che il fianco forma con la cintura (Figura 2.24). In figura 2.24 è stata considerata metà della sezione dello pneumatico.

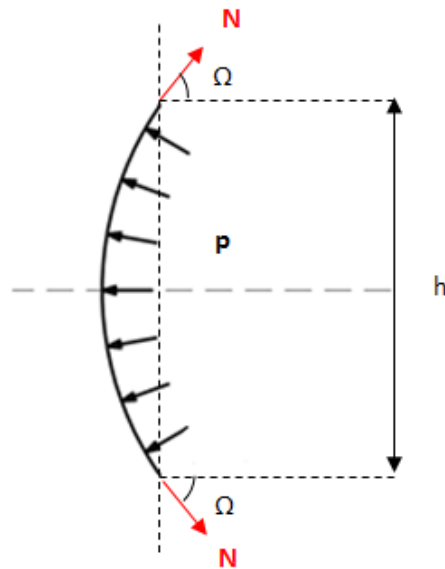


Figura 2.25: Equilibrio applicato al fianco dello pneumatico

Per prima cosa si scrive l'equazione di bilancio in direzione assiale, in modo da poter trovare un legame tra N e la pressione:

$$2N\cos(\Omega) = p * h(\vartheta) \quad \rightarrow \quad N = \frac{p * h(\vartheta)}{2\cos(\Omega)} \quad (2.75)$$

E' possibile ora proiettare la forza N in direzione radiale:

$$dTr_{ad_p} = N\sin(\Omega) = \frac{p * h(\vartheta)}{2\cos(\Omega)} * \sin(\Omega) \quad (2.76)$$

In questo caso h non sarà dipendente dall'angolo ϑ , in quanto si sta considerando solo il contributo della pressione senza carico applicato. E' come considerare la ruota gonfiata ma non appoggiata a terra. L'altezza della spalla h , per un dato valore di pressione sarà quindi un valore costante lungo tutta la circonferenza, rendendo tale anche l'intero contributo dT_{radp} .

Di seguito è riportata la tabella con il valore di carico al variare della pressione di gonfiaggio:

p gonfiaggio [bar]	2,1	2,5	3,0	4,5
dT_{radp} [N/mm]	-7,1501	-8,5120	-10,2144	-15,3215

Tabella 2.3: Valori della reazione radiale per il contributo della sola pressione

Sommando ora i valori di reazione trovati si ottiene il risultato finale in direzione radiale:

$$dT_{rad_{tot}}(p_i) = dT_{rad_c}(p_i) + dT_{rad_p}(p_i) \quad (2.77)$$

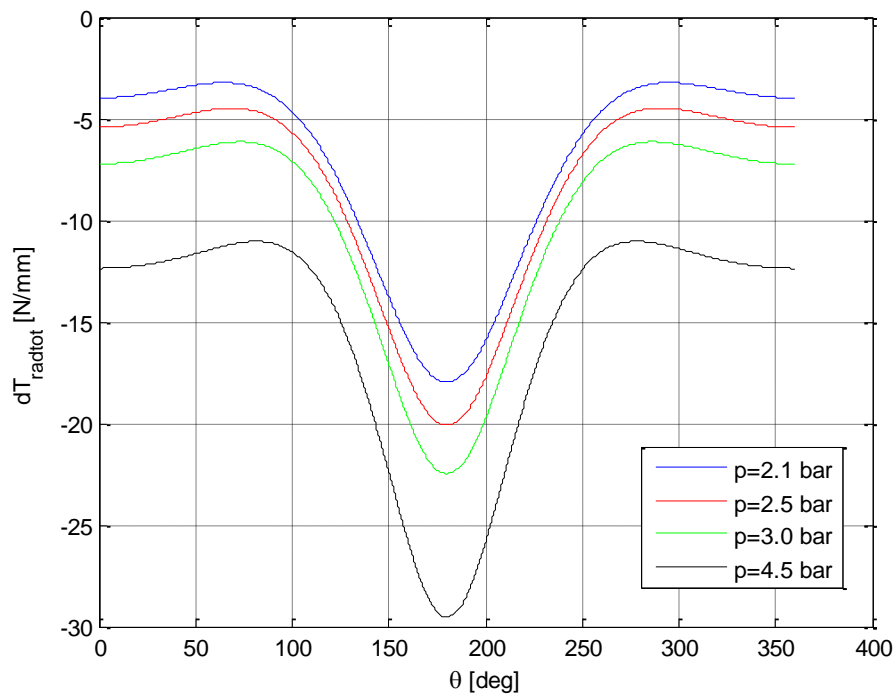


Figura 2.26: Andamento delle reazioni totali in direzione radiale

2.5.3 Calcolo reazioni in direzione assiale

Per la parte relativa alle reazioni in direzione assiale è necessario considerare la sezione della gomma in quanto il modello a trave curvilinea non considera un vincolo in questa direzione.

Il contributo assiale dipende ovviamente dalla pressione a cui è gonfiato lo pneumatico, ma anche dalla deformata della cintura. A differenza del caso precedente è possibile considerare i contributi nella stessa formula. Nella figura sottostante è riportata una particolare sezione di pneumatico gonfiato

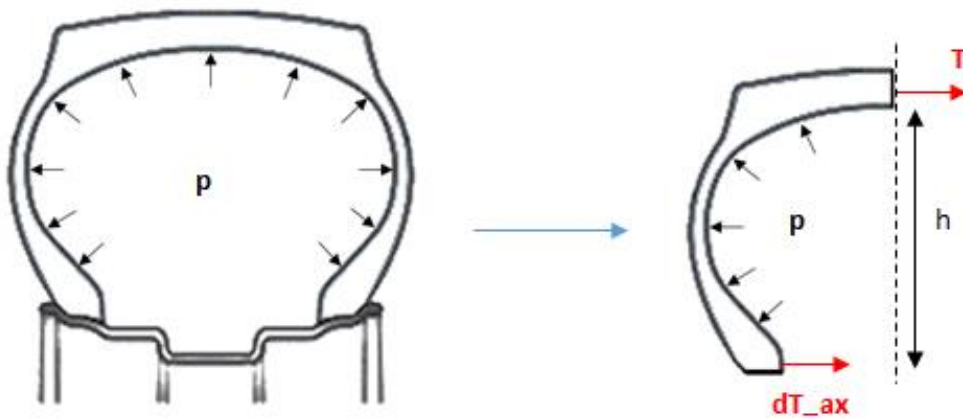


Figura 2.27: Sezione dello pneumatico sottoposto a pressione

È facile intuire dalla figura a sinistra come per effetto della pressione la gomma eserciti una forza che tende a mettere in trazione il cerchio assialmente. Per il principio di azione e reazione il cerchio eserciterà sulla gomma una forza di uguale modulo ma di segno opposto (dT_{ax}).

Effettuando ora un bilancio nella sola direzione assiale (i contributi di forza radiale rimanenti sono stati già calcolati in un altro modo nel paragrafo precedente) è possibile calcolare il valore di dT_{ax} :

$$\begin{cases} dT_{ax} + T = p * h \\ dT_{ax} = T \end{cases} \rightarrow dT_{ax} = \frac{p * h}{2} \quad (2.78)$$

Il valore dell'altezza h della spalla varia al variare dello schiacciamento. Ipotizzando che la pressione dello pneumatico resti costante in ogni condizione è chiaro dalla formula come il valore dell'altezza influenzi l'andamento della reazione assiale.

Conoscendo, dalla risoluzione dell'equazione differenziale, l'andamento della deformata radiale u possiamo conoscere il valore di h in ogni sezione dello pneumatico.

$$h(\vartheta) = h_0 + u(\vartheta) \quad (2.79)$$

E quindi dT_{ax} diventerà:

$$dT_{ax} = \frac{p * (h_0 + u(\vartheta))}{2} \quad (2.80)$$

La figura sottostante riporta l'andamento della reazione in direzione assiale per i vari valori di pressione analizzati.

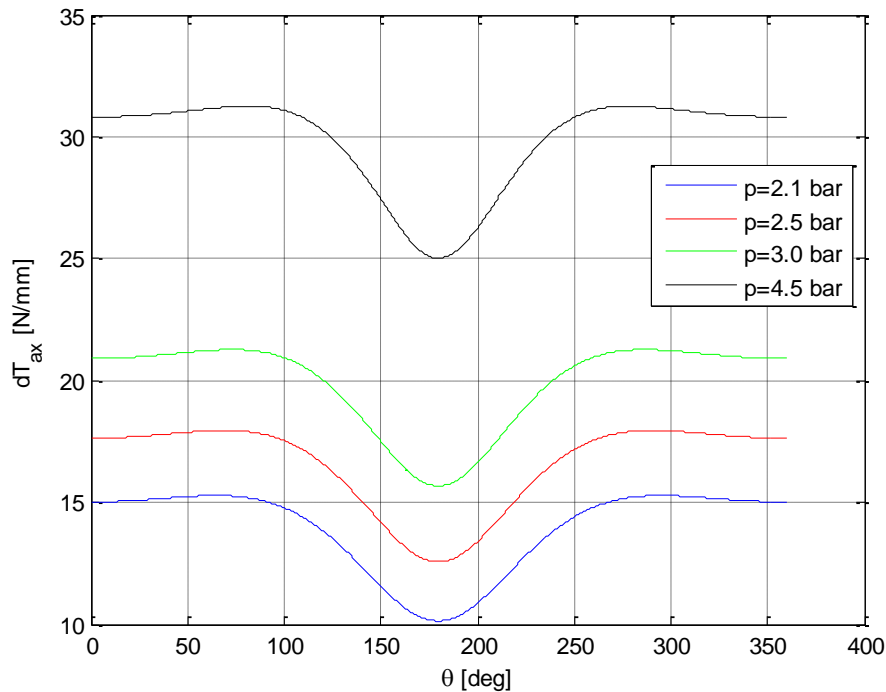


Figura 2.28: Andamento delle reazioni in direzione assiale per tutti i valori di pressione analizzati

E' importante notare come il valore decresce mano a mano che ci si avvicina alla parte in contatto con il piano d'appoggio. Questo è dovuto al fatto che in quella zona lo pneumatico è più schiacciato e il valore di h è minore rispetto alle altre zone. La pressione agisce quindi su una minore lunghezza, con conseguente diminuzione della reazione.

CAPITOLO 3

Prove sperimentali

Con lo scopo di ottenere dei dati da poter usare per ottimizzare il modello studiato sono state condotte delle prove sperimentali in laboratorio, sia per quanto riguarda le curve di rigidità (radiale e laterale) sia per quanto riguarda la deformata.

Per entrambi i tipi di prova è stato utilizzato il medesimo pneumatico: una gomma Continental di dimensioni 265/60 R19.

3.1 Sistema di misura completo

Di seguito sono riportate delle immagini che descrivono la configurazione del sistema di misura completo:

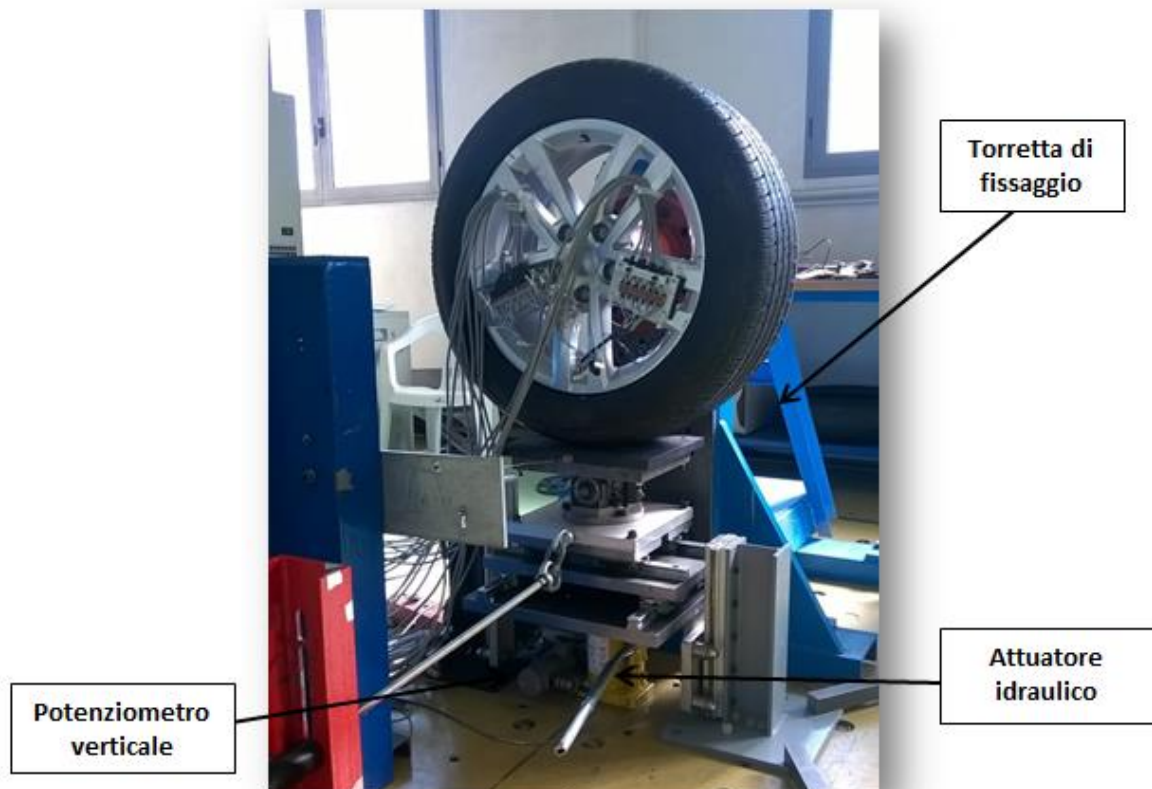


Figura 3.1: Vista frontale del sistema di misura



Figura 3.2: Vista laterale del sistema di misura

3.1.1 Torretta di fissaggio

La torretta è quel dispositivo che ci consente di ancorare la ruota al terreno, eliminando tutti e sei i gradi di libertà di cui è dotata. L'intero pneumatico è stato ancorato ad un supporto fisso mediante cinque viti di serraggio ed è collegato alla torretta stessa mediante il cerchio.

La torretta è costituita da una configurazione a "L", la cui parte verticale è quella per il fissaggio della ruota e quella orizzontale per l'ancoraggio a terra. La parte orizzontale infatti poggia su due travi trasversali, a cui è stata saldata, che vengono avvitate mediante quattro viti direttamente al pavimento.

Essendo la ruota e il punto di applicazione delle forze ad una rilevante distanza da terra è possibile che la torretta sotto l'azione di momenti flettenti di entità considerevole subisca un lieve spostamento dell'estremità verticale. L'accorgimento che è stato effettuato per evitare tale problema è stato quello di saldare delle piastre triangolari e delle travi vuote in modo da collegare la parte verticale a quella orizzontale, aumentando la rigidità della struttura.

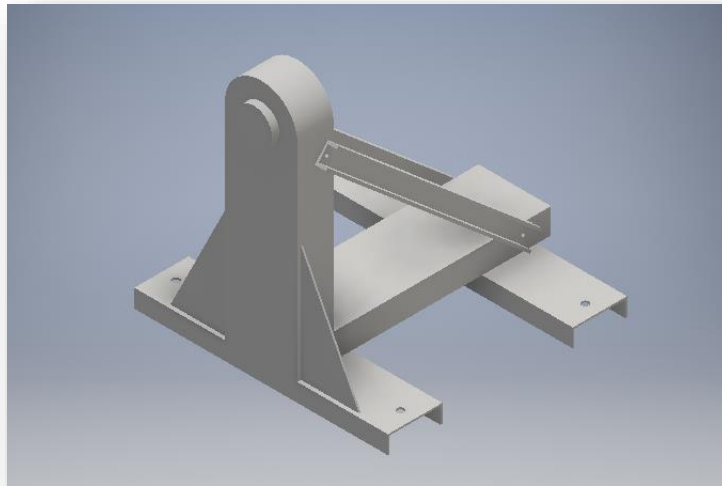


Figura 3.3: Schema torretta di fissaggio

3.1.2 Cella di carico

La cella di carico è un trasduttore in grado di convertire un peso o una forza applicata lungo il proprio asse, in un segnale elettrico che risulta proporzionale alla deformazione causata dalla forza sulla parte meccanica dello stesso. Il dispositivo in dotazione al Politecnico di Milano ha la capacità di misurare forze e momenti lungo sei assi.

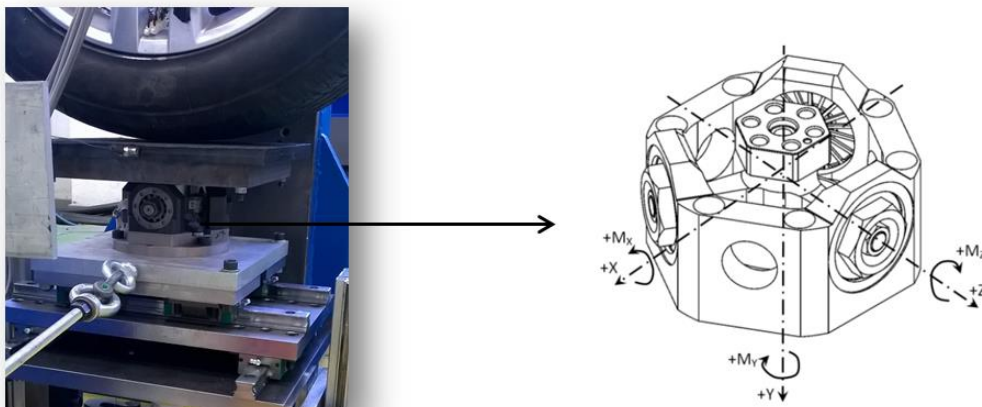


Figura 3.4: Schema della cella di carico a sei assi

Le specifiche della cella di carico utilizzata nei rilievi sperimentali sono le seguenti:

Dati tecnici cella di carico a sei assi			
Forza massima	F_x	10	[kN]
	F_y	20	[kN]
	F_z	10	[kN]
Incertezza	95% F.S	0,35	[%]
Coppia massima	M_x	1	[kNm]
	M_y	0,5	[kNm]
	M_z	1	[kNm]
Incertezza	95% F.S	0,23	[%]
Massa totale		2,7	[kg]
Larghezza di banda		350	[Hz]
Cross-talk		$< \pm 0,1\%$	
Isteresi	%F.S	$< 0,1\%$ F.S	
Tipo Output	6 Canali	0-10	[V]

Tabella 3.1: Specifiche cella di carico

Affinché fornisca in output i valori di forza e momento la cella è dotata di estensimetri. Dallo schema dei vincoli sottostante è possibile notare come la struttura della cella sia dotata di tre bracci. E' proprio su questi bracci che sono attaccati gli estensimetri in modo da fornire gli sforzi e le deformazioni lungo gli assi di interesse.

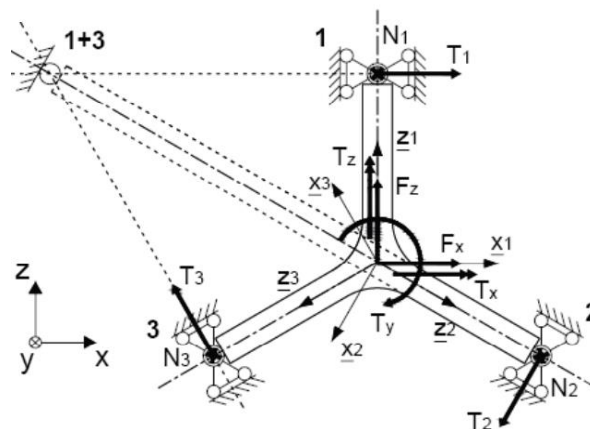


Figura 3.5: Schema dei vincoli della cella di carico

3.2 Curve di rigidezza

Al fine di avere un termine di paragone su cui basarmi per ottimizzare il modello sono state svolte delle prove sperimentali. Questo tipo di prove sono state eseguite per determinare sperimentalmente i valori di rigidezza dello pneumatico al variare della pressione di gonfiaggio. Precisamente 2.1, 2.5, 3.0 e 4.5 bar.

Fissata la ruota alla torre per imporre una forza radiale (volta a simulare lo schiacciamento) è necessario innalzare il piano di appoggio della torretta mediante azionamento idraulico.

Per le varie pressioni si è partiti dal valore di spostamento nullo e si è innalzato il piano d'appoggio fino ad ottenere un valore di forza in direzione verticale di circa 10 kN.

3.2.1 Pressione 2.1 bar

La prima misurazione è stata effettuata per il valore di 2.1 bar, valore molto vicino alla pressione di gonfiaggio per questo tipo di pneumatico in uso stradale.

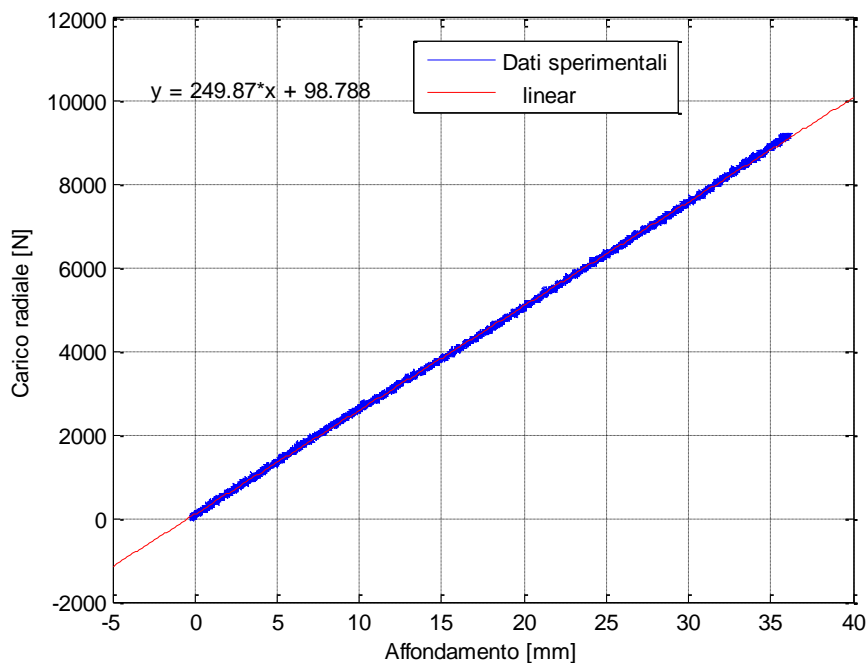


Figura 3.7: Curva di rigidezza radiale alla pressione di 2.1 bar

L'approssimazione lineare che è stata utilizzata (linea rossa) riproduce molto accuratamente l'andamento sperimentale dei dati. Applicando perciò una semplice derivata rispetto all'affondamento è possibile ricavare il valore di rigidezza dello pneumatico per questa pressione:

$$y(x) = 249.87 * x + 98.783 \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dx} = k_{21} = 249.87 \text{ [N/mm]} \quad (3.4)$$

3.2.2 Pressione 2.5 bar

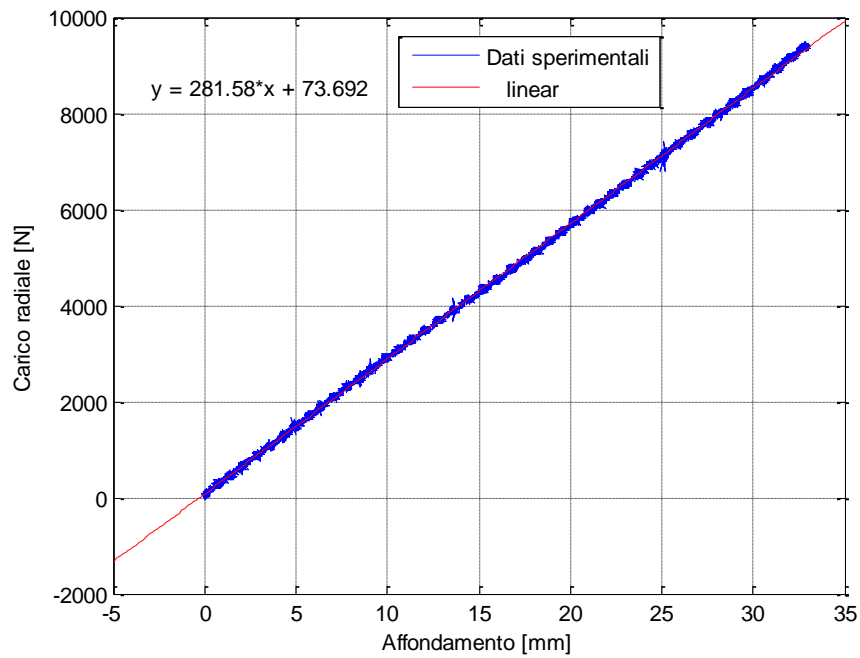


Figura 3.8: Curva di rigidezza radiale alla pressione di 2.5 bar

Valore di rigidezza radiale a 2.5 bar: $k_{25} = 281.58 \text{ [N/mm]}$

3.2.3 Pressione 3.0 bar

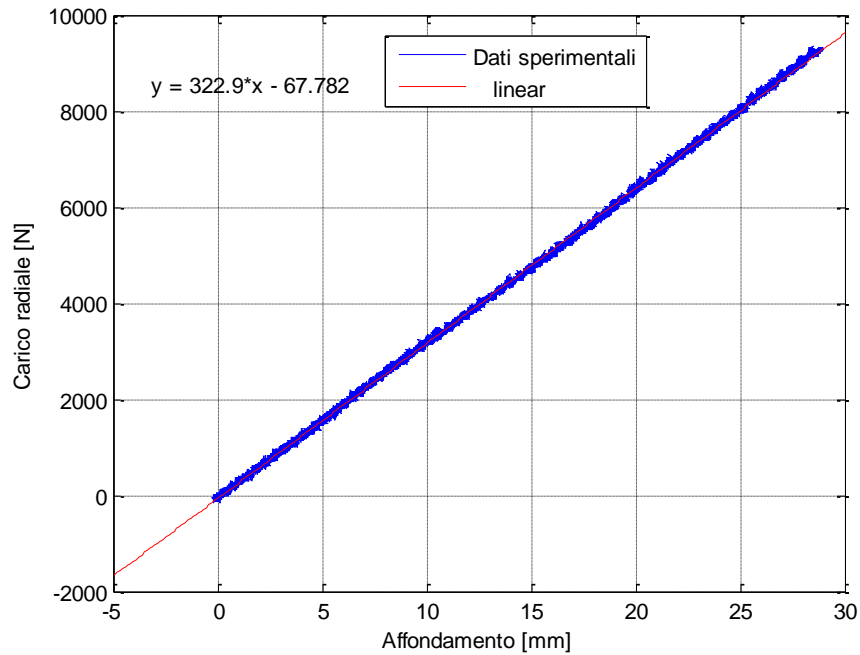


Figura 3.9: Curva di rigidezza radiale alla pressione di 3.0 bar

Valore di rigidezza radiale a 3.0 bar: $k_{30} = 322.9 \text{ [N/mm]}$

3.2.4 Pressione 4.5 bar

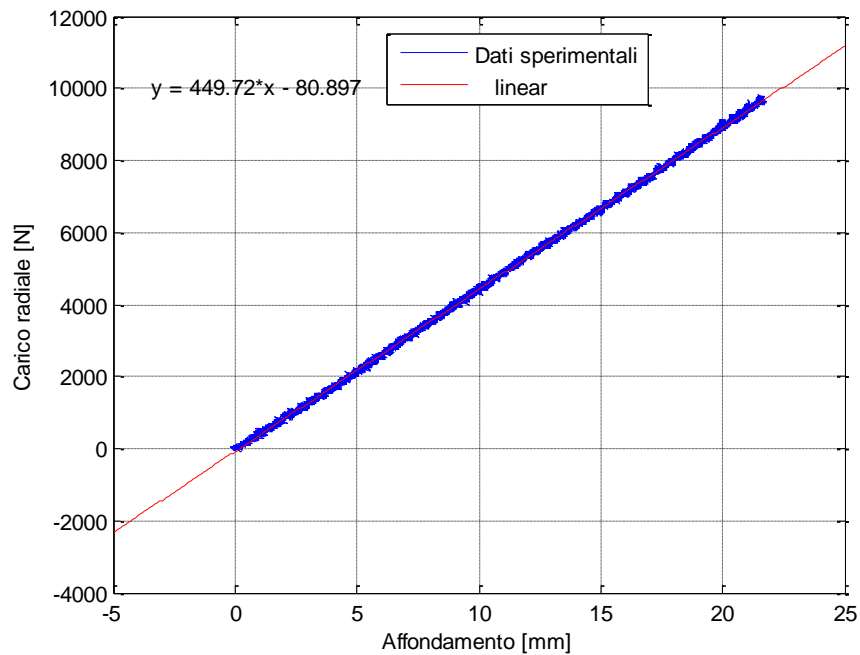


Figura 3.10: Curva di rigidezza radiale alla pressione di 3.0 bar

Valore di rigidezza radiale a 4.5 bar: $k_{45} = 449.72 \text{ [N/mm]}$.

3.2.5 Risultati complessivi e osservazioni

Per poter trarre delle conclusioni da questa prima prova sperimentale è necessario confrontare tra loro tutte le curve di rigidezza ottenute.

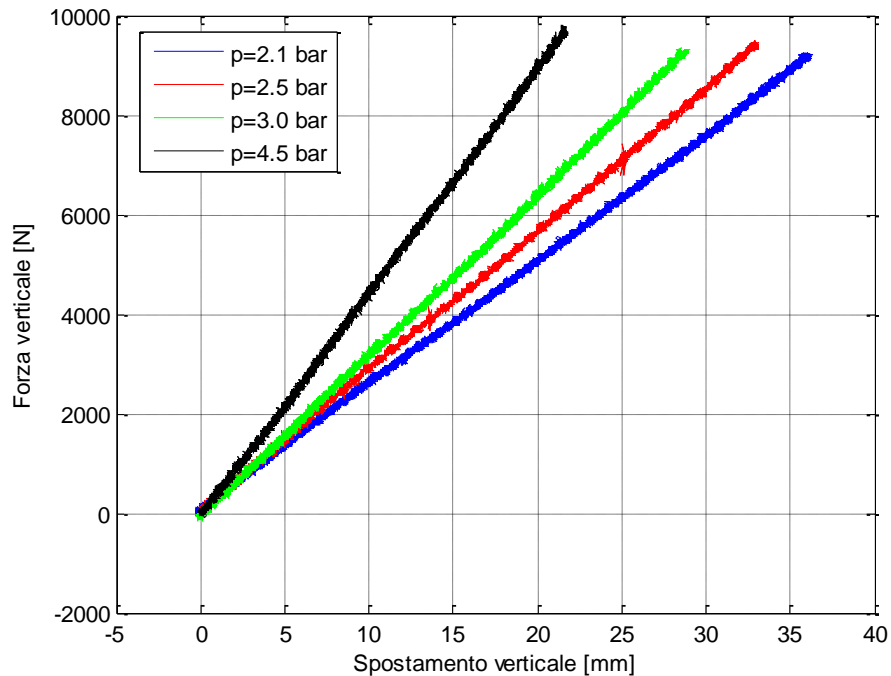


Figura 3.11: Curve di rigidezza radiali ottenute sperimentalmente

Dal grafico si deduce facilmente come il valore di rigidezza radiale dello pneumatico (pendenza di ogni curva) aumenti con l'innalzamento della pressione di gonfiaggio. Essendo noti i valori di rigidezza per ogni curva è possibile verificare se l'effettivo aumento di rigidezza sia o no lineare con la pressione.

Nel grafico sottostante sono quindi riportati i valori di rigidezza radiale appena trovati in funzione della pressione di gonfiaggio dello pneumatico

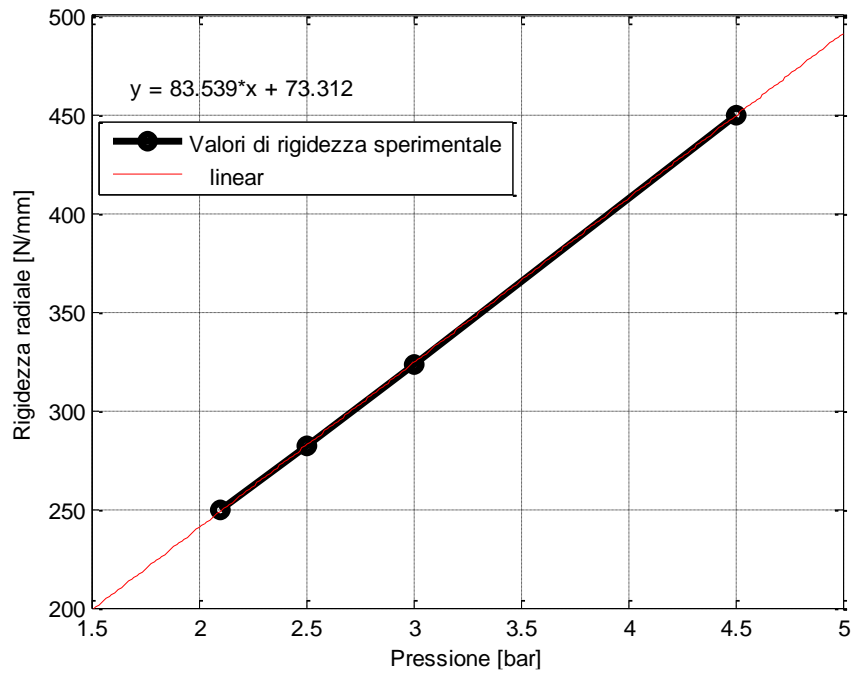


Figura 3.12: Andamento della rigidezza in funzione della pressione

L'osservazione che possiamo dedurre guardando questo grafico è che l'andamento della rigidezza in funzione della pressione di gonfiaggio dello pneumatico è completamente lineare e segue la seguente legge:

$$k[N/mm] = 83.539 * p[bar] + 73.312 \quad (3.5)$$

CAPITOLO 4

Validazione modello

Quest'ultima parte del lavoro è incentrata nel capire se i valori di forza siano effettivamente approssimati in maniera corretta. Per fare ciò è stato necessario ricorrere ad un modello ad elementi finiti dell'intera ruota. Il confronto è stato effettuato con gli output che derivano da questo modello, sviluppato mediante il software Abaqus.

4.1 Modello ad elementi finiti

Il modello numerico che è stato utilizzato a validare l'analitico è un modello che sviluppa l'intera gomma. Nella figura sottostante è rappresentato il modello ad elementi finiti

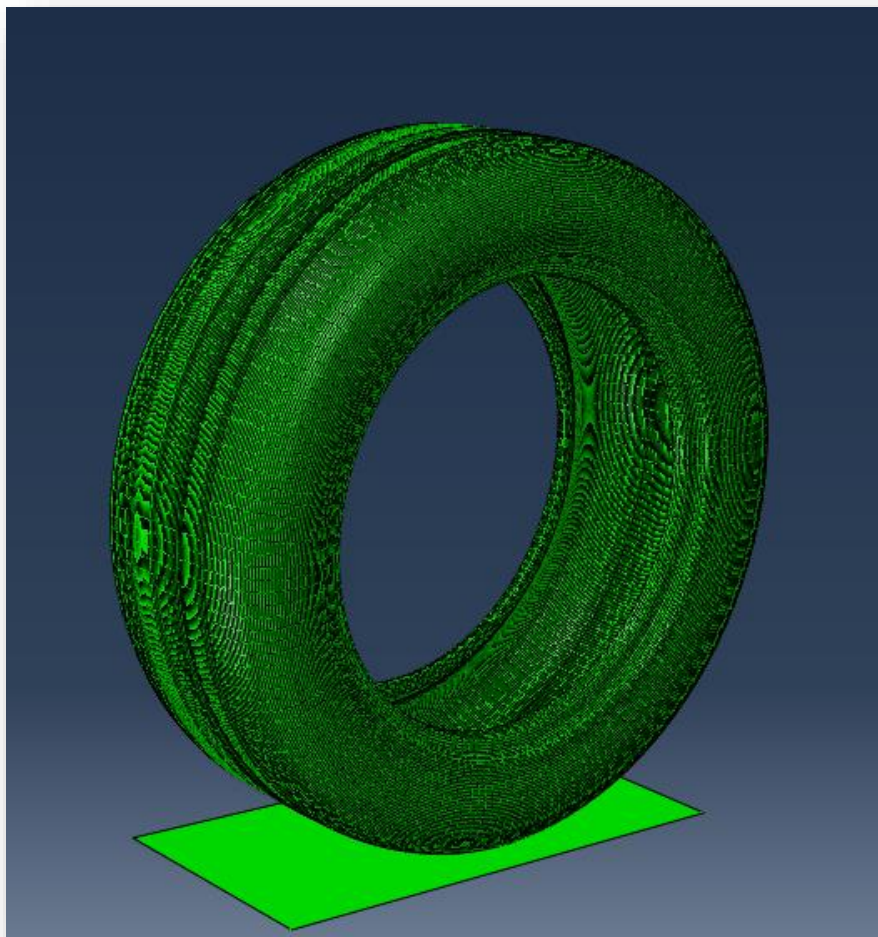


Figura 4.1: Assieme dei componenti del modello ad elementi finiti

Per simulare il piano d'appoggio che scambierà le forze radiali con lo pneumatico è stata posta una piastra (visibile in Figura 4.1 nella parte bassa dell'immagine) composta da materiale indeformabile sotto lo pneumatico stesso, tangente alla circonferenza del battistrada. All'interno del modello è stata applicata una legge di movimento al piano d'appoggio stesso che ne induce il movimento. Una volta che la piastra entra in contatto con il battistrada della gomma lo pneumatico inizia a scambiare forze con il piano. Di seguito è riportata la configurazione della gomma deformata.

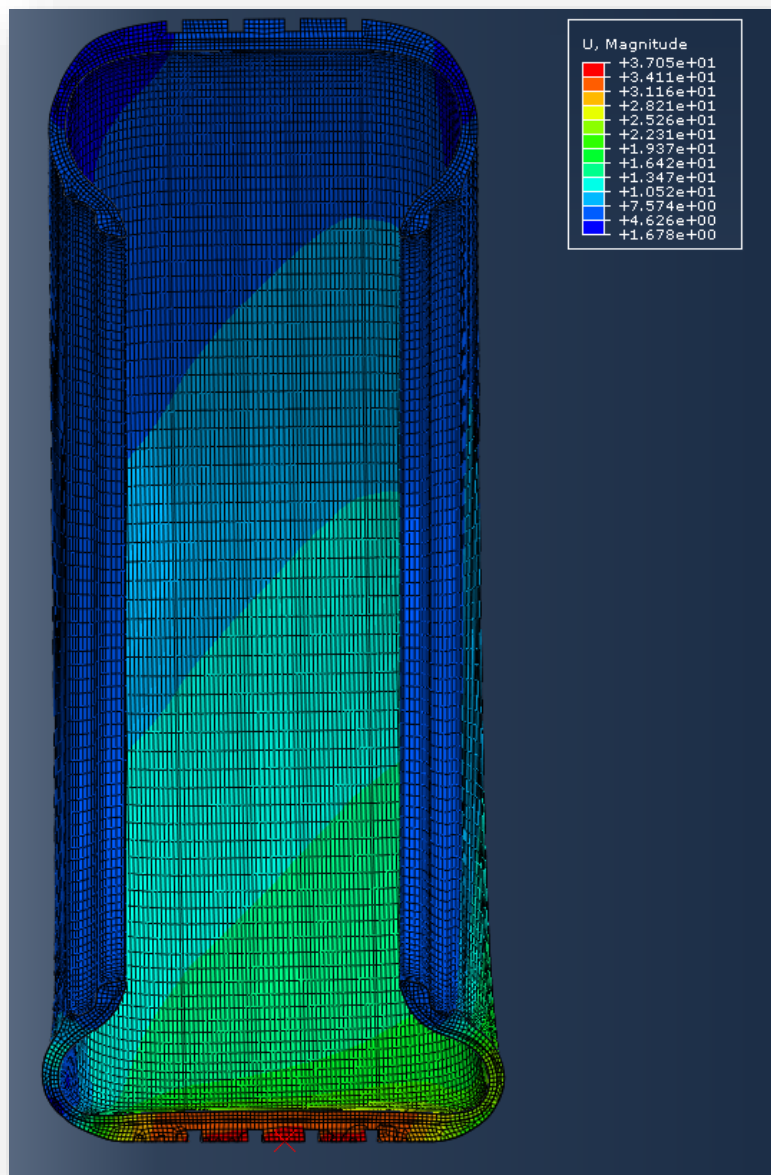


Figura 4.2: Configurazione deformata dello pneumatico

Per quanto riguarda la struttura interna della gomma sono stati definite due diverse disposizioni dei fili che compongono la cintura. Essa è infatti composta da un *layer* di fili d'acciaio, disposti a $\pm 20^\circ$ rispetto alla direzione di rotolamento, e da un *layer* di nylon disposti a 90° . Le caratteristiche dei due strati di fili differiscono non solo per la disposizione, ma anche per la diversità di area trasversale:

	Distanza tra due fili	Area per filo
Fili disposti a $\pm 20^\circ$	1 mm	0,20 mm ²
Fili disposti a 90°	1 mm	0,40 mm ²

Tabella 4.1: Caratteristiche dei fili che compongono la cintura

I materiali che sono stati utilizzati all'interno del modello ad elementi finiti variano a seconda del componente della carcassa. Come è possibile notare dalla tabella, al tallone e ai due *layers* di fili è stato assegnato un materiale di tipo isotropico, mentre il fianco, la parte in gomma nello strato sottostante al battistrada e il battistrada stesso sono stati definiti dal modello Mooney-Rivlin [5, 13].

Questi *layer* sono stati modellati tramite degli elementi di tipo "rebar" connessi ai nodi degli elementi costituenti la matrice di gomma.

Gli elementi rebar sono caratterizzati dal fatto di possedere una rigidità solo nella propria direzione assiale, sono quindi privi di rigidità flessionale [5].

	Tipo di materiale	Valori
Tallone	Isotropico	$E=210 \text{ GPa}$ $\nu=0,3$
Fili a $\pm 20^\circ$	Isotropico	$E=210 \text{ GPa}$ $\nu=0,3$
Fili a 90°	Isotropico	$E=5 \text{ GPa}$ $\nu=0,4$
Fianco e strato sotto battistrada	Mooney-Rivlin	$C_{10}=0,14 \text{ MPa}$, $C_{01}=0,43 \text{ MPa}$
Battistrada	Mooney-Rivlin	$C_{10}=0,80 \text{ MPa}$, $C_{01}=1,80 \text{ MPa}$

Tabella 4.2: Caratteristiche dei materiali che compongono il modello FEM

Definita la geometria del problema, i materiali e le tipologie di elementi ciò che manca per completare il modello sono i vincoli e la *mesh*. Dovendo capire l'andamento delle reazioni

all'interfaccia con il cerchio sono stati vincolati i nodi che entrano in contatto con esso, come illustrato in figura 4.4 dai vettori di colore arancione.

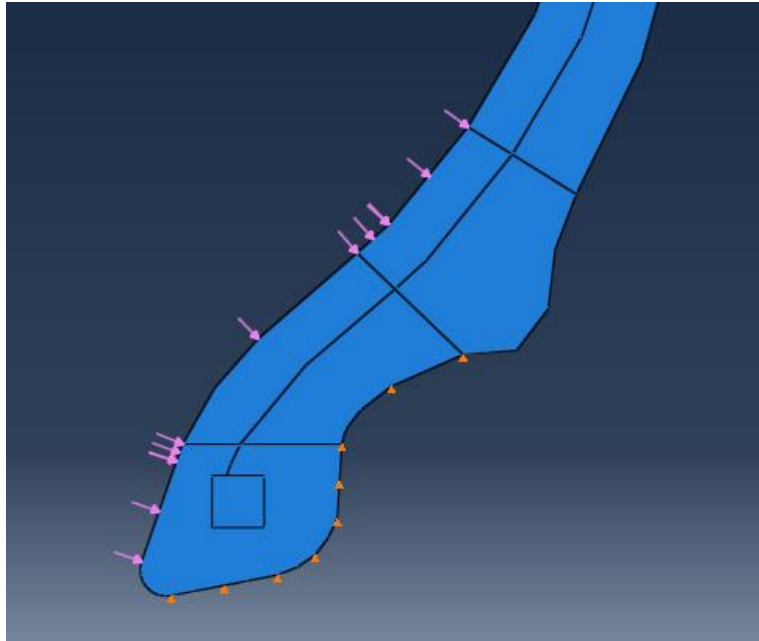


Figura 4.3: particolare del tallone: i nodi vincolati

I nodi rappresentati sono considerati come degli incastrati a terra e limitano perciò tutti i gradi di libertà dello pneumatico. Per l'operazione di meshatura sono stati utilizzati degli elementi rettangolari lineari per tutta la geometria.

4.2 Confronto risultati

All'interno di questo paragrafo confronteremo le curve delle reazioni agenti sul cerchio, facendo un confronto con le reazioni che sono state ottenute dal modello FEM con lo scopo di validare il modello analitico. Così come fatto in precedenza anche nel modello numerico verranno calcolate le reazioni nelle due direzioni, in modo da avere un riscontro chiaro.

I valori di pressioni che sono stati utilizzati per la validazione sono 4,5 bar e 2,5 bar.

4.2.1 Pressione 4,5 bar, carico 12990 N

Per questo valore di pressione il valore di carico radiale applicato, mediante lo spostamento del piano d'appoggio, assume il valore di 12990 N.

Il primo confronto effettuato è quello delle reazioni in direzione radiale.

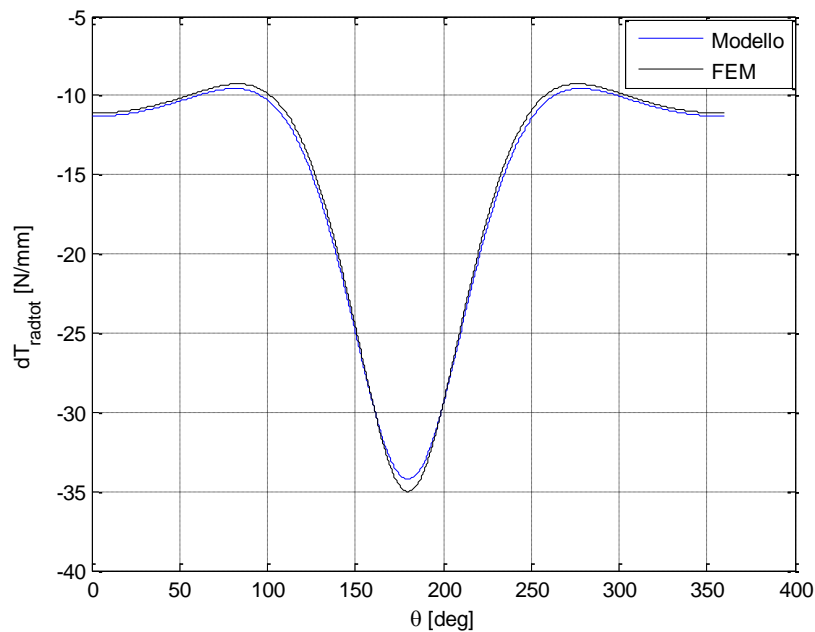


Figura 4.5: Confronto curve in direzione radiale: pressione 4,5 bar, carico 12990 N

Si può affermare che il modello analitico proposto rispecchia con buonissima approssimazione le curve in output dal modello FEM. L'errore massimo presente si trova a $\theta = 180^\circ$. Il modello FEM in quel punto assume un valore di -35,01 N/mm contro -34,23 N/mm del modello analitico. Calcolato in percentuale l'errore massimo risulta essere inferiore allo 0,23%. Per quanto riguarda il contributo assiale viene riportato il medesimo confronto:

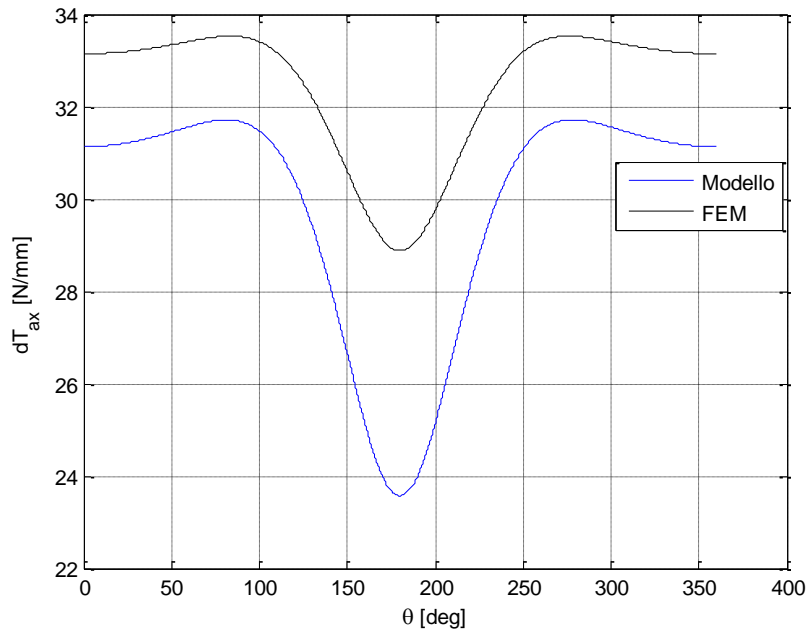


Figura 4.6: Confronto curve in direzione assiale: pressione 4,5 bar, carico 12990 N

In questo caso si può facilmente notare come l'approssimazione sia meno precisa. Anche in questo caso l'errore più alto è riscontrato a $\theta=180^\circ$. Confrontando in percentuale i valori di 28,88 N/mm contro i 23,58 la percentuale dell'errore massimo sfiora il 18 per cento. Il modello analitico tende quindi a sottostimare l'intensità delle reazioni in direzione assiale.

4.2.2 Pressione 4,5 bar, carico 8690 N

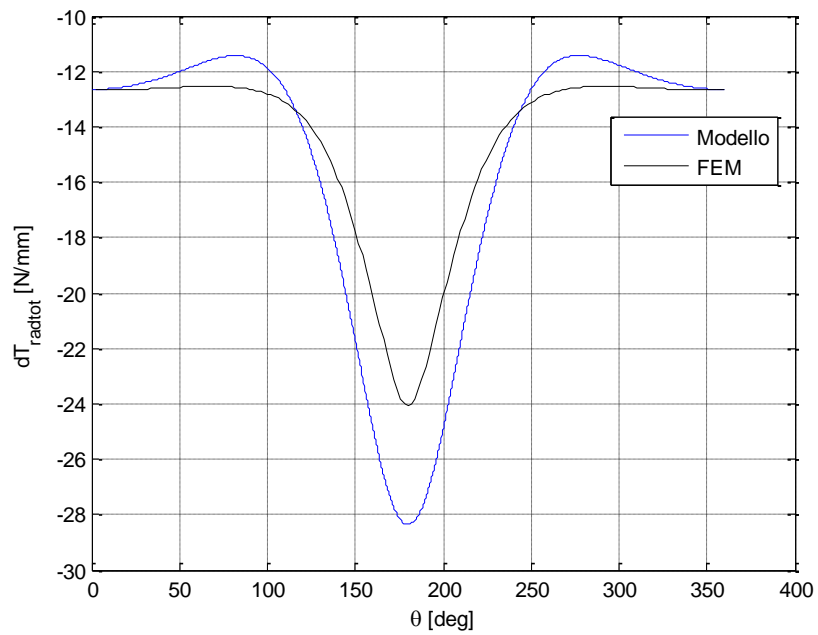


Figura 4.7: Confronto curve in direzione radiale: pressione 4,5 bar, carico 8690 N

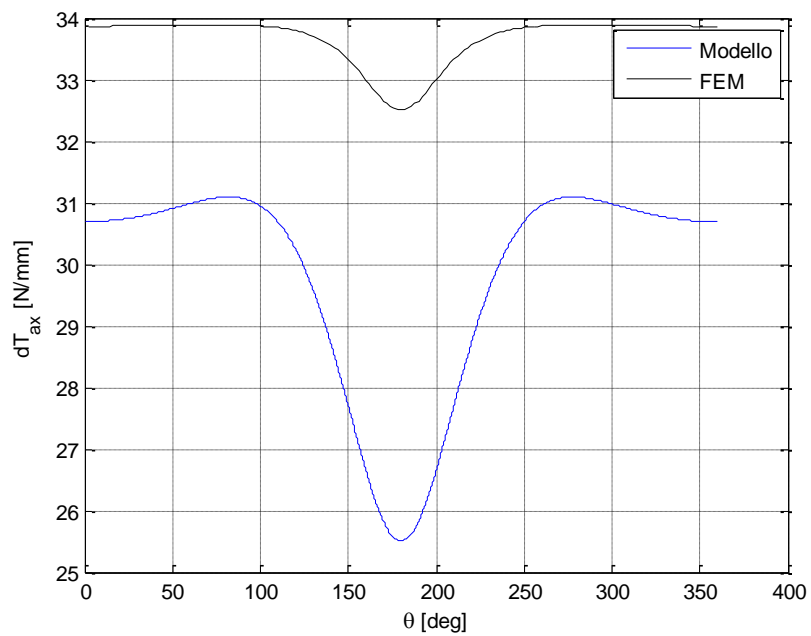


Figura 4.8: Confronto curve in direzione assiale: pressione 4,5 bar, carico 8690 N

4.2.3 Pressione 2,5 bar, carico 8690 N

Vengono analizzate ora le curve relative alla pressione di 2,5 bar e con un carico inferiore al precedente.

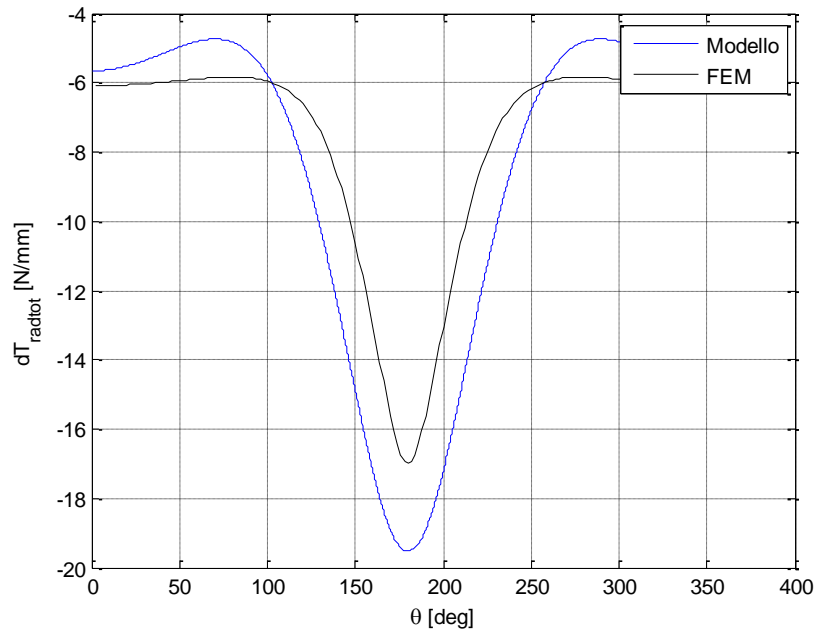


Figura 4.9: Confronto curve in direzione radiale: pressione 2,5 bar, carico 8690 N

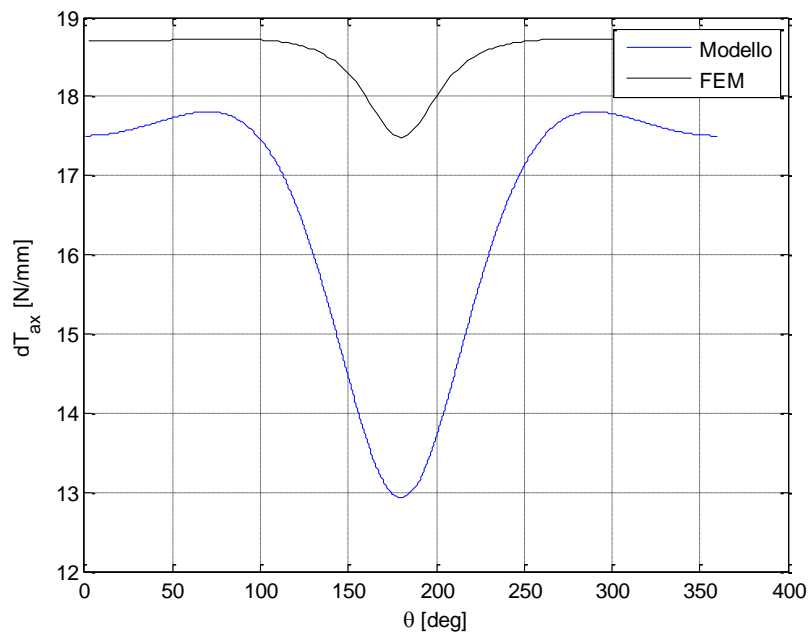


Figura 4.10: Confronto curve in direzione assiale: pressione 2,5 bar, carico 8690 N

Per questo valore di carico e di pressione sembra che la curva riportata in figura 4.4 non rispecchi bene l'andamento della curva derivante dal modello numerico. In realtà è possibile notare (sempre considerando per comodità il punto in $\vartheta=180^\circ$) come il contributo mancante sia molto simile per i tre casi analizzati (Equazioni 4.1, 4.2, 4.3). In ogni caso la percentuale d'errore riscontrata in assiale non supera il 25%.

$$Err_{2,5}(\vartheta = 180^\circ) = 17,6 - 12,9 = 4,7 \left[\frac{N}{mm} \right] \quad (4.1)$$

$$Err_{45}(\vartheta = 180^\circ) = 28,9 - 23,6 = 5,3 \left[\frac{N}{mm} \right] \quad (4.2)$$

$$Err_{45}(\vartheta = 180^\circ) = 32,5 - 25,5 = 7 \left[\frac{N}{mm} \right] \quad (4.3)$$

CONCLUSIONI

Il lavoro presentato è nato con lo scopo di studiare, mediante modellazione analitica, le reazioni all'interfaccia pneumatico-cerchio. Lo studio è stato sviluppato per fornire dei dati di partenza utili alla progettazione dell'intero cerchione. Lo pneumatico di riferimento che si è voluto modellare è un Continental 265/50 R 19.

Entrando nel dettaglio, nella prima parte dello studio lo pneumatico è stato approssimato con un modello a trave curvilinea. Precisamente la trave curvilinea, dotata di una propria rigidità flessionale, rappresenta la cintura dello pneumatico ed è collegata al cerchio mediante delle molle di costante k , distribuite lungo tutta la circonferenza, che rappresentano il contributo di rigidità dato dal fianco. La soluzione dell'equazione differenziale inquadrata dal problema fornisce la deformata della trave sottoposta ad un carico concentrato. Al fine di rendere i risultati più realistici, il modello è stato esteso per il carico distribuito.

Per renderlo tale è stata definita l'orma di contatto, mediante una formula analitica proposta da Besselink e H.B. Pacejka, ed è stata adottata una distribuzione del carico di tipo parabolico.

Definita la geometria del modello sono stati calcolati, mediante un processo di identificazione, i parametri ancora incogniti (k ed EJ). Mediante un algoritmo iterativo si sono identificati i parametri in modo che i risultati in uscita dal modello coincidano con i dati sperimentali, ottenuti mediante prove in laboratorio.

I dati che si sono ottenuti sono le curve di rigidità dello pneumatico a diversi valori di pressione (2.1, 2.5, 3.0, e 4.5 bar). Queste curve sono state ricavate imponendo diversi carichi radiali (mediante lo spostamento di un piano d'appoggio) e misurando lo spostamento in direzione verticale del piano d'appoggio. I valori di forza sono stati misurati da una cella di carico a sei assi posta sotto il piano d'appoggio, mentre quelli di spostamento sono stati ottenuti leggendo l'output di un potenziometro a filo. La strumentazione necessaria per lo svolgimento delle prove è stata fornita dal laboratorio L.A.S.T del Politecnico di Milano.

I risultati finali ottenuti, a conclusione dello studio, consistono nell'andamento delle reazioni agenti all'interfaccia pneumatico-cerchio, che sono state scomposte nella direzione radiale e in quella assiale. Le curve ottenute sono state confrontate con altre curve derivate da una modellazione ad elementi finiti dell'intero pneumatico. Ciò che si evince dal confronto è che le reazioni in direzione radiale riproducono con buonissima approssimazione il modello FEM. Anche l'andamento delle curve in direzione assiale è simile agli output numerici, nonostante differiscano da questi ultimi di un valore costante.

Al fine di completare la progettazione del cerchio sarebbe utile individuare i valori di carico per una condizione dinamica. Il modello infatti considera lo pneumatico in condizione statica e non considera il rotolamento dello stesso.

Il lavoro di ricerca successivo sarà descrivere l'andamento delle reazioni considerando una condizione dinamica. Sarà necessario porre in rotazione lo pneumatico per considerare gli effetti che in questo modello non sono stati studiati: l'andamento del carico all'interno dell'orma di contatto, tenuto conto dell'effetto di isteresi della gomma, oltre che il contributo di forza centrifuga che si verifica in seguito alla velocità angolare.

Sommando perciò i contributi di ogni singola condizione si arriverà ad ottimizzare la sezione del cerchio della ruota fino al risultato finale, ottenendo un cerchio più leggero che garantisca migliori prestazioni del veicolo, un miglior comfort e un miglioramento dell'efficienza totale del mezzo.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Koeller, R. C., “An experimental-analytical method to determine interaction forces on tire rims”, *Tire science and technology*, Vol.12, Nos. 1-4, Jan-Dec 1984, pp. 23-43.
- [2] Tseng, N. T., Pelle, R. G., and Chang, J. P., “Finite element simulation on tire rim interface” , *Tire science and technology*, TSTCA, Vol. 17, No.4, Oct-Dec 1989, pp. 305-325.
- [3] Potts, G. R., Bell, C. A., Charek, L. T., and Roy, T. K., “Tire vibrations”, *Tire science and technology*, TSTCA, Vol. 5, No.4, Nov 1977, pp. 202-225.
- [4] F. Mancoscu, G. Matrascia, F. Cheli, “Techniques for determining the parameters of a two-dimensional tire model for the study of ride comfort”, *Tire science and technology*, TSTCA, Vol. 25, No.3, July-September 1997, pp. 187-213.
- [5] F. Ballo, M. Gobbi, G. Mastinu, R. Zerboni, “Modellazione analitica e numerica di uno pneumatico motociclistico per la stima delle forze scambiate con il cerchio della ruota”
- [6] N. Ottosen, H. Peterson, “Introduction to the Finite element method”, Prentice Hall Europe, 1992.
- [7] E. A. Baskharone, “The Finite Element Method with Heat Transfer and Fluid Mechanics Applications”, Cambridge university press, 2014.
- [8] H. B. Pacejka, “Tyre and Vehicle Dynamics”, Butterworth-Heinemann, Second edition 2006, pp. 632-633.
- [9] M. Gobbi, G. Mastinu, G. Previati, “Analytical computation of the radial stiffness of pneumatic tyres”.
- [10] J. C. Halpin, J. L. Kardos, “The Halpin-Tsai Equations: A Review”, *Polymer Engineering and Science*, Vol.16, No.5, 1976, pp 344-352.
- [11] R. Hill, “A self-consistent mechanics of composite materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, August 1965, Vol. 13(4), pp 213-222.
- [12] V. Alkan, S. M. Karamihas, G. Anlas, “Finite Element Modeling of Static Tyre Enveloping Characteristics”, *International Journal of Automotive Technology*, 2011, Vol. 12, No 4, pp. 529-535.