

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile-Strutture



**RETI DI FUNI E MEMBRANE:  
RICERCA DELLA FORMA E RISPOSTA  
STRUTTURALE**

Relatore: Prof. Giorgio Novati

Candidato:

Marco Biasielli Matr. 838193

Anno accademico 2015/2016

## Abstract

In questa tesi ci si prefigge l'obiettivo di mostrare il processo ideativo che un progettista deve fare quando si trova a lavorare con le tensostrutture, a partire dal form finding fino all'analisi sotto carichi esterni. Le loro peculiari caratteristiche richiedono l'utilizzo di metodi appositamente studiati in modo da tenere in conto delle specificità tipiche di queste strutture (sia per aspetti costruttivi che per materiale). Nella prima fase, quindi, devono essere usate procedure che soddisfino sia i requisiti architettonici che quelli ingegneristici, cioè metodi che a partire dalla configurazione dei bordi o in generale dei punti fissati a sostegno della struttura e dalle pretensioni imposte nella rete di funi/membrana riescano a trovare la forma iniziale assunta dall'opera. Successivamente occorre determinare la risposta della struttura alle azioni esterne (prevalentemente carichi ambientali); nel caso di strutture a membrana l'analisi viene svolta utilizzando un software ad elementi finiti di tipo commerciale (Abaqus) che includa elementi di membrana, nei quali deve essere possibile inserire le pretensioni determinate nella fase precedente. Quest'analisi viene condotta ipotizzando un comportamento elastico lineare del materiale. Pur essendo questa una semplificazione rispetto al reale comportamento di tessuti tecnici, determinabile attraverso prove di carico biassiali su provini cruciformi, è tutt'oggi la modellazione costitutiva più utilizzata dai progettisti. È importante specificare che non esiste ancora normativa europea che regolamenti l'analisi e il progetto di tensostrutture, ma solo *guidelines* in via di sviluppo e in costante revisione, seppure opere di questo tipo siano state costruite per la prima volta negli anni '80.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>8</b>
1.1	Esempi storici di tensostrutture . . . . .	9
1.2	Fune sollecitata da un carico trasversale: non linearità geometrica e contributo della pretensione . . . . .	13
1.3	Analisi di una rete di funi piana . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Il force density method</b>	<b>20</b>
2.1	Equilibrio del nodo . . . . .	20
2.2	Formulazione matriciale . . . . .	22
2.3	Esempi . . . . .	24
2.3.1	Rete di cavi 4 per 4 . . . . .	25
2.3.2	Struttura hypar . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Superfici di minimo</b>	<b>27</b>
3.1	Tensione superficiale . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Il surface stress density method</b>	<b>31</b>
4.1	Descrizione matematica del procedimento . . . . .	32
4.2	Esempi e confronti . . . . .	36
4.2.1	Esempio 1: struttura hypar con due punti alti e due punti bassi . . . . .	36
4.2.1.1	Confronto fra i due modelli . . . . .	38
4.2.2	Esempio 2: tronco di cono . . . . .	39
4.2.2.1	Confronto tra i modelli e formula analitica . . . . .	40
4.3	Spiegazione ortogonalità delle forze nell'elemento . . . . .	43
4.3.1	Uso dei carichi equivalenti nodali . . . . .	43
4.3.2	Uso del Principio dei Lavori Virtuali . . . . .	46
4.4	Esempio 3: uso di dati realistici . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Dynamic Relaxation Method</b>	<b>50</b>
5.1	Formulazione del metodo . . . . .	50
5.2	Controllo sulla convergenza . . . . .	52
5.3	Definizione di masse e smorzamento viscoso . . . . .	52
5.3.1	Smorzamento cinematico . . . . .	54
5.4	Esempio 1 . . . . .	56
5.5	Esempio 2 . . . . .	57

<b>6</b>	<b>Analisi FEM sotto l'azione di carichi</b>	<b>58</b>
6.1	Peso proprio . . . . .	60
6.2	Vento . . . . .	61
6.3	Neve . . . . .	65
6.3.1	Coefficiente di forma . . . . .	67
6.4	Esempi di calcolo . . . . .	69
6.4.1	Struttura hypar . . . . .	69
6.4.1.1	Combinazioni di carico e risultati . . . . .	72
6.4.2	Cono . . . . .	76
6.4.2.1	Combinazioni di carico e risultati . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Membrane a comportamento ortotropo</b>	<b>83</b>
7.1	Materiali . . . . .	83
7.1.1	L'intreccio . . . . .	85
7.2	Legame costitutivo ortotropo . . . . .	87
7.3	Determinazione delle costanti elastiche . . . . .	88
7.3.1	Protocollo MSAJ/M-02-1995. . . . .	89
7.3.2	Protocollo secondo TensiNet Design Guide for Tensile Surface Structures. . . . .	92
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>94</b>
<b>I</b>	<b>Appendici</b>	<b>95</b>

# Elenco delle figure

1.1	Raleigh Livestock Arena, North Carolina. Sx: costruzione della rete, dx: veduta degli archi. . . . .	9
1.2	Padiglione tedesco, Montral Expo1967 . . . . .	10
1.3	Forme più usate. . . . .	11
1.4	Copertura dell'aeroporto internazionale di Jeddah . . . . .	12
1.5	Copertura dello Stelling Ice Skating Rink and Velodrome di Amburgo . . . . .	12
1.6	Cavo incernierato caricato in mezzeria . . . . .	14
1.7	Grafico carico-inflessione senza pretensione (a sx) e con pretensione (a dx) . . . . .	14
1.8	Configurazione iniziale del problema . . . . .	15
1.9	Facciata dell'Hilton Hotel (Monaco) . . . . .	18
1.10	Facciata e dettaglio del Time Warner Center (New York) . . . . .	18
1.11	Morsetti di fissaggio dei pannelli di vetro alla rete di funi . . . . .	19
2.1	a sinistra: Mannheim Multihalle; a destra: Solar Therme . . . . .	20
2.2	Schema del nodo . . . . .	21
2.3	Schema topologico della struttura . . . . .	25
2.4	Configurazione equilibrata . . . . .	25
2.5	a sinistra: topologia, a destra: configurazione equilibrata . . . . .	26
3.1	Il problema di Eulero: il catenoide . . . . .	27
3.2	Superficie di Scherk . . . . .	28
3.3	Curvatura gaussiana . . . . .	29
3.4	Forza di interazione . . . . .	29
3.5	Dettaglio delle particelle di un liquido . . . . .	30
4.1	Forze ortogonali nei nodi . . . . .	32
4.2	. . . . .	33
4.3	Schema ciclo iterativo metodo 1 . . . . .	34
4.4	Schema ciclo iterativo metodo 2 . . . . .	36
4.5	Esempio 1 da Matlab . . . . .	37
4.6	Esempio 1 da RFEM5 . . . . .	38
4.7	Punti considerati esempio 1 . . . . .	38
4.8	Esempio 2 da Matlab . . . . .	40
4.9	a sinistra: esempio 2 da RFEM5; a destra: punti considerati per il controllo . . . . .	40
4.10	Catenoide come soap film . . . . .	41
4.11	Catenaria approssimante i punti in Matlab . . . . .	42
4.12	Dominio considerato . . . . .	43

4.13	Sforzo sull'elemento . . . . .	44
4.14	Carichi nodali equivalenti . . . . .	45
4.15	Nodo 3 in dettaglio . . . . .	45
4.16	Gradi di libertà dell'elemento . . . . .	46
4.17	Dettaglio di un elemento sul bordo in assenza di cavi (a sinistra) e con i cavi (a destra) . . . . .	48
4.18	Diagrammi delle tensioni normali e tangenziali . . . . .	49
4.19	Sforzo normale nei cavi . . . . .	49
5.1	Grafico dello spostamento per un sistema ad un gradi di libertà . . . . .	53
5.2	Grafico dell'energia cinetica . . . . .	54
5.3	Energia cinetica nell'intorno di un picco . . . . .	55
5.4	Geometria dell'esempio . . . . .	56
5.5	Configurazione equilibrata esempio 2 . . . . .	57
6.1	Elementi M3D3 e M3D4 . . . . .	58
6.2	Sistemi di riferimento locali assegnati . . . . .	59
6.3	Punti di integrazione di Gauss . . . . .	59
6.4	Sensori all'interno del modello e modello in opera . . . . .	64
6.5	Schema dei coefficienti di pressione . . . . .	64
6.6	Zone di carico da neve (Figura 3.4.1, NTC §3.4.2) . . . . .	65
6.7	Zone di carico da neve (Figura C.6, Eurocodice 1, Appendice C) . . . . .	66
6.8	Condizioni di carico per coperture a due falde (Figura 3.4.3 delle NTC, §3.4.5.3) . . . . .	68
6.9	Coefficiente di forma per il carico neve – coperture a più falde (Fig. C3.4.2, Circolare NTC n°617) . . . . .	68
6.10	Coefficiente di forma per il carico neve – coperture cilindriche (Fig. C3.4.3, Circolare NTC n°617) . . . . .	68
6.11	Elementi M3D3 e M3D4 . . . . .	69
6.12	Modello Abaqus . . . . .	70
6.13	Zonazione per il coefficiente di pressione $c_p$ (hypar) . . . . .	71
6.14	Spostamenti combinazione 1 (in millimetri) . . . . .	73
6.15	Tensioni combinazione 1 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	73
6.16	Spostamenti combinazione 2 (in millimetri) . . . . .	74
6.17	Tensioni combinazione 2 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	74
6.18	Spostamenti combinazione 3 (in $mm$ ) . . . . .	75
6.19	Tensioni combinazione 3 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	75
6.20	Spostamenti combinazione 4 (in $mm$ ) . . . . .	76
6.21	Tensioni combinazione 4 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	76
6.22	Presentazione struttura a cono . . . . .	77
6.23	Zone di applicazione del carico da neve . . . . .	78
6.24	Zonazione per il coefficiente di pressione $c_p$ (cono) . . . . .	78
6.25	Spostamenti combinazione 1 (in millimetri) . . . . .	80
6.26	Tensioni combinazione 1 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	80
6.27	Spostamenti combinazione 2 (in millimetri) . . . . .	81
6.28	Tensioni combinazione 2 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	81
6.29	Spostamenti combinazione 3 (in millimetri) . . . . .	82

6.30	Tensioni combinazione 3 (in $\frac{N}{mm}$ ) . . . . .	82
7.1	Intreccio Panama . . . . .	85
7.2	Dettaglio di un tessuto intrecciato . . . . .	86
7.3	Effetti del tensionamento dell'ordito sulla trama . . . . .	86
7.4	Grafici tensioni-deformazioni per rapporti diversi di tensionamento . . . . .	87
7.5	Storia di carico come prevista da MSAJ/M-02-1995 . . . . .	90
7.6	Correlazione tra dati misurati e calcolati secondo lo standard MSAJ con DO1 . . . . .	92
7.7	Storia di carico come prevista da TensiNet . . . . .	93
7.8	Correlazione tra dati misurati e calcolati secondo lo standard TensiNet . . . . .	93

# Elenco delle tabelle

1.1	Risultanti alla convergenza . . . . .	17
4.1	Coordinate punti di controllo . . . . .	39
4.2	Errori sulle coordinate z (mesh 8x8) . . . . .	39
4.3	Errori sulle coordinate z (mesh 12x12) . . . . .	39
4.4	Punti considerati esempio 2 . . . . .	41
4.5	Confronto con la catenoide . . . . .	42
4.6	Caratteristiche cavi pr EN10138 . . . . .	48
5.1	Errori quote esempio 1 . . . . .	56
5.2	Errori quote esempio 1 . . . . .	57
6.1	Valori dei parametri $v_{b0}, k_a, a_0$ . . . . .	62
6.2	Classi di rugosità del terreno . . . . .	62
6.3	Parametri per la definizione del coefficiente di esposizione . . . . .	63
6.4	Valori di $C_E$ per diverse classi di topografia . . . . .	67
6.5	Valori del coefficiente di forma . . . . .	67
6.6	Coefficienti di pressione per il caso in esame (hypar) . . . . .	71
6.7	Carichi da vento (risucchio) . . . . .	71
6.8	Coefficienti di pressione per il caso in esame (cono) . . . . .	78
7.1	Proprietà di alcuni tessuti . . . . .	84
7.2	<i>Determination Options</i> usate per la valutazione dei test della MSAJ . . . . .	90
7.3	Set di costanti elastiche stimate con test MSAJ per PES/PVC Tipo III (Uhlemann J. [19]) . . . . .	91
7.4	Set di costanti elastiche stimate con test TensiNet per PES/PVC Tipo III (Uhlemann J. [19]) . . . . .	93

# Capitolo 1

## Introduzione

Progettare e costruire utilizzando le membrane o più in generale tensostrutture è un modo profondamente diverso da quello “classico” che si è sviluppato ed è stato portato avanti dagli albori dell’edilizia. Tali diversità si riscontrano sotto ogni aspetto riguardante queste strutture relativamente nuove, a partire innanzitutto dalla massa in gioco: se gli edifici convenzionali coinvolgono una quantità di materia significativa per poter sviluppare la resistenza necessaria (ed ottenere anche proprietà di inerzia e vibrazioni adeguate), le tensostrutture mirano all’esatto opposto, si tende cioè a trovare nuovi metodi e materiali per poterle rendere sempre più leggere ma al contempo efficaci. L’esigenza di minimizzare il materiale necessario, oltre ad essere una naturale tendenza del principio di ottenere “massima efficienza col minimo sforzo”, è spinta da fattori economici e puramente logistici (l’impiego di meno materiale sul cantiere, risparmio sui mezzi di trasporto e messa in opera) ma anche da fattori ambientali (limitazione dello “spreco” di risorse) [13]. Questi ultimi si sposano particolarmente bene con le caratteristiche intrinseche di questo schema costruttivo: proprietà cardine sono infatti adattabilità, reversibilità e flessibilità (in termini di utilizzo) delle tensostrutture. Grazie alla loro leggerezza e al fatto che sono quasi unicamente costituite da pezzi prefabbricati di facile assemblaggio, possono essere montate e smontate in poco tempo e perfino riutilizzate senza quindi l’impiego di nuove risorse. Una virtuosa conseguenza di questo è la durata di simili installazioni, la facilità di sostituzione delle sole parti deteriorate e la straordinaria capacità di adattamento al variare delle condizioni di carico o situazione di utilizzo.

Mentre decenni fa, anni ’50-’60, questo tipo di strutture era costituito prevalentemente da reti di funi, a partire dagli anni ’80 la sperimentazione e l’invenzione di tessuti tecnici rivestiti ha consentito di affidare a membrane realizzate con questi materiali la funzione portante, oltre che quella di chiusura e protezione dell’ambiente interno. Col tempo anche il loro uso è cambiato: se agli inizi erano impiegate soprattutto nella realizzazione di tetti e coperture, negli ultimi 20 anni i loro utilizzi si sono allargati anche ad altre tipologie di strutture, siano esse reti di funi o membrane, come facciate di edifici (reti di funi supportanti grandi vetrate) o rivestimenti di stadi o padiglioni in cui stanno oggi avendo grande successo e diffusione i cuscini in ETFE [17]. Le membrane tensionate permettono la nascita di un nuovo tipo di architettura meno legata ai vincoli della materia poichè esse posseggono proprietà che elementi convenzionali non hanno e possono, a ragione, esse considerate come “ottimali” in quanto sono caricate solo in tensione (evitando quindi fenomeni di flessione e instabilità per definizione); inoltre si adattano ai carichi

assecondando la direzione di applicazione e il flusso delle tensioni. Per effettuare l'analisi e il progetto di queste strutture occorre affrontare le seguenti tre fasi: ricerca della forma ("form-finding"); analisi sotto carichi esterni (prevalentemente carichi ambientali) della struttura in configurazione pre-tesa; generazione del modello di taglio (termine usualmente riferito alle membrane, "cutting pattern"), che nel caso delle reti di funi corrisponde alla determinazione della lunghezza di taglio delle funi e dei punti lungo le funi dove posizionare i morsetti. Nella tesi vengono illustrati e sviluppati metodi per il form-finding sia per reti di funi sia per membrane; sono stati sviluppati diversi programmi in Matlab che consentono l'utilizzo di alcuni metodi di form finding. Con riferimento invece all'analisi sotto carichi esterni, ci si è focalizzati sulle strutture a membrana e si è utilizzato un programma agli elementi finiti commerciale (Abaqus) al quale vengono però forniti in input geometria e pretensioni calcolate con uno dei codici Matlab summenzionati. Non vi è stato invece sufficiente tempo per sviluppare anche il tema del cutting pattern, che viene solo brevemente illustrato in termini compilativi.

## 1.1 Esempi storici di tensostrutture

Un primo esempio di struttura a rete di cavi fu costruita in North Carolina, USA, progettata dall'ingegner Fred Severud e dall'architetto Matthew Nowicki nel 1952; si trattava del *Raleigh Livestock Arena* (vedi figura 1.1).



Figura 1.1: Raleigh Livestock Arena, North Carolina. Sx: costruzione della rete, dx: veduta degli archi.

La rete di cavi ha una luce massima di 95 m e si ancora a due grandi archi inclinati di  $20^\circ$  sull'orizzontale. Molto importante è il ruolo degli archi; essi hanno una funzione sia statica che cinematica, infatti scaricano a terra le forze che vengono dalla rete ben sopportando quindi gli sforzi di compressione che si sviluppano, inoltre con la loro particolare forma e inclinazione permettono alla rete di assumere una doppia curvatura, tipica di strutture del genere. Facilmente si può individuare la doppia funzione dei cavi fornita loro dalla curvatura: una serie di funi presenta concavità verso l'alto e sono quelli che aumentano la tensione assorbendo il carico quando questo viene applicato; l'altra serie di cavi, ortogonale alla prima ha la concavità in senso opposto e fanno sì che la prima serie mantenendo la posizione desiderata che altrimenti perderebbero a causa della pretensione (tendono a tornare in configurazione orizzontale piana).

Un'altra realizzazione riguardante le reti di funi si trova a Montreal, Canada, dove in occasione dell'esposizione universale del 1967 fu eretto il padiglione della Germania, ad opera di Frei Otto in collaborazione con l'architetto Rolf Gutbrod. La struttura presenta pianta irregolare, libera che ben rappresenta la potenzialità di tali opere. La copertura è realizzata con una membrana fissata alla rete di funi e sostenute da alberi di altezza e inclinazione variabili. La membrana è formata da una serie di fili tessuti immersi in una pasta polimerica (fili in poliestere rivestiti in PVC).

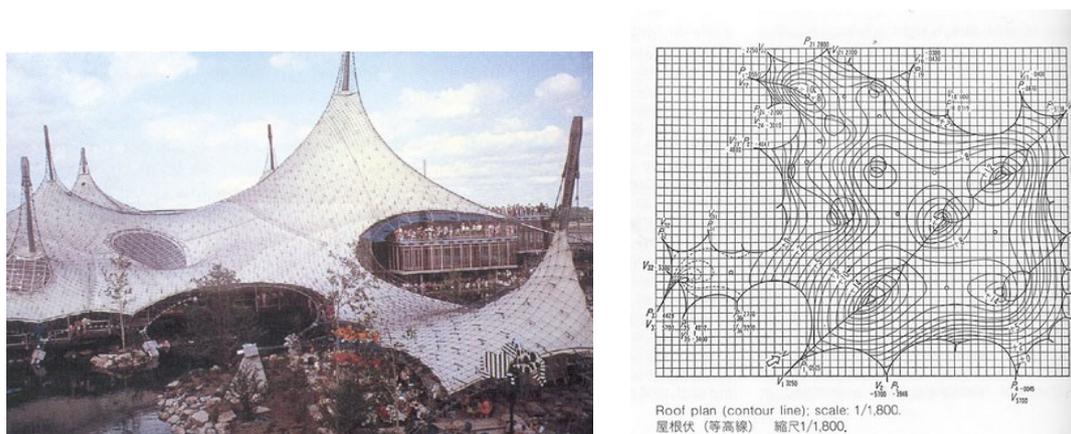


Figura 1.2: Padiglione tedesco, Montreal Expo1967

Le due strutture appena presentate danno una buona visione degli estremi cui si può giungere in termini di forma: la prima, il Raleigh Livestock Arena, rappresenta l'estremo più semplicistico, una semplice rete di funi a doppia curvatura e pianta sostanzialmente regolare; la seconda, il padiglione tedesco, è diametralmente opposto, rappresenta il culmine dell'asimmetria e della non regolarità. Nel mezzo si possono trovare delle categorie sotto cui far ricadere le tensostrutture a seconda del prevalente tipo di forma e metodo di sostegno che impiegano. Queste categorie (e quindi forme) sono quattro: strutture con forma di cono (fig.1.3b), di sella sostenuta da archi (fig.1.3d), la hypar (fig.1.3a) e la "ridge and valley" (fig.1.3c)(traducibile in italiano letteralmente in "vette e valli").



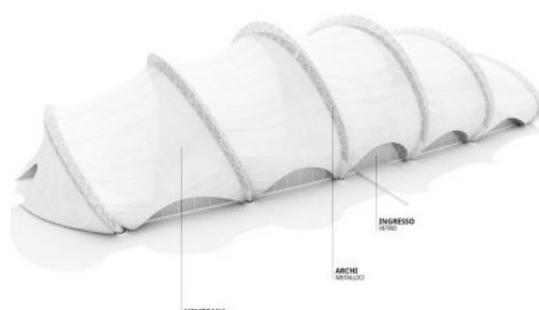
(a) Hypar



(b) Cono



(c) Ridge and valley



(d) Sella sostenuta da archi

Figura 1.3: Forme più usate.

Ovviamente, una varietà ben più grande di forme è ottenibile semplicemente combinando quelle appena citate ottenendo degli ibridi; non c'è praticamente limite alla forme ottenibili poichè tali opere non rispondono alle regole convenzionali, ma necessitano unicamente dell'equilibrio delle pretensioni interne in accordo con le condizioni di vincolo.

Nell'ambito delle membrane, una delle prime opere ad utilizzarle come parte portante dei carichi è stata l'aeroporto internazionale Re Abdulaziz nella città di Jeddah, in Arabia Saudita. Particolarmente noto è il suo Hajj Terminal, progettato dall'ingegnere Fazlur Rahman Khan e costruito da Horst Berger nel 1981: è formato da 10 moduli ogni costituito a sua volta da 21 tende coniche in tessuto in fibra di vetro rivestito da teflon sorrette da piloni. Questo terminale ha ricevuto il premio per l'architettura Aga Khan, nel 1983.



Figura 1.4: Copertura dell'aeroporto internazionale di Jeddah

Più recente è invece lo Stelling Ice Skating Rink and Velodrome di Amburgo. La struttura è composta da una membrana pretesa connessa tramite cavi a 4 alberi che forniscono il mezzo primario di assorbimento della compressione. In aggiunta a questi, sono presenti altri 8 alberi volanti supportati da cavi interni messi in tensione tra i 4 alberi principali che, spingendo verso l'alto, contribuiscono al numero di punti alti e all'aumento di curvatura così da migliorare la performance generale della struttura. Una vista dall'interno mette in evidenza le varie parti menzionate, inoltre pone in luce le diverse parti della membrana e come esse siano state cucite e saldate insieme per assecondare l'andamento delle tensioni e rinforzare i punti deboli. Ulteriori esempi di opere di questo genere si possono trovare in [14].



Figura 1.5: Copertura dello Stelling Ice Skating Rink and Velodrome di Amburgo

Un altro aspetto peculiare di tali opere è anche il loro comportamento fisico, in termini di spostamenti, deformazioni e sforzi interni che le rendono radicalmente diverse dalle costruzioni classiche e complica non di poco la valutazione degli enti fisici appena citati. Ciò di cui si sta parlando è dovuto a non linearità che sono imputabili a diversi aspetti della struttura quali materiali (legame costitutivo non elastico lineare con comportamenti diversi a seconda del numero di cicli eseguiti e della trama della membrana) e caratteristiche puramente meccaniche. Soffermandosi per ora su queste ultime, esse sono presenti

indipendentemente dal materiale in uso e riconducibili unicamente allo schema strutturale tipico per queste opere: poichè, come si è detto, la materia normalmente impiegata è leggera con spessori/diametri piccoli rispetto altre lunghezze caratteristiche dell'elemento (in fin dei conti si sta parlando di membrane e cavi), quando sono sollecitati da un qualunque tipo di carico, sia esso vento o neve o pur soltanto la pretensione (non si tiene conto del peso proprio proprio perchè di ordini di grandezza inferiori rispetto gli altri), gli spostamenti a cui vanno incontro non rientrano più sotto l'ipotesi di piccolezza, cioè la struttura non mantiene più una forma che può essere confusa con la configurazione iniziale indipendente dai carichi, ma assume una forma **dipendente dalla sollecitazione** e si hanno quindi forze interne e deformazioni conseguentemente non lineari. Si approfondiranno nella sezione successiva alcuni esempi significativi per chiarire il problema e porre in risalto la formulazione.

## 1.2 Fune sollecitata da un carico trasversale: non linearità geometrica e contributo della pretensione

Come si può intuire la pretensione gioca un ruolo per nulla marginale: essa concede al sistema una rigidezza aggiuntiva (effetto stress stiffening) permettendo alla struttura di poter sopportare carichi maggiori o assumere configurazioni altrimenti impossibili. Il livello di pretensione è spesso un compromesso cioè occorre che sia sufficientemente basso per ridurre il lavoro fatto durante l'installazione, ma anche sufficientemente alto da mantenere la tensione sufficiente anche dopo le perdite a lungo termine dovute a creep. Indicativamente il livello di pretensione richiesto per mantenere una certa curvatura (con raggio  $R$ ) sotto un carico  $p$  è dato dalla relazione:

$$T = pR \quad (1.1)$$

Ci sono quindi ovvi limiti alla forma ottenibile: è facile intuire che una geometria piatta non è concepibile in quanto per averla ( $R = \infty$ ) occorrerebbe una pretensione infinita. Il corretto livello di pretensionamento viene individuato dal progettista attraverso la ricerca della forma ed in seguito convalidato dal modello analitico di carico che si stabilisce di assegnare alla struttura. Oltre a dover assegnare questo valore iniziale e progettare la procedura di messa in opera dei cavi, è d'obbligo installare anche dei dispositivi che permettano per tutta la durata della vita della struttura di recuperare le perdite di pretensione che inevitabilmente si verificheranno, come si è già accennato, a causa di fenomeni viscosi cedimenti vincolari.

Il livello minimo di pretensione dipende, logicamente, dalla rigidezza e resistenza del materiale utilizzato per la membrana (per le reti di funi l'acciaio ha un utilizzo quasi esclusivo) e dalla forma che essa assume; tale livello è essenziale per permettere alla membrana di adempiere alla sua funzione strutturale (assorbire i carichi tramite trazione) e garantisce che non ci siano zone grinzose non sufficientemente tese. Una regola pratica, comunque, stabilisce che il livello ideale di pretensione debba trovarsi in un intervallo che va dal 2,5 % a 6 % della capacità di tensione media di una striscia di materiale, valutata in entrambe le direzioni di trama e ordito.

Si consideri, come esempio chiarificatore, un cavo incernierato ai due estremi di lunghezza  $2L_0$ , rigidezza assiale  $k = \frac{EA}{L_0}$  e caricato da una forza verticale  $Q$  (vedi fig.1.6).

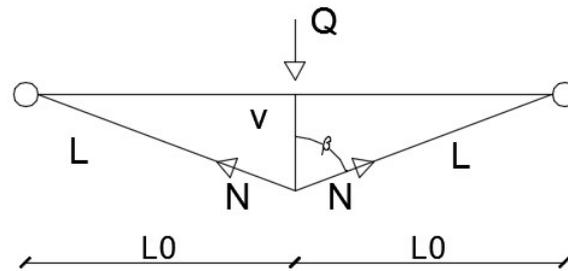


Figura 1.6: Cavo incernierato caricato in mezzeria

Scrivendo l'equazione di equilibrio verticale al nodo centrale si ricava:

$$\begin{cases} k(L - L_0)\cos(\beta) = \frac{Q}{2} \\ \cos(\beta) = \frac{v}{L} \\ L = \sqrt{L_0^2 + v^2} \end{cases} \quad (1.2)$$

da cui:

$$\frac{v}{L_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{L_0}\right)^2}} \right) = \frac{Q}{2EA} \quad (1.3)$$

Si riportano i grafici dello spostamento adimensionalizzato per la lunghezza iniziale del cavo ( $v/L_0$ ) contro il carico in mezzeria adimensionalizzato per la rigidezza assiale ( $Q/EA$ ). In questo modo essi mostrano l'andamento dello spostamento indipendentemente dai valori che queste altre entità fisiche assumono. Il primo grafico rappresenta il rapporto  $v/L_0$  in assenza di pretensione, il secondo in presenza di pretensione con un rapporto variabile rispetto al carico.

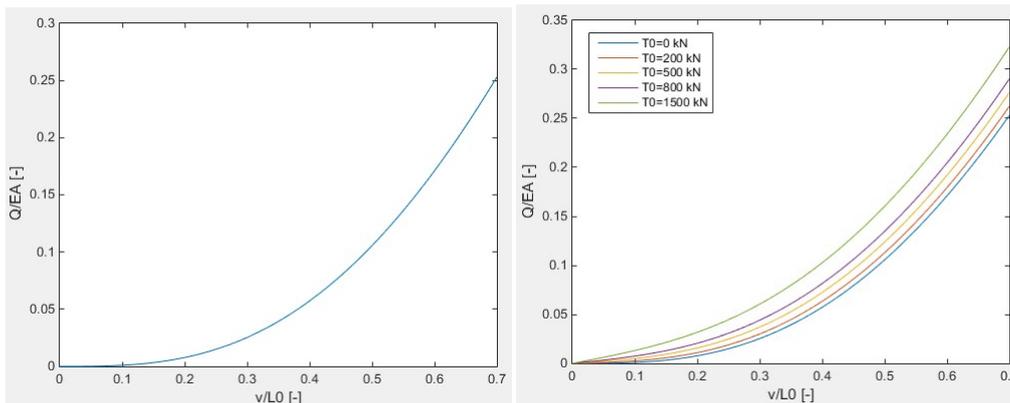


Figura 1.7: Grafico carico-inflessione senza pretensione (a sx) e con pretensione (a dx)

Si può notare come, nel caso di assenza di pretensione, con una inflessione nulla si ha il carico corrispondente nullo ovviamente e la derivata (inclinazione della retta tangente alla curva in zero cioè la rigidezza) anch'essa nulla. Nel caso di pretensione invece la rigidezza nel punto iniziale assume un valore diverso da zero; si può anche notare come essa sia

generalmente tanto più grande quanto più grande è la pretensione fino al tendere ad una relazione lineare quando la pretensione è infinita. In ultimo ma non meno importante, c'è il fatto che la pretensione consente ad un cavo (o membrana) di subire degli accorciamenti rispetto la configurazione di riferimento pur restando in trazione e di conseguenza continuando ad avere una funzione strutturale. Per puro esempio, scegliendo un cavo in acciaio ( $E=200000$  MPa) di lunghezza  $L_0 = 5$  m, con diametro pari a 12.5 mm e area  $A=122.71$  mm<sup>2</sup>, carico  $Q=350$  kN e pretensione  $T_0 = 1500$  kN, corrispondente ad uno spostamento di  $v=535$  mm.

### 1.3 Analisi di una rete di funi piana

Si consideri una struttura composta da quattro cavi pretesi (ortogonali a due a due) complanari disposta ad una distanza tra loro, nelle due direzioni, fissata a  $L_0$  e caricata con delle forze  $P$  concentrate sui quattro nodi di intersezione centrali. I restanti nodi sono fissati a terra tramite delle cerniere. In questo modo il problema consiste di una struttura doppiamente simmetrica caricata con carichi simmetrici; ciò permette di studiare un solo nodo e di ridurre le incognite del problema, semplificando l'esempio.

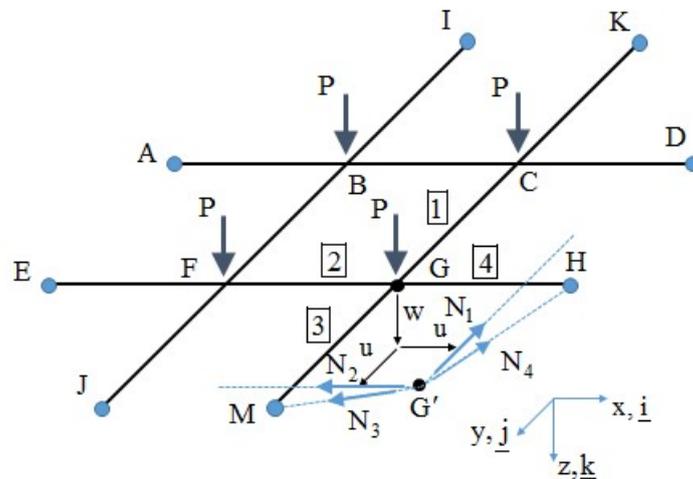


Figura 1.8: Configurazione iniziale del problema

dove con  $w$  si è indicato lo spostamento verticale e con  $u$  i due spostamenti sul piano orizzontale nelle due direzioni (uguali) che il punto  $G$  compie nell'arrivare in  $G'$  nella posizione di equilibrio.

Si dovranno scrivere per il nodo in questione, le due equazioni di equilibrio (verticale ed orizzontale) così da ottenere il sistema risolvibile di due equazioni in due incognite. Le quantità che entrano quindi in gioco sono:

$$\begin{cases} N_i = T_0 + \frac{EA}{L_0} e_i \\ L_3 = L_4 = \sqrt{u^2 + (u - L_0)^2 + w^2} \\ e_1 = e_2 = 2u \\ e_3 = e_4 = L_3 - L_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

dove con  $N_i$ ,  $e_i$  e  $L_i$  si sono indicati rispettivamente l'azione assiale, l'allungamento e la lunghezza nella configurazione deformata del cavo  $i$ -esimo, mentre  $T_0$  è la pretensione. Per simmetria ci sia aspetta che  $N_1 = N_2$  e  $N_3 = N_4$  e che le lunghezze dei cavi 1 e 2 restino invariate e uguali a  $L_0$ . Le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} N_2 + N_3 \frac{u}{L_3} - N_3 \frac{L_0 - u}{L_3} = 0 & \text{orizzontale} \\ 2N_3 \frac{w}{L_3} = P & \text{verticale} \end{cases} \quad (1.5)$$

Specificatamente le azioni assiali  $N_2, N_3$  sono:

$$N_2 = T_0 + 2u \frac{EA}{L_0} \quad N_3 = T_0 + (L_3 - L_0) \frac{EA}{L_0} \quad (1.6)$$

Chiamando  $k = \frac{EA}{L_0}$  e sostituendo le azioni assiali della 1.6 nella 1.5, si ottengono le equazioni di equilibrio in funzione degli spostamenti:

$$\begin{cases} T_0 + 2uk + [T_0 + k(L_3 - L_0)] \frac{2u - L_0}{L_3} = 0 & \text{orizzontale} \\ 2[T_0 + (L_3 - L_0)k] \frac{w}{L_3} = P & \text{verticale} \end{cases} \quad (1.7)$$

Si riconoscono quindi i membri a sinistra dell'uguale come le forze interne ai cavi,  $\underline{F}_{int}(u, w)$  mentre a destra dell'uguale come le forze esterne applicate sul nodo,  $\underline{F}_{ext}$ . Un tal sistema non lineare non può essere risolto per semplice sostituzione e si è deciso pertanto di ricorrere al metodo di Newton-Raphson, che consiste, nella sua trasposizione a funzione in una sola variabile, a sostituire la funzione di cui si vuole la radice con la sua tangente nel punto iniziale scelto e approssimare la soluzione con la radice della tangente, iterando fin quando il criterio di convergenza scelto non è soddisfatto. In questo caso, la funzione a due variabili di cui si vuole trovare la radice è il residuo costruito per semplice sottrazione dei termini delle forze interne ed esterne:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\underline{\mathbf{u}}) \quad (1.8)$$

Si costruisce la matrice jacobiana di  $\underline{R}(\underline{\mathbf{u}})$  che, data la costanza delle forze esterne (indipendenti da  $\underline{\mathbf{u}}$ ), coincide con quella del solo termine  $\underline{F}_{int}(\underline{\mathbf{u}})$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} F_{u,u}^I & F_{u,w}^I \\ F_{w,u}^I & F_{w,w}^I \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{J} \cdot (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) \quad (1.10)$$

da cui esplicitando  $\underline{\mathbf{u}}_{j+1}$  si trova la soluzione per il passo successivo. Esplicitamente i termini per lo Jacobiano sono:

$$\begin{cases} F_{u,u}^I = 4k - (EA - T_0) \frac{(2w^2 + L_0^2)}{L_3^3} \\ F_{u,w}^I = F_{w,u}^I = 2w(EA - T_0) \frac{(2u - L_0)}{L_3^3} \\ F_{w,w}^I = 2k - 2(EA - T_0) \frac{(L_3^2 - w^2)}{L_3^3} \end{cases} \quad (1.11)$$

Per velocizzare il processo si è fatto ricorso a matlab e ad un semplice script che iterasse il ciclo. I dati inseriti sono stati i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = 2000mm \\ E = 190000MPa \\ A = 400mm^2 \\ T_0 = 60kN \\ P = 12kN \\ u_0 = 0, w_0 = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

da cui si è ricavato (in 12 iterazioni):

iter	u (mm)	w (mm)	Ru (u,w)	Rw (u,w)	conv
1	0.00000	200.00000	3.77e+05	-7.54e+04	3.20e+01
2	-1.48617	127.01093	3.22e+05	-2.21e+04	2.69e+01
3	0.36483	103.83746	6.06e+04	-3.40e+03	5.06e+00
4	0.68717	97.76980	1.23e+04	-1.79e+02	1.02e+00
5	0.83310	98.94954	-2.17e+03	2.62e+00	1.81e-01
6	0.80177	98.57550	7.02e+02	4.94e-02	5.85e-02
7	0.81203	98.70091	-2.34e+02	4.51e-03	1.95e-02
8	0.80861	98.65919	7.79e+01	5.03e-04	6.50e-03
9	0.80975	98.67311	-2.60e+01	5.59e-05	2.16e-03
10	0.80937	98.66847	8.66e+00	6.21e-06	7.22e-04
11	0.80950	98.67001	-2.89e+00	6.90e-07	2.41e-04
12	0.80946	98.66950	9.62e-01	7.62e-08	8.02e-05

axialforce N2 = 1.215e+05 N    axialforce N3 = 1.217e+05 N

Tabella 1.1: Risultanti alla convergenza

La colonna conv raccoglie il termine usato per il criterio di convergenza: esso è il rapporto tra il modulo del residuo e quello delle forze esterne; quando questo rapporto tende a zero (cioè il residuo si annulla) la convergenza è raggiunta.

Esempi di applicazione di reti del genere si trovano spesso, oltre che associate alle membrane come già detto, anche abbinate a facciate in vetro in cui le funi hanno il compito di assorbire la pressione del vento e il peso proprio dei pannelli di vetro (vedi fig. 1.9). La funzione portante è quindi assolta unicamente dalle funi. Una prima menzione riguarda la facciata dello Hilton Hotel (ex Hotel Kempinski) presso l'aeroporto di Monaco. La facciata, costruita nel 1993, ha dimensioni 25x40 m ed è costituita da lastre di vetro spesse 10 mm, i cavi hanno un diametro di 22 mm con passo di 1.5 m in entrambe le direzioni. La pretensione impressa a ciascuna delle 11 funi orizzontali è di 85 kN, mentre è molto più contenuta quella sui cavi verticali. Si registra uno spostamento massimo in mezzera di circa 90 cm; in relazione con l'altezza della struttura, si trova un rapporto di  $90/4000 \approx 0.022$ . Se si riconsidera l'esempio della sezione precedente, per cui si ha uno spostamento verticale del nodo di 98.66 m su una lunghezza di 6 m, si trova un rapporto di  $98.66/6000 \approx 0.016$ . Si noti come i due rapporti siano molto vicini.



Figura 1.9: Facciata dell'Hilton Hotel (Monaco)

Un secondo esempio è la facciata della lobby del Time Warner Center a New York. La struttura è molto simile alla precedente, infatti la struttura portante è soltanto la rete di funi di cui però variano solo le dimensioni (45 m in altezza e 27 m in larghezza). Si noti che in entrambi i casi il dispositivo che connette i cavi ai pannelli in vetro non prevede la foratura delle lastre di vetro: le 4 lastre che convergono nel punto di fissaggio sono “immorsate” nel dispositivo (interponendo un materiale soffice tra acciaio e vetro); le lastre sono poi siliconate lungo il bordo.

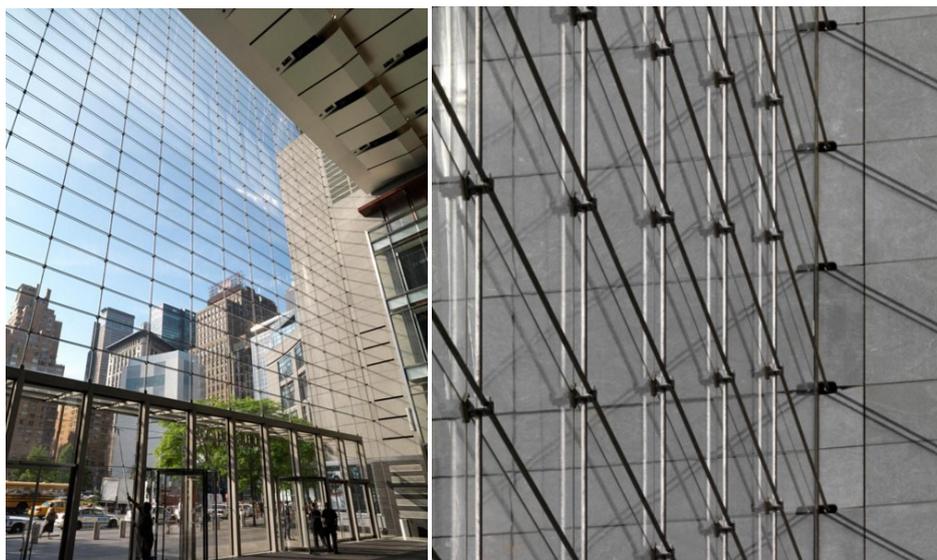


Figura 1.10: Facciata e dettaglio del Time Warner Center (New York)



Figura 1.11: Morsetti di fissaggio dei pannelli di vetro alla rete di funi

I dettagli qui sopra forniti in merito a queste due facciate sono stati reperiti sul sito dello studio di ingegneria tedesco “slaich bergemann partner” ([www.sbp.de](http://www.sbp.de)), fondato nel 1980 e molto rinomato a livello mondiale, in quanto lo studio ha collaborato alla progettazione di entrambe le opere (“conceptual design” e dettagli costruttivi).

## Capitolo 2

### Il force density method

Il force density method (da ora FDM) [5] rappresenta un ottimo approccio per lo studio diretto delle possibili forme che una rete di cavi (o membrana) in uno stato di pretensione può assumere. Specialmente nelle fasi iniziali del progetto, quindi nella situazione in cui mancano alcuni dati rilevanti della struttura (materiale della membrana, dei cavi e/o dei sostegni), il suo impiego rende al progettista più chiara l'idea della forma finale della struttura, impostando un certo stato di pretensione desiderato con un costo computazionale non eccessivamente elevato. Esempi di utilizzo di tale metodo, si possono ritrovare nel Mannheim Multihalle (Frei Otto, Germania, 1975) oppure nel Solemar Therme in Bad Durrheim (Svizzera, 1987).



Figura 2.1: a sinistra: Mannheim Multihalle; a destra: Solar Therme

Come si vedrà più approfonditamente in seguito, il concetto del FDM è quello di linearizzare (in questa prima parte) il sistema delle equazioni di equilibrio per i nodi tramite un semplice cambiamento: piuttosto che considerare fissata la pretensione in ogni cavo, si considera la “densità di forza” fissata, cioè una quantità definita come la pretensione sulla lunghezza del tratto su cui è applicata.

#### 2.1 Equilibrio del nodo

Le equazioni governanti il procedimento sono quelle classiche di equilibrio nelle tre direzioni (se si considera un nodo  $P_0$  nello spazio). A puro scopo esemplificativo sono presi in

considerazione 5 nodi (4 fissi  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e uno libero  $P_0$  collegato ai primi 4 da tratti elastici) in configurazione anticlastica. Il nodo  $P_0$  collegato in equilibrio con altri 4 nodi è sotto posto ad un sistema di forze costituito dalle pretensioni  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , provenienti rispettivamente dai tratti  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , e dal carico esterno applicato direttamente su di esso. Nella più generale delle trattazioni tale carico ha componenti nelle tre direzioni  $p_x, p_y, p_z$ .

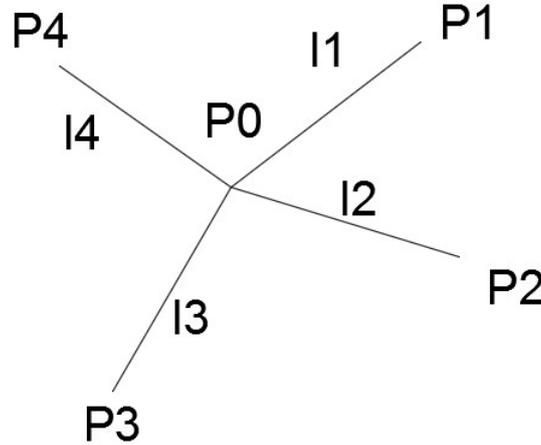


Figura 2.2: Schema del nodo

È bene specificare che i collegamenti tra i nodi sono tutti realizzati tramite cerniere: trattandosi di reti di cavi o membrane, non ha senso considerare alcuna rigidità flessionale degli elementi. L'unica che è quindi considerata è la rigidità assiale  $EA$ , che può essere introdotta nella procedura anche nella fase finale di materializzazione. Dalla legge di elasticità di Hooke si ricava semplicemente che la forza di pretensione nel tratto  $i$ -esimo è data da:

$$F_i = \left(\frac{EA}{l_0}e\right)_i \quad (2.1)$$

dove  $l_0$  è la lunghezza iniziale del cavo ed  $e$  è l'allungamento elastico.

La lunghezza (iniziale o negli step successivi) di ogni tratto, dovendo essere uguale alla distanza tra i nodi, è calcolabile a partire dalle coordinate degli stessi:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 + (z_k - z_0)^2} \quad (2.2)$$

$$e_i = l_i - l_{0,i} \quad (2.3)$$

dove  $k=1,2,3,4$  pedice indicante il nodo fisso considerato.

Note tali quantità si scrivono le equazioni di equilibrio per le tre direzioni, scomponendo le forze di pretensione lungo le stesse:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + F_{4,x} + p_x = 0 \quad (2.4)$$

$$F_{k,x} = F_k \cdot \cos\alpha_i = F_k \cdot \frac{x_k - x_0}{l_k} \quad (2.5)$$

dove  $\alpha_i$  è l'angolo che il tratto  $i$ -esimo forma con la direzione orizzontale  $x$ .

Sostituendo la seconda uguaglianza dell'equazione 2.5 nell'equazione 2.4 si ottiene (per la sola direzione  $x$ , le altre sono uguali):

$$(x_1 - x_0) \cdot \frac{F_1}{l_1} + (x_2 - x_0) \cdot \frac{F_2}{l_2} + (x_3 - x_0) \cdot \frac{F_3}{l_3} + (x_4 - x_0) \cdot \frac{F_4}{l_4} + p_x = 0 \quad (2.6)$$

È riconoscibile nella precedente equazione la quantità “densità di forza” nominata nella precedente sezione; infatti definendo:

$$q_k = \frac{F_k}{l_k} \quad (2.7)$$

e sostituendo nella 2.6:

$$(x_1 - x_0) \cdot q_1 + (x_2 - x_0) \cdot q_2 + (x_3 - x_0) \cdot q_3 + (x_4 - x_0) \cdot q_4 + p_x = 0 \quad (2.8)$$

da cui si ricava la soluzione  $x_0$  (e similmente le altre  $y_0, z_0$ ):

$$x_0 = \frac{p_x + x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + x_3 \cdot q_3 + x_4 \cdot q_4}{q_1 + q_2 + q_3 + q_4} \quad (2.9)$$

Si è in questo modo linearizzato il sistema che prima era non lineare in quanto le incognite, cioè le coordinate del punto  $P_0$  erano presenti sia a numeratore nell'allungamento  $e_k$  che a denominatore nella lunghezza  $l_k$  (si vedano le eq.2.4 e eq.2.1). Il risultato finale non è però cambiato; infatti risolvendo il sistema non lineare di equazioni 2.4 oppure il sistema lineare di equazioni 2.8 le coordinate del punto  $P_0$  sono esattamente le stesse.

## 2.2 Formulazione matriciale

Tutto quanto scritto finora è corretto fin quando si considera un solo nodo in equilibrio; nel momento in cui si vuole studiare un caso pratico, ci si può ritrovare con un numero di nodi significativamente alto, sia esso proveniente da reti di cavi o membrane discretizzate. In un tale sistema il numero di equazione cresce di molto ed è perciò opportuna passare ad una notazione in forma di matrici, trovando così un sistema risolvente finale.

In questo nuovo “ambiente” le coordinate finali di ogni nodo sono influenzare unicamente dalle quantità fisiche (coordinate e densità di forza) che provengono dai nodi immediatamente adiacenti e dai tratti che li collegano. Occorre quindi costruire una matrice contenente le informazioni topologiche dei vari nodi e il modo in cui essi sono collegati; a tal fine è utile ricondursi alla *matrice delle incidenze*  $\mathbf{C}$ , utilizzata anche nella teoria dei grafi. La matrice  $\mathbf{C}$  è composta unicamente da 0, +1 o -1 e il generico elemento è così costruito:

$$C_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il tratto termina nel nodo } i \\ -1 & \text{se il tratto inizia nel nodo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.10)$$

La matrice così creata non è necessariamente simmetriche e regolare: essa infatti dipende dalla numerazione dei nodi (arbitraria) e può avere un numero diverso di elementi

in ogni colonna. È importante sottolineare il fatto che la  $\mathbf{C}$  contiene solo informazioni *topologiche* e non *geometriche*, questo perchè nel FDM non è influente la configurazione iniziale del sistema (le coordinate iniziali dei nodi non esistono!), ma solo la topologia cioè come i nodi sono collegati tra loro.

Si introducano ora dei vettori:  $\mathbf{x} = [x_i]$ ,  $\mathbf{y} = [y_i]$ ,  $\mathbf{z} = [z_i]$ ,  $\mathbf{u} = [x_k - x_i]$ ,  $\mathbf{v} = [y_k - y_i]$ ,  $\mathbf{w} = [z_k - z_i]$  dove  $k = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  sono i vettori delle coordinate dei nodi, mentre  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sono i vettori delle differenze delle coordinate del nodo  $i$ -esimo con i  $k$ -esimi nodi adiacenti. Con i vettori così definiti si nota che i vettori  $u, v, w$  sono il prodotto matriciale tra  $\mathbf{C}$  e  $x$ :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ipotizzando per un certo problema un numero  $n$  (di cui  $n_f$  fissi) e  $m$  tratti, la matrice  $\mathbf{C}$  ha dimensioni  $[m \times n]$ , ai fini del processo è utile suddividere la  $\mathbf{C}$  (e di conseguenza anche i vettori delle coordinate) in due sotto-matrici:  $\mathbf{C}_N$  contenente la parte dei nodi liberi e  $\mathbf{C}_F$  contenente la parte dei nodi fissati:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_N \quad \mathbf{C}_F] \quad (2.12)$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_N \quad \mathbf{x}_F] \quad (2.13)$$

Si riscrivono così le equazioni 2.11 nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{C}_N\mathbf{x}_N + \mathbf{C}_F\mathbf{x}_F \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_N\mathbf{y}_N + \mathbf{C}_F\mathbf{y}_F \\ \mathbf{w} = \mathbf{C}_N\mathbf{z}_N + \mathbf{C}_F\mathbf{z}_F \end{cases} \quad (2.14)$$

Al fine di far comparire la densità di forza in questa formulazione, occorre scrivere le equazioni 2.6 e successive sottoforma di matrici. Così, raccogliendo in un vettore i termini moltiplicativi delle forze  $F_k$ :

$$j_i = \left[ \frac{-(x_k - x_0)}{l_k} \right]_i \quad (2.15)$$

dove  $i$  indica la componente del vettore e varia tra uno e il numero di tratti convergenti nel nodo. Richiamando le eq 2.11, l'eq 2.15 può essere riscritta come:

$$\mathbf{j} = \mathbf{C}_N^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \quad (2.16)$$

dove  $\mathbf{U}$  è la matrice diagonale associata al vettore  $\mathbf{u}$  (similmente agli altri vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono associate le matrici  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  rispettivamente),  $\mathbf{L}^{-1}$  è la matrice diagonale associata al vettore delle contenente le lunghezze dei singoli tratti, definita come:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{U}^2 + \mathbf{V}^2 + \mathbf{W}^2)^{1/2} \quad (2.17)$$

Così come nella formulazione al singolo nodo, il vettore  $\mathbf{j}$  rappresenta i coseni direttori dei tratti in considerazione. Aggiungendo il carico esterno  $\mathbf{p}_x$  (componente nella direzione  $x$  delle pretensioni) la eq. 2.6 diventa:

$$\mathbf{C}_N^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{p}_x = 0 \quad (2.18)$$

con  $\mathbf{f}$  il vettore contenente le tensioni all'interno dei tratti. Riconoscendo la definizione di densità di forza e sostituendo nella eq.2.18:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{C}_N^T \mathbf{U} \mathbf{q} + \mathbf{p}_x = 0 \quad (2.20)$$

Notando che è possibile scrivere equivalentemente:

$$\mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (2.21)$$

dove  $\mathbf{Q}$  è la matrice diagonale associata al vettore delle densità di forza  $\mathbf{q}$ , si riscrive la eq.2.20 (mettendo in evidenza le sottomatrici  $\mathbf{C}_N$  e  $\mathbf{C}_F$ ) come:

$$\mathbf{C}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{C}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_F \mathbf{x}_F + \mathbf{p}_x = 0 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{D}_N = \mathbf{C}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_N \quad \mathbf{D}_F = \mathbf{C}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_F$$

In sintesi:

$$\mathbf{D}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{p}_x - \mathbf{D}_F \mathbf{x}_F \quad (2.23)$$

L'eq. 2.23 rappresenta un sistema di equazioni lineari risolvibili il problema, le cui incognite sono racchiuse nel vettore  $\mathbf{x}_N$ . Per pura sintesi è stata scritta solo l'equazione riguardante la direzione x, in quanto le altre modificano solo la nomenclatura dei vettori delle coordinate. La soluzione esplicita è:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_N = \mathbf{D}_N^{-1}(\mathbf{p}_x - \mathbf{D}_F \mathbf{x}_F) \\ \mathbf{y}_N = \mathbf{D}_N^{-1}(\mathbf{p}_y - \mathbf{D}_F \mathbf{y}_F) \\ \mathbf{z}_N = \mathbf{D}_N^{-1}(\mathbf{p}_z - \mathbf{D}_F \mathbf{z}_F) \end{cases} \quad (2.24)$$

## 2.3 Esempi

Utilizzando il programma Matlab, è stato scritto un codice (di cui si fornirà la stesura completa in allegato) per il form-finding che utilizza il metodo appena descritto. Le strutture considerate sono state una rete di cavi (4 per 4 intersecanti ortogonalmente) e una struttura hyper a pianta rettangolare avente due sostegni bassi e due sostegni alti. Per entrambe è stato utilizzato "Gmsh" sia come ausilio grafico a Matlab che per creare la mesh.

### 2.3.1 Rete di cavi 4 per 4

La struttura è composta da 4 cavi in direzione x e 4 cavi in direzione y, intersecanti in modo ortogonale l'uno con l'altro. I cavi in direzione x sono quelli ancorati al suolo e hanno quindi tutti i punti estremi (otto in totale) a quota zero, mentre i cavi in direzione y sono ancorati a dei sostegni (otto) tutti posti a quota tre rispetto al suolo, per semplicità e chiarezza dell'esempio. Si riporta di seguito la topologia della struttura nella figura 2.3.

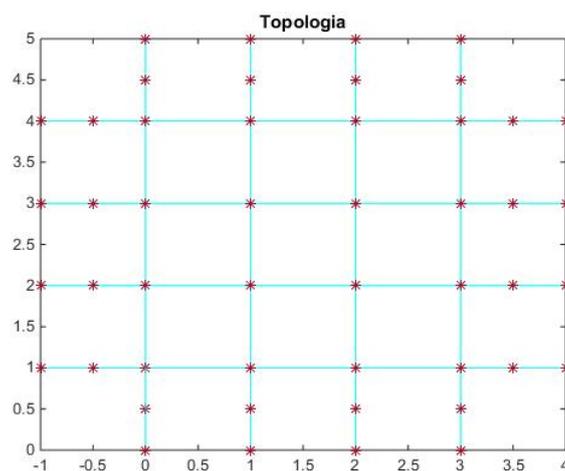


Figura 2.3: Schema topologico della struttura

Secondo le condizioni al contorno del problema, i punti estremi di ogni cavo sono stati fissati e le loro coordinate non verranno modificate; inoltre ogni intersezione si comporta come una cerniera senza quindi vincolare rotazioni relative tra cavi. Riguardo i carichi, ad ogni tratto è stata assegnata una densità di forza costante e uguale all'unità e i carichi esterni sui nodi sono nulli. Utilizzando il codice riportato in allegato, si giunge alla configurazione equilibrata finale di figura 2.4.

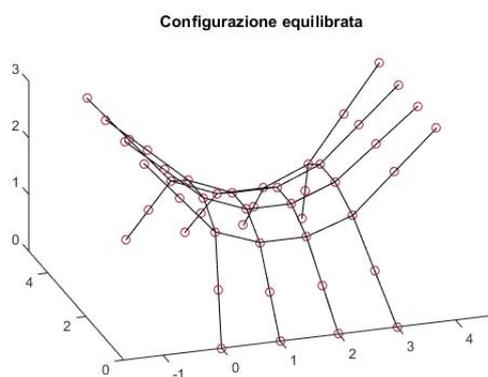


Figura 2.4: Configurazione equilibrata

Come si può vedere, i punti che sono stati fissati hanno mantenuto la propria posizione mentre gli altri si sono “spostati” in una posizione che garantisce in ognuno di essi

l'equilibrio delle forze applicate (in questo caso, unicamente le pretensioni). La struttura, simmetrica in partenza, ha mantenuto la simmetria.

### 2.3.2 Struttura hypar

Un altro esempio considerato è un'hypar, cioè in ogni punto il prodotto delle curvature principali è negativo. La struttura è sostenuta da quattro supporti puntiformi, due bassi a quota zero e due alti a quota tre; la membrana è stata discretizzata in punti tramite il programma *Gmsh* ed è stata creata una mesh di elementi a quattro nodi in modo da simulare una rete di cavi intersecanti ortogonalmente. Come in precedenza, in ogni tratto è stata considerata una densità di forza costante e unitaria, senza l'aggiunta di carichi esterni. Nelle figure successive, la topologia della struttura e la configurazione equilibrata.

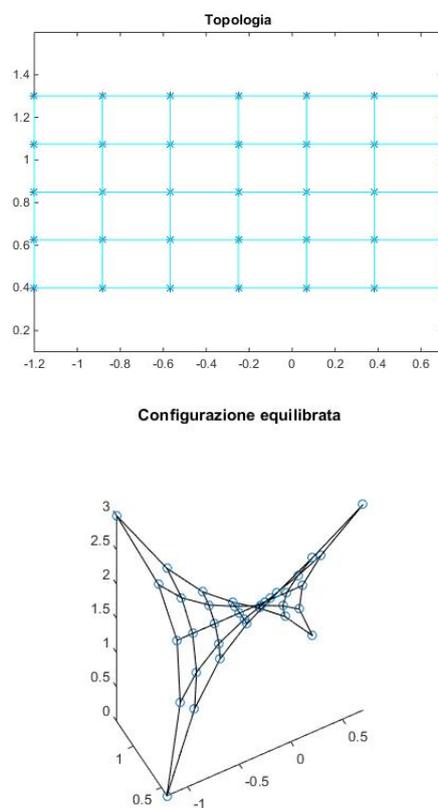


Figura 2.5: a sinistra: topologia, a destra: configurazione equilibrata

## Capitolo 3

# Superfici di minimo

Gli argomenti che verranno toccati in questo capitolo possono sembrare, per certi versi, poco pertinenti con il resto della trattazione; si ritiene invece che una spiegazione più approfondita riguardo le meccaniche di film fluidi e cavi ovvero brevi deviazioni verso la geometria analitica possono contribuire a chiarire il comportamento delle tensostrutture e le loro proprietà geometriche che spessissimo si manifestano esattamente le medesime di quelle dei film in questione. Si dia innanzitutto la definizione di superficie minima: essa è una superficie, racchiusa in un bordo fissato nello spazio, che possiede l'area minima tra tutte le superfici che hanno lo stesso bordo ed ha curvatura media nulla in ogni punto. Un problema del genere non è affatto semplice e richiede approfondite conoscenze di geometria e matematica, in particolare il calcolo delle variazioni.

Primi esempi di risoluzione del problema risalgono ai tempi di Archimede (che però si "limitò" a capire che la superficie minima per una linea chiusa nel piano è l'area racchiusa dalla linea stessa) ed Eulero nel 1744 che discusse il problema di due circonferenze poste su due piani paralleli ed allineate per i centri.

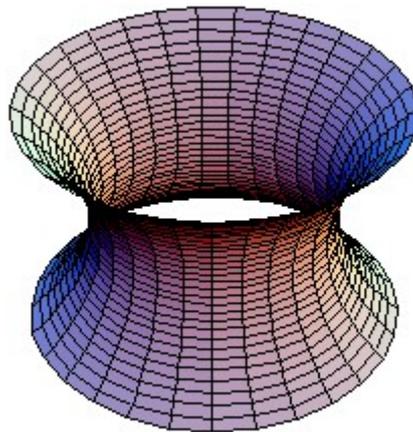


Figura 3.1: Il problema di Eulero: il catenoide

Egli risolse, cercando tra le superfici di rotazione assialsimmetriche data la geometria del problema, che quella minimizzante l'area è un catenoide costituito dalla rotazione di una catenaria intorno ad un asse. Importanti sviluppi si ebbero poi con Pierre Simon Lagrange il quale, basandosi sugli studi di Eulero e sfruttando l'analisi differenziale, deter-

minò l'equazione differenziale che ogni superficie minima deve soddisfare per ogni contorno nello spazio assegnato. Per tale motivo, l'equazione è chiamata di Eulero-Lagrange.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Tale equazione, se risolta per  $y$  permette di trovare una funzione  $\varphi$  che estremizza il funzionale:

$$I = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (3.2)$$

nella sua forma più generale possibile.

Superfici minime sono superfici anticlastiche cioè in ogni punto le due curvature principali sono discordi in segno; è questo un requisito essenziale, che si ritrova (ovviamente) anche nel concetto di curvatura gaussiana. Essa è infatti il prodotto tra le due curvature principali in un punto; ne consegue che ogni superficie minima ha in ogni punto la curvatura gaussiana negativa. Un veloce esempio è dato dalla Superficie di Scherk (vedi figura 3.2). Essa verrà presa ad esempio per un confronto numerico anche successivamente.

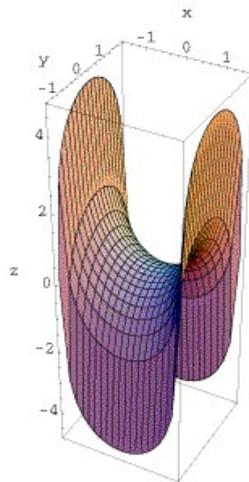


Figura 3.2: Superficie di Scherk

La sua descrizione parametrica è:

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \frac{\log(\cos(av)\sec(au))}{a} \end{cases} \quad (3.3)$$

La curvatura gaussiana si può calcolare, oltre che con il metodo precedente, anche tramite l'hessiano della funzione: in particolare il determinante dell'hessiano è la curvatura cercata. Si vuole quindi costruire la matrice delle derivate parziali seconde per la superficie di Scherk:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sec^2(au) & 0 \\ 0 & -a \sec^2(av) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\det(\mathbf{H}) = K(u, v) = -\frac{a^2 \sec^2(au) \sec^2(av)}{(\sec^2(av) + \tan^2(au))^2} \quad (3.5)$$

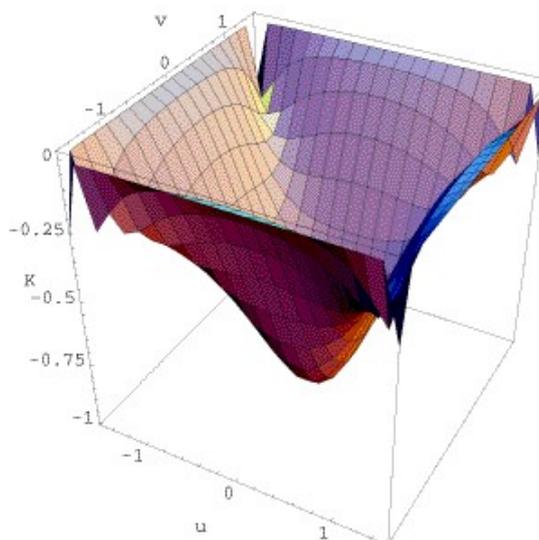


Figura 3.3: Curvatura gaussiana

### 3.1 Tensione superficiale

Si definisce tensione superficiale la tensione che si sviluppa sulla superficie di un liquido a causa delle interazioni che le molecole si scambiano. Questa interazione è detta “coesione” nasce per via di forze elettromagnetiche e tende a ridurre la distanza tra le particelle (è una forza attrattiva); essa però non è abbastanza forte per tenere le particelle ferme, come in un solido, che possono continuare a muoversi senza mantenere quindi una forma fissa. Mostrando in un grafico le forze di interazione (in funzione del raggio) tra due particelle (assunte sferiche) di cui una posta nell’origine, si nota come al sotto di un certo raggio  $r_0$  tale forza sia repulsiva (dovuta alla interazione elettromagnetica dei nuclei delle particelle entrambi carichi positivi) mentre al sopra di  $r_a$  essa sia quasi nulla. per questo è ragionevole pensare che la distanza tra le particelle non vai molto (se non fortemente perturbate) e si assesta intorno ad un valore medio che garantisce l’equilibrio di tutte le forze.



Figura 3.4: Forza di interazione

Spiegare la tensione superficiale tramite questa sola forza è abbastanza semplice: se si assume che le particelle abbiano simmetria sferica, la forza di coesione è uniforme qualunque direzione si prenda; per questo per particelle completamente immerse nel liquido la risultante delle forze scambiate con le altre è nulla ed esse quindi non sono soggette ad un particolare stato tensionale. Diverso è il caso delle particelle che si trovano vicino la superficie: forze di coesione che vengono dal di fuori del liquido non sono considerate rilevanti poichè esse non hanno un'intensità significativa; infatti generalmente si trova l'aria (o comunque un altro gas) in contatto col liquido le cui forze di coesione sono molto deboli. Le particelle prossime alla superficie quindi risentono unicamente delle forze di coesione dovute a particelle presenti da un solo lato e sono quindi soggetto ad una risultante non nulla diretta verso l'interno del liquido.

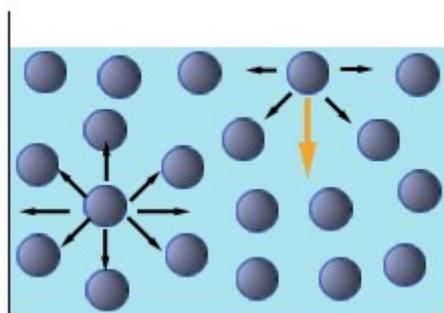


Figura 3.5: Dettaglio delle particelle di un liquido

Queste risultanti tendono a far rientrare le particelle nel liquido e a comprimere leggermente lo strato superficiale creando così una membrana sulla superficie che si comporta elasticamente. Essa inoltre tende a minimizzare la propria area. Il breve esempio descritto rende bene l'analogia con le tensostrutture; come si è detto infatti, anche queste ultime tendono a minimizzare l'area con la differenza che la forza nella membrana non è causata dalla forza di interazione tra particelle ma dalla pretensione isotropa che si impone alla membrana.

# Capitolo 4

## Il surface stress density method

Poichè un componente importante e quasi sempre presente delle tensostrutture è la membrana, nelle sue varie forme e proprietà, è praticamente immediato il concetto di utilizzare un metodo per il form-finding che tenga conto di essa, delle forze che si sviluppano all'interno degli elementi che la formano e la sua integrazione con i cavi. Così dal FDM di Sheck, si passa all'analogo surface stress density method (SSDM) che, già come richiama il nome, fa uso di una densità di tensione sulla superficie analoga alla densità di forza sul cavo vista in precedenza [9].

Importanti sviluppo in tale processo sono stati fatti da Haber e Abel che, applicando un'analisi a grandi spostamenti e deformazioni ad una membrana discretizzata in elementi finiti, sono arrivati alla seguente scrittura di una relazione globale di equilibrio ai nodi:

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{X}, \sigma)\mathbf{X} = 0 \quad (4.1)$$

Tale espressione rappresenta l'equilibrio di una membrana ove non sono applicati carichi esterni, ma esclusivamente la pretensione.  $\mathbf{X}$  è il vettore delle coordinate nodali nel sistema di riferimento globale;  $\mathbf{K}_G$  è la matrice di rigidezza geometrica lagrangiana globale, ricavata dall'assemblaggio della matrice della matrice di rigidezza elementare geometrica  $\mathbf{k}_{Ge}$ , in dipendenza solo dalle coordinate nodale, e dal tensore delle pretensioni  $\sigma_e$  riferito ad ogni elemento finito.

Anche in questo caso e così come in ogni altro metodo affrontato nell'ambito di questa tesi, non è richiesto a priori l'inserimento nella procedura di un legame costitutivo nè, quindi, la specifica di un materiale: lo studio della forma è basato solo unicamente sulla pretensione desiderata e sulla geometria delle condizioni al contorno. Cionondimeno il problema resta non lineare a causa delle ipotesi non grandi spostamenti e deformazioni; si propongono quindi due tipi di procedimenti risolutivi diversi:

1. specificando le matrici di rigidezza geometrica elementari, si può linearizzare il problema e quindi la determinazione diretta del vettore  $\mathbf{X}$ . Questo implica però la conoscenza della matrice di rigidezza esatta in previsione della forma finale desiderata e della distribuzione delle tensioni, il che non è affatto facilmente prevedibile.
2. iterazioni. Il progettista stabilisce, oltre le condizioni al contorno e iniziali ovviamente, la tensione all'interno di ogni elemento cioè  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ ; ciò permette di risolvere l'equazione 4.1 per  $\mathbf{X}$  e ricavare la nuova configurazione che sarà utilizzata come iniziale della iterazione successiva. Vantaggio di questa procedura è quella di

fissare a priori il livello tensionale desiderato, rispondente alle necessità di resistenza sia a breve che a lungo termine.

## 4.1 Descrizione matematica del procedimento

Lo stato tensionale definito dal progettista è considerato relativo ad un sistema di coordinate locali  $(x, y)$  rispetto ad ogni elemento ed è composta da due tensioni normali  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e una di taglio  $\sigma_{xy}$ . Per venire incontro all'esigenza funzionale ed architettonica di non avere zone della membrana sottoposta a taglio o a compressione (in cui quindi potrebbe afflosciarsi, essere lasca), si ricorre ad uno stato tensionale isotropo caratterizzato dalla componente tangenziale nulla e le due normali uguali tra loro e maggiori di zero ( $\sigma_{xy} = 0, \sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 > 0$ ) che può essere riferito, di conseguenza, a qualunque sistema di riferimento locale nel piano dell'elemento. La precedente specificazione ha anche il vantaggio di far sì che le forze risultanti che la parte di membrana dell'elemento esercita su un nodo sono dirette ortogonalmente al lato opposto (questo è verificabile con l'applicazione del principio dei lavori virtuali, spiegato nella sezione 4.3) come mostrato in figura:

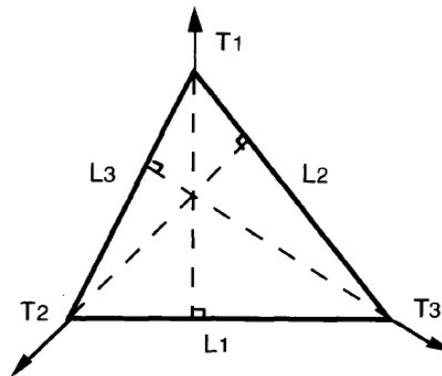


Figura 4.1: Forze ortogonali nei nodi

L'espressione di queste forze è ricavabile dallo stato tensionale associato all'elemento, premesso che si conoscano le proprietà geometriche dell'elemento e della membrana quali lunghezza dei lati e spessore del telo:

$$T_i = \frac{1}{2} L_i t \sigma_0 \quad (4.2)$$

In forma vettoriale tale forza è:

$$\mathbf{T}_C = T_i \mathbf{n} \quad (4.3)$$

con  $\mathbf{n}$  versore normale al lato opposto del nodo considerato. Tramite questo versore, operativamente, è possibile calcolare le coordinate del punto H (punto di intersezione tra il lato opposto al nodo e l'ortogonale al lato passante per lo stesso nodo); esse possono essere calcolate conoscendo le posizioni dei due punti estremi del lato opposto al nodo considerato ed effettuando una semplice proporzione.

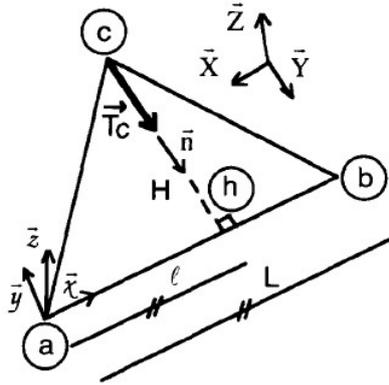


Figura 4.2

Scrivendo il vettore  $\bar{n}$  come:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{ch}}{H} \quad (4.4)$$

e sostituendolo nella equazione 4.3, si ricava:

$$\mathbf{T}_C = \frac{1}{2} L_i t \sigma_0 \frac{\mathbf{ch}}{H} \quad (4.5)$$

Questa, pur di moltiplicare e dividere per l'area dell'elemento

$$S = \frac{HL}{2} \quad (4.6)$$

è possibile riscriverla come:

$$\mathbf{T}_C = L^2 \frac{\sigma_0}{S} \mathbf{ch} \quad (4.7)$$

in cui il termine  $\sigma_0/S$  è la densità di tensione indicata con  $Q_s$ , analoga alla densità di forza.

Il passo successivo è quello di tenere in considerazione tutti gli elementi facenti capo ad un determinato nodo, in modo da equilibrare tutte le forze agenti su di esso (nel caso in cui non siano applicati carichi esterni). Semplicemente sommando le forze (e scomponendole nelle tre componenti lungo gli assi del sistema di riferimento globale), si scrive:

$$R_{Cx} = \sum \overline{T_{Ci}} = \sum (L_i^2 Q_{Si} X_{Hi} - L_i^2 Q_{Si} X_C) \quad (4.8)$$

$$R_{Cy} = \sum \overline{T_{Ci}} = \sum (L_i^2 Q_{Si} Y_{Hi} - L_i^2 Q_{Si} Y_C) \quad (4.9)$$

$$R_{Cz} = \sum \overline{T_{Ci}} = \sum (L_i^2 Q_{Si} Z_{Hi} - L_i^2 Q_{Si} Z_C) \quad (4.10)$$

Imponendo le risultanti nelle tre direzioni uguali a zero per equilibrio si ricavano le coordinate del punto considerato; particolarmente importante è il processo iterativo a cui occorre dare molta attenzione essendo costituito da due cicli (uno "interno" e uno "esterno") anzichè la classica procedura vista in tanti altri metodi. Il ciclo detto "interno" opera sul singolo nodo mantenendo invariate le posizioni degli altri nodi e aggiornando di

volta in volta soltanto quella considerata finchè la risultante delle forze nelle tre direzioni non si annulla (o è ragionevole considerarla nulla); il ciclo detto “esterno” opera invece solo quando, alla fine di quello interno, il nodo  $i$ -esimo è equilibrato passando così al successivo e ripetendo quello interno per ogni nodo. Scorsi tutti quanti i nodi, l’iterazione ricomincia controllando di nuovo se le risultanti al nodo sono maggiori della soglia fissata. Un altro criterio di convergenza è sulla base degli spostamenti controllando quando la differenza tra la posizione in un’iterazione e quella nella precedente è inferiore ad un valore fissato.

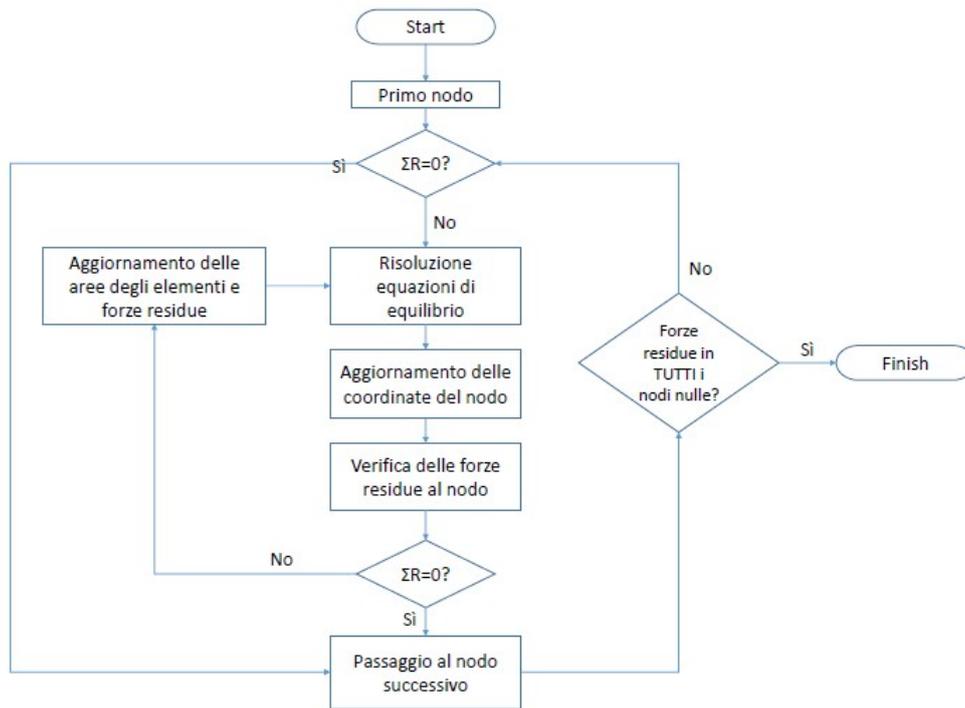


Figura 4.3: Schema ciclo iterativo metodo 1

Questa scrittura è quella più diretta e “intuitiva” ricavata da un semplice equilibrio del nodo; essa può però essere modificata ed essere scritta come sistema in forma più compatta:

$$\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_t + \mathbf{B} \quad (4.11)$$

in cui  $\mathbf{U}_t$  e  $\mathbf{U}_{t+1}$  sono i vettori delle coordinate nodali rispettivamente all’iterazione  $t$  e  $t+1$  mentre la matrice  $\mathbf{A}$  (simmetrica) è la matrice dei coefficienti dipendente unicamente dalle coordinate degli altri due nodi appratenti allo stesso elemento del nodo da equilibrare e  $\mathbf{B}$  è il vettore dei termini noti.

Si riportano di seguito i singoli termini della matrice  $\mathbf{A}$  e del vettore  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{cases} A_{xx} = \sum q_i [(x_{bi} - x_{ai})^2] \\ A_{yy} = \sum q_i [(y_{bi} - y_{ai})^2] \\ A_{zz} = \sum q_i [(z_{bi} - z_{ai})^2] \\ A_{xy} = \sum q_i [(x_{bi} - x_{ai})(y_{bi} - y_{ai})] \\ A_{xz} = \sum q_i [(x_{bi} - x_{ai})(z_{bi} - z_{ai})] \\ A_{yz} = \sum q_i [(y_{bi} - y_{ai})(z_{bi} - z_{ai})] \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} B_x = \sum q_i [(y_{ai} - y_{bi})(x_{bi}y_{ai} - x_{ai}y_{bi}) + (z_{ai} - z_{bi})(x_{bi}z_{ai} - x_{ai}z_{bi})] \\ B_y = \sum q_i [(x_{ai} - x_{bi})(y_{bi}x_{ai} - y_{ai}x_{bi}) + (z_{ai} - z_{bi})(y_{bi}z_{ai} - y_{ai}z_{bi})] \\ B_z = \sum q_i [(x_{ai} - x_{bi})(z_{bi}x_{ai} - z_{ai}x_{bi}) + (y_{ai} - y_{bi})(z_{bi}y_{ai} - z_{ai}y_{bi})] \end{cases} \quad (4.13)$$

Di questa scrittura si può dimostrare che al tendere ad infinito del numero delle iterazioni i termini della matrice  $\mathbf{A}$  si annullano e la differenza tra  $\mathbf{U}_{t+1}$  e  $\mathbf{U}_t$  si riduce, cioè il procedimento converge [9]. Al crescere delle iterazioni si tende quindi sempre di più verso la soluzione descritta da:

$$\mathbf{U}_{t \rightarrow \infty} = (\mathbf{Id} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (4.14)$$

con  $\mathbf{Id}$  matrice identità 3x3.

Quest'ultima forma del problema permette di snellire significativamente il processo in termini di passaggi da fare e di conseguenza in termini di memoria e costo computazionale richiesto ad un computer, ad esempio. Il ciclo precedentemente detto interno viene rimosso data la possibilità tramite l'equazione 4.14 di calcolare direttamente la posizione a cui tende il nodo senza il bisogno di iterazioni. I cicli eseguiti restano comunque due e sono uno che scorre i nodi nella stessa iterazione e uno che fa ripartire la computazione al primo nodo una volta completato l'altro. Si riporta nuovamente uno schema esplicativo della procedura.

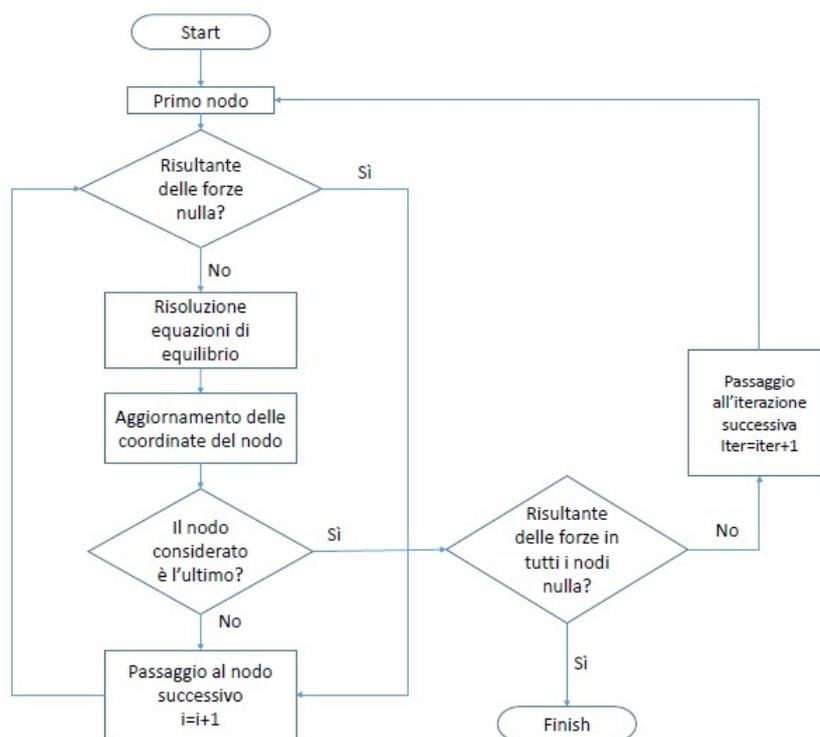


Figura 4.4: Schema ciclo iterativo metodo 2

## 4.2 Esempi e confronti

Nella seguente sezione si riportano due modelli che sono stati presi in considerazione e sviluppati con due programmi differenti: Matlab, in cui è stato scritto uno script che implementa la procedura precedentemente spiegata, e RFEM 5.06 della Dlubal come termine di confronto per la validazione del codice Matlab.

### 4.2.1 Esempio 1: struttura hypar con due punti alti e due punti bassi

Il primo esempio trattato è il tipo di tensostruttura più semplice concepibile: essa è costituita infatti dal numero minimo di punti e bordi necessari per sostenere questo tipo di forma in equilibrio, cioè quattro. Due di quanti punti sono stati posizionati a quota zero mentre gli altri due a quota quattro (misure in metri) e collegati tra loro da aste rigide, al fine di ottenere una superficie anticlastica (vedi figura 4.5).

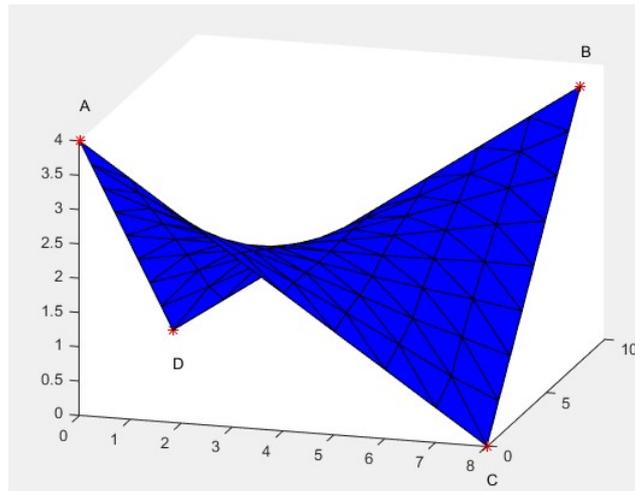


Figura 4.5: Esempio 1 da Matlab

La membrana è quadrata di lato 8 m con i punti di coordinate:

$$\begin{cases} A & (0, 0, 4) \\ B & (8, 8, 4) \\ C & (8, 0, 0) \\ D & (0, 8, 0) \end{cases}$$

Ai fini dell'equilibrio, poichè in questa fase non sono ancora stati implementati i cavi nella membrana, i lati congiungenti i nodi sono considerati rigidi. La mesh (triangolare) è stata creata con il programma "gms" imponendo sette elementi per lato ed è stata poi fatta leggere da Matlab così da creare le matrici di incidenza dei nodi e le loro coordinate nella configurazione iniziale; si ricorda che, essendo il processo iterativo, più tale configurazione è prossima a quella equilibrata, minori saranno le iterazioni richieste per raggiungerla. Per la pretensione, si è scelto di assegnare una densità di tensione  $Q_S$  all'interno di ogni elemento uguale all'unità che si manterrà costante anche nelle iterazioni successive per tutti e 64 gli elementi. In questa fase il valore della pretensione è irrilevante purchè isotropa e maggiore di 0: questo perchè, data la mancanza di cavi a densità di tensione diversa (i lati rigidi possono essere assunti come cavi a  $Q_S$  infinita), la deformazione che la membrana subirebbe, ad esempio, nella direzione  $y$  a causa della pretensione in  $x$  è compensata dalla deformazione che la pretensione in  $y$  genera. Il ciclo impiega 24 iterazioni per raggiungere una configurazione equilibrata; il criterio di convergenza utilizzato controlla gli spostamenti dei singoli punti: si considera raggiunti l'equilibrio quando lo spostamento massimo misurato di un punto tra un'iterazione e quella successiva è inferiore al millimetro ( $\delta < 1mm$ ).

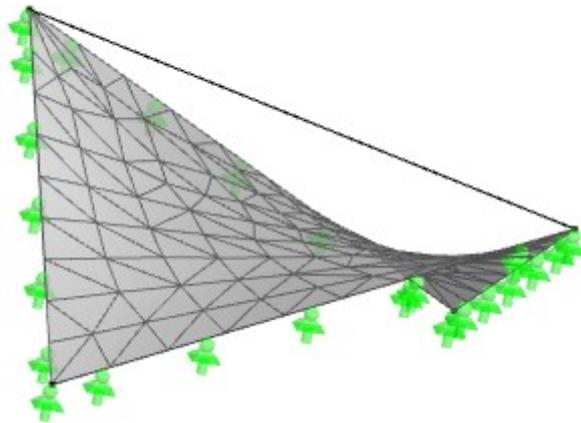


Figura 4.6: Esempio 1 da RFEM5

#### 4.2.1.1 Confronto fra i due modelli

Per una comparazione più diretta dei modelli si è cercato di creare due mesh il più simili possibile: entrambe formate con lo stesso tipo di elementi (triangolari) di dimensioni simili (lunghezza obiettivo fissata all'unità); la perfetta coincidenza delle mesh è stata però impossibile e quindi si è resa necessaria un'interpolazione dei dati di uno dei due modelli: si è scelto di confrontare le quote dei nodi tratti da Matlab con quelle interpolate corrispondenti nel modello di RFEM5, utilizzando semplici equazioni di piani. Per tal fine si sono considerati punti significativi della membrana (vedi figura 4.7) così da ottenere riferimenti per le sue varie parti data la simmetria del problema.

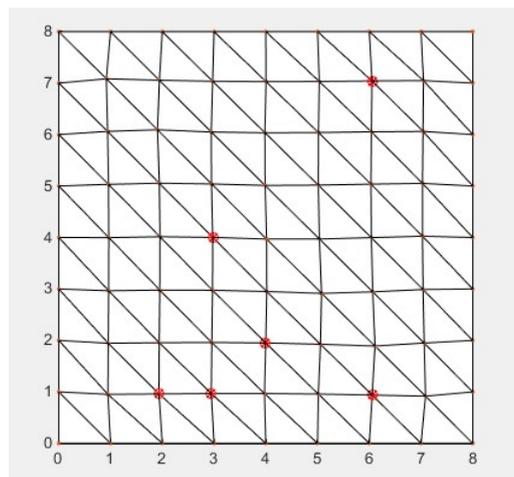


Figura 4.7: Punti considerati esempio 1

Le coordinate di tali punti sono:

Numero nodo	X	Y	Z
43	0,9170	0,9159	3,1745
34	3,9953	1,9597	2,0029
35	6,0498	1,9526	1,4932
38	6,0418	4,0114	2,0047
56	2,9666	3,9782	2,0039
80	6,0543	7,0589	2,7712

Tabella 4.1: Coordinate punti di controllo

Tenendo in conto soltanto la coordinata  $z$ , confrontata con quella ottenuta interpolando dalle posizioni dei punti estremi all'elemento entro cui ricade il punto Matlab, si ottengono i seguenti errori differenza (in m):

Numero nodo	Z	Z interpolata	Errore [m]
43	3,1745	3,1586	0,0159
34	2,0029	2,0100	-0,0071
35	1,4932	1,4777	0,0155
38	2,0047	2,0189	-0,0142
56	2,0039	1,9921	0,0118
80	2,7712	2,7522	0,0190

Tabella 4.2: Errori sulle coordinate  $z$  (mesh 8x8)

Si nota che l'errore massimo è dell'ordine del centimetro ( $\text{Err\_max}=0.0159$  m). Lo stesso procedimento si è ripetuto per una mesh più fitta (12 elementi per lato) poichè si voleva provare che l'errore diminuisse all'aumentare della precisione della mesh. Gli stessi dati sono riportati nella tabella seguente.

Numero nodo	X	Y	Z	Z interpolata	Errore [m]
45	0,6852	0,6854	3,3625	3,3547	0,0078
49	3,6004	0,7047	2,1607	2,1602	0,0005
72	5,9141	2,0737	1,5545	1,5497	0,0048
102	5,8612	4,3563	2,0784	2,0770	0,0014
109	3,6088	5,1322	1,9467	1,9533	-0,0066
97	2,1295	4,4047	1,9083	1,9126	-0,0043
126	1,3550	6,6535	1,1407	1,1342	0,0065

Tabella 4.3: Errori sulle coordinate  $z$  (mesh 12x12)

Come atteso, l'errore massimo è sceso sensibilmente (un ordine di grandezza) ed è  $\text{Err\_max}=0.0078$  m.

#### 4.2.2 Esempio 2: tronco di cono

Il secondo esempio preso in considerazione è un tronco di cono di altezza 6 m, raggio della base inferiore  $R_I = 6m$  e raggio della base superiore  $R_S = 4m$ . Le circonferenze delle

due basi sono di posizione fissata e rigide e la membrana si estende tra di esse, su cui si considera una densità di tensione isotropa e uguale a 1 (ma in questa fase, nuovamente, il suo valore è irrilevante).

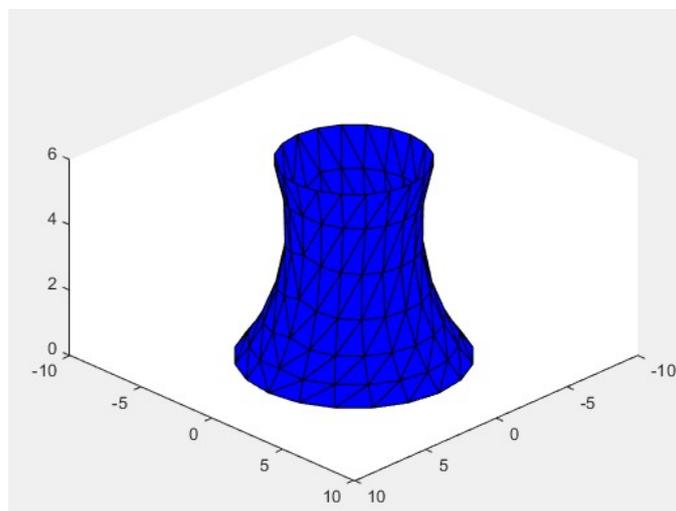


Figura 4.8: Esempio 2 da Matlab

Si è dovuta porre attenzione sul rapporto tra i raggi delle due basi ( $\frac{R_S}{R_I}$ ) e sull'altezza del tronco: un rapporto troppo piccolo causerebbe lo schiacciamento della membrana sul centro rendendola inutile allo scopo strutturale che ci si aspetta, inoltre la mesh richiederebbe molti più elementi nella parte centrale per descriverne correttamente il comportamento. Con la mesh rappresentata nella figura 4.8 il programma ha impiegato 71 iterazioni per trovare la configurazione equilibrata.

#### 4.2.2.1 Confronto tra i modelli e formula analitica

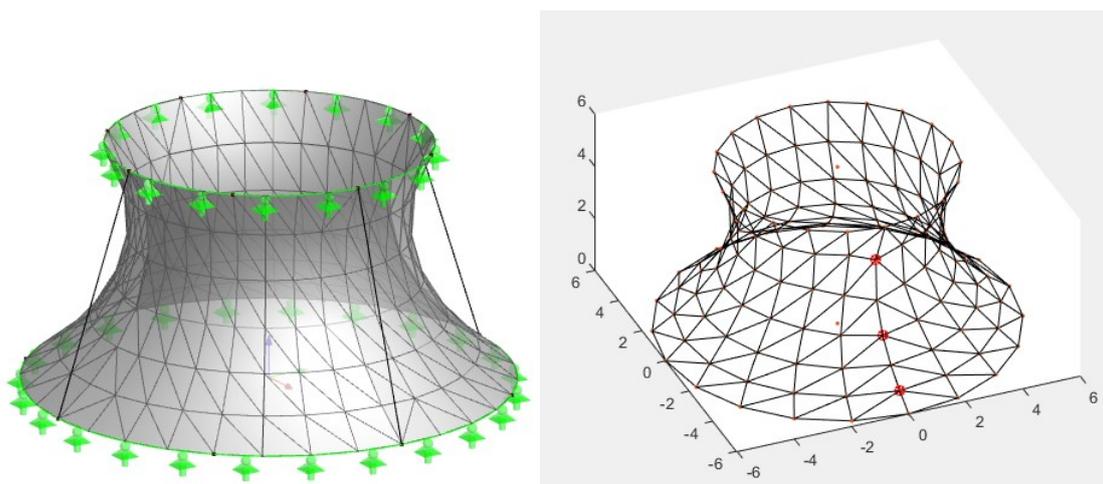


Figura 4.9: a sinistra: esempio 2 da RFEM5; a destra: punti considerati per il controllo

Essendo la geometria in questione assialsimmetrica, si sono presi per il paragone solo alcuni punti allineati su uno stesso meridiano della membrana. Le loro coordinate sono:

Numero nodo	X	Y	Z	Z interpolata	Errore [m]
48	-0,0838	-3,4401	4,4433	4,4704	0,0270
50	-0,1021	-4,0550	1,9073	1,9368	0,0295
52	-0,0367	-5,3299	0,5076	0,5131	0,0055

Tabella 4.4: Punti considerati esempio 2

Si evita in questo caso di ripetere il confronto con una mesh più raffinata poichè la convergenza del metodo è già stata provata in precedenza; si preferisce invece confrontare le coordinate ottenute con l'espressione analitica del catenoide. Per definizione, il catenoide è una superficie di rivoluzione ottenuta da una catenaria fatta ruotare intorno ad un asse e rappresenta una superficie di minimo per tale configurazione.

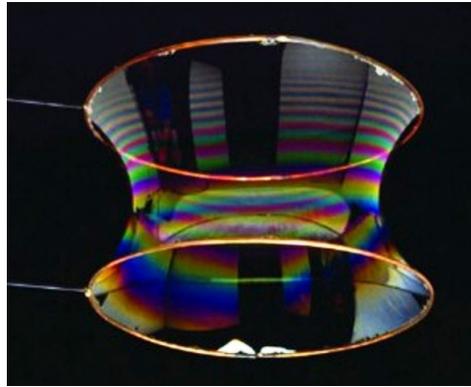


Figura 4.10: Catenoide come soap film

La sua espressione è la seguente:

$$\begin{cases} x(u, v) = R_M \cos(\alpha) \sinh\left(\frac{v}{R_M}\right) \sin(u) + R_M \sin(\alpha) \cosh\left(\frac{v}{R_M}\right) \cos(u) \\ y(u, v) = -R_M \cos(\alpha) \sinh\left(\frac{v}{R_M}\right) \cos(u) + R_M \sin(\alpha) \cosh\left(\frac{v}{R_M}\right) \sin(u) \\ z(u, v) = u \cos(\alpha) + v \sin(\alpha) \end{cases} \quad (4.15)$$

dove  $R_M$  è il raggio del punto minimo del catenoide, del punto più vicino all'asse,  $\alpha$  è zero per l'elicoide e  $\pi/2$  per il catenoide,  $u$  è l'angolo di rotazione così da rappresentare tutti i punti della superficie al variare di  $z=v$ . Essa diventa quindi:

$$\begin{cases} x(u, v) = R_M \cosh\left(\frac{v}{R_M}\right) \cos(u) \\ y(u, v) = R_M \cosh\left(\frac{v}{R_M}\right) \sin(u) \\ z(u, v) = v \end{cases} \quad (4.16)$$

Nel caso in esame la struttura ha due raggi diversi, di conseguenza il raggio medio  $R_M$  non si trova a metà altezza, ma va trovato. Si è reso quindi necessario utilizzare i punti ricavati da matlab da cui ottenere, a seguito di una regressione, la funzione della catenaria approssimante:

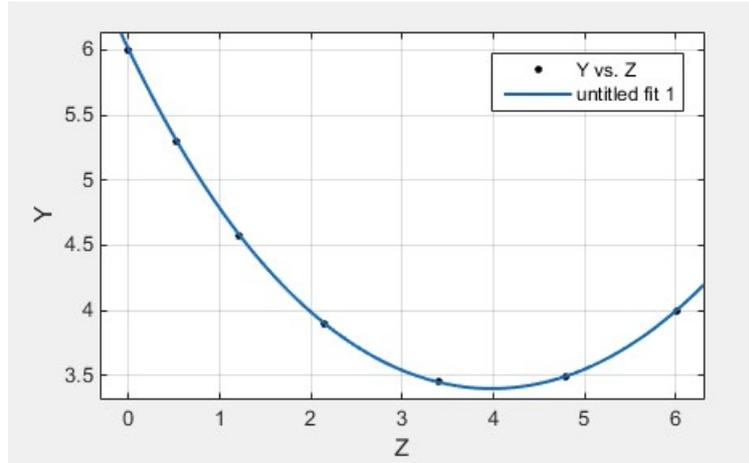


Figura 4.11: Catenaria approssimante i punti in Matlab

La funzione trovata è un'esponenziale in due termini così da rispecchiare la forma esponenziale della catenaria:

$$y(z) = 5,433e^{-0,2989z} + 0,566e^{0,283z} \quad (4.17)$$

Tale equazione rappresenta solo i punti ad ascissa  $x$  nulla allineati sullo stesso meridiano; da questa si può ricavare sia il raggio minimo  $R_M$  che la quota  $z$  al quale si trova:

$$\left\{ R_M = 3,399 \quad z = 3,98m \right. \quad (4.18)$$

Inserendo questi dati nella formula 4.16 è possibile verificare tutti i punti sul meridiano scelto:

$$\begin{cases} y(u, v) = 3,399 \cosh\left(\frac{v}{3,399}\right) \\ x(u, v) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Nella tabella seguente si riporta il confronto:

Numero nodo	Y	Z	Y formula	Errore [m]
3	6	0	6,007	0,007
62	5,300	0,528	5,307	0,007
61	4,576	1,217	4,585	0,009
60	3,896	2,152	3,902	0,006
59	3,454	3,399	3,448	-0,006
58	3,498	4,798	3,498	0
9	4	6	4,017	0,017

Tabella 4.5: Confronto con la catenoide

dalla quale si vede che i risultati sono più che accettabili.

### 4.3 Spiegazione ortogonalità delle forze nell'elemento

La spiegazione dell'ortogonalità delle forze può essere eseguita in due modi veramente simili: il primo consiste nel calcolare i carichi nodali equivalenti allo stato tensionale nell'elemento e verificare che in un nodo le componenti di detti carichi parallele al lato opposto si annullano mentre quelle ortogonali si sommano; l'altro è tramite l'applicazione del principio dei lavori virtuali. Si precisa che entrambi seguiranno in una prima fase calcoli del tutto identici.

#### 4.3.1 Uso dei carichi equivalenti nodali

Occorre innanzitutto definire il dominio in considerazione. Poichè nella mesh non si ha un controllo precisissimo su ogni elemento, essi possono avere forme leggermente diverse e non sempre ricadenti in casi particolari ( triangoli equilateri, retti ecc); si è perciò scelto di prendere ad esempio un dominio triangolare il più generico possibile, con lati e angoli diversi, come in figura 4.12.

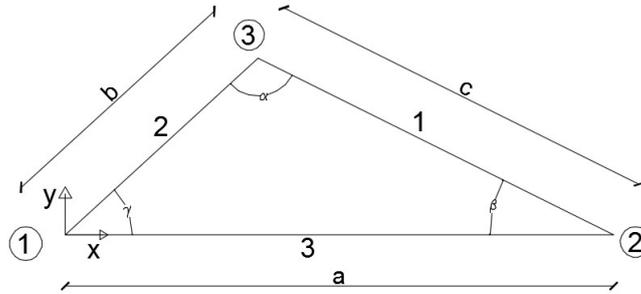


Figura 4.12: Dominio considerato

La numerazione seguita è stata quella di chiamare i lati come il nodo opposto; simile ragionamento si è fatto per le lunghezze dei lati e gli angoli: il lato di lunghezza "c" è opposto all'angolo  $\gamma$ . Primo passaggio da eseguire è la determinazione delle funzioni di forma dei nodi; una rapida regola per farlo è quella di moltiplicare l'equazione implicita delle rette passanti per i nodi diversi da quello per cui si sta calcolando la funzione di forma. In questo caso per il punto 1 si considera la retta passante per i punti 2 e 3:

$$\begin{cases} y = -\frac{b \operatorname{sen}(\gamma)}{c \operatorname{cos}(\beta)} x + \frac{b}{\operatorname{sen}(\gamma)} & \text{esplicita} \\ 0 = -y - \frac{b \operatorname{sen}(\gamma)}{c \operatorname{cos}(\beta)} x + \frac{b}{\operatorname{sen}(\gamma)} & \text{implicita} \end{cases} \quad (4.20)$$

da cui:

$$N_1 = \frac{\frac{b}{\operatorname{sen}(\gamma)} - \frac{b \operatorname{sen}(\gamma)}{c \operatorname{cos}(\beta)} x - y}{\frac{b}{\operatorname{sen}(\gamma)}} \quad (4.21)$$

Seguendo lo stesso ragionamento si trovano le ultime due:

$$\begin{cases} N_2 = \frac{-y + x \operatorname{tg}(\gamma)}{a \operatorname{tg}(\gamma)} \\ N_3 = \frac{y}{b \operatorname{sen}(\gamma)} \end{cases} \quad (4.22)$$

L'elemento è caricato da uno stato di sforzo isotropo ed uguale a  $\sigma = [\sigma_0 \sigma_0 0]$ , privo di tensioni tangenziali per garantire che non vi siano aree in compressione. Esso deve quindi essere costante per qualunque direzione scelta e per qualunque punto all'interno dell'elemento, in particolare anche per i punti sul bordo, creandosi così uno schema come il seguente:

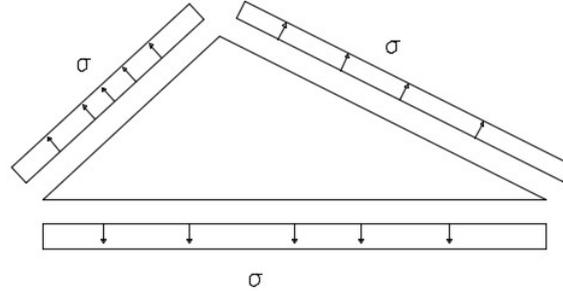


Figura 4.13: Sforzo sull'elemento

Per mettere in evidenza le forze trasmesse ai nodi, occorre calcolare i carichi nodali equivalenti a quelli distribuiti mostrati; il calcolo si eseguirà per un solo nodo, gli altri sono analoghi. Prendendo ad esempio il nodo 3, si trovano i carichi equivalenti derivati dal lato 1 e dal lato 2 come:

$$F_{13} = \int_0^c N_3 \sigma \text{sen}(\beta) dy \quad (4.23)$$

dove con  $F_{13}$  si è indicata la forza equivalente sul nodo 3 derivante dal carico sul lato 1. Ne segue:

$$F_{13} = \int_0^c \frac{y}{b \text{sen}(\gamma)} \sigma \text{sen}(\beta) dy = \int_0^c \frac{y \sigma}{c} dy = \left[ \frac{\sigma y^2}{2c} \right]_0^c = \frac{\sigma c}{2} \quad (4.24)$$

dove la sostituzione  $\frac{\text{sen}(\beta)}{b \text{sen}(\gamma)} = \frac{1}{c}$  deriva semplicemente dal teorema dei seni. La forza nodale ha quindi l'intensità trovata, è applicata nel nodo 3 e ha la direzione del carico  $\sigma$ . Stessa identica operazione si esegue per l'altro carico, sul lato 2:

$$F_{23} = \int_0^b N_3 \sigma \text{sen}(\gamma) dy \quad (4.25)$$

$$F_{23} = \int_0^b \frac{y}{b \text{sen}(\gamma)} \sigma \text{sen}(\gamma) dy = \left[ \frac{\sigma y^2}{2b} \right]_0^b = \frac{\sigma b}{2} \quad (4.26)$$

Gli altri:

$$\begin{cases} F_{21} = \frac{\sigma b}{2} \\ F_{31} = \frac{\sigma a}{2} \\ F_{32} = \frac{\sigma b}{2} \\ F_{12} = \frac{\sigma c}{2} \end{cases} \quad (4.27)$$

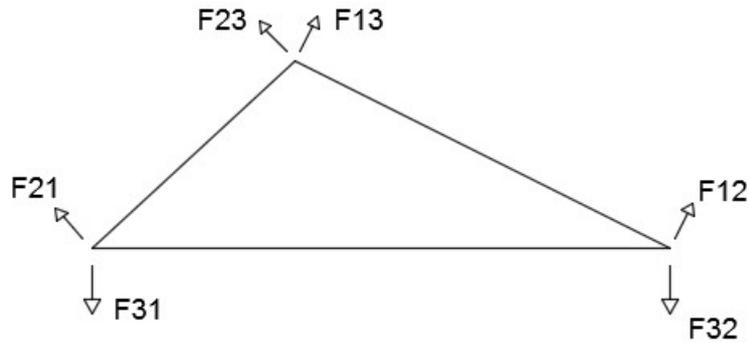


Figura 4.14: Carichi nodali equivalenti

Ingrandendo per dettaglio il nodo 3:

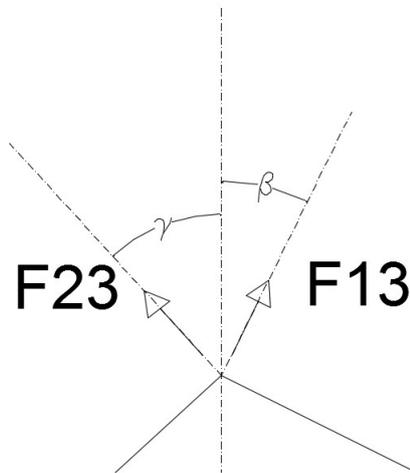


Figura 4.15: Nodo 3 in dettaglio

Dalla somma delle componenti orizzontali e verticali si ricava:

$$\begin{cases} F_{13} \sin(\beta) - F_{23} \sin(\gamma) = \frac{\sigma c}{2} \sin(\beta) - \frac{\sigma b}{2} \sin(\gamma) = \left( \frac{\sigma c}{2} - \frac{\sigma b}{2} \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} \right) \sin(\beta) = \left( \frac{\sigma c}{2} - \frac{\sigma c}{2} \right) \sin(\beta) = 0 \\ F_{13} \cos(\beta) + F_{23} \cos(\gamma) = \frac{\sigma c}{2} \cos(\beta) + \frac{\sigma b}{2} \cos(\gamma) = \frac{\sigma}{2} a \end{cases} \quad (4.28)$$

Tale risultato è in accordo con quanto detto nella equazione 4.2. Per i restanti nodi si applica la stessa cosa, sommando le forze nella direzione ortogonale al lato opposto e

parallelo per verificare come in questo caso, che le due componenti parallele si elidono mentre le due ortogonali si sommano e sono uguali alla metà della risultante del carico distribuito applicato sul lato opposto.

### 4.3.2 Uso del Principio dei Lavori Virtuali

Nel setup del problema si farà riferimento alla prima fase seguita nella sotto-sezione precedente: il dominio studiato è quello in figura 4.12 di cui si calcolano le funzioni di forma così come alle equazioni 4.21 e 4.22. Da queste si costruisce il campo degli spostamenti rappresentato in figura 4.16:

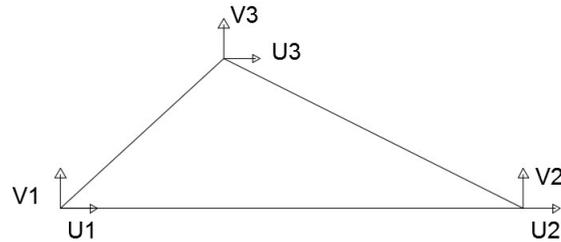


Figura 4.16: Gradi di libertà dell'elemento

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

da cui si ricava il campo delle deformazioni, derivando:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Secondo il PLV si può scrivere il lavoro delle forze esterne che deve essere uguale al lavoro delle forze interne, ai fini dell'equilibrio. In forma puramente teorica si ha:

$$\int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T \underline{P} d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\sigma} \delta \underline{\epsilon}^T d\Omega \quad \forall \delta u, \delta \epsilon \quad (4.31)$$

dove con  $\underline{P}$  si è indicato il campo di forze applicate sul bordo  $\Gamma$  dell'elemento e con  $\Omega$  l'area del dominio. Nel caso in questione, poichè si vogliono trovare le forze concentrate ai nodi (e verificarne la direzione) il primo membro dell'equazione si particularizza come:

$$\int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T \underline{P} d\Gamma = \mathbf{F}_1 \delta \underline{u}_1^T + \mathbf{F}_2 \delta \underline{u}_2^T + \mathbf{F}_3 \delta \underline{u}_3^T \quad (4.32)$$

in cui  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  sono i vettori delle forze applicate rispettivamente nei nodi 1, 2 e 3 e  $\delta\mathbf{u}_1^T, \delta\mathbf{u}_2^T, \delta\mathbf{u}_3^T$  i vettori spostamento virtuali degli stessi nodi. A questo punto è sufficiente attivare singolarmente i gradi di libertà imponendo nulli tutti gli altri per trovare le componenti delle forze al nodo corrispondenti allo spostamento attivato; si farà l'esempio per un solo nodo e la procedura è analoga per gli altri. Si calcolano esplicitamente le derivate delle funzioni di forma rispetto le due variabili:

$$\begin{aligned} N_{1,x} &= -\frac{A_1}{B_1} & N_{1,y} &= -\frac{1}{B_1} \\ N_{2,x} &= \frac{1}{a} & N_{2,y} &= -\frac{1}{aA_2} \\ N_{3,x} &= 0 & N_{3,y} &= \frac{1}{A_3} \end{aligned} \quad (4.33)$$

in cui si sono rinominate alcune costanti per semplicità di scrittura.

$$A_1 = \frac{b\text{sen}(\gamma)}{c\text{cos}(\beta)} \quad A_2 = \text{tg}(\gamma) \quad A_3 = b\text{sen}(\gamma) \quad B_1 = \frac{b}{\text{sen}(\gamma)} \quad (4.34)$$

Per calcolare la componente orizzontale della forza al nodo 3 si attiva lo spostamento orizzontale dello stesso nodo ( $U_3=1$ ) da cui deriva il vettore delle deformazioni seguente:

$$\delta\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

che sostituito nella 4.31 restituisce:

$$F_{3x} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega = 0 \quad (4.36)$$

Per la componente verticale si attiva il corrispondente  $V_3 = 1$ :

$$F_{3y} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{\sigma}{A_3} A = \frac{\sigma}{A_3} \frac{ab\text{sen}(\gamma)}{2} = \frac{\sigma}{b\text{sen}(\gamma)} \frac{ab\text{sen}(\gamma)}{2} = \frac{\sigma a}{2} \quad (4.37)$$

Si vede quindi come la componente parallela al lato opposto al nodo 3 sia nulla (eq. 4.36) mentre quella ortogonale è, come atteso, la metà della risultante del carico applicato sul lato (uguale all'equazione 4.28).

## 4.4 Esempio 3: uso di dati realistici

L'ultimo esempio presentato riguarda la stessa struttura in studio nell'esempio 1 (§ 4.2.1), ripresa in considerazione puramente per semplicità e nell'interesse di mostrare come essa reagisca sotto l'azione di sforzi e carichi nell'ordine di grandezza di quelli che realmente si possono verificare in una membrana sotto tensione. Si è però apportata una differenza al livello strutturale rispetto a prima: il contorno della membrana non è stavolta fissato ad una quota fissata, ma è lasciato libero di muoversi e contornato da cavi di acciaio che, posti sotto opportuna tensione, forniscono le forze di reazione necessarie per bilanciare lo stato tensionale interno e scaricare il carico sui sostegni. L'equilibrio non sarebbe possibile senza i cavi di bordo poichè l'assenza di sforzi tangenziali all'interno della membrana fa sì

che preso un elemento generico sul bordo, lontano dai sostegni, esso non possa sviluppare forze in equilibrio con lo sforzo isotropo imposto.

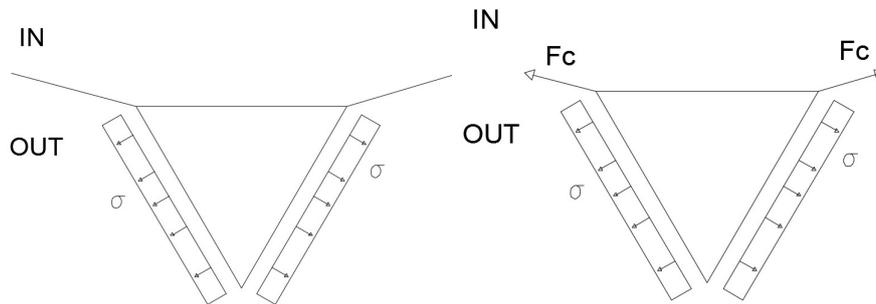


Figura 4.17: Dettaglio di un elemento sul bordo in assenza di cavi (a sinistra) e con i cavi (a destra)

La fig.4.17 mostra quanto appena detto, infatti le componenti dirette verso l'interno della membrana non sono equilibrate se in assenza di cavi.

Entrando nel dettaglio, si è considerata una membrana in polivinilidenefluoruro (PVDF) la cui tensione di rottura è  $400 daN/5cm$  ( $80MPa$  se si assume lo spessore del telo uguale a  $1mm$ ); la tensione effettivamente applicata è però il 10% di quella massima ( $\sigma = 8MPa$ ) poichè, si ricorda, che la struttura così caricata manca dei carichi esterni ma è soggetta unicamente alla pretensione. Ci si aspetta quindi che la tensione interna salga significativamente ed è bene tenere un certo margine di resistenza. Non si è tenuto conto del peso proprio del telo ( $1050 g/m^2$ ) perchè molto piccolo e in genere la sua influenza, rispetto alla pretensione o ad altri carichi esterni quali neve e vento, non è così rilevante. I cavi utilizzati sono d'acciaio armonico, adatto alla precompressione, che ha un limite elastico più grande rispetto l'acciaio ordinario e permette quindi di restare per un range più ampio di forze in campo lineare e far sì che, in caso di un cambio sostanziale di configurazione e/o contesto della struttura, di tenere l'integrità dei cavi e le relative lunghezze. Si sono scelti trefoli a 7 fili, selezionati da un catalogo della ArcelorMittal, con i dati in tabella:

Diametro nominale	Modulo E	Massa	Sezione	Tolleranza su massa	Carico di rottura
mm	MPa	g/m	$mm^2$	%	kN
15,7	201000	1172,0	150,0	$\pm 2$	306,0

Tabella 4.6: Caratteristiche cavi pr EN10138

I cavi sono tensionati con una forza  $F_C = 60kN$  corrispondente al 20% del carico massimo di rottura: il ragionamento seguito è lo stesso precedente, cioè tenere in conto che in una fase successiva la struttura sarà sottoposta a carichi di rilevanza maggiore. Inserendo questi dati nel programma RFEM5, si è trovata la configurazione finale e i grafici delle tensioni e delle forze nella membrana e nei cavi (riportati in seguito).

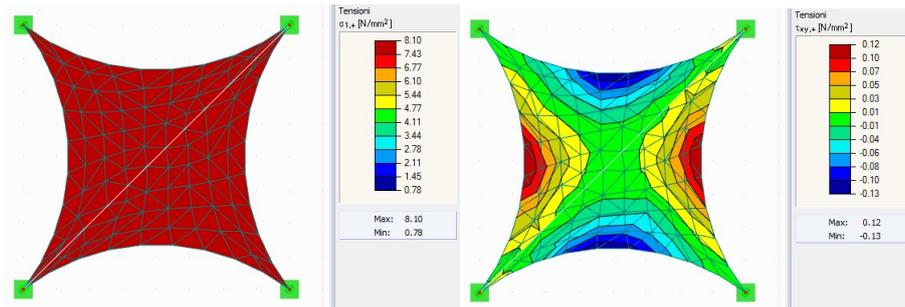


Figura 4.18: Diagrammi delle tensioni normali e tangenziali

In accordo con la teoria e con lo stato tensionale imposto, i diagrammi in figura ricalcano i valori attesi; la figura di sinistra rappresenta le tensioni normali in una delle direzioni principali e si nota come esse siano uguali in ogni punto della membrana (isotropia dello stato imposto) e pari al valore assegnato ( $8MPa$ ). Piccole differenze rispetto quel valore sono dovute unicamente al metodo numerico che il programma utilizza nel calcolo. L'altra figura rappresenta invece le tensioni tangenziali: nuovamente i valori sono congruenti con quanto assegnato infatti i valori sono prossimi allo zero e le discrepanze sono dovute, come prima, ad errori e/o approssimazioni numeriche del programma. Nei cavi si ottiene un valore di sforzo normale (in trazione) anch'esso molto vicino alla pretensione voluta ( $60\text{ kN}$ ).

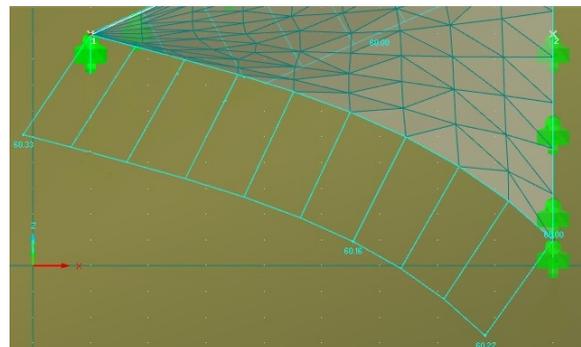


Figura 4.19: Sforzo normale nei cavi

# Capitolo 5

## Dynamic Relaxation Method

Terzo e ultimo metodo analizzato in questa sede è, come da titolo, il Dynamic Relaxation Method (DR). Con lo studio di questo processo si conclude una panoramica più o meno generale sui vari tipi di metodo disponibili per il form finding, poiché esso si basa su concetti fondamentalmente diverse dagli altri due (FDM e SSDM). Il DR è infatti un metodo passo passo (step by step) per la determinazione della posizione finale di equilibrio a partire da una configurazione iniziale attraverso un'analisi pseudo-dinamica. Di grande importanza è la specificazione che l'analisi eseguita NON è affatto per scopi dinamici, ma puramente statici, cioè l'assegnazione di condizioni di bordo e carichi sulla struttura che portano all'equilibrio statico. Il movimento che si potrà calcolare e seguire nei vari step del metodo è fittizio e del tutto irrilevante per il raggiungimento del risultato (per quanto si tenda ad ottimizzare il processo così da eseguire il minor numero di step possibile). La componente "dinamica" di tutto il processo si ritrova nella determinazione delle proprietà di massa e smorzamento fittizi, assegnati a tutti i punti della discretizzazione effettuata; si vedrà meglio come scegliere valori adeguati per queste due proprietà che, per quanto arbitrarie, se scelte con criterio portano ad una migliore ottimizzazione del programma ed una più rapida convergenza verso la soluzione statica.

Storicamente il DR fu sviluppato nel 1965 da A.S. Day per l'analisi alle differenze finite di serbatoi sotto pressione in calcestruzzo, anche se il concetto era noto anche in tempi più remoti da Rayleigh. Mentre dal 1970 in poi è stato approfondito lo studio da M.R. Barnes [3] per l'analisi e la progettazione di strutture in tensione. Ciò che rende il metodo particolarmente appropriato per questa ultima tipologia costruttiva è il fatto che ogni iterazione fa riferimento sempre alle coordinate dei vari punti della mesh nella posizione calcolate nella iterazione precedente, questo permette al metodo di tenere conto automaticamente dei grandi spostamenti (e cioè non linearità geometriche); altro vantaggio è quello di non richiedere la creazione diretta di una matrice assemblata di rigidità della struttura, evitando la formulazione di un grande sistema di equazioni non lineari (non linearità del materiale o geometrica): le equazioni si risolvono punto per punto.

### 5.1 Formulazione del metodo

Il metodo si basa sull'applicazione della seconda legge della dinamica (Newton):

$$F = Ma = M\dot{v} \quad (5.1)$$

L'eq. 5.1 si scriverà per ogni punto della discretizzazione assegnando, se è il caso, massi diverse a punti diversi (diverse anche nelle tre direzioni) per giungere prima a convergenza. Concettualmente queste masse fittizie sono la concentrazione al nodo di quella nella membrana alla quale si aggiunge anche uno smorzamento  $C$  proporzionale alla velocità. La formulazione cambia quindi in:

$$R_i^t = M_i \dot{v}_i^t + C_i v_i^t \quad (5.2)$$

dove con l'apice  $t$  si sono indicate le quantità calcolate al tempo  $t$ . Questa equazione può essere particolarizzata nelle tre direzioni avendo a disposizione masse e coefficienti di smorzamento diversi nello stesso punto. A partire da un istante iniziale si incrementa il tempo di una quantità discretizzata  $\Delta t$  presa piccola a sufficienza per migliorare l'approssimazione della soluzione; durante il calcolo le velocità sono assunte lineari su ogni intervallo  $\Delta t$  e per ogni iterazione la velocità considerata è quella media, calcolata a partire da quelle in  $t + \Delta t/2$  e  $t - \Delta t/2$ , pari a:

$$v_{ix}^m = \frac{(v_{ix}^{t+\Delta t/2} + v_{ix}^{t-\Delta t/2})}{2} \quad (5.3)$$

mentre le accelerazioni sono assunte costanti e pari a:

$$\dot{v}_{ix}^t = \frac{(v_{ix}^{t+\Delta t/2} - v_{ix}^{t-\Delta t/2})}{\Delta t} \quad (5.4)$$

Sostituendo nella eq. 5.2 si ottiene (scritta nella direzione  $x$ ):

$$R_{ix}^t = \frac{M_{ix}}{\Delta t} (v_{ix}^{t+\Delta t/2} - v_{ix}^{t-\Delta t/2}) + \frac{C_{ix}}{2} (v_{ix}^{t+\Delta t/2} + v_{ix}^{t-\Delta t/2}) \quad (5.5)$$

Così sfruttando le velocità trovate in mezzo all'intervallo di integrazione si trovano le forze residue al nodo al tempo  $t + \Delta t$  estremo dell'intervallo. A partire dalla eq. 5.5 è possibile ricavare, dai dati dell'iterazione precedente, la velocità nella nuova iterazione come:

$$v_{ix}^{t+\Delta t/2} = v_{ix}^{t-\Delta t/2} \left( \frac{M_{ix}/\Delta t - C_{ix}/2}{M_{ix}/\Delta t + C_{ix}/2} \right) + R_{ix}^t \left( \frac{1}{M_{ix}/\Delta t + C_{ix}/2} \right) \quad (5.6)$$

Si ricostruiscono poi la variazione della coordinata  $e$ , semplicemente aggiungendo questa differenza alla precedente posizione, la nuova coordinata:

$$\Delta x_i^{t+\Delta t} = \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2} \quad (5.7)$$

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2} \quad (5.8)$$

Importanti sono le condizioni iniziali che si desidera assegnare; esse sono in teoria irrilevanti per il puro scopo di raggiungere l'equilibrio, ma sono in pratica di grande vantaggio se assegnate adeguatamente. Fissare velocità iniziali casuali diverse da zero è possibile ma ciò si ripercuote sul valore dei carichi iniziali agenti sulla membrana; in questo

caso essi non sono esattamente uguali al loro valore reale ma c'è un termine aggiuntivo derivante dal fattore di smorzamento  $C_i v_i^t$  e ciò può essere un'inutile complicazione in senso pratico. Volendo perciò assegnare, all'istante  $t = 0$ , velocità nulle si scrive:

$$v_{ix}^{\Delta t/2} = -v_{ix}^{-\Delta t/2} \quad (5.9)$$

Riscrivendo la eq. 5.6 per il tempo  $\Delta t/2$  ed utilizzando la 5.9 si ricava il valore della velocità all'istante  $\Delta t/2$ , in funzione della massa e dei carichi esterni, da assegnare per avere velocità iniziale nulla in  $t = 0$ .

$$\begin{cases} v_{ix}^{\Delta t/2} (M/\Delta t + C_{ix}/2) = v_{ix}^{-\Delta t/2} (M_{ix}/\Delta t - C_{ix}/2) + P_{ix}^t \\ v_{ix}^{\Delta t/2} = \frac{\Delta t \cdot F_{ix}}{2M_{ix}} \end{cases} \quad (5.10)$$

dove  $P_{ix}$  sono i carichi esterni applicati in x. Identico ragionamento si fa per l'altra direzione.

## 5.2 Controllo sulla convergenza

La buona riuscita del metodo si valuta basandosi sull'energia cinetica della struttura rimasta alla fine dell'iterazione: quando l'energia cinetica è inferiore ad una certa soglia fissata  $U_0$  (e quindi è possibile considerarla nulla), allora la struttura ha raggiunto l'equilibrio e si è alla fine del processo iterativo. L'energia cinetica è calcolata come:

$$\begin{cases} U_k = \sum_i^n \sum_j^m M_{ij} v_{ij}^2 \\ U_k \leq U_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

dove n è il numero di nodi e m è il numero delle dimensioni del problema.

Questa relazione può essere vista anche come un controllo sulle forze residue in ogni nodo (che dovrebbero comunque essere calcolate individualmente); infatti dinamicamente l'accelerazione, e quindi la velocità, sono diverse da zero quando ci sono forze residue non bilanciate. Viceversa se l'energia cinetica è nulla, questa condizione non si verifica e si può ragionevolmente assumere che tutti i nodi siano equilibrati.

## 5.3 Definizione di masse e smorzamento viscoso

Proprietà geometriche a parte, che sono definite a priori e si scelgono in base a ragionamenti di tipo progettuale e non ai fini del metodo, le caratteristiche che in questa fase possono essere scelte arbitrariamente sono l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , le masse nodali e il coefficiente di smorzamento. Il DR è in genere soddisfacente (arriva a convergenza senza incontrare instabilità numeriche) quando l'intervallo  $\Delta t$  non è troppo grande o quando le masse non sono troppo piccole; per questo riducendo il  $\Delta t$  (cioè incrementando i punti di campionamento) e ingrandendo le masse (fornendo quindi maggiore inerzia alla struttura), si riesce a rendere il sistema più stabile. Il problema si dice quindi "condizionatamente stabile". Barnes dimostrò come utilizzando un valore della massa dipendente dall'intervallo di tempo si riesce a rendere il problema "incondizionatamente stabile":

$$M_{ix} = \frac{\Delta t^2}{2} S_{ix} \quad (5.12)$$

dove  $S_{ix}$  è la più rigidezza diretta del nodo  $i$  in direzione  $x$ . Questa rigidezza è ovviamente calcolata in modo diverso a seconda che si stia considerando una rete di funi o una membrana (o una combinazione delle due). Per cavi o travi la rigidezza elastica si trova come:

$$S_i = \frac{EA_i}{L_i} + \frac{T_i}{L_i^t} \quad (5.13)$$

dove  $T_i$  è la tensione nell'elemento  $i$ -esimo e  $L_i^t$  è la sua lunghezza attuale. Nel caso di membrane invece, considerando il telo discretizzato come elementi triangolari a spessore costante si ha:

$$S_{iy} = \frac{3Etb}{2} \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} \right) \quad (5.14)$$

dove  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $t$  è lo spessore,  $b$  è la distanza media dei nodi in direzione  $x$  e  $L_1, L_2$  sono le distanze dei nodi adiacenti in direzione  $y$  dal nodo in considerazione. Questi conti si eseguono per tutte e tre le direzioni ( $x, y, z$ ) e, poichè per il form finding è vantaggioso avere la massa più grande possibile si assumerà per tutti i nodi il massimo delle tre.

$$M_i = \max(M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}) \quad (5.15)$$

Riguardo il fattore di smorzamento, esso causa appunto l'attenuazione dei fenomeni di vibrazione della membrana portandola all'equilibrio statico. In base ai valori che assume questa convergenza può avvenire più o meno asintoticamente (si veda figura 5.1)

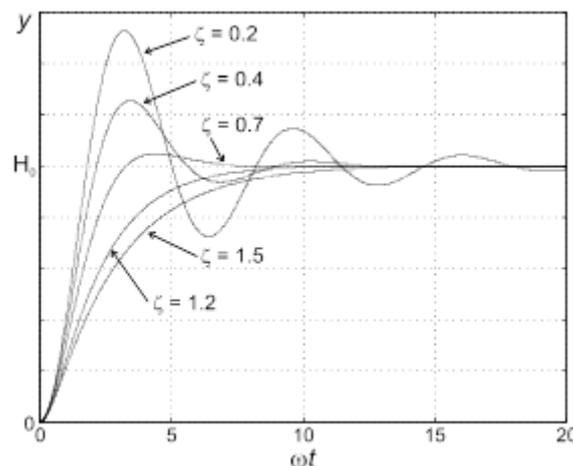


Figura 5.1: Grafico dello spostamento per un sistema ad un gradi di libertà

Nel grafico,  $H_0$  è lo spostamento all'equilibrio mentre i vari valori di  $\zeta$  indicano lo smorzamento. Si nota facilmente che il valore per cui la membrana oscilla di meno e quindi arriva più velocemente alla soluzione è il valore di smorzamento detto "critico": per tale valore lo spostamento, partendo da zero, supera la configurazione equilibrata per

poi invertire il moto e avvicinarla stabilmente. Con membrane sovrasmorzate (con  $\zeta$  più grande di quello critico) o sottosmorzate ( $\zeta$  più piccole di quello critico) la convergenza è più lenta e quindi non computazionalmente ottimizzata. Per tale motivo si sceglie nel DR lo smorzamento critico, dato da:

$$C_i = 2\sqrt{S_i M_i} \quad (5.16)$$

dipendente dalla rigidità massima in una determinata direzione, stimata in precedenza. Un altro modo per determinare il coefficiente di smorzamento critico è sfruttando la più alta frequenza di vibrazione ottenuta avviando un'analisi pseudo-dinamica per la stessa struttura in studio ma senza smorzamento.

$$C_i = 4\pi f_{max} M_i \quad (5.17)$$

### 5.3.1 Smorzamento cinematico

Lo smorzamento cinematico può essere usato come alternativa a quello viscoso; un motivo che può portare a questa scelta è la riduzione del numero di parametri necessari nel computo: infatti se nell'uso dello smorzamento viscoso (eq. 5.16) erano necessari dati quali la massa nodale, la rigidità  $S_i$  e l'intervallo di integrazione per ricavare il fattore di smorzamento critico, con quello cinematico si sfruttano soltanto l'intervallo  $\Delta t$  e la massa nodale  $M_i$ ; ci si è così ridotti a due parametri da tenere in considerazione in quanto il fattore che governa lo smorzamento e la convergenza è in questo caso l'energia cinetica. Questa alternativa è stata proposta da Cundall nello studio di problemi di meccanica su rocce instabili e si è rivelato essere molto stabile e con una più veloce convergenza nel caso di problemi con grandi spostamenti.

Nella pratica, non viene usato nessun fattore di spostamento ma si traccia l'energia cinetica della struttura nel caso di oscillazioni non smorzate fino al raggiungimento di un picco: quando al tempo  $t + \Delta t$  l'energia cinetica è più piccola di quella all'istante precedente,  $t$ , si fessano le velocità a zero e si reitera il processo. Tale procedura è motivata dal comportamento di un sistema con un solo grado di libertà per il quale il picco dell'energia cinetica corrisponde con la posizione di equilibrio statico; per un sistema a più gradi di libertà quindi sarà necessario ripetere l'annullamento delle velocità in corrispondenza di più picchi fino alla convergenza.

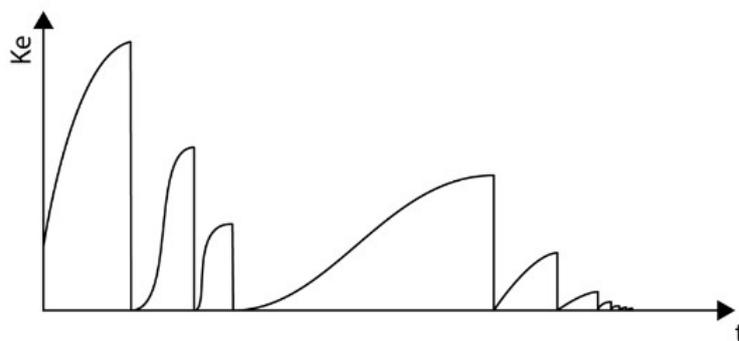


Figura 5.2: Grafico dell'energia cinetica

Se la posizione del picco coincide con il tempo  $t + \Delta t/2$ , cioè l'istante in cui vengono calcolate le velocità (si ricorda che le velocità si stimano negli istanti  $t + k\Delta t/2$  mentre le coordinate in  $t + k\Delta t$ , con  $k$  intero relativo), allora le coordinate attuali della posizione di riferimento saranno calcolate nello stesso istante. Si può però dimostrare che portando avanti le iterazioni utilizzando questa nuova posizione può causare la non piena convergenza della soluzione. Si sceglie quindi di fissare come coordinate di riferimento della nuova posizione, quelle calcolate all'istante  $t - \Delta t/2$ , cioè quelle corrispondenti alla velocità calcolata nell'ultimo istante prima del picco. Si ha quindi:

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2} \quad (5.18)$$

da cui:

$$x_i^t = x_i^{t+\Delta t} - \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2} \quad (5.19)$$

che, particolarizzata per l'istante  $t - \Delta t/2$ , diventa:

$$x_i^{t-\Delta t/2} = x_i^t - \frac{\Delta t}{2} \cdot v_{ix}^{t-\Delta t/2} \quad (5.20)$$

sostituendo la eq. 5.19 nella eq. 5.20, si ha:

$$x_i^{t-\Delta t/2} = (x_i^{t+\Delta t} - \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2}) - \frac{\Delta t}{2} \cdot v_{ix}^{t-\Delta t/2} \quad (5.21)$$

Se si sostituisce nella eq. 5.21 l'eq. 5.6 (in cui  $C_{ix} = 0$ ) si ottiene, in fine:

$$x_i^{t-\Delta t/2} = x_i^{t+\Delta t} - \frac{3\Delta t \cdot v_{ix}^{t+\Delta t/2}}{2} + \frac{\Delta t^2 R_{ix}^t}{2M_{ix}} \quad (5.22)$$

Quando si riavvia l'analisi le velocità si devono quindi calcolare nel punto medio del primo intervallo di tempo:

$$v_{ix}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Delta t \cdot R_{ix}^t}{2M_{ix}} \quad (5.23)$$

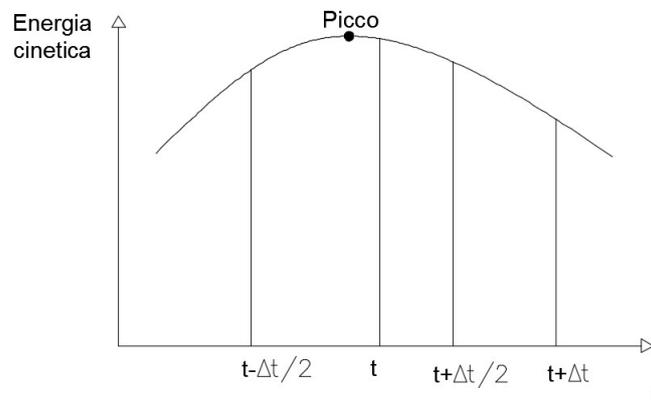


Figura 5.3: Energia cinetica nell'intorno di un picco

## 5.4 Esempio 1

La prima struttura in studio ora è la medesima già considerata in precedenza, ovvero la membrana hypar con due punti alti e due a quota più bassa. Si è scelta la stessa non per mancanza di esempi o “pigrizia”, ma per porre in risalto successivamente anche le differenze che ci sono tra i vari metodi proposti, la loro velocità di convergenza ed in generale l’approssimazione della soluzione trovata. La geometria della struttura non è cambiata ma si riporta comunque per chiarezza nel reperire le informazioni:

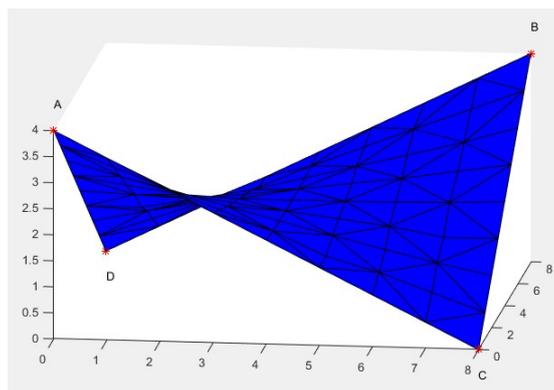


Figura 5.4: Geometria dell'esempio

Le coordinate dei vertici sono:

$$\begin{cases} A & (0, 0, 4) \\ B & (8, 8, 4) \\ C & (8, 0, 0) \\ D & (0, 8, 0) \end{cases}$$

I bordi sono stati fissati (essendo in mancanza di cavi che possano equilibrare la tensione interna) e così le coordinate di tutti i punti che vi appartengono. Ciò che vi è di diverso dall'esempio nel capitolo 4 sul SSDM è la mesh: in questo caso se ne è voluta creare una il più simmetrica possibile, data la natura simmetrica del problema, per evitare che si presentassero deformazioni o errori troppo grandi e che il programma impiegasse troppo tempo. Il confronto si è eseguito prendendo alcuni punti della mesh utilizzata su Matlab e calcolando l'errore sulla quota  $z$  che si ha con i valori trovati dal programma RFEM5. Data la non congruenza delle due mesh, si è resa necessaria un'interpolazione delle coordinate (dati in tabella):

Numero nodo	X	Y	Z	Errore [m]
50	3,9999	3,0017	1,9281	0,0968
62	2,0447	4,9991	1,4999	0,0837
79	5,0000	7,0004	2,3459	0,0393

Tabella 5.1: Errori quote esempio 1

Per una mesh abbastanza rada quindi (ma simile a quella utilizzata per l'esempio con il SSDM) gli errori si sono mantenuti sull'ordine di grandezza del centimetro, non troppo diverso da quanto trovato in precedenza.

## 5.5 Esempio 2

Il secondo esempio affrontato consiste in una struttura non simmetrica formata da una base rettangolare 5x2 m ed ancorata ad un anello di raggio 0.7 m posto a quota 1 m. Siccome la procedura di confronto è rimasta invariata, si riporteranno soltanto i risultati.

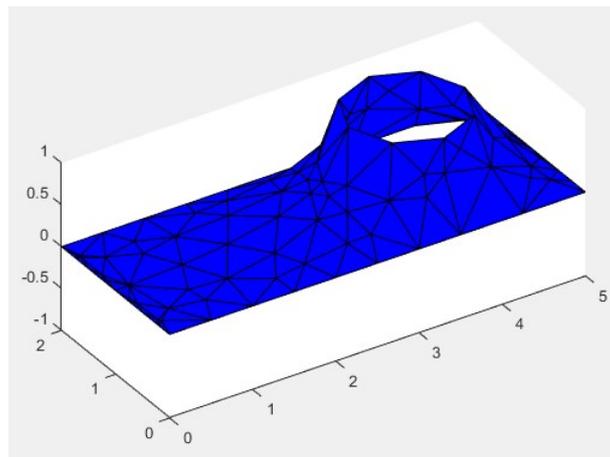


Figura 5.5: Configurazione equilibrata esempio 2

Numero nodo	X	Y	Z	Errore [m]
44	2,3490	0,9996	0,3640	-0,0393
57	2,8798	0,3668	0,4281	-0,0118
74	4,6749	0,5013	0,1585	-0,0548

Tabella 5.2: Errori quote esempio 1

# Capitolo 6

## Analisi FEM sotto l'azione di carichi

Prima di addentrarsi nell'analisi vera e propria della struttura e la valutazione degli esami è bene fare una piccola digressione sul tipo di elementi finiti impiegati, in quanto sono un elemento fondamentale e la loro comprensione cruciale. La scelta più immediata ai fini della modellazione di tutti gli esempi che seguiranno è quella riguardante gli elementi finiti: poichè ogni struttura esaminata è una membrana gli elementi adottati saranno *di membrana*, appunto. Questi elementi sono denominati su Abaqus come M3D3 in cui la *M* sta per membrana, *3D* sta ad indicare che sono elementi tridimensionali nello spazio, l'ultimo *3* indica il numero di nodi di ogni elemento (triangolari in questo caso). Gli elementi di membrana sono usati per rappresentare superfici sottili nello spazio che hanno rigidità nel piano dell'elemento ma non rigidità flessionale; possono essere anche usati per rappresentar elementi sottili di irrigidimento in strutture solide come strati di rinforzo in un materiale continuo. Gli elementi associati alla sigla prima spiegata sono quelli più generici possibili, ma per particolari conformazioni di problemi si possono adottare elementi più consoni: è il caso di problemi cilindrici (usando elementi MCL6) o assialsimmetrici (MGAX2). In conseguenza del fatto che non hanno rigidità flessionale, ai nodi degli elementi finiti sono associati solo gradi di libertà traslazionali, non di rotazione.

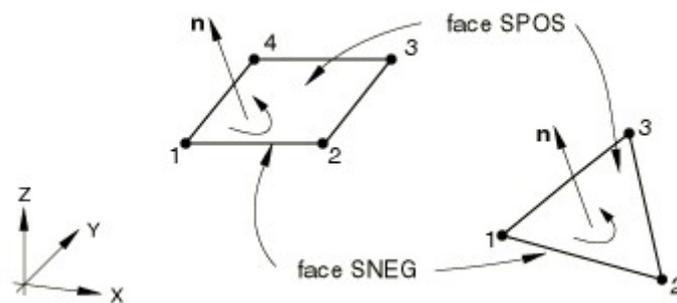


Figura 6.1: Elementi M3D3 e M3D4

Essi supportano tutti i tipi di carico che solitamente sono associati alle strutture nell'ingegneria civile come carichi di volume, gravitazionali, carichi distribuiti, fondazioni elastiche, pressioni idrostatiche ed altri e restituiscono in output i valori degli spostamenti, tensioni e deformazioni nodali e le loro ricostruzioni interne all'elemento a seconda del grado del polinomio usato nella descrizione delle funzioni di forma. Le tensioni (e defor-

mazioni) in output sono calcolate nelle direzioni in accordo con il sistema di riferimento locale assegnato ad ogni elemento; nello specifico, nei seguenti esempi, esso è assegnato parallelo alle direzione dei bordi della membrana per quanto riguarda l'hypar e nelle direzioni del meridiano e circonferenziale per quanto riguarda il cono.

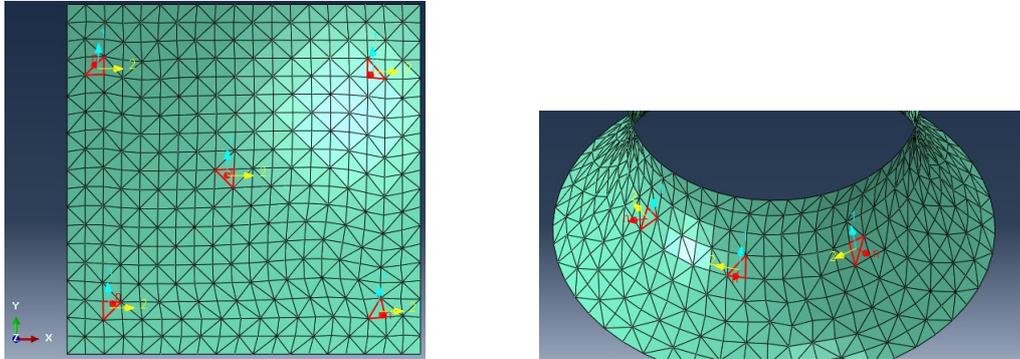


Figura 6.2: Sistemi di riferimento locali assegnati

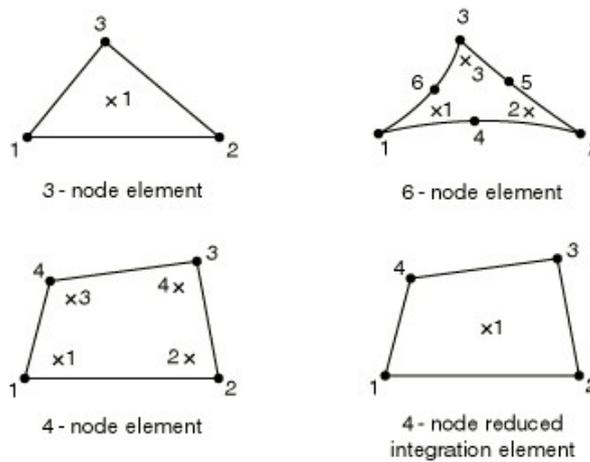


Figura 6.3: Punti di integrazione di Gauss

Elementi di membrana agiscono come se fossero lamine nello spazio che possono sopportare forze di membrana ma che non hanno rigidità a flessione o taglio come si è detto; quindi le sole componenti non nulle della tensione sono quelle parallele alla superficie media della membrana: si può quindi affermare che essa si trova in uno stato di sforzo piano. Entrando nella formulazione dell'elemento, si scrive il contributo al lavoro virtuale delle forze interne come:

$$\delta W^I = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV \tag{6.1}$$

dove

$\boldsymbol{\sigma}$  è il tensore delle tensioni di Cauchy;

$\delta\epsilon = \text{sym}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)$  è la deformazione virtuale, calcolata come la parte simmetrica della variazione del vettore spostamenti virtuali;

$V$  è il volume della membrana nello stato attuale.

Nelle quantità appena descritte le sole componenti considerate saranno quelle in piano, come detto; esse però hanno anche un effetto sulla componente fuori piano, normale alla superficie in ogni punto, cioè sullo spessore. In analisi geometricamente non lineari lo spessore della sezione cambia in funzione delle deformazioni nel piano tramite un coefficiente a sua volta dipendente dal coefficiente di Poisson effettivo sulla sezione.

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (6.2)$$

Scritta la eq. 6.2 in termini logaritmici:

$$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\ln\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_2^0}\right)\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (6.3)$$

in cui:

$t$  è lo spessore nello stato attuale;

$t_0$  è lo spessore nello stato iniziale di riferimento;

$l_1, l_2$  è la lunghezza nella direzione 1/2 nello stato attuale;

$l_1^0, l_2^0$  è la lunghezza nella direzione 1/2 nello stato di riferimento;

$A$  è l'area nello stato attuale;

$A_0$  è l'area nello stato iniziale.

Dalla eq. 6.3 semplicemente si ha:

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^{-\frac{\nu}{1-\nu}} \quad (6.4)$$

Una mesh costruita con gli elementi appena descritti deve necessariamente presentare una certa curvatura in ogni nodo; ciò è dovuto alla formulazione stessa degli elementi: poichè essi non hanno rigidità flessionale, nel caso di una configurazione inizialmente piana con una forza applicata fuori piano, non avranno modo di equilibrare il carico e si incontrerà un sistema in cui il programma non trova alcuna rigidità, interrompendo l'analisi. Quindi è fondamentale assegnare una configurazione iniziale diversa da quella piatta.

Nelle sezioni successive si intende mostrare come condurre la fase successiva al form finding, come definire quali carichi sono rilevanti per questo tipo di strutture e la loro intensità. Data la natura delle tensostrutture l'importanza dei diversi tipi di carico è diversa rispetto ad un edificio convenzionale: è intuibile come il peso proprio influenzi la risposta generale in misura veramente ridotta, al contrario di quanto accada per i carichi da vento e da neve su cui si deve porre particolare attenzione anche per il modo in cui essi sono distribuiti sulla superficie stessa della membrana.

## 6.1 Peso proprio

Il peso proprio della membrana ha un valore compreso generalmente tra 0,7 e 2,0 kg/mq. Trascurato completamente nel processo di form finding, in questa fase esso viene a rigore considerato sempre, cioè sempre inserito nelle combinazioni di carico seppure abbia effetti

rilevanti soltanto in casi particolari come membrane composte da materiali estremamente densi e con un livello basso di pretensione.

## 6.2 Vento

Il vento rappresenta l'azione principale che tali opere sono chiamate a sopportare sia sotto condizioni statiche che sotto condizioni dinamiche; queste ultime specialmente devono essere valutate adeguatamente in sede di progettazione poichè oscillazioni troppo accentuate (o addirittura risonanza) possono ovviamente minare la sicurezza strutturale ma hanno anche il risvolto meno "ingegneristico" di creare confusione ed un certo grado di preoccupazione nei fruitori della struttura. Occupandosi in un primo tempo dell'azione statica, il vento agisce con una pressione distribuita sempre ortogonalmente alla membrana in ogni suo punto e, a seconda della curvatura e dell'esposizione che essa ha, può essere diretta verso di essa (pressione appunto) o in allontanamento (in risucchio o sollevamento). Si viene quindi a creare una condizione che negli edifici convenzionali non è troppo comunemente considerata e talvolta contro intuitiva: il sollevamento verso l'alto appunto.

Operativamente parlando, l'intensità del carico da vento dipende da fattori geografici e geometrici della struttura: a seconda dell'altezza dell'opera, la sua altitudine sul livello del mare, la posizione rispetto la costa e l'ambiente circostante si può valutare una velocità del vento media caratteristica del punto considerato e coefficienti moltiplicativi che contemplano effetti dinamici, di temperatura o in generale il peso che questa velocità assume nel computo del carico; dalla geometria (forma della struttura) dipende invece un coefficiente, detto *coefficiente di pressione*, diverso per ogni zona della stessa membrana, che mostra come questa reagisca ad un certo vento che spiri da una certa direzione. La procedura da seguire è spiegata nell'Eurocodice 1, parte 1-4 con l'aiuto delle appendici nazionali per ulteriori dettagli. La formula utilizzata è la seguente (NTC, §3.3.4):

$$p = q_b c_e c_p c_d \quad (6.5)$$

in cui

$q_b$  è la pressione cinetica di riferimento,

$c_e$  è il coefficiente di esposizione,

$c_p$  è il coefficiente di pressione,

$c_d$  è il coefficiente dinamico che tiene conto delle effetti riduttivi associati alla non contemporaneità delle massime pressione locali.

Il primo passo nel computo del carico da vento è la stima della *velocità di riferimento* funzione dell'altitudine e della regione di appartenenza; essa è il valore caratteristico della velocità del vento a 10 m dal suolo su un terreno di categoria II, mediata su 10 minuti e riferita ad un periodo di ritorno di 50 anni. [NTC, §3.3.2]. Nel caso manchino analisi statistiche adeguate si può fare riferimento alle formule:

$$\begin{cases} v_b = v_{b0} & a_s \leq a_0 \\ v_b = v_{b0} + k_a(a_s - a_0) & a_0 < a_s \leq 1500m \end{cases} \quad (6.6)$$

dove  $a_s$  è l'altitudine sul livello del mare e  $v_{b0}, k_a, a_0$  sono dati dalla tabella seguente (NTC, tabella 3.3.I, §3.3.2):

Zona	Descrizione	$v_{b,0}$ [m/s]	$a_0$ [m]	$k_a$ [1/s]
1	Valle d'Aosta, Piemonte, Lombardia, Trentino Alto Adige, Veneto, Friuli Venezia Giulia (con l'eccezione della provincia di Trieste)	25	1000	0,010
2	Emilia Romagna	25	750	0,015
3	Toscana, Marche, Umbria, Lazio, Abruzzo, Molise, Puglia, Campania, Basilicata, Calabria (esclusa la provincia di Reggio Calabria)	27	500	0,020
4	Sicilia e provincia di Reggio Calabria	28	500	0,020
5	Sardegna (zona a oriente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	750	0,015
6	Sardegna (zona a occidente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	500	0,020
7	Liguria	28	1000	0,015
8	Provincia di Trieste	30	1500	0,010
9	Isole (con l'eccezione di Sicilia e Sardegna) e mare aperto	31	500	0,020

Tabella 6.1: Valori dei parametri  $v_{b0}$ ,  $k_a$ ,  $a_0$ 

Si precisa da subito che nei conti a seguire, le strutture considerate sono state posizionate nella regione Lombardia ad un'altitudine di 500 mslm. Ulteriori dettagli saranno specificati nelle sezioni degli esempi.

A partire dalla velocità di riferimento si può agevolmente calcolare la pressione cinetica  $q_b$  (in  $N/m^2$ ), tenendo a mente che  $\rho$  è la densità dell'aria assunta costante e pari a  $1.25 \text{ kg/m}^3$ :

$$q_b = \frac{\rho v_b^2}{2} \quad (6.7)$$

Il secondo passo è determinare la categoria di esposizione del terreno, cioè si deve ricavare un valore indicativo di alcuni parametri che diano un'idea di quanto quella certa parte di terreno sia influenzata da fattori ambientali quali altitudine, vicinanza alla costa e rugosità del terreno. Proprio quest'ultima è stabilita secondo la tabella 6.2 (tabella 3.3.III delle NTC, §3.3.7):

Classe di rugosità del terreno	Descrizione
A	Aree urbane in cui almeno il 15% della superficie sia coperto da edifici la cui altezza media superi i 15m
B	Aree urbane (non di classe A), suburbane, industriali e boschive
C	Aree con ostacoli diffusi (alberi, case, muri, recinzioni,...); aree con rugosità non riconducibile alle classi A, B, D
D	Aree prive di ostacoli (aperta campagna, aeroporti, aree agricole, pascoli, zone paludose o sabbiose, superfici innevate o ghiacciate, mare, laghi,...)

L'assegnazione della classe di rugosità non dipende dalla conformazione orografica e topografica del terreno. Affinché una costruzione possa dirsi ubicata in classe A o B è necessario che la situazione che contraddistingue la classe permanga intorno alla costruzione per non meno di 1 km e comunque non meno di 20 volte l'altezza della costruzione. Laddove sussistano dubbi sulla scelta della classe di rugosità, a meno di analisi dettagliate, verrà assegnata la classe più sfavorevole.

Tabella 6.2: Classi di rugosità del terreno

Da classe di rugosità e facendo riferimento a degli schemi presenti nello stesso paragrafo su menzionato, che non si riportano in questa sede, si ottiene la categoria di esposizione cercata dalla tabella 6.3 (tabella 3.3.II delle NTC, §3.3.7):

Categoria di esposizione del sito	$k_r$	$z_0$ [m]	$z_{min}$ [m]
I	0,17	0,01	2
II	0,19	0,05	4
III	0,20	0,10	5
IV	0,22	0,30	8
V	0,23	0,70	12

Tabella 6.3: Parametri per la definizione del coefficiente di esposizione

Impiegando poi le seguenti formule si ottiene  $c_e$ :

$$\begin{cases} c_e(z) = k_r^2 c_t \ln(z/z_0) [7 + c_t \ln(z/z_0)] & z \geq z_{min} \\ c_e(z) = c_e(z_{min}) & z < z_{min} \end{cases} \quad (6.8)$$

Il coefficiente dinamico  $c_d$  è solitamente posto uguale all'unità per edifici di forme ricorrente oppure può essere ricavato da apposite indagini.

Un discorso completamente a parte è il coefficiente di pressione  $c_p$ . Per edilizia classica, sia l'Eurocodice che le NTC (con approfondimento nella Circolare 02/2009) forniscono schemi con i valori che il coefficiente assume a seconda della configurazione dell'edificio, la sua esposizione al vento, eventuali aperture ed inclinazione delle falde. Nel caso di geometrie non regolari come quelle in esame, la valutazione deve essere effettuata su modelli in scala con una simulazione in galleria del vento: il procedimento consiste nel dotare il modellino di sensori capaci di rilevare la velocità del vento e la pressione esercitata sulle varie parti della superficie; tramite questi valori si ricava indirettamente il valore di  $c_p$ .

Si riportano a titolo illustrativo, immagini e schemi liberamente tratti da un articolo dell'ingegner F. Rizzo, dell'Università di Pescara, pubblicato su *Open Journal of Civil Engineering* numero di Marzo 2016. Il modello creato rappresenta una struttura a pianta quadrata, con superficie a doppia curvatura; per praticità, poichè lo scopo è quello di trovare i coefficienti di pressione sulle varie zone, la superficie è rigida e il perimetro è chiuso. All'interno della "scatola" che così si crea, sotto la copertura, sono posti dei sensori per il rilevamento della pressione.



Figura 6.4: Sensori all'interno del modello e modello in opera

Dall'analisi dei dati, si ricava, a seguito di una tassellizzazione della superficie, il seguente schema:

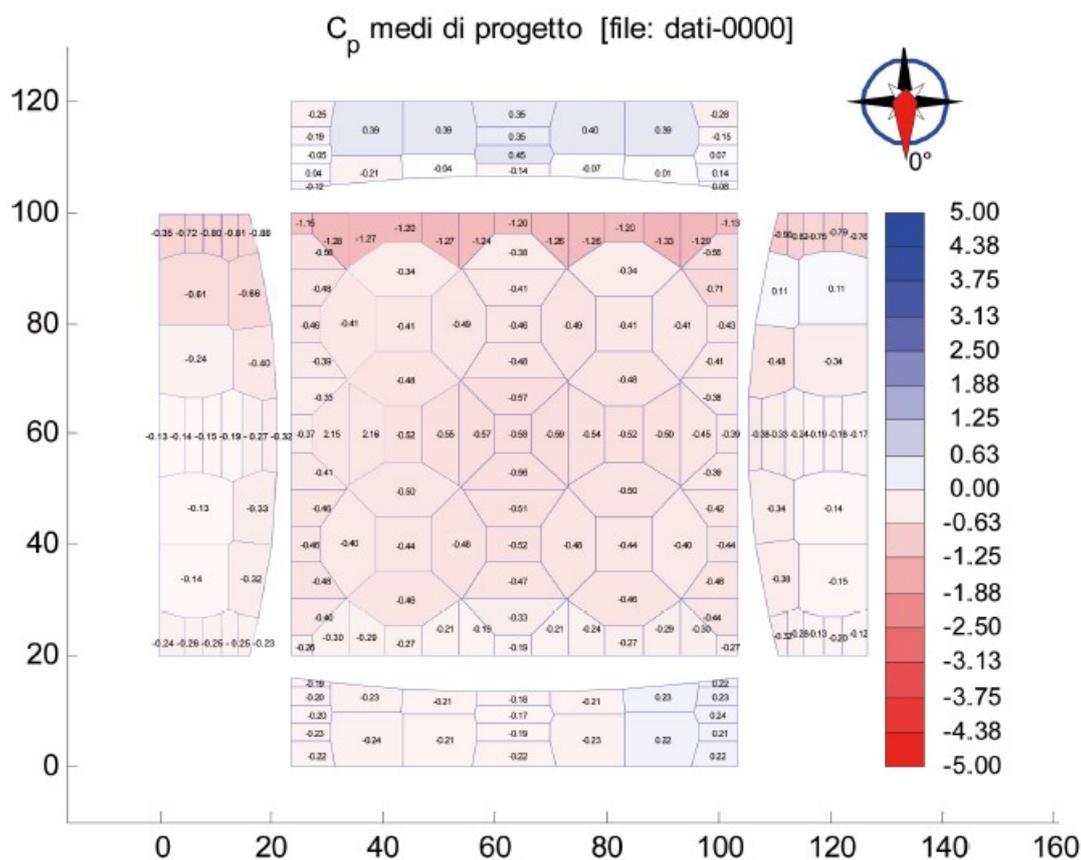


Figura 6.5: Schema dei coefficienti di pressione

Facilmente si nota come in tutta la superficie di copertura i valori di  $c_p$  sono negativi e quindi si ha un azione di sollevamento da parte del vento. Essa è inoltre più forte nella parte di struttura che per prima viene investita dalla folata e scemano man mano. Valori positivi, di pressione, si trovano sulle pareti di chiusura verticale disposte in senso ortogonale alla direzione del vento.

### 6.3 Neve

Il carico da neve rappresenta un'altra azione particolarmente gravosa a cui le membrane devono resistere. Esso deve essere modellato seguendo le linee guida dell'Eurocodice 1, parte 1-3 con riferimento agli allegati nazionali e, in questo caso, alle NTC. In generale il carico da neve diventa rilevante per strutture che si trovano a significative quote sul livello del mare, ma si applica un carico minimo anche per quote o regioni che solitamente non sono soggette ad innevamenti; in alcuni casi questo carico minimo può essere trascurato. Diverso, ovviamente, è la situazione per le tensostrutture in quanto, richiamando le stesse proprietà di leggerezza e grande deformabilità, subiscono rilevanti spostamenti e cambiamenti di forma anche per carichi da neve considerati piccoli per opere tradizionali.

Si prosegue nel fare una panoramica sulla procedura di calcolo del carico da neve e solo successivamente la sua applicazione alle tensostrutture. Come da NTC, §3.4, si può scrivere la pressione da neve come:

$$q_s = \mu_i q_{sk} C_E C_t \quad (6.9)$$

in cui:

$q_s$  è il carico da neve;

$\mu_i$  è il coefficiente di forma della copertura;

$q_{sk}$  è il valore caratteristico di riferimento del carico neve al suolo [ $kN/m^2$ ];

$C_E$  è il coefficiente di esposizione;

$C_t$  è il coefficiente termico.

Iniziando dal valore caratteristico, esso assume valori differenti a seconda della zona o regione in cui si costruisce ed in base alla quota sul livello del mare. Nelle NTC, §3.4.2, restando nell'ambito del territorio italiano, esso viene suddiviso in quattro Zone, in cui è stato valutato  $q_{sk}$  su un periodo di ritorno di 50 anni. Va richiamato il fatto che tale zonazione non può tenere conto di aspetti specifici e locali che, se necessario, dovranno essere definiti singolarmente.

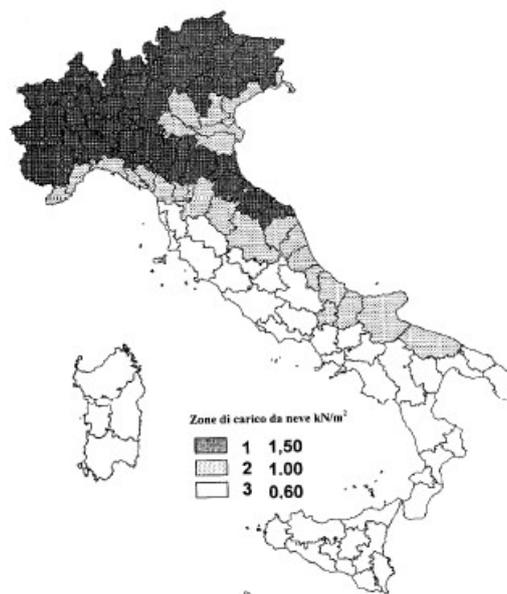


Figura 6.6: Zone di carico da neve (Figura 3.4.1, NTC §3.4.2)

Dalla figura 6.6 si nota come il territorio sia diviso sostanzialmente in zone diverse a seconda delle condizioni topografiche in cui si trova; si riscontrano infatti Zona I alpina, Zona I mediterranea, Zona II (Veneto, Liguria e riviera adriatica a partire dal sud delle Marche) e Zona III (riviera tirrenica, Salento e le isole). Una zonazione simile si trova anche nell'Eurocodice 1, seppure siano indicati dei valori leggermente differenti di carico caratteristico al suolo.

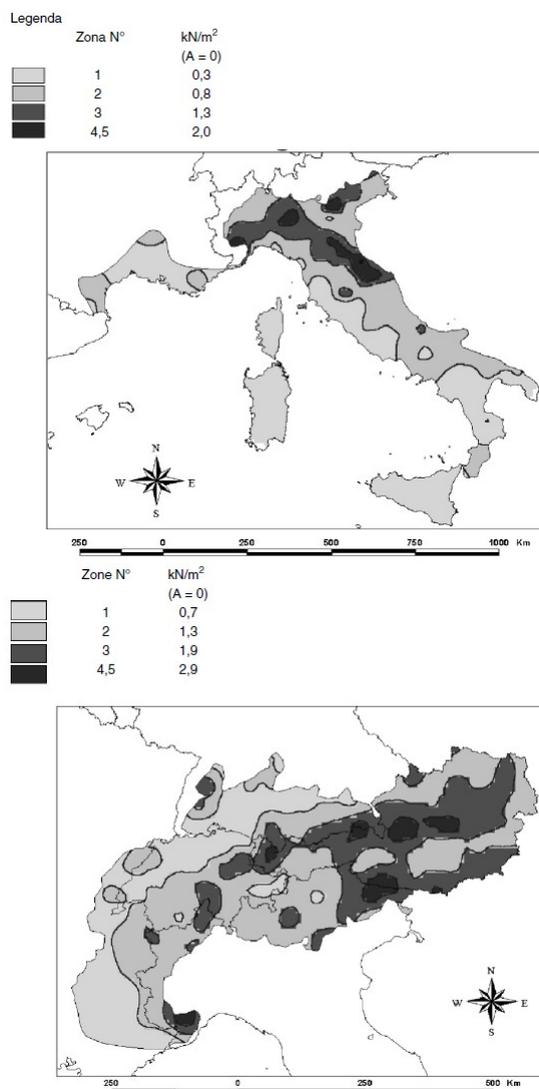


Figura 6.7: Zone di carico da neve (Figura C.6, Eurocodice 1, Appendice C)

Come in precedenza, se si considera che la struttura sia collocata nella zona di Milano ad un quota di 500 mslm, essa si troverà nella Zona I alpina in cui il valore caratteristico al suolo del carico è dato da:

$$\begin{cases} q_{sk} = 1.5 \text{ kN/m}^2 & a_s \leq 200 \text{ m} \\ q_{sk} = 1.39 [1 + (a_s/728)^2] \text{ kN/m}^2 & a_s > 200 \text{ m} \end{cases} \quad (6.10)$$

dove  $a_s$  è la quota del sito di costruzione.

Per quanto riguarda il coefficiente di esposizione  $C_E$ , esso è un indicatore del grado di esposizione, appunto, della struttura in relazione al vento. Il carico da neve infatti subisce una grande influenza dall'azione del vento: come si può intuire, coperture che sono molto esposte o che si trovano in zone molto battute dal vento subiscono meno deposito di neve poichè una parte di essa viene trasportata via semplicemente. Secondo la tabella 3.4.I delle NTC, §3.4.3, si distinguono tre differenti livelli di esposizione: topografia battuta dal vento, normale o riparata.

Topografia	Descrizione	$C_E$
Battuta dai venti	Aree pianeggianti non ostruite esposte su tutti i lati, senza costruzioni o alberi più alti.	0,9
Normale	Aree in cui non è presente una significativa rimozione di neve sulla costruzione prodotta dal vento, a causa del terreno, altre costruzioni o alberi.	1,0
Riparata	Aree in cui la costruzione considerata è sensibilmente più bassa del circostante terreno o circondata da costruzioni o alberi più alti	1,1

Tabella 6.4: Valori di  $C_E$  per diverse classi di topografia

Il coefficiente termico  $C_t$  tiene conto delle perdite di calore che la copertura ha dall'ambiente interno e del conseguente scioglimento della neve. Esso è influenzato dalle proprietà di isolamento termico del materiale utilizzato in copertura. In assenza di uno specifico e documentato studio, deve essere utilizzato  $C_t = 1$ .

### 6.3.1 Coefficiente di forma

Un caso da trattare a parte in modo un po' più approfondito è il coefficiente di forma. Esso tiene conto del profilo della copertura e dell'inclinazione che ogni parte di essa ha rispetto all'orizzontale; questo è essenziale perchè si assume che alla neve non sia impedito di scivolare. Inoltre coperture che presentano picchi e avvallamenti (è l'esatto caso di tensostrutture che si riconducono alla forma ridge and valley) possono essere soggette ad accumuli di neve nella zona bassa con un accentuamento del carico. In generale per coperture orizzontali o sub-orizzontali, si può fare riferimento alla tabella seguente (tabella 3.4.II delle NTC, §3.4.5.1):

Coefficiente di forma	$0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$	$30^\circ < \alpha < 60^\circ$	$\alpha \geq 60^\circ$
$\mu_1$	0,8	$0,8 \cdot \frac{(60 - \alpha)}{30}$	0,0

Tabella 6.5: Valori del coefficiente di forma

Si nota come il coefficiente di forma, moltiplicativo del valore caratteristico, diminuisce al crescere della pendenza della falda fino ad un valore nullo, ma non può essere preso minore di 0,8 nel caso in cui all'estremità della falda ci siano barriere o ostacoli. Un ulteriore fattore modificatore del coefficiente di forma occorre per tenere conto della presenza del vento che, come si è accennato, modifica la distribuzione della neve sulla copertura; nello schema seguente mostra i casi in assenza di vento e nei casi in cui spiri nelle due direzioni.

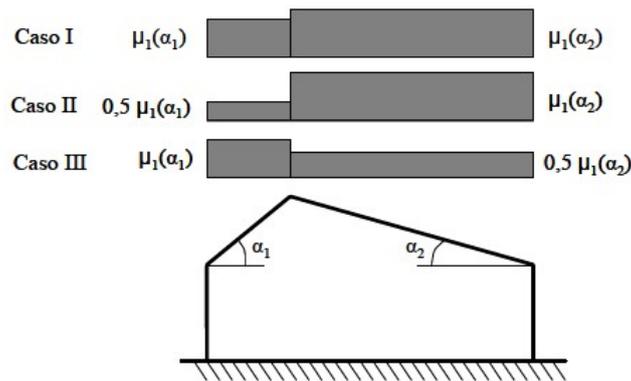


Figura 6.8: Condizioni di carico per coperture a due falde (Figura 3.4.3 delle NTC, §3.4.5.3)

Le NTC, sfortunatamente, riportano schemi per strutture a una o due falde; per trovare dettagli su coperture multifalda o cilindriche occorre fare riferimento alla Circolare esplicativa n°617 del 2009. Per coperture con avvallamenti (ridge and valley) lo schema di riferimento è il seguente:

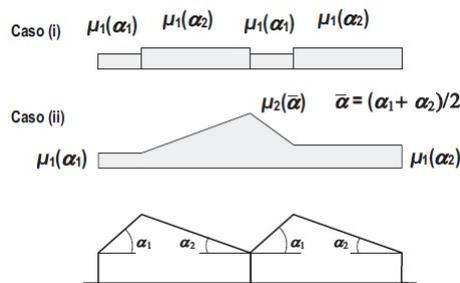


Figura 6.9: Coefficiente di forma per il carico neve – coperture a più falde (Fig. C3.4.2, Circolare NTC n°617)

in cui il caso I è in assenza di vento, il caso II in presenza di vento. Per coperture cilindriche:

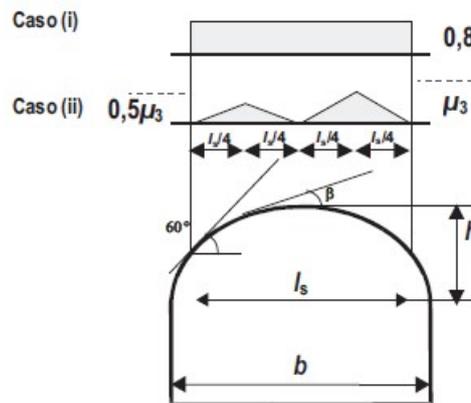


Figura 6.10: Coefficiente di forma per il carico neve – coperture cilindriche (Fig. C3.4.3, Circolare NTC n°617)

e il valore del coefficiente di forma  $\mu_3$  è dato da:

$$\begin{cases} \mu_3 = 0 & \beta > 60^\circ \\ \mu_3 = 0.2 + 10\frac{h}{b} & \beta \leq 60^\circ \end{cases} \quad (6.11)$$

## 6.4 Esempi di calcolo

Gli esempi che saranno condotti in questa sezione si baseranno su quelli seguiti nella sezione del form finding (4.2). Questo perchè l'intento qui è di seguire quasi pienamente l'iter progettuale che un designer percorre nel calcolo e nella creazione di una tensostruttura, così come descritto nell'introduzione. Quello che si è fatto in questo caso specifico è quello di prendere l'output di Matlab, caricarlo su Abaqus ed effettuare analisi agli elementi finiti. Nello specifico, dalla fase di form finding su Matlab si ricavano una matrice contenente le coordinate dei punti nella configurazione equilibrata e una matrice delle connettività che sancisce l'appartenenza dei nodi agli elementi; è stato necessario, tramite un semplice script, creare un file (estensione .inp) che contenesse queste informazioni appena descritte, in aggiunta al tipo di elementi finiti scelti per l'analisi FEM successiva. E' sufficiente far importare il file così creato da Abaqus per ottenere direttamente il modello già dotato di mesh a cui devono essere aggiunti solo le condizioni di vincolo e di carico.

### 6.4.1 Struttura hypar

Si vuole riprendere di nuovo il tipo di struttura hypar per mostrare tutta la procedura sul tipo di opera più semplice possibile. La membrana presa in considerazione ha pianta quadrata con lato 6,5 m e differenza di quota tra i punti alti e quelli bassi di 2 m, lo spessore è di 1 mm; i bordi sono stati fissati rigidi e la mesh è modellata con elementi di membrana, che hanno cioè solo rigidità membranale, non flessionale. Questi elementi sono denominati su Abaqus come M3D3 in cui la *M* sta per membrana, *3D* sta ad indicare che sono elementi tridimensionali nello spazio, l'ultimo 3 indica il numero di nodi di ogni elemento (triangolari in questo caso).

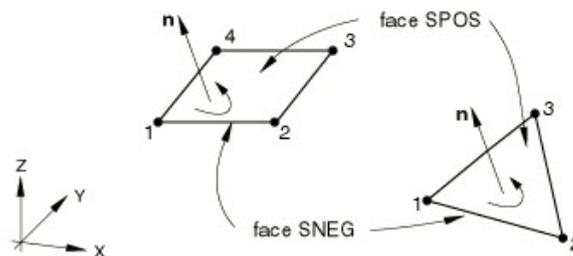


Figura 6.11: Elementi M3D3 e M3D4

Sarà riportato in allegato la spiegazione dettagliata dal manuale di Abaqus riguardante gli elementi scelti e le formule cui fanno riferimento. Il modello con le condizioni al contorno è rappresentato nella figura 6.12:

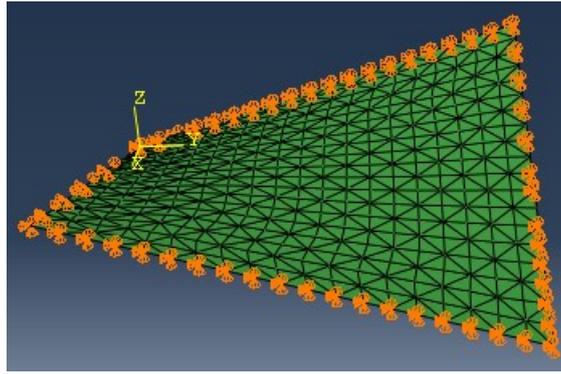


Figura 6.12: Modello Abaqus

Il materiale scelto è stato il *1202T2* della *Ferrari Architecture* che è costituito da poliestere rivestito da PVC e con rifinitura superficiale in PVDF. Ha una densità di  $1050 \text{ g/m}^3$ , modulo di elasticità  $500 \text{ kN/m}^2$  e coefficiente di Poisson  $0,4$ . La membrana è considerata monostrato e costituita da un materiale omogeneo su tutta la superficie; questo rappresenta solo un'approssimazione della realtà in quanto un vero tessuto spalmato sarebbe composto da più strati e materiali differenti. Per quanto riguarda la locazione della struttura, essa si trova in Lombardia ad un'altitudine di  $a_s = 500 \text{ m}$  in un'area aperta ma dove la presenza di ostacoli vari (alberi o altre costruzioni) non permettono una significativa rimozione della neve: secondo la tabella 6.4 il valore di  $C_E$  collegato è quindi  $1$ . L'opera ha un profilo sub-orizzontale e questo permette di assumere l'angolo di inclinazione rispetto l'orizzontale come nullo mediamente (o in ogni caso minore di  $30^\circ$ , tabella 6.5) che corrisponde ad un fattore di forma  $\mu_i = 0,8$ . Utilizzando invece le equazioni collegate alla Zona I alpina, 6.10 si ottiene come carico caratteristico da neve al suolo:

$$q_{sk} = 1.39 \left[ 1 + \left( \frac{500}{728} \right)^2 \right] = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (6.12)$$

da cui si ricava il carico da neve totale, con coefficiente termico unitario:

$$q_s = 0.8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (6.13)$$

Il carico appena calcolato viene applicato sulla membrana diretto non ortogonalmente alla superficie ma lungo l'asse  $z$  facendo riferimento alla proiezione orizzontale dell'area deformata.

Il carico da vento è leggermente più complesso: per esso infatti va considerata non una distribuzione uniforme su tutta la struttura, ma occorre eseguire una zonazione (spiegata nella sezione precedente) a seconda del profilo stesso della struttura. Per l'hypar in esame, la zonazione è quella di figura 6.13, relativa ad un vento spirante come rappresentato cioè in direzione ortogonale ad un lato della membrana senza o con piccola inclinazione.

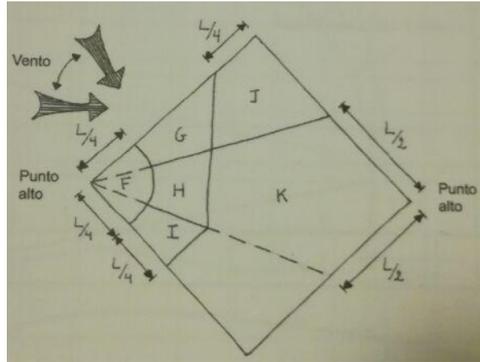


Figura 6.13: Zonazione per il coefficiente di pressione  $c_p$  (hypar)

Essa indica il grado di influenza che il vento ha sulle varie parti della membrana. Tramite un'analisi in galleria del vento, operata su un modellino rigido, si sono ricavati i seguenti coefficienti di pressione:

	F	G	H	I	J	K
$C_{p+}$ (pressione)	0	0	0.2	0	0	0.2
$C_{p-}$ (risucchio)	1.8	1.2	0.9	1.2	0.65	0.65

Tabella 6.6: Coefficienti di pressione per il caso in esame (hypar)

Con questi dati, i carichi applicati (considerati diretti anche verso l'alto cioè in sollevamento della membrana e diretti sempre ortogonalmente ad essa in ogni punto) su ogni singola zona sono:

	F	G	H	I	J	K
$q_v$ (sollevamento) [MPa]	1.0402	0.69348	0.52011	0.69348	0.37564	0.37564
$q_v$ (pressione) [MPa]	0	0	0.11558	0	0	0.11558

Tabella 6.7: Carichi da vento (risucchio)

I valori indicati in tabella 6.7 sono stati calcolati secondo la procedura spiegata nella sezione 6.2, ma si riportano comunque di seguito i valori significativi per la velocità media del vento e caratteristiche del terreno. La struttura si trova nella *Zona 1* quindi con:

$$\begin{cases} Zona-1 \\ v_{b0} = 25\text{m/s} \\ a_0 = 1000\text{m} \\ k_a = 0.01^{1/s} \end{cases} \quad (6.14)$$

da cui, con  $a_s = 500 < a_0 = 1000$  si ha, con le 6.6 e le 6.7:

$$\begin{cases} v_b = v_{b0} = 25\text{m/s} \\ q_b = \frac{\rho v_b^2}{2} = 0.39\text{MPa} \end{cases} \quad (6.15)$$

La classe di rugosità del terreno è  $A$  (aree urbane con almeno il 15% dell'area coperta da edifici alti almeno 15m) da cui si ricava una *categoria di esposizione*  $V$  con i relativi coefficienti e *coefficiente di esposizione*  $c_E$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Categoria}_V \\ k_r = 0.23 \\ z_0 = 0.7m \\ z_{min} = 12m \\ c_e(z) = c_e(z_{min}) = 1.4794 \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Assumendo un coefficiente dinamico  $c_D = 1$  e sfruttando i dati in tabella 6.6 si hanno i carichi indicati in tabella 6.7.

#### 6.4.1.1 Combinazioni di carico e risultati

Nella fase di analisi e applicazione dei carichi è importante, se non cruciale, ricordare che a causa della non linearità del problema non è possibile avvalersi del principio di sovrapposizione degli effetti e quindi è impossibile analizzare ogni carico singolarmente e poi sommarne i risultati. Essi devono necessariamente essere applicati contemporaneamente. Le combinazioni di cui si è tenuto conto sono quelle riportate anche in [12] e cioè:

1. peso proprio + pretensione;
2. peso proprio + pretensione + neve;
3. peso proprio + pretensione + vento (sollevamento);
4. peso proprio + pretensione + vento (pressione) + neve.

Tali combinazioni devono essere applicate in conformità con quanto specificato nell'Eurocodice 1 e negli allegati nazionali, ma trascurando gli effetti dei coefficienti parziali di sicurezza. Si considerano singolarmente le combinazioni di carico discutendone i risultati. Nei seguenti grafici la direzione 1 è quella lungo l'asse  $x$  (da sinistra a destra nelle figure), la direzione 2 è ortogonale alla prima.

**Combinazione 1: peso proprio e pretensione** La densità del materiale utilizzato (*12020T2* della *Ferrari Architecture*) è  $1050 \text{ g/m}^2$  che equivale ad un carico uniformemente distribuito sulla superficie pari a  $q_{pp} = 13.20 \text{ kN/m}^2$ . Per la pretensione invece si è scelto il massimo valore comunemente usato, ovvero il 6% della resistenza massima a trazione del materiale; nel caso specifico il *12020T2* ha una resistenza alla rottura di  $R_{max} = 5600 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 112000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  di conseguenza la pretensione assegnata sarà di  $\sigma = 6720 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Avviando l'analisi su Abaqus si ottengono i seguenti risultati in spostamenti e tensioni:

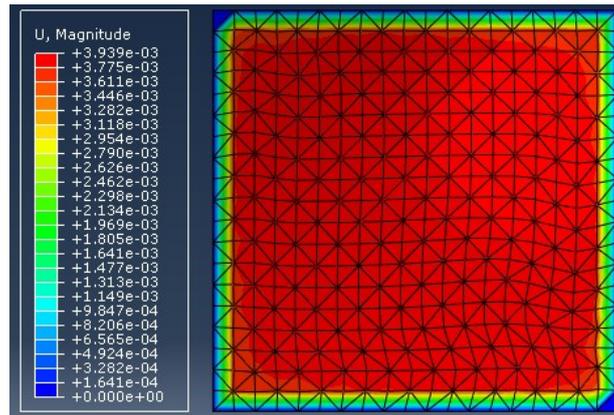


Figura 6.14: Spostamenti combinazione 1 (in millimetri)

Dalla precedente figura si trae la conferma di come il peso proprio applicato singolarmente abbia un'influenza bassissima sugli spostamenti. Il criterio di leggerezza su cui si fonda tutta l'architettura tensile è qui pienamente utilizzato. Per quanto riguarda le tensioni, si sono scelte come output quelle nella direzione x e y globalmente aspettandosi, come si è poi riscontrato, che quelle in direzione z (o fuori dal piano della membrana) siano nulle.

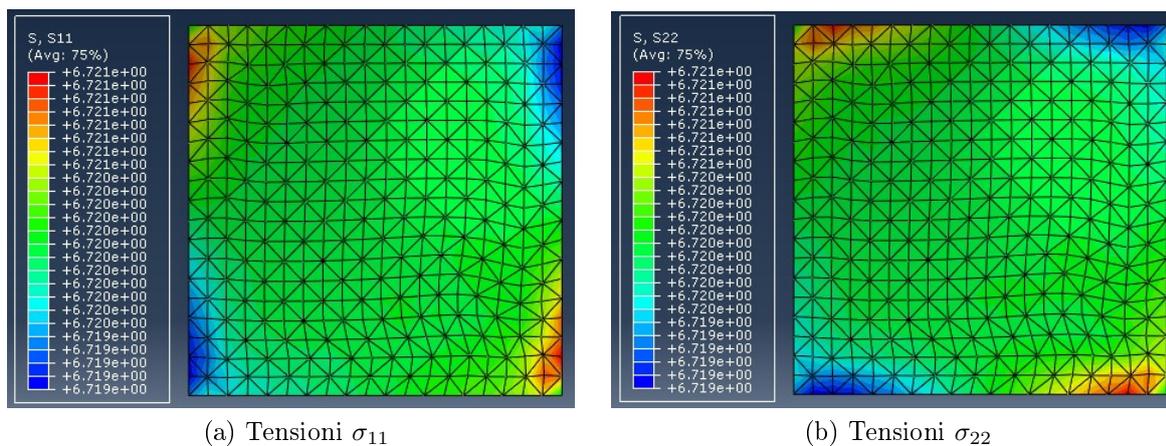


Figura 6.15: Tensioni combinazione 1 (in  $\frac{N}{mm}$ )

Nuovamente è evidente l'influenza minima del peso proprio, per nulla paragonabile alla pretensione che resta praticamente invariata.

**Combinazione 2: peso proprio, pretensione e neve** Aggiungendo il carico della neve, uguale a  $q_s = 1.6 \frac{kN}{m^2}$ , si ottengono i grafici:

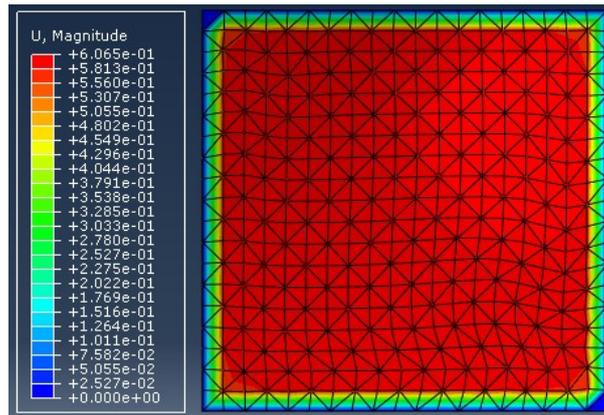
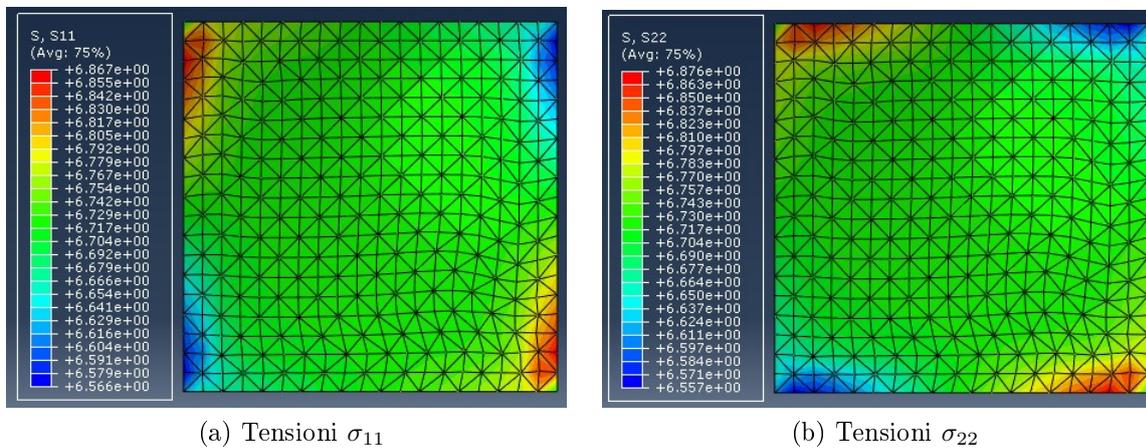


Figura 6.16: Spostamenti combinazione 2 (in millimetri)



(a) Tensioni  $\sigma_{11}$

(b) Tensioni  $\sigma_{22}$

Figura 6.17: Tensioni combinazione 2 (in  $\frac{N}{mm}$ )

E' immediato come l'aggiunta del carico da neve abbia effetti maggiori sulla membrana: lo spostamento è passato da 0.0039 mm (massimo nella combinazione 1) a 0.60 mm (massimo nella combinazione 2), cioè con un incremento di ben due ordini di grandezza. Stesso dicasi per le tensioni: per quanto siano rimaste praticamente uguali alla pretensione applicata nella maggior parte della struttura, soprattutto nella parte centrale, in corrispondenza degli angoli hanno subito una leggera ma rilevante variazione (vedi figura 6.17).

**Combinazione 3: peso proprio, pretensione e vento (sollevamento)** Il vento si è assunto spirante lungo l'asse x (da sinistra verso destra nelle figure) e le zone di carico sono le stesse definite nella sezione precedente alla figura 6.13 e con i valori alla tabella 6.7.

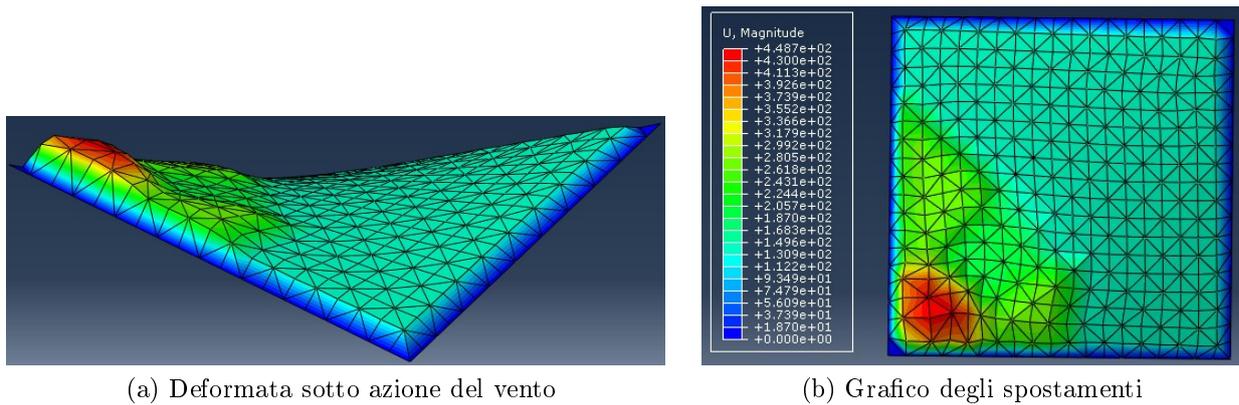


Figura 6.18: Spostamenti combinazione 3 (in  $mm$ )

Questo caso è ben diverso dagli altri due in precedenza. Innanzitutto il carico non è più applicato verso il basso, ma in questa combinazione il vento ha un'azione di sollevamento sulla membrana con effetti notevoli, infatti lo spostamento massimo, localizzato nella zona F (quella soggetta al carico massimo), è di 44 cm che va poi a decrescere fino ad assestarsi sui 13-14 cm nella zona centrale e vicino gli altri due angoli. Ciò conferma quanto detto, che il vento è il carico preponderante quando si tratta di strutture così leggere. Si precisa che per poter mostrare adeguatamente il valore dello spostamento in figura, esso è stato amplificato di un fattore pari a 1.5. Per le tensioni invece:

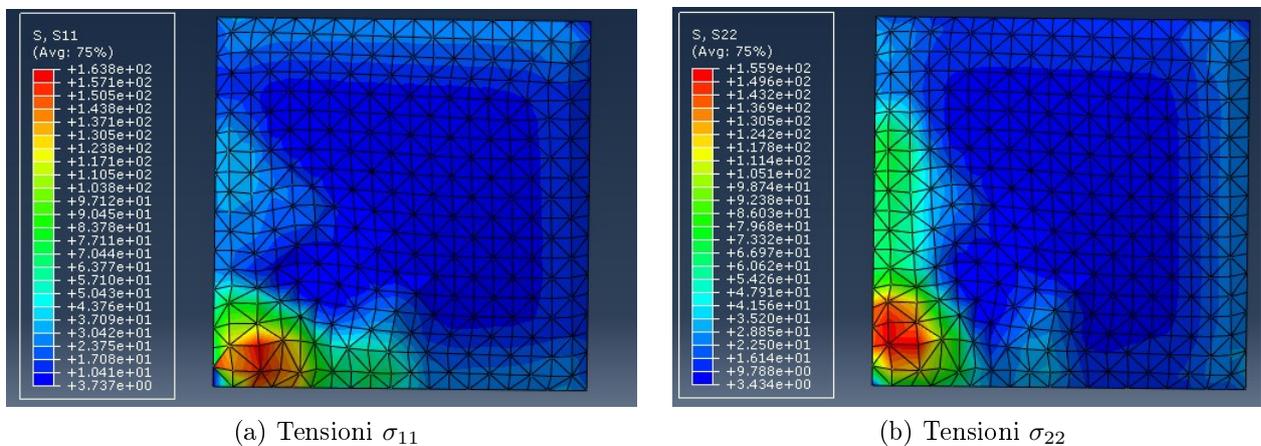


Figura 6.19: Tensioni combinazione 3 (in  $\frac{N}{mm}$ )

**Combinazione 4: peso proprio, pretensione, vento (pressione) e neve** In questa combinazione, l'azione del vento è assunta in pressione, corrispondenti ai valori in tabella 6.7. Si ottiene:

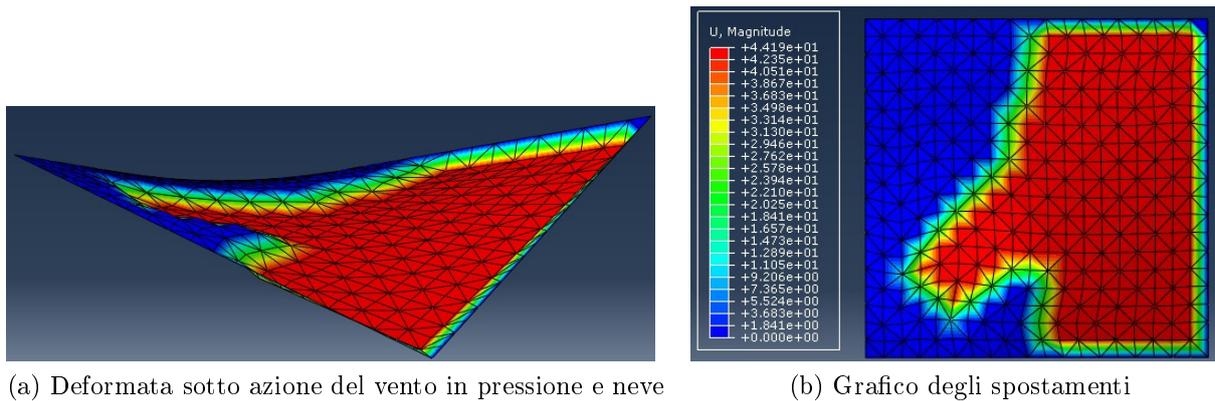


Figura 6.20: Spostamenti combinazione 4 (in  $mm$ )

Nuovamente per poter osservare lo spostamento in figura, si è applicato un fattore amplificativo di 5. Come si vede l'azione del vento in pressione e della neve ha effetti ridotti, nell'ordine di 4 cm come spostamento massimo.

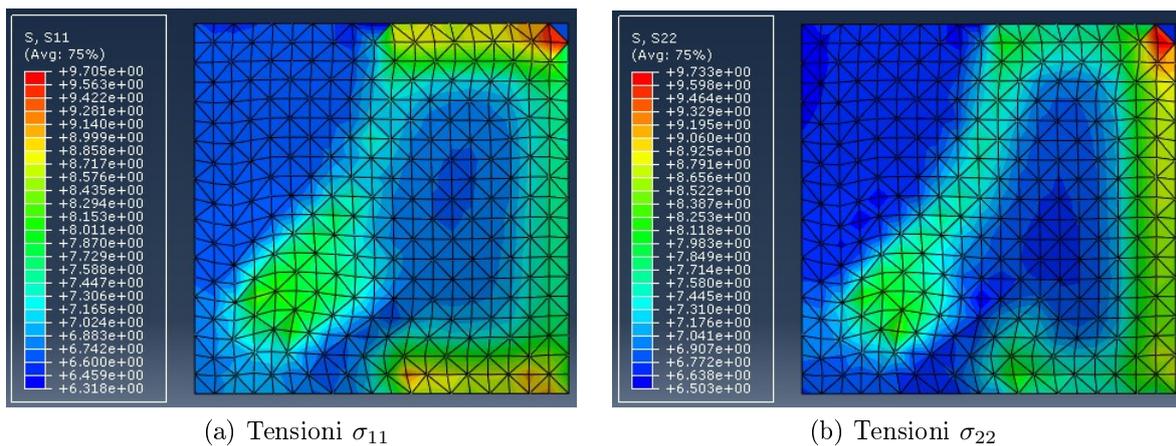


Figura 6.21: Tensioni combinazione 4 (in  $\frac{N}{mm}$ )

Come conseguenza, si hanno anche tensione non troppo differenti dalla pretesione applicata. Nelle figure 6.21 i valori massimi che sono presenti nella scala, segnati nell'angolo in alto a destra della membrana sono dovuti unicamente ad errori di computazione del programma e alla mesh non eccessivamente raffinata in quella zona.

### 6.4.2 Cono

Secondo esempio in studio è una struttura a forma di cono. Il raggio di base è di 6 m mentre quello della circonferenza superiore è di 4 m posta ad un'altezza di 5 m.

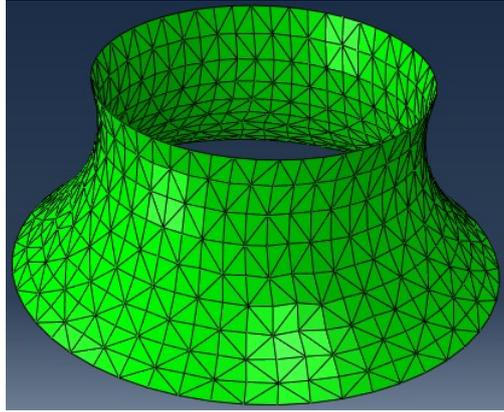


Figura 6.22: Presentazione struttura a cono

Quest'opera è assunta essere costituita dello stesso materiale di quella precedente (sez. 6.4.1) ovvero polietilene e si trova nello stesso luogo, nella regione Lombardia, nella zona di milano ad un altitudine di circa 500 mslm. Per tale ragione i valori dei carichi da neve caratteristico al suolo e della pressione cinetica del vento sono gli stessi già calcolati. Quindi:

$$\begin{cases} q_{sk} = 2 \frac{kN}{m^2} & \text{Valore\_caratteristico\_neve\_suolo} \\ q_b = \frac{\rho v_b^2}{2} = 0.39 MPa & \text{Pressione\_cinetica\_vento} \end{cases} \quad (6.17)$$

Stessa cosa dicasi per i coefficienti di esposizione al vento  $c_E = 1.4794$  (come da 6.16), per il coefficiente dinamico  $c_D = 1$  e per il coefficiente termico  $C_t = 1$ . Ciò che vi è di differente rispetto alla struttura hyper è l'area di applicazione di questi carichi: per quanto riguarda la neve, seguendo quanto si evince dalla figura 6.10 ed eq. 6.11), il coefficiente di forma  $\mu_i$  sulla membrana cambia a seconda dell'inclinazione fino ad annullarsi a  $60^\circ$ . Per trovare quale fascia di elementi finiti sia compresa in questi  $60^\circ$  basta sfruttare le coordinate dei nodi, così come sono ricavati da Matlab, ed il calcolo risulta abbastanza elementare. Si trova che i primi sei elementi a partire dalla base sono quelli che saranno soggetti al carico e, in virtù della struttura della mesh, si calcolano dei valori per il coefficiente di forma in corrispondenza dei nodi e si assume costante per tutta la fascia di elementi alla stessa altezza dalla base. Sfruttando la 6.11 (dove si è operato un semplice cambio di riferimento poichè la struttura in esame è al contrario rispetto quella in figura) si hanno i seguenti cinque coefficienti di forma:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1.78 \\ \mu_2 = 1.46 \\ \mu_3 = 1.1 \\ \mu_4 = 0.68 \\ \mu_5 = 0.2 \end{cases} \quad (6.18)$$

Si riporta lo schema delle fasce appena descritte, a sui sono associati i fattori  $\mu$ .

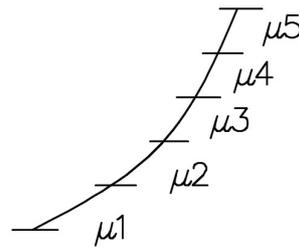


Figura 6.23: Zone di applicazione del carico da neve

I valori di carico da neve per ogni zona sono:

$$\begin{cases} q_{s1} = \mu_1 q_{sk} C_E C_t = 0.00356 MPa \\ q_{s2} = \mu_2 q_{sk} C_E C_t = 0.00292 MPa \\ q_{s3} = \mu_3 q_{sk} C_E C_t = 0.00220 MPa \\ q_{s4} = \mu_4 q_{sk} C_E C_t = 0.00136 MPa \\ q_{s5} = \mu_5 q_{sk} C_E C_t = 0.00040 MPa \end{cases} \quad (6.19)$$

Anche la zona di applicazione del vento è ovviamente diversa da quella precedente, a causa della forma del cono. Ora la zonazione trovata nella galleria del vento è:

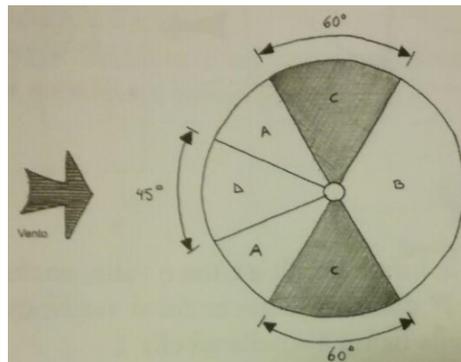


Figura 6.24: Zonazione per il coefficiente di pressione  $c_p$  (cono)

In tali aree, nel solito modo, i coefficienti di pressione valgono:

	A	B	C	D
$c_{p+}$ (pressione)	0	0	0	0.75
$c_{p-}$ (risucchio)	0.41	0.7	1	0.6

Tabella 6.8: Coefficienti di pressione per il caso in esame (cono)

da cui, sfruttando l'eq. 6.5 e le eq. 6.16 (ugualmente valide anche per il cono siccome si trova nella stessa locazione geografica dell'hypar), si hanno i seguenti carichi:

$$\begin{cases} q_{va} = -0.2369MPa \\ q_{vb} = -0.4045MPa \\ q_{vc} = -0.5779MPa \\ q_{vd} = 0.4334MPa \end{cases} \quad (6.20)$$

#### 6.4.2.1 Combinazioni di carico e risultati

Si utilizzano anche in questo caso ovviamente le stesse identiche combinazioni descritte nella sezione 6.4.1.1. I dettagli per il materiale sono gli stessi del precedente esempio e possono quindi essere ritrovati nel paragrafo “*Combinazione 1: peso proprio e pretensione*” della sezione 6.4.1.1. Nei grafici successivi la direzione 1 è quella definita localmente su ogni elemento nel senso meridiano del cono, mentre la direzione 2 è quella circonferenziale.

**Combinazione 1: peso proprio e pretensione** Gli spostamenti (fig. 6.25) sono praticamente nulli, così come ci si aspetta, e le tensioni uguali a alla pretensione applicata.

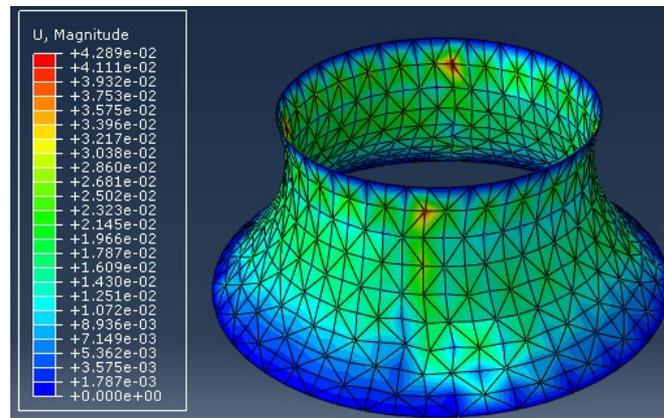
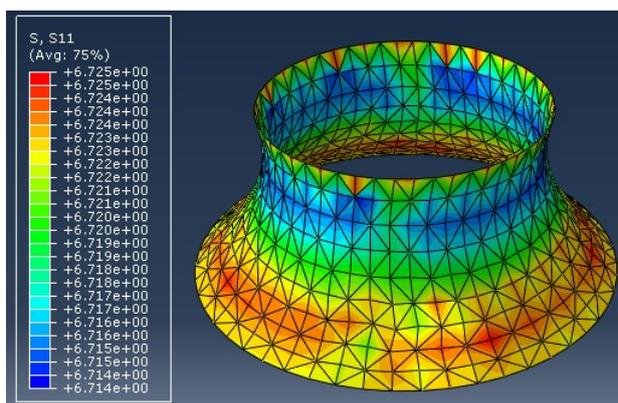
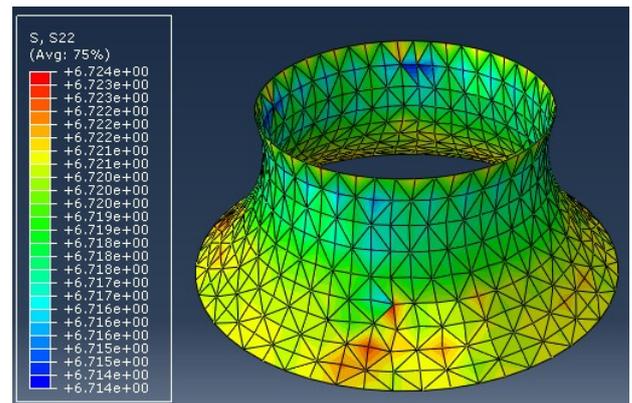


Figura 6.25: Spostamenti combinazione 1 (in millimetri)



(a) Tensioni  $\sigma_{11}$



(b) Tensioni  $\sigma_{22}$

Figura 6.26: Tensioni combinazione 1 (in  $\frac{N}{mm}$ )

**Combinazione 2: peso proprio, pretensione e neve** Applicando la neve nella fascia descritta (fig. 6.23):

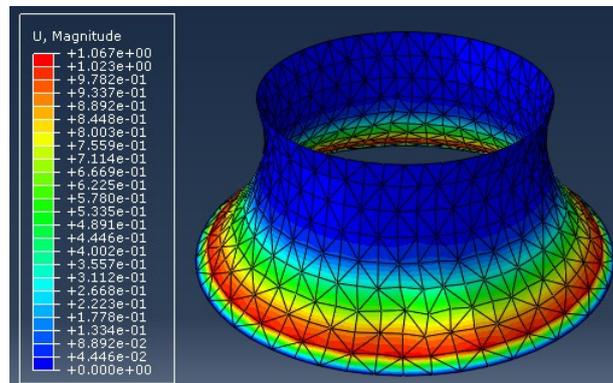
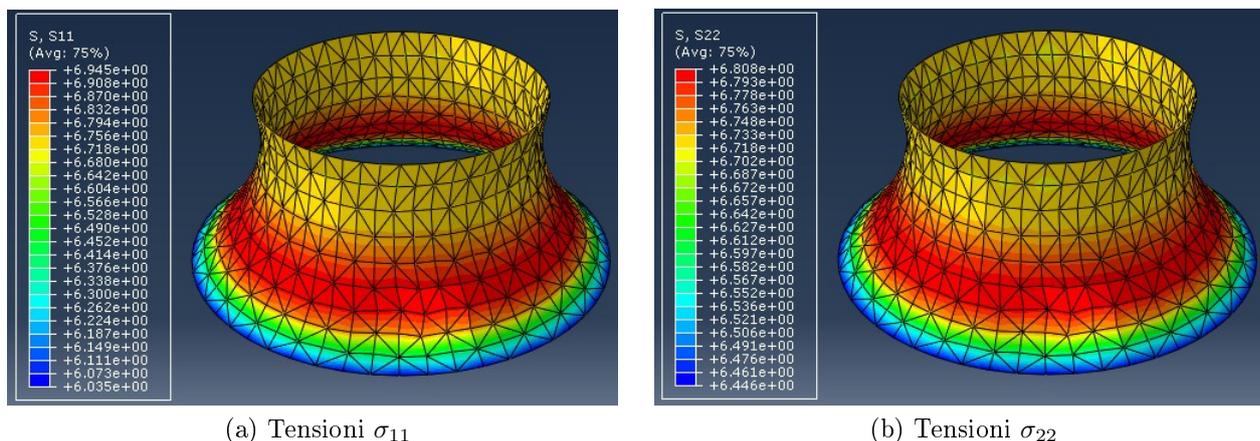


Figura 6.27: Spostamenti combinazione 2 (in millimetri)



(a) Tensioni  $\sigma_{11}$

(b) Tensioni  $\sigma_{22}$

Figura 6.28: Tensioni combinazione 2 (in  $\frac{N}{mm}$ )

L'azione della neve ha già un'influenza maggiore in termini sia di spostamenti che di tensioni, ben visibili nelle figure sopra.

**Combinazione 3: peso proprio, pretensione e vento (sollevamento)** Con i carichi in equazione 6.20:

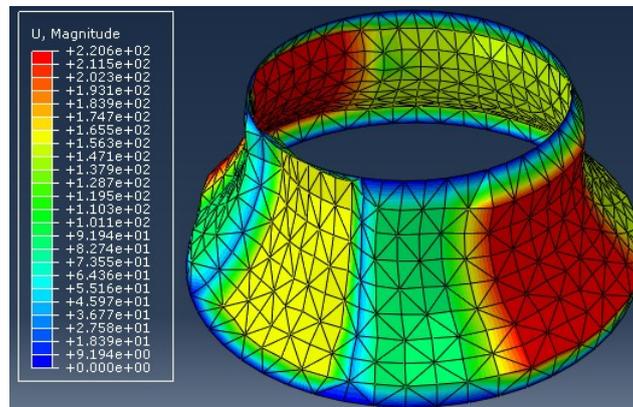
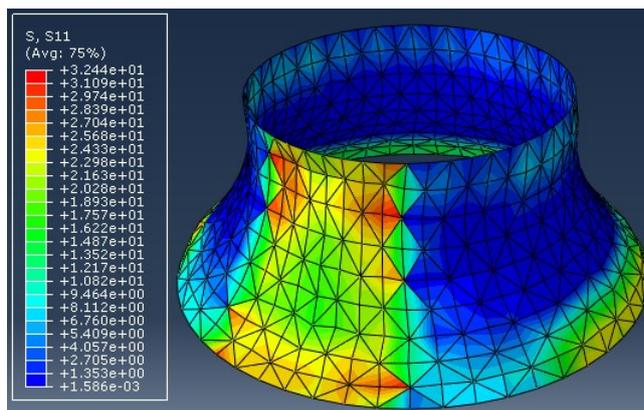
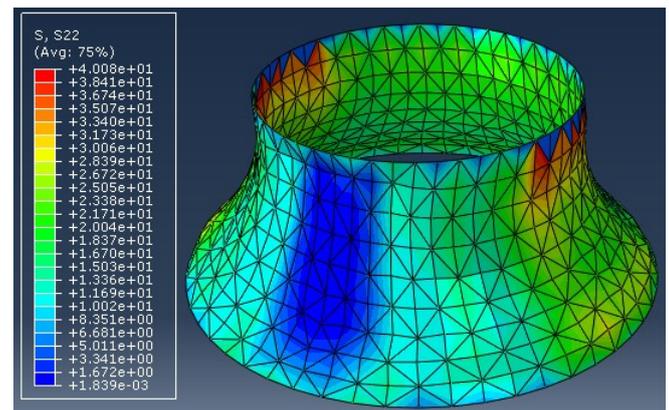


Figura 6.29: Spostamenti combinazione 3 (in millimetri)



(a) Tensioni  $\sigma_{11}$



(b) Tensioni  $\sigma_{22}$

Figura 6.30: Tensioni combinazione 3 (in  $\frac{N}{mm}$ )

In tutte le figure sopra, il punto di vista è assunto guardando nella direzione del vento, come in figura 6.24. Il vento causa spostamenti e deformazioni molto accentuate sulla membrana, si ha infatti uno spostamento massimo di 22 cm nelle zone in sollevamento e di 15-16 cm nella zona in pressione. Nel grafico delle tensioni va precisato che i valori calcolati nella parte alta della membrana sono dovuti ad errori di computazione del programma e/o ad una mesh non così raffinata.

# Capitolo 7

## Membrane a comportamento ortotropo

### 7.1 Materiali

Materiali utilizzati nella costruzione di tensostrutture sono piuttosto vari a seconda della funzione della parte che costituiscono ovviamente. Per quanto la tensostruttura riesca a sostenere i carichi tramite forze di tensione (come si intuisce dal nome), per garantire l'equilibrio sono necessari alcuni elementi che assorbano poi tali trazioni come compressioni: elementi del genere possono essere semplici pali di sostegno esterni o interni (detti anche alberi), archi o più direttamente muri o intere pareti facenti parte di edifici pre-esistenti (si parla in quel caso di un sistema combinato o misto). Per tali strumenti di scarico della sollecitazione al suolo si usano in prevalenza acciaio o altre leghe metalliche, legno, muratura o calcestruzzo. Particolari sono i materiali utilizzati per le membrane: essi sono in continua evoluzione e sotto continua sperimentazione poichè la loro struttura può essere anche abbastanza complessa da richiedere diversi strati e tessiture nella formazione di una singola membrana. Spesso utilizzati sono il pvc, ptfe (politetrafluoroetilene o teflon più comunemente), fibra di vetro, poliestere che riassumono insieme quasi tutte le proprietà prima descritte quali leggerezza, resistenza, facilità di produzione e riciclabilità/riutilizzo. Il prodotto finale derivante da questi materiali con la combinazione di vernici e laccature è detto "tessuto spalmato" in quanto è composto da un intreccio di fili (che possono essere ordinati in vari modi) immerso nelle sostanze prima elencate che fungono da protezione e contribuiscono alla resistenza finale. Tessuti tipici sono:

1. Tessuti in poliestere spalmati in PVC: il principale limite di tessuti in poliestere-PVC è legato alla trasmittanza luminosa, alla resistenza allo sporco e alla progressiva degradazione delle prestazioni (che, tuttavia, può essere migliorato sensibilmente con apposite laccature). Inoltre il loro impiego in strutture in padiglioni temporanei è ampiamente supportato dalla possibilità di riciclare il materiale riducendo l'impatto sull'ambiente. Ha un costo medio di circa  $5 \text{ EUR}/m^2$ . Una delle problematiche del poliestere è che risulta sensibile all'idrolisi poichè è un materiale organico; nel caso quindi di fori o eccessiva porosità può avvenire assorbimento di acqua all'interno dell'intreccio e causare la proliferazione di funghi e materiale organico parassita.
2. Tessuti in fibra di vetro-PTFE: questa tipologia di tessuti è considerata la più durevole nell'ambito dei tessuti per applicazioni strutturali, in particolare i tessuti in fibra di vetro-PTFE sono raccomandati per applicazioni permanenti che richiedo-

no una vita utile del prodotto superiore a i 25 anni. Il materiale, caratterizzato da un'ottima trasmittanza luminosa, combina i vantaggi della spalmatura in PTFE (politetrafluoroetilene) dall'eccellente resistenza allo sporco nel tempo, con la resistenza meccanica della fibra di vetro. Tuttavia, il costo relativamente alto del materiale ( $30 \text{ EUR}/\text{m}^2$ ) (specialmente se confrontato con i tessuti Poliestere-PVC) combinato con i costi aggiuntivi dovuti alla complessità della lavorazione e della successiva installazione dovuti alla rigidità del tessuto, riduce sensibilmente il suo impiego per progetti temporanei, dal budget contenuto o caratterizzati da una geometria complessa con una curvatura molto marcata. Per quanto riguarda la saldabilità del materiale, sebbene generalmente la termosaldatura tra due teli avviene sempre mediante l'utilizzo di un nastro di FEP (Fluoro etilene propilene), nel caso di fibra di vetro/PTFE, durante il bagno di rivestimento vi sono più passaggi a quantità crescente di FEP che rendono quindi inutile l'utilizzo del nastro in fase di saldatura.

3. Tessuti in fibra di vetro spalmati in Silicone: gli svantaggi legati alla ridotta elasticità dei tessuti in fibra di vetro-PTFE sono in buona parte risolti utilizzando una spalmatura in silicone trattata con appositi additivi. Il silicone ha una eccellente trasmittanza alla luce, è estremamente elastico ed è estremamente resistente alla radiazione UV, agli attacchi chimici e alla progressiva riduzione della elasticità. Il principale svantaggio è legato alle cariche elettrostatiche che attraggono la polvere. Inoltre, l'alto costo del materiale unito della sua lavorazione, relativamente complessa e costosa (il materiale deve essere vulcanizzato o incollato) riduce sensibilmente il suo impiego nel settore della architettura tessile.
4. Tessuti in nylon-PU (poliuretano): hanno una elevata trasmittanza alla luce e sono estremamente flessibili. A causa della ridotta resistenza a rottura, i tessuti Nylon-PU sono utilizzati esclusivamente per applicazioni di piccole dimensioni. La spalmatura in poliuretano è facile da saldare e garantisce un buon livello di tenuta all'aria nel caso di strutture pneumatiche, per questo motivo è uno dei materiali più utilizzati per strutture gonfiabili. Utilizzando un supporto in tessuto di poliestere si possono raggiungere le resistenze a rottura necessarie per applicazioni strutturali.

Materiale	Res. Ultima [-]	Modulo di elasticità [MPa]	Int. Temperatura [°C]	Vita nominale [anni]	Protezione UV
PTFE-fibra di vetro	3447,5 MPa	72397,5	min=-73 max=+232	30	Si
PVC-fibra di poliestere	200 KN/m		min=-30 max=+70	10-20	No

Tabella 7.1: Proprietà di alcuni tessuti

Sostanzialmente la scelta del materiale per il substrato (l'intreccio tra trama e ordito) e il rivestimento è influenzato oltre che dal lato economico sempre presente, anche e soprattutto dalle caratteristiche geometriche della struttura stessa e da contesto in cui essa è inserita. Membrane montate con curvature molto alte o che devono essere utilizzate su strutture mobili che cambiano configurazione sono generalmente costituite da materiali più flessibili e meno rigidi; tipici sono i tessuti in PU e in PVC, soprattutto per strutture temporanee. Il PU inoltre è flessibile alle basse temperature senza irrigidire troppo,

mantenendo proprietà simili a quelle del cuoio ed è caratterizzato da micropori che garantiscono la traspirabilità per il substrato. Occorre prestare però attenzione alla tossicità del materiale: infatti anche membrane rese ignifughe possono generare fumi tossici come monossido di carbonio e acido cianidrico.

### 7.1.1 L'intreccio

La maggior parte delle strutture a membrana è composta di tessuti intrecciati ricoperti da un mezzo di ricoprimento che ha lo scopo di proteggere la parte centrale. L'intreccio è costituito da fili a loro volta composti da fibre che possono essere naturali o artificiali. Le fibre naturali hanno una lunghezza limitata e devono essere necessariamente raggruppate in fili poichè hanno un diametro molto piccolo, nell'ordine di 5-24  $\mu m$ ; fibre artificiali sono teoricamente infinite e hanno un diametro più grande 100-500  $\mu m$ . Si specifica che pure avendo parlato di diametro, mentre per le fibre naturali la forma più ricorrente per la sezione è quella circolare, le fibre artificiali possono avere forme diverse. Le proprietà meccaniche di una fibra tanto minuta sono difficili da calcolare; per questo è comodo trovare il peso di una fibra che abbia una certa lunghezza fissata, così una volta fissata la densità è possibile stimare la dimensione media della sezione. Si parla quindi di massa lineare di una fibra indicata con il simbolo "*Tex*": si definisce 1 Tex il peso in grammi di una fibra lunga 1 km. In termini di valori, quando si tengono in considerazione fibre, 1Tex è una quantità abbastanza grande, si pensi al fatto che una fibra di poliestere ha una massa lineare di 8.35 dTex, cioè una massa di 8.35 grammi su una lunghezza di 10 km. Con elementi che sono così piccoli quindi, è molto difficile creare degli intrecci strutturalmente funzionanti e resistenti ai carichi richiesti; occorre perciò arrotolarli in fili più grandi composti da centinaia di fibre. L'arrotolamento influenza il comportamento tensione-deformazioni del filo: più il filo è torto più l'elasticità aumenta rispetto a quella della singola fibra.

Esistono diversi modi per intrecciare i fili così creati, che danno come risultati delle resistenze e comportamenti diversi del prodotto finale. Il modo più semplice consiste nel far passare un filo in "ordito" una volta sopra e una volta sotto un filo in "trama"; facendo variare poi il numero di fili impiegati e il numero di fili tenuti sopra o sotto in trama o ordito si ottengono combinazioni diverse. Degno di nota è l'intreccio Panama che consiste nel ripetere l'operazione precedente ma utilizzando più fili insieme.

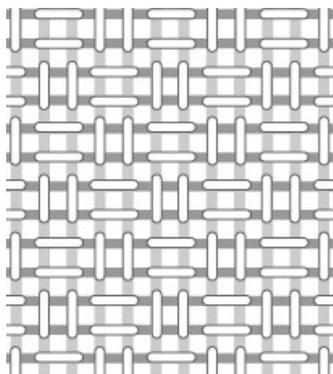


Figura 7.1: Intreccio Panama

In termini di comportamento, un tessuto intrecciato è un materiale ortotropo: infatti si riscontrano rigidità diverse a seconda della direzione che si prende in riferimento, in particolare il tessuto risulta meno rigido in direzioni intermedie tra l'ordito e la trama e si deformerà maggiormente in conseguenza. La più semplice ragione è quella di utilizzare un materiale che non è omogeneo ma, come si è detto, composto da fili che hanno quindi una direzione preferenziale.

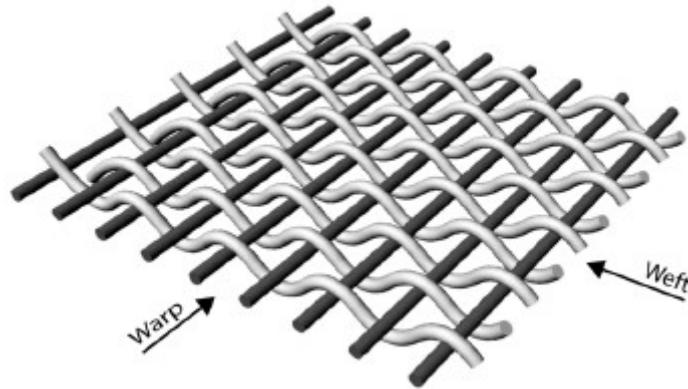


Figura 7.2: Dettaglio di un tessuto intrecciato

Come si intuisce dalla figura 7.2, tendere in una direzione o nell'altra (trama o ordito) ha effetti diversi poiché i due filati si influenzano l'un l'altro: nel caso si tenda nella direzione dell'ordito (*weft* in figura), i fili cercheranno di assumere una configurazione più rettilinea e andranno a spingere sui fili della trama in direzioni che sono ortogonali al piano.



Figura 7.3: Effetti del tensionamento dell'ordito sulla trama

Tutto ciò è dovuto unicamente alla tecnologia costitutiva l'intreccio; seguendo i passaggi industriali della tessitura, i filati in trama vengono tesi, tenuti in orizzontale, mentre i filati in ordito sono fatti passare con una spoletta sopra e sotto alternativamente, con rapporti diversi a seconda del tipo di intreccio che si vuole ottenere. Ci si aspetta quindi che i filati in ordito, non essendo tesi nella configurazione iniziale scarica, si allungano di più quando messi sotto tensione facendo di conseguenza accorciare un poco quelli in trama; la rigidità in trama è così generalmente più alta di quella in ordito e ciò si riscontra anche graficando le tensioni nelle due direzioni in funzione delle deformazioni (figura seguente).

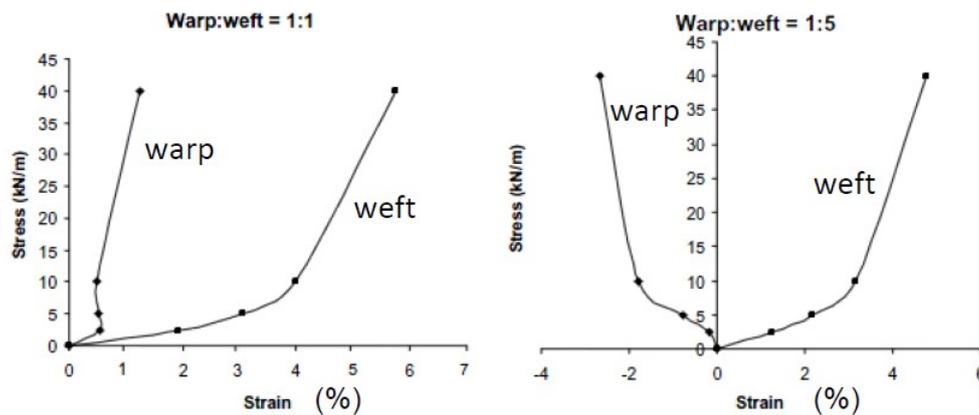


Figura 7.4: Grafici tensioni-deformazioni per rapporti diversi di tensionamento

## 7.2 Legame costitutivo ortotropo

Quanto trattato finora è riguardato unicamente membrane composte da un materiale isotropo con legame costitutivo elastico lineare; ciò è ovviamente una semplificazione della realtà poichè, come da sezione 7.1, le membrane comunemente usate non sono fogli polimerici unici, ma sono formate da più strati al cui cuore c'è un intreccio di fili tessuti. Questa disuniformità di geometria (i fili sono comunemente intrecciati ortogonalmente) causa un comportamento tutt'altro che isotropo. In questo capitolo si vuole come cambia la formulazione rimuovendo l'ipotesi di membrana isotropa, modellando un materiale ortotropo nella superficie della membrana, pur conservando un legame costitutivo elastico lineare nelle due direzioni; quest'ultima asserzione è legittima se si pensa al fatto che la modellazione matematica del reale comportamento non lineare di questi materiali è particolarmente complessa e richiede sofisticati test per la sua delineazione. Un altro motivo deriva dal modo in cui queste strutture sono operativamente impiegate: le membrane sono solitamente installate con un livello di pretensione non superiore al 6% della tensione nominale di rottura, mentre durante tutta la loro vita e l'applicazione dei carichi ci si aspettano sollecitazioni non di troppo maggiori e comunque non eccessive. Questo consente di restare nella parte del legame tensioni-deformazioni che è ancora molto vicino alla linearità (vedi figure 7.6 e 7.8).

Un aspetto importante nel processo progettuale di membrane ortotrope è la valutazione dei fattori di rigidezza biassiali del materiale, cioè la determinazione diretta della matrice di rigidezza. Ma in accordo con quanto detto subito sopra, tenendo conto dell'ipotesi di linearità, i parametri che si andranno a valutare sono le costanti elastiche classiche quali *moduli di elasticità* ( $E_1, E_2, E_3$ ), *moduli di taglio* ( $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ ) e *coefficienti di Poisson* ( $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ ). Nella sua forma più generica (cioè per un corpo tridimensionale nello spazio), la scrittura del legame costitutivo ortotropo elastico lineare è del tipo:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

dove:

$E_1, E_2, E_3$  sono i moduli di elasticità del materiale nella tre direzioni;

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  sono i moduli di taglio;

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$  sono i coefficienti di Poisson.

In generale tutti i coefficienti di Poisson sono diversi perchè appunto descrivono la deformazione trasversale che si instaura nella direzione  $j$  quando il materiale è sollecitato nella direzione  $i$ . Poichè la matrice di rigidezza deve essere simmetrica, così come anche atteso in comuni programmi di analisi, i coefficienti  $\nu_{ij}$  devono rispettare la seguente condizione:

$$\nu_{ij} = \nu_{ji} \frac{E_i}{E_j} \quad (7.2)$$

Inoltre la matrice delle rigidezze deve essere definita positiva e, imponendo i moduli di elasticità e taglio positivi, deve valere anche:

$$\nu_{ij} \cdot \nu_{ji} < 1 \quad (7.3)$$

Dalla eq. 7.2 deriva direttamente che delle dodici costanti elastiche richieste solo nove sono indipendenti.

Quando la dimensionalità del corpo in considerazione si riduce (è il caso delle membrane, che hanno una dimensione piccola rispetto le altre due) la matrice si semplifica e la valutazione di alcune costanti elastiche è superflua. Sotto condizioni di stati di sforzo piano, occorre calcolare solamente  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  (si includono anche  $G_{13}, G_{23}$  nel caso di piastre e gusci per il calcolo del taglio trasversale). La matrice quindi assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

### 7.3 Determinazione delle costanti elastiche

La valutazione dei moduli di rigidezza e dei coefficienti di Poisson si effettua sulle membrane tramite test di trazione biassiali eseguiti su provini cruciformi di dimensioni variabili a seconda dello standard a cui si fa riferimento. Questo è giustificato dal fatto che a simili strutture è possibile applicare solo sollecitazioni di trazione, ovviamente. La procedura di calcolo e impostazione delle prove ed esperimenti è spiegata in diverse *guidelines* e *standard tecnici nazionali*. Attualmente gli standard meglio più completi al mondo sono la *TensiNet European Design Guide for Tensile Surface Structures* ad opera della TensiNet, le raccomandazioni francesi, lo standard degli Stati Uniti *ASCE SEI 55-10* e quello

giapponese *MSAJ/M-02-1995*. Di seguito sono riportati i dati, la procedura e i risultati tratti da [19].

Nell'articolo si esegue la valutazione delle costanti elastiche su una membrana in poliestere rivestita in PVC, abbreviata in seguito come PES/PVC, seguendo i metodi e le indicazioni riportati nello standard giapponese (*MSAJ/M-02-1995*) e dalla guida alla progettazione della TensiNet. È bene specificare da subito le convenzioni e le unità di misura utilizzate nel seguito: poichè lo spessore del materiale utilizzato è di difficile valutazione, è stato incorporato nella stima del modulo di elasticità  $E_i t$  e delle tensioni in generale; queste ultime non avranno la dimensione classica, cioè definite su un'area, ma saranno "per unità di lunghezza", quindi  $[kN/m]$ . Le direzioni della trama dell'ordito (*warp*) e della trama (*weft/fill*) sono indicate con gli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente e il legame costitutivo sarà quindi:

$$\begin{Bmatrix} \Delta n_x \\ \Delta n_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x t & \nu_{xy} E_x t \\ \nu_{yx} E_y t & E_y t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

ricordando che i coefficienti di Poisson devono soddisfare la eq. 7.2.

### 7.3.1 Protocollo *MSAJ/M-02-1995*.

Lo standard giapponese è incentrato su un serie di test e procedure abbastanza bilanciato in quanto mira a coprire tutti i rapporti di tensioni tra trama e ordito cui le tensostrutture sono solite essere sottoposte. Questi rapporti sono indipendenti dalla forma della struttura nel senso che ogni struttura può essere soggetta ad ogni rapporto, ma alcuni di questi sono tipici di particolari forme e sistemi di carico. Cinque sono i rapporti indicati: 1:1, 2:1, 1:2, 1:0 e 0:1. Il rapporto 1:1 è tipico delle membrane di forma quadrangolare piana o sub-planare soggette a carichi esterni; i rapporti monoassiali 0:1 e 1:0 sono caratteristici di membrane dalla forma anticlastica che sono soggette a carichi da neve o da vento in sollevamento perchè sono rapporti che tengono la progettazione in vantaggio di sicurezza assumendo che tutti i fili che si accorciano si scarichino e l'intero carico è assorbito da quelli ortogonali. I rapporti biassiali 1:2 e 2:1 sono invece più frequentemente ritrovati in strutture sinclastiche (in pressione) o che abbiano poca o nulla curvatura. Durante gli esperimenti il carico massimo somministrato è fissato ad  $1/4 f_t$ , con  $f_t$  resistenza a trazione nominale in modo da tenere conto di un fattore di sicurezza globale pari a 4; tale resistenza a trazione è quella minima,  $f_{tmin}$ , tra le due direzioni, trama e ordito, che sono generalmente diverse dato il modo di tessitura dell'intreccio. La procedura prevede una storia di carico e scarico definita come segue: 2:1, 1:2, 1:0, 0:1, intervallate da tre serie di carico al rapporto 1:1 (vedi fig. 7.5).

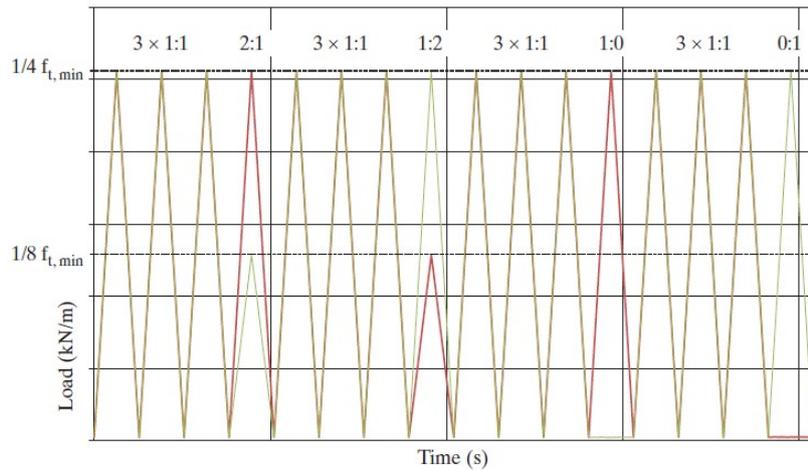


Figura 7.5: Storia di carico come prevista da MSAJ/M-02-1995

È importante notare come gli standard della MSAJ non tiene in conto della pretensione come carico minimo pre-applicato, ma impone comunque un livello minimo di tensione pari a  $1^{kN/m}$  per tessuti in fibra sintetica e  $2^{kN/m}$  per tessuti in fibra di vetro. Dalla storia di carico di figura 7.5 si possono estrarre dei grafici tensioni-deformazioni che saranno utilizzati per la determinazione delle costanti elastiche; in totale i grafici rilevabili sono dieci, due per ogni rapporto di carico (uno per la trama e uno per l'ordito). Gli unici due che non sono processati dallo standard della MSAJ sono i carichi con rapporto monoassiale 1:0 e 0:1 con la giustificazione che risulta complicato misurare accuratamente le deformazioni con un intervallo di tensioni così basso e che tali risultati sono comunque complessi da ripetere.

Recentemente, però, sono state apportate delle modifiche alla procedura giapponese poichè è stato dimostrato che le assunzioni su cui si basa il non tenere conto degli stati di carico monoassiale sono infondate: infatti Schmidt H., in un articolo non pubblicato, dimostra come la ripetibilità di test ad un intervallo basso di tensioni sia possibile e come la deviazione delle deformazioni sia accettabile. Si sono quindi instaurate delle modifiche alla procedura della MSAJ che potessero integrare questa mancanza e aggiungere casi usati specificatamente per alcuni tipi di strutture; le varianti che sono state stilate prendono il nome di *Determination Option (DO)* numerate come nella tabella seguente:

	Determination Option (DO)
1	Standard MSAJ originale: stima tramite otto grafici $\sigma - \epsilon$ . Omessi i rapporti 1:0 e 0:1
2	MSAJ modificata: stima tramite tutti e dieci i grafici $\sigma - \epsilon$
3	Modifica per strutture piane o con bassa curvatura. Rapporti usati: 1:1 e 2:1
4	DO per strutture anticlastiche, carico in ordito (warp). Rapporti usati: 1:0 e 2:1
5	DO per strutture anticlastiche, carico in trama (weft/fill). Rapporti usati: 0:1 e 1:2

Tabella 7.2: *Determination Options* usate per la valutazione dei test della MSAJ

Seppure in precedenza è stato detto che per strutture anticlastiche sotto certi carichi il rapporto tipico sia quello monoassiale 1:0 (oppure 0:1), utilizzando solo questo è possibile ottenere solo due grafici tensione-deformazione (e quindi solo due equazioni), non suffi-

cienti per la determinazioni di quattro (di cui solo tre indipendenti) costanti elastiche. Si sono così aggiunti altri due rapporti (2:1 e 1:2) per integrare le due equazioni mancanti. I test sono stati ripetuti su provini costituiti da diversi tipi dello stesso materiale (noti come Tipo II, Tipo III e Tipo IV) con rigidità crescente e perpetuati per ognuna delle DO di tabella 7.2. Un esempio è riportato nella tabella seguente:

Set No	DO	Test No IML	Material producer	Loading cycle	Elastic constants according to Eq. (3)				$\nu_{xy}\nu_{yx}$ [-]
					Tensile stiffness [kN/m]		Poisson's ratio [-]		
					$E_x t$	$E_y t$	$\nu_{xy}$	$\nu_{yx}$	
11	1	6214	1	1*	972	646	0.10	0.15	0.01 < 1
12	2	6214	1	1*	738	516	0.47	0.67	0.31 < 1
13	3	6214	1	1*	882	566	0.16	0.25	0.04 < 1
14	4	6214	1	1*	822	292	0.33	0.93	0.31 < 1
15	5	6214	1	1*	300	554	0.82	0.44	0.36 < 1
Min/Max					300/972	292/646	0.10/0.82	0.15/0.93	0.01/0.36
16	1	3514	2	1*	972	646	0	0	0
17	2	3514	2	1*	708	478	0.42	0.62	0.26 < 1
18	3	3514	2	1*	886	544	0.08	0.13	0.01 < 1
19	4	3514	2	1*	776	228	0.32	1.09	0.35 < 1
20	5	3514	2	1*	256	520	0.86	0.42	0.36 < 1
Min/Max					256/972	228/646	0/0.86	0/1.09	0/0.36

Tabella 7.3: Set di costanti elastiche stimate con test MSAJ per PES/PVC Tipo III (Uhlenmann J. [19])

Scelto arbitrariamente il Set No 11, utilizzando le rigidità misurate si vuole mostrare la correlazione tra il modello matematico e i dati sperimentali:

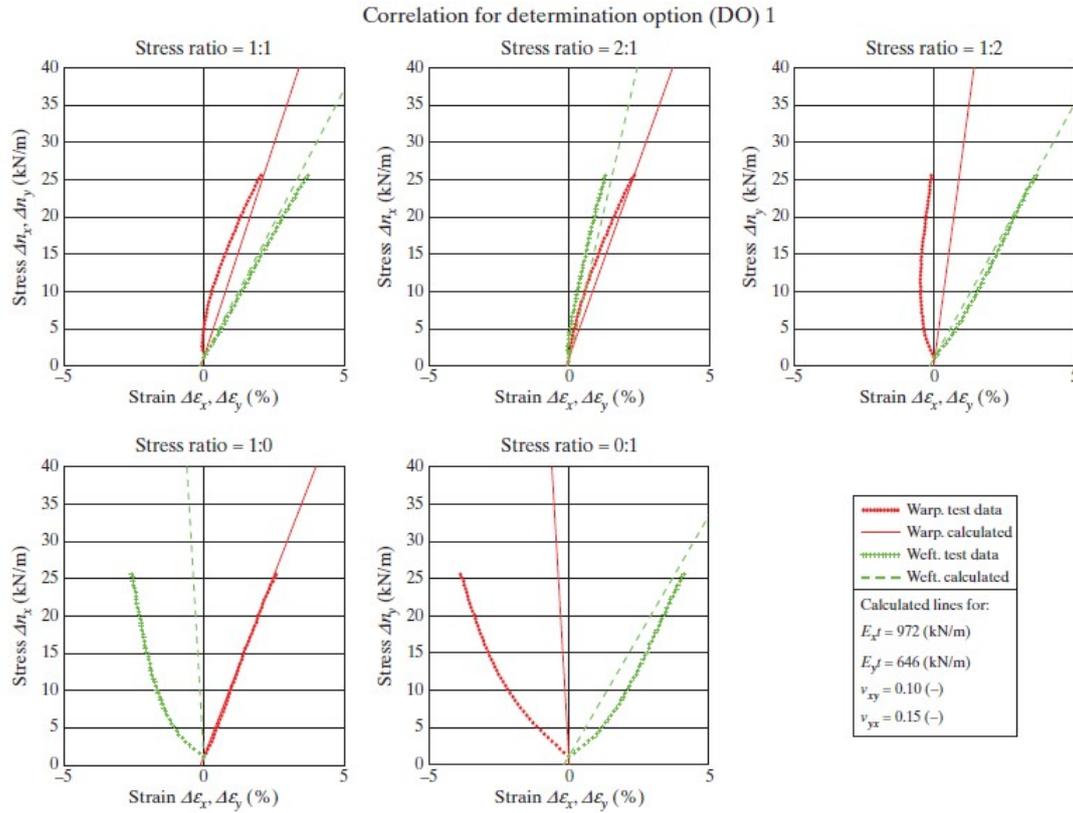


Figura 7.6: Correlazione tra dati misurati e calcolati secondo lo standard MSAJ con DO1

Studiando i grafici sopra, si nota come alcuni di questi siano ben correlati, cioè l'errore tra il dato misurato e quello calcolato sia piccolo o in ogni caso accettabile. Per altri, come quelli per il rapporto 1:0 e 0:1, l'errore è grande e non c'è grande correlazione: ciò si motiva considerando che nelle DO1 questi rapporti non erano stati usati. Tale correlazione si può migliorare impiegando le DO2, anche se di contro peggiorerebbe quella in altri rapporti. Infatti non è ragionevole voler spiegare ogni comportamento per ogni forma di struttura con un solo set di costanti elastiche, ma vanno calibrate a seconda della situazione in cui ci si trova.

### 7.3.2 Protocollo secondo TensiNet Design Guide for Tensile Surface Structures.

La procedura della TensiNet consiste in una modifica di quella descritta nel paragrafo precedente: utilizza infatti gli stessi rapporti di carico ma vengono processati in modo diverso per la valutazione finale; essa consta di una simulazione a pretensione costante assunta pari al livello minimo di tensione prescritto dallo standard della MSAJ (con rapporto 1:1) seguita da cicli di carico lungo l'ordito e poi lungo la trama. Nuovamente il massimo del carico è definito come il 25% della resistenza a trazione minima tra quelle rilevate nelle due direzioni.

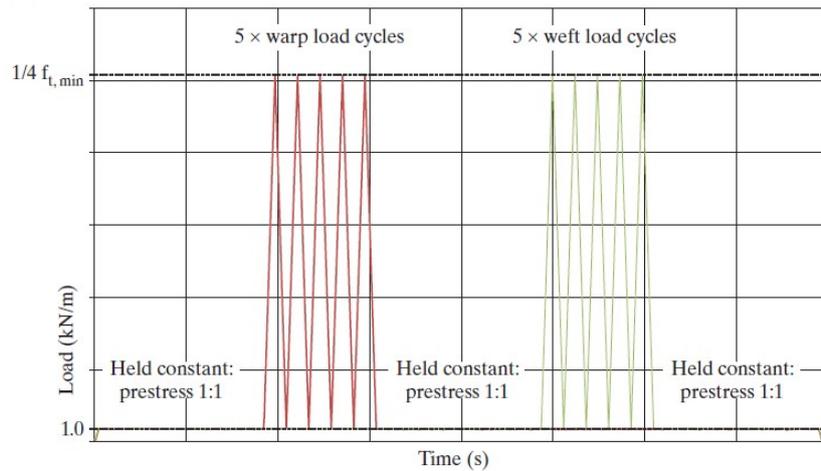


Figura 7.7: Storia di carico come prevista da TensiNet

La procedura TensiNet è basata su quattro soli grafici tensione-deformazioni: due tratti dalla prima parte della storia di carico, con il carico in ordito, e due dalla seconda parte, con il carico in trama. Da questi quattro grafici si ricavano quattro equazioni da cui valutare le costanti elastiche. Alcuni risultati sono riportati di seguito:

Set No	Test No IML	Material producer	Loading cycle	Elastic constants according to Eq. (3)				
				Tensile stiffness [kN/m]		Poisson's ratio [-]		$\nu_{xy}\nu_{yx}$ [-]
				$E_{xt}$	$E_{yt}$	$\nu_{xy}$	$\nu_{yx}$	
33	15214	1	5	1016	728	0.43	0.60	0.26 < 1
34	1514	2	5	1025	648	0.46	0.73	0.33 < 1

Tabella 7.4: Set di costanti elastiche stimate con test TensiNet per PES/PVC Tipo III (Uhlemann J. [19])

Dalle costanti del Set No 33, sono stati creati grafici tensione-deformazione con il confronto fra i dati misurati e quelli calcolati:

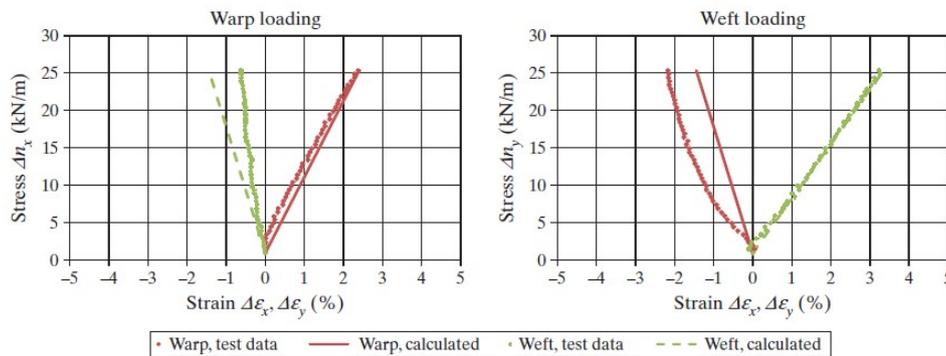


Figura 7.8: Correlazione tra dati misurati e calcolati secondo lo standard TensiNet

Un rapido confronto tra i risultati della TensiNet e della MSAJ pone immediatamente in risalto come le costanti elastiche siano dello stesso ordine di grandezza con sostanziali differenze solo nei coefficienti di Poisson.

# Capitolo 8

## Conclusioni

Come anticipato, il lavoro di tesi svolto finora ha messo a confronto diversi strumenti nelle varie fasi della realizzazione di tensostrutture. Riguardo il form finding, sono stati trattati il Force Density Method, il Surface Stress Density Method e il Dynamic Relaxation come esempi forti delle tipologie di metodi a cui si può attingere per risolvere sostanzialmente lo stesso problema. Ognuno di questi metodi ha punti di forza che lo rendono preferibile agli altri in determinate circostanze e, contemporaneamente, pecche; la scelta del metodo da utilizzare deve essere fatta con attenzione in base al tipo di struttura e delle risorse di calcolo che ci hanno a disposizione. Occorre precisare anche che questi non sono gli unici metodi disponibili per il form finding, ma ne esistono altri che tengono conto di una complessità maggiore della struttura e della membrana/rete di funi. Esempi sono il Non Linear Force Density Method o l'Updated Reference Strategy utilizzati anche come base per il form finding in alcuni programmi.

Nella fase di analisi dei carichi si è messo in risalto come essa sia leggermente diversa dalle normali coperture, dovuto semplicemente al diverso modo di rispondere delle strutture tensili. Ciò di cui si sente la mancanza è una normativa che armonizzi le linee guida che diversi Paesi e associazioni hanno creato e stanno aggiornando riguardo l'argomento. Siccome questa tipologia edilizia sta crescendo, di pari passo con lo sviluppo dei materiali, se non dipendentemente da esso, una regolamentazione di carichi, coefficienti di sicurezza e resistenze è quantomeno fondamentale. Proprio a causa della mancanza di un terreno normativo comune, si ricorda che in questo lavoro l'analisi sotto carichi esterni è stata effettuata seguendo le prescrizioni delle NTC2008 e dell'Eurocodice laddove le prime non fornivano adeguate indicazioni; si è fatto inoltre riferimento a proporzioni e dati ritrovati in letteratura [12] a proposito delle azioni da vento: essenziale è la stima dei coefficienti di pressione, da eseguire con test in galleria del vento a cui non si è potuti personalmente accedere.

Parte I  
Appendici

## Appendice A – Force Density Method

Intro .....	1
Definizione delle matrici delle coordinate e connettività .....	1
Elementi finiti .....	2
Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi .....	5
Matrice delle combinazioni - elementi a 4 nodi .....	6
Matrice Cs .....	8
Definizione condizioni al contorno .....	8
Definizione della matrice di pretensione Q (elementi a 3 e 4 nodi) .....	9
Tensione nei cavi di bordo .....	9
Definizione delle condizioni al contorno - cont .....	10
Sottomatrici C e Cf .....	11
Definizione della matrice di pretensione Q (elementi a 2 nodi) .....	11
Soluzione del sistema .....	12
Grafico 2D - elementi a 4 nodi .....	13
Grafico 2D - elementi a 3 nodi .....	13
Grafico 3D - elementi a 3 nodi .....	14
Grafico 3D - elementi a 4 nodi .....	14
Grafico 3D - elementi a 2 nodi .....	15

### Intro

Il seguente script concerne l'applicazione del Force Density Method con l'input di un file -msh generato da Gmsh.

```
clear all
close all

global coor connec
```

### Definizione delle matrici delle coordinate e connettività

Questa sezione legge il file con estensione .msh per importare la mesh in Matlab. Forma le matrici e i vettori di connettività e dei nodi.

```
[mname, pname]=ui_getfile('input\*.msh', 'Choose input file');

fid=fopen([pname mname], 'r');

if (fid== -1)
    disp('File cannot be opened')
end
```

```

%Jump the initial text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
%Read the numebr of nodes in the mesh
node_number=sscanf(tline, '%d');
%Read the nodes coordinates
for i=1:node_number,
    tline = fgets(fid);
    temp=sscanf(tline, '%d %f %f %f');
    coor(i, :)=temp(2:4);
end

for i=1:1:size(coor, 1)
    if coor(i, 3)>0 || coor(i, 3)<0
        tred=1;
        break
    else
        tred=0;
    end
end

%Jump the text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);

```

## Elementi finiti

Creazione di vettori e matrici relativi alle coordinate dei nodi e alla loro connettività a partire dalla mesh caricata.

```

temp_number=sscanf(tline, '%d');

te=menu('Quanti nodi ha ogni elemento?', '2', '3', '4');

if te==1

    l=1;
    connec_temp=zeros(temp_number, te+1);
    nodeset_number=0;
    cont=1;
    temp1=[];
    nodeset=[];
    nodeset_label=[];
    for i=1:temp_number,
        tline=fgets(fid);
        h=sscanf(tline, '%d');
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        %Gmsh file format (see the user guide for more details):
        %h(1) : element number
        %h(2) : element type (1: 2-node, 2: 3-node, 3: 4-node)
        %h(3) : number of physical entity the element belongs to
        %h(4) : number of geometrical entity the element belongs to
        %h(5) : number of mesh partition the element belongs to
    end
end

```

```

%h(6:end) : nodes belonging to the element
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%1-node point (for concentrated loads)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (h(2)==15)
    if(nodeset_number==0)
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        cont=1;
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%CST element (3-node triangle) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if(h(2)==2) || (h(2)==3) || h(2)==1
    %save the element connectivity
    connec_temp(1,:) = h(6:te+6);
    %update the counter on the number of triangles
    l=l+1;
end
end
%Save the number of CST number
element_number=l-1;
connec=connec_temp(1:element_number, 1:te+1);
clear connec_temp

n=size(coor, 1); %numero totale dei nodi
end

if te==2 || te==3
    l=1;
    connec_temp=zeros(temp_number, te+1);
    nodeset_number=0;
    cont=1;
    temp1=[];
    nodeset=[];
    nodeset_label=[];
    for i=1:temp_number,
        tline=fgets(fid);
        h=sscanf(tline, '%d');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        %Gmsh file format (see the user guide for more details):
        %h(1) : element number
        %h(2) : element type (1: 2-node, 2: 3-node, 3: 4-nodi)
        %h(3) : number of physical entity the element belongs to

```

```

%h(4) : number of geometrical entity the element belongs to
%h(5) : number of mesh partition the element belongs to
%h(6:end) : nodes belonging to the element
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% 2-node line %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (h(2)==1)
    if(nodeset_number==0)
        %update the nodeset number
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        %check the emsh partition number
        temp1=h(5);
        %save the nodes of teh element in the list of set nodes
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(7);
        cont=cont+2;
        %save the number of the node set
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        if (h(5)==temp1)
            a=0;
            b=0;
            for j=1: cont- 1
                if (h(6)==nodeset(nodeset_number, j))
                    a=1;
                end
                if (h(7)==nodeset(nodeset_number, j))
                    b=1;
                end
            end
            if (a==0)
                nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
                cont=cont+1;
            end
            if (b==0)
                nodeset(nodeset_number, cont)=h(7);
                cont=cont+1;
            end
        else
            nodeset_number=nodeset_number+1;
            temp1=h(5);
            cont=1;
            nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
            nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(7);
            cont=cont+2;
            nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%1-node point (for concentrated loads)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
elseif (h(2)==15)
    if(nodeset_number==0)
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
    end
end

```

```

        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        cont=1;
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CST element (3-node triangle) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
elseif(h(2)==2) || (h(2)==3)
    %save the element connectivity
    connec_temp(1,:) = h(6:te+6);
    %update the counter on the number of triangles
    l=l+1;
else
    disp('Reading Error')
end
end
%Save the number of CST number
element_number=l-1;
connec=connec_temp(1:element_number, 1:te+1);
clear connec_temp

n=size(coor, 1); %numero totale dei nodi
end

```

### Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi

Restituisce una matrice indicante quali nodi sono agli estremi di ogni tratto per mesh con elementi a 3 nodi.

```

if te==2
    comb=[];
    contr=1;
    conta=1;

    comb(1,1)=min(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(1,2)=max(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(2,1)=min(connec(1,1), connec(1,3));
    comb(2,2)=max(connec(1,1), connec(1,3));
    comb(3,1)=min(connec(1,3), connec(1,2));
    comb(3,2)=max(connec(1,3), connec(1,2));

    for i=2:1:size(connec,1)

        %coppia 1-2
        sz=size(comb,1);
        comb2(1,1)=min(connec(i,1), connec(i,2));
        comb2(1,2)=max(connec(i,1), connec(i,2));
        conta=1;
        a=[];
        for k=1:1:sz

```

```

        if comb2==comb(k, :)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
    if a(:)==0
        comb=[comb; comb2];
    end

%coppia 1-3
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(conhec(i, 1), conex(i, 3));
comb2(1, 2)=max(conhec(i, 1), conex(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1:1:sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

%coppia 2-3
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(conhec(i, 2), conex(i, 3));
comb2(1, 2)=max(conhec(i, 2), conex(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1:1:sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

end
end

```

### Matrice delle combinazioni - elementi a 4 nodi

Restituisce una matrice indicante quali nodi sono agli estremi di ogni tratto per mesh con elementi a 4 nodi.

```

if te==3
    comb=[];
    contr=1;
    conta=1;

    comb(1,1)=min(convec(1,1),convec(1,2));
    comb(1,2)=max(convec(1,1),convec(1,2));
    comb(2,1)=min(convec(1,2),convec(1,3));
    comb(2,2)=max(convec(1,2),convec(1,3));
    comb(3,1)=min(convec(1,1),convec(1,4));
    comb(3,2)=max(convec(1,1),convec(1,4));
    comb(4,1)=min(convec(1,3),convec(1,4));
    comb(4,2)=max(convec(1,3),convec(1,4));

for i=2:1:size(convec,1)

    %coppia 1-2
    sz=size(comb,1);
    comb2(1,1)=min(convec(i,1),convec(i,2));
    comb2(1,2)=max(convec(i,1),convec(i,2));
    conta=1;
    a=[];
    for k=1:1:sz
        if comb2==comb(k,:)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
    if a(:)==0
        comb=[comb; comb2];
    end

    %coppia 1-4
    sz=size(comb,1);
    comb2(1,1)=min(convec(i,1),convec(i,4));
    comb2(1,2)=max(convec(i,1),convec(i,4));
    conta=1;
    a=[];
    for k=1:1:sz
        if comb2==comb(k,:)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
    if a(:)==0
        comb=[comb; comb2];
    end

    %coppia 2-3
    sz=size(comb,1);
    comb2(1,1)=min(convec(i,2),convec(i,3));

```

```

comb2(1, 2)=max(connec(i, 2), connec(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1: 1: sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

%coppia 3-4
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(connec(i, 3), connec(i, 4));
comb2(1, 2)=max(connec(i, 3), connec(i, 4));
conta=1;
a=[];
for k=1: 1: sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

end
end

```

## Matrice Cs

Creazione della matrice Cs, indicante in quale nodo un tratto inizia e in quale finisce.

```

if te==2 || te==3
% nf=input('Quanti sono i nodi fissi? ');

for i=1: 1: size(comb, 1)
    CCo(i, comb(i, 1))=1;
    CCo(i, comb(i, 2))=-1;
end

```

## Definizione condizioni al contorno

```

sost=input('Numero di punti inseriti: ');

```

## Definizione della matrice di pretensione Q (elementi a 3 e 4 nodi)

Implementazione della pretensione.

```

m=size(comb, 1); %numero di tratti
w=input('Pretensione costante su ogni elemento? Sì=1 No=0 ');
if w==1
    T=input('Valore di pretensione: '); %Valore di pretensione costante per
    q=T*ones(1, m); % ogni tratto.
end
if w==0
    for i=1:1:m
        disp('numero del tratto: ');
        disp(i);
        disp(m);
        q(i)=input('Valore di pretensione tratto i: ');
    end
end
end

```

## Tensione nei cavi di bordo

```

if te==2 || te==3
for i=sost+1:1:size(nodeset, 1)
    disp('Cavo di bordo numero: ')
    disp(i - sost)
    tt=input('Tensione nel cavo di bordo: ');
    for j=1:1:size(nodeset, 2) - 1
        aa=[nodeset(i, j) nodeset(i, j + 1)];
        if aa(1)==0 || aa(2)==0
            break
        end
        if aa(1)<=sost || aa(2)<=sost
            pp=find(CCo(:, min(aa(1), aa(2)))==1);
            sp=find(CCo(:, max(aa(1), aa(2)))==1);
            for k=1:1:size(pp)
                for o=1:1:size(sp)
                    if pp(k)==sp(o)
                        ppp=pp(k);
                    end
                end
            end
            q(ppp)=tt;
        else
            pp=find(CCo(:, min(aa(1), aa(2)))==1);
            sp=find(CCo(:, max(aa(1), aa(2)))==1);
            for k=1:1:size(pp)
                for o=1:1:size(sp)
                    if pp(k)==sp(o)
                        ppp=pp(k);
                    end
                end
            end
            q(ppp)=tt;
        end
    end
end
end
end

```

```
end
Q=diag(q);
```

## Definizione delle condizioni al contorno - cont

Determinazione dei tratti rigidi.

```
tr=input('Numero di tratti rigidi: ');

conts=1;
contel=1;
contreli=1;
elim=zeros(tr, size(nodeset, 2) - 2);
if tr==0
    nf=sost;
else
    nodeset
    for i=1:1:tr
        est1=input('Label primo estremo del tratto rigido: ');
        est2=input('Label secondo estremo del tratto rigido: ');
        for j=sost+1:1:size(nodeset, 1)
            for o=2:1:size(nodeset, 2)
                if nodeset(j, o)==0
                    pf=nodeset(j, o-1);
                    break
                elseif nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
                    pf=nodeset(j, size(nodeset, 2));
                    break
                end
            end
            end
            if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))==0
                elim(contel, 1:o-3)=nodeset(j, 2:o-2);
                contel=contel+1;
                for k=1:1:size(elim, 2)
                    if elim(contreli, k)~=0
                        salv(:, conts)=CCo(:, elim(contreli, k));
                        conts=conts+1;
                    end
                end
                end
                controreli=controreli+1;
            end
            if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
                elim(contel, :) = nodeset(j, 2:size(nodeset, 2) - 1);
                contel=contel+1;
                for k=1:1:size(elim, 2)
                    salv(:, conts)=CCo(:, elim(contreli, k));
                    conts=conts+1;
                end
                end
                controreli=controreli+1;
            end
        end
    end

    elim_non_zero=[];
    for i=1:1:size(elim, 1)
        elim_non_zero=[elim_non_zero elim(i, 1:max(find(elim(i, :))))];
    end
```

```

end
CCo(:, elim_non_zero) = [];
CCo = [CCo(:, 1:sost) salv CCo(:, sost+1:end)];

end

```

## Sottomatrici C e Cf

Creazione di sottomatrici ausiliarie inerenti ai soli nodi liberi (C) e ai soli nodi vincolati (Cf).

```

if tr~=0
    nf=sost+size(elim_non_zero, 2);
else
    nf=sost;
end
C=CCo(:, nf+1:n);
Cf=CCo(:, 1:nf);
CCo=[C Cf];
m=size(CCo, 1); %numero di tratti

end

if te==1
    sost=input('Numero di punti inseriti: ');
    tr=input('Numero di tratti rigidi: ');
    connec=sort(connec, 2);
    for i=1:size(connec, 1)
        CCo(i, connec(i, 1))=1;
        CCo(i, connec(i, 2))=-1;
    end

    C=CCo(:, sost+1:n);
    Cf=CCo(:, 1:sost);
    CCo=[C Cf];

end

```

## Definizione della matrice di pretensione Q (elementi a 2 nodi)

Implementazione della pretensione per reti di funi. C'è la facoltà di inserire una pretensione diversa per ogni tratto.

```

if te==1
    m=size(CCo, 1); %numero di tratti
    w=input('Pretensione costante su ogni elemento? Si=1 No=0 ');
    if w==1
        T=input('Valore di pretensione: '); %Valore di pretensione costante
        q=T*ones(1, m); %per ogni tratto
    end
    if w==0
        for i=1:m
            disp('numero del tratto: ');
            disp(i);
            disp(m);
            q(i)=input('Valore di pretensione tratto i: ');
        end
    end
end

```

```

end
Q=diag(q);

D=C'*Q*C;
Df=C'*Q*Cf;

```

## Soluzione del sistema

```

xf=coor(1:sost, 1);
if tr~=0
for i=1:1:size(elim_non_zero, 2)
    xf=[xf(1:end); coor(elim_non_zero(i), 1)];
end
end

yf=coor(1:sost, 2);
if tr~=0
for i=1:1:size(elim_non_zero, 2)
    yf=[yf(1:end); coor(elim_non_zero(i), 2)];
end
end

zf=coor(1:sost, 3);
if tr~=0
for i=1:1:size(elim_non_zero, 2)
    zf=[zf(1:end); coor(elim_non_zero(i), 3)];
end
end
uf=[xf yf zf];

x=inv(D)*(-Df*xf);
y=inv(D)*(-Df*yf);
z=inv(D)*(-Df*zf);
uu=[x y z];
u=[uf; uu];

num=1:n;
nuf=num(1:sost);

if tr~=0
    for i=1:1:size(elim_non_zero, 2)
        nuf=[nuf(1:end) num(elim_non_zero(i))];
    end
end
num(nuf)=[];
nuu=num;

uf2=[uf nuf'];
uu2=[uu nuu'];
contnumf=1;
contnumu=1;
for i=1:1:n
    if contnumf<=size(uf2, 1)
        if uf2(contnumf, 4)==i
            u(i, 1:3)=uf2(contnumf, 1:3);
            contnumf=contnumf+1;
        end
    end
end

```

```

end
if contnumu<=size(uu2, 1)
    if uu2(contnumu, 4)==i
        u(i, 1:3)=uu2(contnumu, 1:3);
        contnumu=contnumu+1;
    end
end
end
end

```

## Grafico 2D - elementi a 4 nodi

```

if tred==0
    if te==3
        figure
        for i=1:1:size(connec, 1)
            hold on
            plot(coor(:, 1), coor(:, 2), '*')
            pl=[coor(connec(i, 2), :); coor(connec(i, 3), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            pl=[coor(connec(i, 1), :); coor(connec(i, 4), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            pl=[coor(connec(i, 1), :); coor(connec(i, 2), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            pl=[coor(connec(i, 3), :); coor(connec(i, 4), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            axis equal
        end
        for i=1:1:size(comb, 1)
            hold on
            plot(u(:, 1), u(:, 2), 'o')
            pl=[u(comb(i, 1), :); u(comb(i, 2), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'k')
            axis equal
        end
    end
end
end

```

## Grafico 2D - elementi a 3 nodi

```

if tred==0
    if te==2
        figure
        for i=1:1:size(connec, 1)
            hold on
            plot(coor(:, 1), coor(:, 2), '*')
            pl=[coor(connec(i, 2), :); coor(connec(i, 3), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            pl=[coor(connec(i, 1), :); coor(connec(i, 3), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
            pl=[coor(connec(i, 1), :); coor(connec(i, 2), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')

            plot(u(:, 1), u(:, 2), 'o')
            pl=[u(connec(i, 2), :); u(connec(i, 3), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'k')
            pl=[u(connec(i, 1), :); u(connec(i, 3), :)]';

```

```

        plot(pl(1,:), pl(2,:), 'k')
        pl=[u(connec(i,1),:); u(connec(i,2),:)]';
        plot(pl(1,:), pl(2,:), 'k')
        axis equal
    end
end
end

```

### Grafico 3D - elementi a 3 nodi

```

if tred==1
    if te==2
        figure
        for i=1:1:size(connec,1)

            plot3(coor(:,1), coor(:,2), zeros(1, size(coor,1)), '*')
            hold on
            pl=[coor(connec(i,2),:); coor(connec(i,3),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            pl=[coor(connec(i,1),:); coor(connec(i,3),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            pl=[coor(connec(i,1),:); coor(connec(i,2),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')

            plot3(u(:,1), u(:,2), u(:,3), 'o')
            pl=[u(connec(i,2),:); u(connec(i,3),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), pl(3,:), 'k')
            pl=[u(connec(i,1),:); u(connec(i,3),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), pl(3,:), 'k')
            pl=[u(connec(i,1),:); u(connec(i,2),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), pl(3,:), 'k')
            axis equal
        end
    end
end
end

```

### Grafico 3D - elementi a 4 nodi

```

if tred==1
    if te==3
        figure
        plot(coor(:,1), coor(:,2), '*')
        title('Topologi a');
        for i=1:1:size(connec,1)
            hold on
            pl=[coor(connec(i,2),:); coor(connec(i,3),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            pl=[coor(connec(i,1),:); coor(connec(i,4),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            pl=[coor(connec(i,1),:); coor(connec(i,2),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            pl=[coor(connec(i,3),:); coor(connec(i,4),:)]';
            plot3(pl(1,:), pl(2,:), [0 0], 'c')
            axis equal
        end
    end
end
figure

```

```

plot3(u(:, 1), u(:, 2), u(:, 3), 'o')
title('Configurazione equilibrata');
for i=1:1:size(comb, 1)
    hold on
    pl=[u(comb(i, 1), :); u(comb(i, 2), :)]';
    plot3(pl(1, :), pl(2, :), pl(3, :), 'k')
    axis equal
end
end
end

```

## Grafico 3D - elementi a 2 nodi

```

if tred==1
    if te==1
        figure
        plot(coor(:, 1), coor(:, 2), '*')
        title('Topologia');
        for i=1:1:size(connec, 1)
            hold on
            pl=[coor(connec(i, 1), :); coor(connec(i, 2), :)]';
            plot(pl(1, :), pl(2, :), 'c')
        end

        figure

        plot3(u(:, 1), u(:, 2), u(:, 3), 'o')
        for i=1:1:size(connec, 1)
            hold on
            pl=[u(connec(i, 1), :); u(connec(i, 2), :)]';
            plot3(pl(1, :), pl(2, :), pl(3, :), 'k')
            axis equal
            title('Configurazione equilibrata');
        end
    end
end
end

```

## Appendice B - Surface Stress Density Method

Intro .....	1
Definizione delle matrici delle coordinate e connettività .....	1
Elementi triangolari .....	2
Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi .....	4
Appartenenza dei nodi .....	5
Input dei dati .....	6
Densità di tensione .....	6
Tratti rigidi .....	6
Tensione nei cavi di bordo .....	7
Iterazioni .....	8
Criterio di convergenza .....	12
Grafici .....	13
Ricostruzione delle tensioni membrana .....	13
Ricostruzione tensioni cavi .....	14

### Intro

Il seguente script Matlab riguarda l'applicazione del Surface Stress Density Method, partendo come input da un file .msh generato da Gmesh.

```
clear all
close all

global coor connec
```

### Definizione delle matrici delle coordinate e connettività

Lettura del file .msh e creazione dei vettori delle coordinate di ogni nodo e della matrice di connettività.

```
[mname, pname]=ui_getfile('input\*.msh', 'Choose input file');

fid=fopen([pname mname], 'r');

if (fid== -1)
    disp('File cannot be opened')
end

%Jump the initial text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
```

```

%Read the numebr of nodes in the mesh
node_number=sscanf(tline, '%d');
%Read the nodes coordinates
for i=1:node_number,
    tline = fgets(fid);
    temp=sscanf(tline, '%d %f %f %f');
    coor(i, :)=temp(2:4);
end

for i=1:1:size(coor, 1)
    if coor(i, 3)>0 || coor(i, 3)<0
        tred=1;
        break
    else
        tred=0;
    end
end

%Jump the text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);

```

## Elementi triangolari

```

temp_number=sscanf(tline, '%d');
te=2;

if te==2
    l=1;
    connec_temp=zeros(temp_number, te+1);
    nodeset_number=0;
    cont=1;
    temp1=[];
    nodeset=[];
    nodeset_label=[];
    for i=1:temp_number,
        tline=fgets(fid);
        h=sscanf(tline, '%d');
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        %Gmsh file format (see the user guide for more details):
        %h(1) : element number
        %h(2) : element type (1: 2-node, 2: 3-node, 3: 4-node)
        %h(3) : number of physical entity the element belongs to
        %h(4) : number of geometrical entity the element belongs to
        %h(5) : number of mesh partition the element belongs to
        %h(6:end) : nodes belonging to the element
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        % 2-node line %
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        if (h(2)==1)
            if(nodeset_number==0)
                %update the nodeset number
                nodeset_number=nodeset_number+1;
                %check the emsh partition number
            end
        end
    end
end

```



```

%CST element (3-node triangle) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
elseif(h(2)==2) || (h(2)==3)
    %save the element connectivity
    connec_temp(1,:) = h(6:te+6);
    %update the counter on the number of triangles
    l=l+1;
else
    disp(' Reading Error')
end
end
%Save the number of CST number
element_number=l-1;
connec=connec_temp(1:element_number, 1:te+1);
clear connec_temp

n=size(coor, 1); %numero totale dei nodi
end

```

### Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi

Creazione della matrice indicante i nodi estremi di ogni tratto.

```

if te==2
    comb=[];
    contr=1;
    conta=1;

    comb(1,1)=min(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(1,2)=max(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(2,1)=min(connec(1,1), connec(1,3));
    comb(2,2)=max(connec(1,1), connec(1,3));
    comb(3,1)=min(connec(1,3), connec(1,2));
    comb(3,2)=max(connec(1,3), connec(1,2));

    for i=2:1:size(connec,1)

        %coppia 1-2
        sz=size(comb,1);
        comb2(1,1)=min(connec(i,1), connec(i,2));
        comb2(1,2)=max(connec(i,1), connec(i,2));
        conta=1;
        a=[];
        for k=1:1:sz
            if comb2==comb(k,:)
                a(conta)=1;
                conta=conta+1;
            else
                a(conta)=0;
                conta=conta+1;
            end
        end
        if a(:)==0
            comb=[comb; comb2];
        end

        %coppia 1-3
    end
end

```

```

sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(convec(i, 1), convec(i, 3));
comb2(1, 2)=max(convec(i, 1), convec(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1: 1: sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

%coppia 2-3
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(convec(i, 2), convec(i, 3));
comb2(1, 2)=max(convec(i, 2), convec(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1: 1: sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

end
end

```

## Appartenenza dei nodi

Creazione della matrice indicante i nodi appartenenti ad un determinato elemento.

```

app=zeros(n, n);
for i=1: 1: n
    prov2=[];
    for j=1: 1: 3
        prov1=find(convec(:, j)==i);
        for k=1: 1: size(prov1, 1)
            prov2(end+1)=prov1(k);
        end
    end
    app(i, 1: size(prov2, 2))=prov2;
end

```

```

for i=1:1:n
    prov1=[];
    prov1=app(:,i)==0;
    if prov1==1
        app(:,i:end)=[];
        break
    end
end
end

```

## Input dei dati

In questa sezione si chiede la segnalazione dei nodi fissi e la densità di tensione o la tensione stessa.

```

sost=input('Numero di punti fissi inseriti: ');
dens=menu('Cosa mantenere costante?', 'Sigma costante', 'Q costante');
if dens==2
    q=input('Densità di tensione sugli elementi: ');
else
    sigma0=input('Valore di tensione sigma richiesta nella membrana: ');
end
coor2=coor;
coor2(sost+1:end,3)=0; %inizializzazione della coordinata z di ogni punto.

```

## Densità di tensione

```

qsx1=zeros(size(app,1),1);
qsy1=zeros(size(app,1),1);
qsz1=zeros(size(app,1),1);

axx=zeros(size(app,1),1);
axy=zeros(size(app,1),1);
axz=zeros(size(app,1),1);
ayy=zeros(size(app,1),1);
ayz=zeros(size(app,1),1);
azz=zeros(size(app,1),1);
bx=zeros(size(app,1),1);
by=zeros(size(app,1),1);
bz=zeros(size(app,1),1);
id=eye(3);

niter=input('Numero di iterazioni: ');

```

## Tratti rigidi

```

disp(nodeset);
tr=input('Numero di tratti rigidi: ');

contel=1;
contrel=1;
elim=zeros(tr,size(nodeset,2)-2);
if tr==0
    nf=sost;
else
    for i2=1:1:tr
        est1=input('Label primo estremo del tratto rigido: ');
        est2=input('Label secondo estremo del tratto rigido: ');
    end
end

```

```

for j=sost+1:1:size(nodeset,1)
    for o=2:1:size(nodeset,2)
        if nodeset(j,o)==0
            pf=nodeset(j,o-1);
            break
        elseif nodeset(j,size(nodeset,2))~=0
            pf=nodeset(j,size(nodeset,2));
            break
        end
    end
    if nodeset(j,1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j,size(nodeset,2))==0
        elim(contel,1:o-3)=nodeset(j,2:o-2);
        contel=contel+1;
        contrel i=contrel i+1;
    end
    if nodeset(j,1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j,size(nodeset,2))~=0
        elim(contel,:)=nodeset(j,2:size(nodeset,2)-1);
        contel=contel+1;
        contrel i=contrel i+1;
    end
end
end

elim_non_zero=[];
for i2=1:1:size(elim,1)
    elim_non_zero=[elim_non_zero elim(i2,1:max(find(elim(i2,:))))];
end

for i=1:1:size(elim_non_zero,2)
    coor2(elim_non_zero(i,:))=coor(elim_non_zero(i,:));
end
plot3(coor2(:,1),coor2(:,2),coor2(:,3),'o');

```

## Tensione nei cavi di bordo

```

disp(nodeset);
trc=input('Numero di cavi di bordo: ');
if trc~=0
    if dens==2
        ql=input('Densità di forza sui cavi: ');
    else
        Fc=input('Valore di forza Fc richiesta nei cavi: ');
    end
end
pf=[];

contel=1;
contrel i=1;
elim2=zeros(trc,size(nodeset,2));

for i2=1:1:trc
    est1=input('Label primo estremo del cavo di bordo: ');
    est2=input('Label secondo estremo del cavo di bordo: ');
    for j=sost+1:1:size(nodeset,1)
        for o=2:1:size(nodeset,2)
            if nodeset(j,o)==0

```

```

        pf=nodeset(j, o-1);
        break
    elseif nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
        pf=nodeset(j, size(nodeset, 2));
        break
    end
end
if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))==0
    elim2(contel, 1:o-3)=nodeset(j, 1:o-1);
    contel=contel+1;
    controli=controli+1;
end
if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
    elim2(contel, :)=nodeset(j, 1:size(nodeset, 2));
    contel=contel+1;
    controli=controli+1;
end
end
end

cavi_bordo=[];
for i2=1:1:size(elim2, 1)
    cavi_bordo=[cavi_bordo elim2(i2, 1:max(find(elim2(i2, :))))];
end

```

## Iterazioni

```
for iter=1:1:ni ter
```

```

coor3=coor2;
for i=1:1:n
for j=1:1:size(app, 2)
if app(i, j)~=0
    prov1=connec(app(i, j), :);
    prov2=find(prov1~=i);

    xa=coor2(prov1(prov2(1)), 1);
    xb=coor2(prov1(prov2(2)), 1);
    ya=coor2(prov1(prov2(1)), 2);
    yb=coor2(prov1(prov2(2)), 2);
    za=coor2(prov1(prov2(1)), 3);
    zb=coor2(prov1(prov2(2)), 3);

    L(i, j)=sqrt((xa-xb)^2 +(ya-yb)^2 +(za-zb)^2);
    prov3=find(prov1==i);
    L1(i, j)=sqrt((coor2(prov1(prov2(1)), 1)-coor2(prov1(prov3(1)), 1))^2+...
        (coor2(prov1(prov2(1)), 2)-coor2(prov1(prov3(1)), 2))^2+...
        (coor2(prov1(prov2(1)), 3)-coor2(prov1(prov3(1)), 3))^2);
    L2(i, j)=sqrt((coor2(prov1(prov2(2)), 1)-coor2(prov1(prov3(1)), 1))^2+...
        (coor2(prov1(prov2(2)), 2)-coor2(prov1(prov3(1)), 2))^2+...
        (coor2(prov1(prov2(2)), 3)-coor2(prov1(prov3(1)), 3))^2);
    perim(i, j)=(L(i, j)+L1(i, j)+L2(i, j))/2;
    S(i, j)=sqrt(perim(i, j)*(perim(i, j)-L(i, j))*...
        (perim(i, j)-L1(i, j))*(perim(i, j)-L2(i, j)));

```

```

if dens==1
    qsx(i,j)=si gma0/S(i,j);
    qsy(i,j)=si gma0/S(i,j);
    qsz(i,j)=si gma0/S(i,j);
    if qsx(i,j)==Inf
        qsx(i,j)=50;
        qsy(i,j)=50;
        qsz(i,j)=50;
    end
else
    qsx(i,j)=q;
    qsy(i,j)=q;
    qsz(i,j)=q;
end
else
    L(i,j)=0;
    L1(i,j)=0;
    L2(i,j)=0;
    S(i,j)=0;
    qsx(i,j)=0;
    qsy(i,j)=0;
    qsz(i,j)=0;
end
end

qsx1_sum=zeros(size(app,1),1);
qsy1_sum=zeros(size(app,1),1);
qsz1_sum=zeros(size(app,1),1);
qlx1_sum=zeros(size(app,1),1);
qly1_sum=zeros(size(app,1),1);
qlz1_sum=zeros(size(app,1),1);

conv=[comb(find(comb(:,1)==i),:); comb(find(comb(:,2)==i),:)];
conv1=[];
salv=[];
contlc=1;
for o2=1:1:size(conv,1)
    for o3=1:1:2
        if conv(o2,o3)~=i
            conv1=[conv1 conv(o2,o3)];
        end
    end
end
end

if trc~=0

for o=1:1:size(conv,1)
check1=conv(o,1)==cavi_bordo;
check2=conv(o,2)==cavi_bordo;
check5=conv(o,1)==el im2;
check6=conv(o,2)==el im2;
[r5 c5]=find(check5==1);
[r6 c6]=find(check6==1);

if check1==zeros(1,size(cavi_bordo,2))
    if check2==zeros(1,size(cavi_bordo,2))
        qlx1_sum(i)=qlx1_sum(i);
    end
end

```

```

    ql y1_sum(i)=ql y1_sum(i);
    ql z1_sum(i)=ql z1_sum(i);

end
else
    if check2==zeros(1, size(cavi_bordo, 2))
        ql x1_sum(i)=ql x1_sum(i);
        ql y1_sum(i)=ql y1_sum(i);
        ql z1_sum(i)=ql z1_sum(i);
    else
for o2=1: 1: size(r5, 1)
    for o3=1: 1: size(r6, 1)
        if r5(o2)==r6(o3)
            Lc(contlc)=sqrt((coor2(conv(o, 1), 1) - coor2(conv(o, 2), 1))^2 ...
                +(coor2(conv(o, 1), 2) - coor2(conv(o, 2), 2))^2 ...
                +(coor2(conv(o, 1), 3) - coor2(conv(o, 2), 3))^2);
            contlc=contlc+1;
            salv=[salv conv(o, find(conv(o, :)~=i))];
            if dens==2
                ql x1_sum(i)=ql x1_sum(i)+ql;
                ql y1_sum(i)=ql y1_sum(i)+ql;
                ql z1_sum(i)=ql z1_sum(i)+ql;
            else
                ql x1_sum(i)=ql x1_sum(i)+Fc/Lc(contlc-1);
                ql y1_sum(i)=ql y1_sum(i)+Fc/Lc(contlc-1);
                ql z1_sum(i)=ql z1_sum(i)+Fc/Lc(contlc-1);
            end
        end
    else
        ql x1_sum(i)=ql x1_sum(i);
        ql y1_sum(i)=ql y1_sum(i);
        ql z1_sum(i)=ql z1_sum(i);
    end
end
end
end
end
end
end

for j=1: 1: size(app, 2)

    qsx1_sum(i)=(qsx1_sum(i)+qsx(i, j)*L(i, j)^2);
    qsy1_sum(i)=(qsy1_sum(i)+qsy(i, j)*L(i, j)^2);
    qsz1_sum(i)=(qsz1_sum(i)+qsz(i, j)*L(i, j)^2);
end

    for j=1: 1: size(app, 2)
        qsx1(i, j)=qsx(i, j)/(qsx1_sum(i)+ql x1_sum(i));
        qsy1(i, j)=qsy(i, j)/(qsy1_sum(i)+ql y1_sum(i));
        qsz1(i, j)=qsz(i, j)/(qsz1_sum(i)+ql z1_sum(i));
        qsx2(i, j)=qsx(i, j)/(qsx1_sum(i));
        qsy2(i, j)=qsy(i, j)/(qsy1_sum(i));
        qsz2(i, j)=qsz(i, j)/(qsz1_sum(i));
    end
end

```

```

axx=zeros(size(app, 1), 1);
axy=zeros(size(app, 1), 1);
axz=zeros(size(app, 1), 1);
ayy=zeros(size(app, 1), 1);
ayz=zeros(size(app, 1), 1);
azz=zeros(size(app, 1), 1);
bx=zeros(size(app, 1), 1);
by=zeros(size(app, 1), 1);
bz=zeros(size(app, 1), 1);
bxl=zeros(size(app, 1), 1);
byl=zeros(size(app, 1), 1);
bzl=zeros(size(app, 1), 1);
if trc~=0
    for j=1:1:size(salv, 2)
        if dens==2
            qlx1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
            qly1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
            qlz1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
        else
            ql=Fc/Lc(j);
            qlx1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
            qly1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
            qlz1=ql/(qsx1_sum(i)+qlx1_sum(i));
        end
        check4=salv(j)==cavi_bordo;
        if check4==zeros(1, size(cavi_bordo, 2))
            bxl(i)=bxl(i);
            byl(i)=byl(i);
            bzl(i)=bzl(i);
        else
            bxl(i)=bxl(i)+qlx1*coor2(salv(j), 1);
            byl(i)=byl(i)+qly1*coor2(salv(j), 2);
            bzl(i)=bzl(i)+qlz1*coor2(salv(j), 3);
        end
    end
end

for j=1:1:size(app, 2)
    if app(i, j)~=0
        prov1=connec(app(i, j), :);
        prov2=find(prov1~=i);

        xa=coor2(prov1(prov2(1)), 1);
        xb=coor2(prov1(prov2(2)), 1);
        ya=coor2(prov1(prov2(1)), 2);
        yb=coor2(prov1(prov2(2)), 2);
        za=coor2(prov1(prov2(1)), 3);
        zb=coor2(prov1(prov2(2)), 3);

        axx(i)=axx(i)+qsx1(i, j)*(xa-xb)^2;
        axy(i)=axy(i)+qsy1(i, j)*(xb-xa)*(yb-ya);
        axz(i)=axz(i)+qsx1(i, j)*(xb-xa)*(zb-za);
        ayy(i)=ayy(i)+qsy1(i, j)*(ya-yb)^2;
        ayz(i)=ayz(i)+qsx1(i, j)*(yb-ya)*(zb-za);
        azz(i)=azz(i)+qsx1(i, j)*(za-zb)^2;
        bx(i)=bx(i)+qsx1(i, j)*((ya-yb)*...

```

```

        (xb*ya-xa*yb)+(za-zb)*(xb*za-xa*zb));
    by(i)=by(i)+qsy1(i,j)*((xa-xb)*...
        (xa*yb-xb*ya)+(za-zb)*(yb*za-ya*zb));
    bz(i)=bz(i)+qs1(i,j)*((xa-xb)*...
        (xa*zb-xb*za)+(ya-yb)*(ya*zb-yb*za));

    end
end

if trc~=0
    check3=i==cavi_bordo;
    if check3==zeros(1, si ze(cavi_bordo, 2))
        bx1(i)=bx(i);
        by1(i)=by(i);
        bz1(i)=bz(i);
    else
        bx1(i)=bx(i)+bx1(i);
        by1(i)=by(i)+by1(i);
        bz1(i)=bz(i)+bz1(i);
    end
end
if trc==0
    bx1(i)=bx(i);
    by1(i)=by(i);
    bz1(i)=bz(i);
end

A=[axx(i) axy(i) axz(i); axy(i) ayy(i) ayz(i); axz(i) ayz(i) azz(i)];
B=[bx1(i); by1(i); bz1(i)];
if i>sost
    uc2=(i d-A)\B;
end

flag2=0;
if tr~=0
    if i>sost
        for j3=1:1: size(elim_non_zero, 2)
            flag(j3)=i~=elim_non_zero(j3);
        end
        if flag==1
            coor2(i,:)=uc2';
        else
            flag2=1;
        end
    end
end
if trc~=0 && flag2==0 && i>sost
    coor2(i,:)=uc2';
end

end
end

```

### Critero di convergenza

Il criterio di convergenza usato si basa sul confronto degli spostamenti massimi di una iterazione con quelli dell'iterazione precedente.

```

if iter==1
    uc_precedente=coor;
    uc_attuale=coor2;

    if max(max(abs(uc_precedente-uc_attuale))<0.0001
        break
    end
else
    uc_precedente=coor3;
    uc_attuale=coor2;
    if max(max(abs(uc_precedente-uc_attuale))<0.001
        break
    end
end
end

```

```
end
```

## Grafici

```

uc2=coor2;

figure
for i=1:1:size(connec,1)
    plot3(uc2(:,1),uc2(:,2),uc2(:,3),'.')
    hold on
    pl=[uc2(connec(i,2),:);uc2(connec(i,3),:)]';
    plot3(pl(1,:),pl(2,:),pl(3,),'k')
    pl=[uc2(connec(i,1),:);uc2(connec(i,3),:)]';
    plot3(pl(1,:),pl(2,:),pl(3,),'k')
    pl=[uc2(connec(i,1),:);uc2(connec(i,2),:)]';
    plot3(pl(1,:),pl(2,:),pl(3,),'k')
    axis equal
end

figure
for i=1:1:size(connec,1)
    X_plot=[uc2(connec(i,1),1)uc2(connec(i,2),1)uc2(connec(i,3),1)];
    Y_plot=[uc2(connec(i,1),2)uc2(connec(i,2),2)uc2(connec(i,3),2)];
    Z_plot=[uc2(connec(i,1),3)uc2(connec(i,2),3)uc2(connec(i,3),3)];
    patch(X_plot,Y_plot,Z_plot,'b');
    hold on
end
disp(' iterazioni ')
disp(iter)

```

## Ricostruzione delle tensioni membrana

Questa parte non è strettamente legata al SSDM, ma è la sola ricostruzione delle tensioni nella membrana e successivamente nei cavi. Questi valori non sono stati usati, poichè l'analisi si è effettuata su Abaqus.

```

if dens==2

for i=1:1:n
for j=1:1:size(app,2)
if app(i,j)~=0
    prov1=connec(app(i,j),:);

```

```

prov2=find(prov1~=i);

xa=coor2(prov1(prov2(1)), 1);
xb=coor2(prov1(prov2(2)), 1);
ya=coor2(prov1(prov2(1)), 2);
yb=coor2(prov1(prov2(2)), 2);
za=coor2(prov1(prov2(1)), 3);
zb=coor2(prov1(prov2(2)), 3);

L(i, j)=sqrt((xa-xb)^2+(ya-yb)^2+(za-zb)^2);
prov3=find(prov1==i);
L1(i, j)=sqrt((coor2(prov1(prov2(1)), 1)-coor2(prov1(prov3(1)), 1))^2+...
(coor2(prov1(prov2(1)), 2)-coor2(prov1(prov3(1)), 2))^2+...
(coor2(prov1(prov2(1)), 3)-coor2(prov1(prov3(1)), 3))^2);
L2(i, j)=sqrt((coor2(prov1(prov2(2)), 1)-coor2(prov1(prov3(1)), 1))^2+...
(coor2(prov1(prov2(2)), 2)-coor2(prov1(prov3(1)), 2))^2+...
(coor2(prov1(prov2(2)), 3)-coor2(prov1(prov3(1)), 3))^2);
perim(i, j)=(L(i, j)+L1(i, j)+L2(i, j))/2;
S(i, j)=sqrt(perim(i, j)*(perim(i, j)-L(i, j))*(perim(i, j)-L1(i, j))*...
(perim(i, j)-L2(i, j)));

else
L(i, j)=0;
L1(i, j)=0;
L2(i, j)=0;
S(i, j)=0;
qsx(i, j)=0;
qsy(i, j)=0;
qsz(i, j)=0;
end
end
end

tensm1=S*q;
nel em=size(convec, 1);

for i=1:1:nel em
[appx appy]=find(app==i);
tensm(i)=tensm1(appx(1), appy(1));
end
tensm=tensm';

```

## Ricostruzione tensioni cavi

```

if trc~=0
for i=1:1:size(elim2, 1)
for j=2:1:size(elim2, 2)
Lcavi(i, j-1)=sqrt((uc2(elim2(i, j), 1)-uc2(elim2(i, j-1), 1))^2 ...
+(uc2(elim2(i, j), 2)-uc2(elim2(i, j-1), 2))^2 ...
+(uc2(elim2(i, j), 3)-uc2(elim2(i, j-1), 3))^2);
end
end

Fcavi=Lcavi*q1;

```

```
for i=1:1:size(Fcavi,1)
    Fcavi_medi a(i)=sum(Fcavi(i,:))/length(Fcavi);
end
end
tensm_medi a=sum(tensm)/length(tensm);
```

```
end
```

# Appendice C – Dynamic Relaxation Method

Intro .....	1
Definizione delle matrici delle coordinate e connettività .....	1
Elementi finiti .....	2
Tolleranza .....	5
Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi .....	5
Matrice delle combinazioni - elementi a 4 nodi .....	7
Parametri del problema .....	8
Tratti rigidi .....	9
Adattamento .....	9
Inizializzazione vettore dei carichi nodali .....	10
Lunghezze iniziali (t=0) .....	10
Inizio iterazione - definizione proprietà tempo t1 .....	10
Matrice delle masse .....	10
Velocità iniziale .....	12
Smorzamento (critico) .....	12
Pretensione nei tratti .....	12
Forze residue .....	12
Soluzione dell'iterazione i-esima .....	13
Ricostruzione delle coordinate .....	14
Ridefinizione parametri a tempo t1 per l'iterazione successiva .....	14
Grafici .....	15

## Intro

Il seguente script riguarda il Dynamic Relaxation Method che utilizza come input un file .msh generato da Gmsh.

```
clear all
close all
global coor connec

E=1;
A=1;
t=1;
iter=1;
```

## Definizione delle matrici delle coordinate e connettività

Letture del file .msh e creazione dei vettori delle coordinate di ogni nodo e della matrice di connettività.

```

[mname, pname]=uigetfile('input\*.msh', 'Choose input file');

fid=fopen([pname mname], 'r');

if (fid==-1)
    disp('File cannot be opened')
end

%Jump the initial text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);

%Read the numebr of nodes in the mesh
node_number=sscanf(tline, '%d');
%Read the nodes coordinates
for i=1:node_number,
    tline = fgets(fid);
    temp=sscanf(tline, '%d %f %f %f');
    coor(i, :)=temp(2:4);
end

for i=1:1:size(coor, 1)
    if coor(i, 3)>0 || coor(i, 3)<0
        tred=1;
        break
    else
        tred=0;
    end
end

%Jump the text rows
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);
tline=fgets(fid);

```

## Elementi finiti

Creazione di vettori e matrici relativi alle coordinate dei nodi e alla loro connettività a partire dalla mesh caricata.

```

temp_number=sscanf(tline, '%d');

te=menu('Quanti nodi ha ogni elemento?', '2', '3', '4');

if te==1

    l=1;
    connec_temp=zeros(temp_number, te+1);
    nodeset_number=0;
    cont=1;
    temp1=[];
    nodeset=[];
    nodeset_label=[];
    for i=1:temp_number,
        tline=fgets(fid);

```

```

h=sscanf(tline, '%d' );
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Gmsh file format (see the user guide for more details):
%h(1) : element number
%h(2) : element type (1: 2-node, 2: 3-node, 3: 4-node)
%h(3) : number of physical entity the element belongs to
%h(4) : number of geometrical entity the element belongs to
%h(5) : number of mesh partition the element belongs to
%h(6:end) : nodes belonging to the element
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%1-node point (for concentrated loads)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (h(2)==15)
    if(nodeset_number==0)
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        cont=1;
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CST element (3-node triangle) %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if(h(2)==2) || (h(2)==3) || h(2)==1
    %save the element connectivity
    connec_temp(1, :)=h(6:te+6);
    %update the counter on the number of triangles
    l=l+1;
end
end
%Save the number of CST number
element_number=l-1;
connec=connec_temp(1:element_number, 1:te+1);
clear connec_temp

n=size(coor, 1); %numero totale dei nodi
end

if te==2 || te==3
    l=1;
    connec_temp=zeros(temp_number, te+1);
    nodeset_number=0;
    cont=1;
    temp1=[];
    nodeset=[];
    nodeset_label=[];
    for i=1:temp_number,

```

```

tline=fgets(fid);
h=sscanf(tline, '%d');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Gmsh file format (see the user guide for more details):
%h(1) : element number
%h(2) : element type (1: 2-node, 2: 3-node, 3: 4-node)
%h(3) : number of physical entity the element belongs to
%h(4) : number of geometrical entity the element belongs to
%h(5) : number of mesh partition the element belongs to
%h(6:end) : nodes belonging to the element
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2-node line %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (h(2)==1)
    if(nodeset_number==0)
        %update the nodeset number
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        %check the emsh partition number
        temp1=h(5);
        %save the nodes of teh element in the list of set nodes
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(7);
        cont=cont+2;
        %save the number of the node set
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        if (h(5)==temp1)
            a=0;
            b=0;
            for j=1: cont- 1
                if (h(6)==nodeset(nodeset_number, j))
                    a=1;
                end
                if (h(7)==nodeset(nodeset_number, j))
                    b=1;
                end
            end
            if (a==0)
                nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
                cont=cont+1;
            end
            if (b==0)
                nodeset(nodeset_number, cont)=h(7);
                cont=cont+1;
            end
        else
            nodeset_number=nodeset_number+1;
            temp1=h(5);
            cont=1;
            nodeset(nodeset_number, cont)=h(6);
            nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(7);
            cont=cont+2;
            nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%1-node point (for concentrated loads)

```

```

% CST element (3-node triangle) %
elseif (h(2)==15)
    if (nodeset_number==0)
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    else
        nodeset_number=nodeset_number+1;
        temp1=h(5);
        cont=1;
        nodeset(nodeset_number, cont)=h(5);
        nodeset(nodeset_number, cont+1)=h(6);
        cont=cont+1;
        nodeset_label(nodeset_number)=h(4);
    end
end
% CST element (3-node triangle) %
elseif (h(2)==2) || (h(2)==3)
    %save the element connectivity
    connec_temp(1, :)=h(6:te+6);
    %update the counter on the number of triangles
    l=l+1;
else
    disp(' Reading Error')
end
end
%Save the number of CST number
element_number=l-1;
connec=connec_temp(1:element_number, 1:te+1);
clear connec_temp

n=size(coor, 1); %numero totale dei nodi
end

```

## Tolleranza

Definizione della tolleranza sull'energia cinetica e il numero di iterazioni massimo.

```

tol(1:n)=10;
val_tol=1*10^(-8);
max_iter=1000;

```

## Matrice delle combinazioni - elementi a 3 nodi

Restituisce una matrice indicante quali nodi sono agli estremi di ogni tratto per mesh con elementi a 3 nodi.

```

if te==2
    comb=[];
    contr=1;
    conta=1;

    comb(1,1)=min(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(1,2)=max(connec(1,1), connec(1,2));

```

```
comb(2, 1)=min(connec(1, 1), connec(1, 3));
comb(2, 2)=max(connec(1, 1), connec(1, 3));
comb(3, 1)=min(connec(1, 3), connec(1, 2));
comb(3, 2)=max(connec(1, 3), connec(1, 2));
```

```
for i=2: 1: size(connec, 1)
```

```
    %coppia 1-2
```

```
    sz=size(comb, 1);
    comb2(1, 1)=min(connec(i, 1), connec(i, 2));
    comb2(1, 2)=max(connec(i, 1), connec(i, 2));
    conta=1;
    a=[];
    for k=1: 1: sz
        if comb2==comb(k, :)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
    if a(:)==0
        comb=[comb; comb2];
    end
end
```

```
    %coppia 1-3
```

```
    sz=size(comb, 1);
    comb2(1, 1)=min(connec(i, 1), connec(i, 3));
    comb2(1, 2)=max(connec(i, 1), connec(i, 3));
    conta=1;
    a=[];
    for k=1: 1: sz
        if comb2==comb(k, :)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
    if a(:)==0
        comb=[comb; comb2];
    end
end
```

```
    %coppia 2-3
```

```
    sz=size(comb, 1);
    comb2(1, 1)=min(connec(i, 2), connec(i, 3));
    comb2(1, 2)=max(connec(i, 2), connec(i, 3));
    conta=1;
    a=[];
    for k=1: 1: sz
        if comb2==comb(k, :)
            a(conta)=1;
            conta=conta+1;
        else
            a(conta)=0;
            conta=conta+1;
        end
    end
```

```

end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

end
end

```

## Matrice delle combinazioni - elementi a 4 nodi

Restituisce una matrice indicante quali nodi sono agli estremi di ogni tratto per mesh con elementi a 4 nodi.

```

if te==3
    comb=[];
    contr=1;
    conta=1;

    comb(1,1)=min(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(1,2)=max(connec(1,1), connec(1,2));
    comb(2,1)=min(connec(1,2), connec(1,3));
    comb(2,2)=max(connec(1,2), connec(1,3));
    comb(3,1)=min(connec(1,1), connec(1,4));
    comb(3,2)=max(connec(1,1), connec(1,4));
    comb(4,1)=min(connec(1,3), connec(1,4));
    comb(4,2)=max(connec(1,3), connec(1,4));

    for i=2:1:size(connec,1)

        %coppia 1-2
        sz=size(comb,1);
        comb2(1,1)=min(connec(i,1), connec(i,2));
        comb2(1,2)=max(connec(i,1), connec(i,2));
        conta=1;
        a=[];
        for k=1:1:sz
            if comb2==comb(k,:)
                a(conta)=1;
                conta=conta+1;
            else
                a(conta)=0;
                conta=conta+1;
            end
        end
        if a(:)==0
            comb=[comb; comb2];
        end

        %coppia 1-4
        sz=size(comb,1);
        comb2(1,1)=min(connec(i,1), connec(i,4));
        comb2(1,2)=max(connec(i,1), connec(i,4));
        conta=1;
        a=[];
        for k=1:1:sz
            if comb2==comb(k,:)
                a(conta)=1;
                conta=conta+1;
            else

```

```

        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

%coppia 2-3
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(convec(i, 2), convec(i, 3));
comb2(1, 2)=max(convec(i, 2), convec(i, 3));
conta=1;
a=[];
for k=1:1:sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

%coppia 3-4
sz=size(comb, 1);
comb2(1, 1)=min(convec(i, 3), convec(i, 4));
comb2(1, 2)=max(convec(i, 3), convec(i, 4));
conta=1;
a=[];
for k=1:1:sz
    if comb2==comb(k, :)
        a(conta)=1;
        conta=conta+1;
    else
        a(conta)=0;
        conta=conta+1;
    end
end
if a(:)==0
    comb=[comb; comb2];
end

end
end
%numero di elementi
nel em=size(comb, 1);

```

## Parametri del problema

```

sost=input('Numero di punti fissi: ');
T=input('Valore di pretensione iniziale negli elementi: ');
Dt=input('Intervallo di integrazione: ');
coor_t1=coor;
coor_t1(sost+1:end, 3)=0;

```

```
iter_fin=2000;
contri_p=0;
```

## Tratti rigidi

```
disp(nodeset);
tr=input('Numero di tratti rigidi: ');

% conts=1;
contel=1;
contreli=1;
elim=zeros(tr, size(nodeset, 2) - 2);
if tr==0
    nf=sost;
else
    for i2=1:1:tr
        est1=input('Label primo estremo del tratto rigido: ');
        est2=input('Label secondo estremo del tratto rigido: ');
        for j=sost+1:1:size(nodeset, 1)
            for o=2:1:size(nodeset, 2)
                if nodeset(j, o)==0
                    pf=nodeset(j, o-1);
                    break
                elseif nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
                    pf=nodeset(j, size(nodeset, 2));
                    break
                end
            end
            if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))==0
                elim(contel, 1:o-3)=nodeset(j, 2:o-2);
                contel=contel+1;
                contreli=contreli+1;
            end
            if nodeset(j, 1)==est1 && pf==est2 && nodeset(j, size(nodeset, 2))~=0
                elim(contel, :) = nodeset(j, 2:size(nodeset, 2)-1);
                contreli=contreli+1;
            end
        end
    end
    elim_non_zero=[];
    for i2=1:1:size(elim, 1)
        elim_non_zero=[elim_non_zero elim(i2, 1:max(find(elim(i2, :))))];
    end

    for i=1:1:size(elim_non_zero, 2)
        coor_t1(elim_non_zero(i), :) = coor(elim_non_zero(i), :);
    end
    plot3(coor_t1(:, 1), coor_t1(:, 2), coor_t1(:, 3), 'o');
```

## Adattamento

```
contri_pnum=input('Numero di ripetizioni: ');
while iter_fin>=100
```

```

tol(1:n)=10;
iter=1;
if contrip==contripnum;
    break;
end
close all
contrip=contrip+1;

```

## Inizializzazione vettore dei carichi nodali

```

px=zeros(1, n);
py=zeros(1, n);
pz=zeros(1, n);

```

## Lunghezze iniziali (t=0)

Lunghezze iniziali (segue la numerazione di COMB)

```

for i=1:1:size(comb, 1)
    l0(1, i)=sqrt((coor(comb(i, 2), 1)-coor(comb(i, 1), 1))^2 ...
        +(coor(comb(i, 2), 2)-coor(comb(i, 1), 2))^2 ...
        +(coor(comb(i, 2), 3)-coor(comb(i, 1), 3))^2);
end
l0=round(l0, 5);
l_t1=l0;
%In ogni nodo (riga i-esima) convergono i tratti di label (numeri nelle
%colonne)

conv=zeros(n, 15);
for i=1:1:n
    [r c]=find(comb==i);
    aa=[r c];
    for j=1:1:size(aa, 1)
        conv(i, j)=aa(j, 1);
    end
end
for i=1:1:n
    check=find(conv(i, :));
    if ~isempty(check)
        bb(i)=max(check);
    end
end
bb_max=max(bb);
conv(:, bb_max+1:end)=[];

```

## Inizio iterazione - definizione proprietà tempo t1

```

coor_t1=round(coor_t1, 5);

```

## Matrice delle masse

```

while max(tol(sost+1:end))>=val_tol

```

```

    S1x=zeros(n, 1);
    S1y=zeros(n, 1);
    S1z=zeros(n, 1);

```

```

for i=1:1:n
for j=1:1:size(conv, 2)
if conv(i,j)~=0
    lix(j)=abs(coor_t1(comb(conv(i,j), 1), 1) - coor_t1(comb(conv(i,j), 2), 1));

    liy(j)=abs(coor_t1(comb(conv(i,j), 1), 2) - coor_t1(comb(conv(i,j), 2), 2));

    liz(j)=abs(coor_t1(comb(conv(i,j), 1), 3) - coor_t1(comb(conv(i,j), 2), 3));
else
    lix(j)=0;
    liy(j)=0;
    liz(j)=0;
end
end
contlx=0;
contly=0;
contlz=0;
l_av_sumx=zeros(n, 1);
l_av_sumy=zeros(n, 1);
l_av_sumz=zeros(n, 1);
for j=1:1:size(lix, 2)
    if lix(j)~=0
        l_av_sumx(i)=l_av_sumx(i)+lix(j);
        contlx=contlx+1;
    end
    if liy(j)~=0
        l_av_sumy(i)=l_av_sumy(i)+liy(j);
        contly=contly+1;
    end
    if liz(j)~=0
        l_av_sumz(i)=l_av_sumz(i)+liz(j);
        contlz=contlz+1;
    end
end
if contlx~=0
    l_avx(i)=abs(l_av_sumx(i)/contlx);
else
    l_avx(i)=0;
end
if contly~=0
    l_avy(i)=abs(l_av_sumy(i)/contly);
else
    l_avy(i)=0;
end
if contlz~=0
    l_avz(i)=abs(l_av_sumz(i)/contlz);
else
    l_avz(i)=0;
end

for j=1:1:size(lix, 2)
    if lix(j)~=0
        Six(i)=Six(i);
    else
        Six(i)=Six(i)+3*(E*t*l_avy(i))/(2*lix(j));
    end
    if liy(j)~=0
        Siy(i)=Siy(i);

```

```

else
    Si y(i)=Si y(i)+3*(E*t*1_avx(i))/(2*1iy(j));
end
if 1iz(j)==0
    Si z(i)=Si z(i);
else
    Si z(i)=Si z(i)+3*(E*t*1_avz(i))/(2*1iz(j));
end
end

M(i)=max([(Dt^2)*0.5*(Si x(i)) (Dt^2)*0.5*(Si y(i)) (Dt^2)*0.5*(Si z(i))]);
end

```

## Velocità iniziale

Inizializzazione a zero della velocità iniziale.

```

if iter==1
    for i=1:1:n
        vx0(i)=Dt*px(i)/(2*M(i));
        vy0(i)=Dt*py(i)/(2*M(i));
        vz0(i)=Dt*pz(i)/(2*M(i));
    end
    vx_t1=vx0;
    vy_t1=vy0;
    vz_t1=vz0;
end

```

## Smorzamento (critico)

```

for i=1:1:n
    Ci x(i)=2*sqrt(Si x(i)*M(i));
    Ci y(i)=2*sqrt(Si y(i)*M(i));
    Ci z(i)=2*sqrt(Si z(i)*M(i));
end

```

## Pretensione nei tratti

```

T_t1(1:nel em)=T;

for i=1:1:nel em
    Tx(i)=abs(T_t1(i)*(coor_t1(comb(i,1),1)-coor_t1(comb(i,2),1))/l_t1(i));
    Ty(i)=abs(T_t1(i)*(coor_t1(comb(i,1),2)-coor_t1(comb(i,2),2))/l_t1(i));
    Tz(i)=abs(T_t1(i)*(coor_t1(comb(i,1),3)-coor_t1(comb(i,2),3))/l_t1(i));
end

```

## Forze residue

```

% Risultante delle pretensioni nella direzione x
Rtx=zeros(n,1);
for i=1:1:n
    for k=1:1:size(conv,2)
        if conv(i,k)~=0
            for j=1:1:2
                if comb(conv(i,k),j)~=i
                    if coor_t1(comb(conv(i,k),j),1)>coor_t1(i,1)

```

```

        Rtx(i)=Rtx(i)+Tx(conv(i, k));
    elseif coor_t1(comb(conv(i, k), j), 1)<coor_t1(i, 1)
        Rtx(i)=Rtx(i)-Tx(conv(i, k));
    end
end
end
end
end
end
end
end

% Risultante delle pretensioni nella direzione y
Rty=zeros(n, 1);
for i=1: 1: n
    for k=1: 1: si ze(conv, 2)
        if conv(i, k)~=0
            for j=1: 1: 2
                if comb(conv(i, k), j)~=i
                    if coor_t1(comb(conv(i, k), j), 2)>coor_t1(i, 2)
                        Rty(i)=Rty(i)+Ty(conv(i, k));
                    elseif coor_t1(comb(conv(i, k), j), 2)<coor_t1(i, 2)
                        Rty(i)=Rty(i)-Ty(conv(i, k));
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end

% Risultante delle pretensioni nella direzione z
Rtz=zeros(n, 1);
for i=1: 1: n
    for k=1: 1: si ze(conv, 2)
        if conv(i, k)~=0
            for j=1: 1: 2
                if comb(conv(i, k), j)~=i
                    if coor_t1(comb(conv(i, k), j), 3)>coor_t1(i, 3)
                        Rtz(i)=Rtz(i)+Tz(conv(i, k));
                    elseif coor_t1(comb(conv(i, k), j), 3)<coor_t1(i, 3)
                        Rtz(i)=Rtz(i)-Tz(conv(i, k));
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end

for i=1: 1: n
    Rx(i)=px(i)+Rtx(i);
    Ry(i)=py(i)+Rty(i);
    Rz(i)=pz(i)+Rtz(i);
end
end

```

## Soluzione dell'iterazione i-esima

```

% Soluzione in x, y, z
for i=1: 1: n
    if M(i)==0
        vx_t2(i)=0;
    else

```

```

        vx_t2(i)=vx_t1(i)*((M(i)/Dt - Ci_x(i)/2)/(M(i)/Dt +Ci_x(i)/2))...
            +Rx(i)*(1/(M(i)/Dt +Ci_x(i)/2));
    end
    if M(i)==0
        vy_t2(i)=0;
    else
        vy_t2(i)=vy_t1(i)*((M(i)/Dt - Ci_y(i)/2)/(M(i)/Dt +Ci_y(i)/2))...
            +Ry(i)*(1/(M(i)/Dt +Ci_y(i)/2));
    end
    if M(i)==0
        vz_t2(i)=0;
    else
        vz_t2(i)=vz_t1(i)*((M(i)/Dt - Ci_z(i)/2)/(M(i)/Dt +Ci_z(i)/2))...
            +Rz(i)*(1/(M(i)/Dt +Ci_z(i)/2));
    end
    tol(i)=M(i)*(vx_t2(i)^2)+M(i)*(vy_t2(i)^2)+M(i)*(vz_t2(i)^2);
end

```

## Ricostruzione delle coordinate

```

x_t1=coor_t1(:, 1);
y_t1=coor_t1(:, 2);
z_t1=coor_t1(:, 3);

for i=1:1:n
    Dx_t2(i)=Dt*vx_t2(i);
    x_t2(i)=x_t1(i)+Dx_t2(i);
    Dy_t2(i)=Dt*vy_t2(i);
    y_t2(i)=y_t1(i)+Dy_t2(i);
    Dz_t2(i)=Dt*vz_t2(i);
    z_t2(i)=z_t1(i)+Dz_t2(i);
end
U=[coor(1: sost, :); x_t2(sost+1: end)' y_t2(sost+1: end)' z_t2(sost+1: end)'];
U(elim_non_zero, :)=coor(elim_non_zero, :);
U=round(U, 5);

```

## Ridefinizione parametri a tempo t1 per l'iterazione successiva

In questa sezione si preparano i parametri per l'iterazione successiva.

```

coor_t1=U;
vx_t1=vx_t2;
vy_t1=vy_t2;
vz_t1=vz_t2;

for i=1:1: size(comb, 1)
    l_t1(1, i)=sqrt(((coor_t1(comb(i, 2), 1)- coor_t1(comb(i, 1), 1))^2 ...
        +(coor_t1(comb(i, 2), 2)- coor_t1(comb(i, 1), 2))^2 ...
        +(coor_t1(comb(i, 2), 3)- coor_t1(comb(i, 1), 3))^2));
    end
    l_t1=round(l_t1, 5);
    if iter==max_iter
        break
    end
    iter=iter+1;

```

```

end
di sp('Numero di iterazioni:');

```

```
disp(iter);  
iter_fin=iter;
```

## Grafici

```
plot3(coor(:, 1), coor(:, 2), zeros(n, 1), '*')  
hold on  
plot3(U(:, 1), U(:, 2), U(:, 3), 'o')  
  
for i=1:1:size(comb, 1)  
    hold on  
    pl=[U(comb(i, 1), :); U(comb(i, 2), :)]';  
    plot3(pl(1, :), pl(2, :), pl(3, :), 'k')  
    axis equal  
end  
  
figure  
for i=1:1:size(connec, 1)  
    X_plot=[U(connec(i, 1), 1) U(connec(i, 2), 1) U(connec(i, 3), 1)];  
    Y_plot=[U(connec(i, 1), 2) U(connec(i, 2), 2) U(connec(i, 3), 2)];  
    Z_plot=[U(connec(i, 1), 3) U(connec(i, 2), 3) U(connec(i, 3), 3)];  
    patch(X_plot, Y_plot, Z_plot, 'b');  
    axis equal  
    hold on  
    axis([min(coor(:, 1)) max(coor(:, 1)) min(coor(:, 2)) max(coor(:, 2))]);  
end  
end
```

# Bibliografia

- [1] Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D., Williams C. (2014), “*Shell Structures for Architecture*”, Routledge
- [2] Akovali G. (2012), “*Advances in Polymer Coated Textiles*”, Smithers Rapra Technology
- [3] Barnes M. R.-art (1999), “Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation”, *International Journal of Space Structures*, Vol. 14, No.2, pp. 89-104
- [4] Beccarelli P. (2015), “*Biaxial Testing for Fabrics and Foils*”, PoliMI SpringerBriefs
- [5] Lee K. S., Han S. E.-art (2011), “Advanced Shape Finding Algorithm of Force Density Method Based on Fem”, *Advanced Steel Construction*, Vol. 7, No. 4, pp. 313-329
- [6] Hernández-Montes E., Jurado-Piña R., Bayo E.-art (2006), “Topological Mapping for Tension Structures”, *Journal of Structural Engineering*, June, ASCE
- [7] Lewis W. J. (2003), “*Tension Structures-Form and Behaviour*”, Thomas Telford
- [8] Motro R., Maurin B., Vassart N. (2004), “*Density Methods Applied to Form Finding of Initially Stressed Systems*”, in Frémond M., Maceri F. eds., “*Novel Approaches in Civil Engineering*”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 341-350
- [9] Maurin B., Motro R.-art (1997), “The Surface Stress Density Method as a Form-Finding Tool for Tensile Membranes”, *Engineering Structures*, Vol. 20, No. 8, pp. 712-719
- [10] Dieringer F. H. (2014), “*Numerical Methods for the Design and Analysis of Tensile Structures*”, Ph.D. thesis, Technische Universitat Munchen
- [11] Tibert G. (1999), “*Numerical Analyses of Cable Roof Structures*”, Ph.D. thesis, Royal Institute of Technology, Sweden
- [12] Forster B., Marijke M., Zanelli A. (2007), “*Progettare con le Membrane*”, Maggioli editore
- [13] Berger H. (2005), “*Light Structures-Structures of Light*”, AuthorHouse
- [14] Schock H. (1997), “*Atlante delle Tensostrutture*”, UTET

- [15] Seidel M. (2009), "*Tensile Surface Structures: A Practical Guide to Cable and Membrane Construction*", Ernst&Sohn
- [16] Topping B. H. V., Ivanyi P. (2008), "*Computer Aided Design of Cable Membrane Structures*", Saxe-Coburg Publications
- [17] Llorens J. (2015), "*Fabric Structures in Architecture*", Woodhead Publishing
- [18] Stranghoner N., Uhlemann J. et al. (2016), "*Prospect for European Guidance for the Structural Design of Tensile Membrane Structures*", JRC Science and Policy Report, Ispra
- [19] Uhlemann J., Stranghoner N., Saxe K.-art (2015), "Stiffness Parameters for Architectural Fabrics: An Analysis of Two Determination Procedures", *Structural Engineering International*, Vol. 1, pp. 9-19
- [20] Majowiecki M. (1995), "*Tensostrutture Progetto e Verifica*", CREA Edizioni.
- [21] Buchholdt H. A. (1999), "*An Introduction to Cable Roof Structures*", Thomas Telford