



Politecnico di Milano



University of California, Irvine

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE E TECNOLOGIE AEROSPAZIALI
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

ACCOPIAMENTO AEROELASTICO E DI DINAMICA
DEL VOLO PER UN MAV AD ALA BATTENTE IN
CONFIGURAZIONE DI HOVERING

Relatori:

Prof. Haithem E. Taha
University of California, Irvine

Prof. Pierangelo Masarati
Politecnico di Milano

Tesi di laurea di:

Valerio Scalcerle
Matr. 841630

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Valerio Scalcerle: *Accoppiamento aeroelastico e di dinamica del volo per un MAV ad ala battente in configurazione di hovering* © 2017

Relatori:

Prof. Haithem E. Taha
Prof. Pierangelo Masarati

Irvine, California USA
Milano, Italia

*... ad Anna e ai suoi
sorrisi infiniti.*

SOMMARIO

Il volo ad ala battente è stato oggetto di ricerca per quasi un secolo. I primi a studiare il volo di uccelli e insetti furono principalmente i biologi; recentemente invece si è sviluppato un notevole interesse verso la modellazione e simulazione di questa tecnica di volo mirata alla progettazione di Micro Air Vehicles (MAVs). Nella trattazione proposta è presentato un modello aeroelastico e di dinamica del volo accoppiato in senso stretto con lo scopo di analizzare un MAV in configurazione di hovering. I tre lati del problema (aerodinamica, struttura e dinamica del corpo) interagiscono tra di loro influenzandosi a vicenda, dando vita ad un problema aeroelastico completo. Il modello instazionario di Taha et al. è utilizzato per descrivere l'aerodinamica: questa formulazione è in grado di catturare sia l'instazionarietà che i meccanismi di portanza non convenzionali che caratterizzano il volo ad ala battente, come ad esempio i vortici di bordo d'attacco e gli effetti di rotazione. Le ali sono descritte tramite il modello di trave di Eulero-Bernoulli, il quale consente deformazioni flessionali e torsionali ad ogni stazione alare in apertura. L'espansione modale è impiegata per stimare le deformazioni, mentre modi e frequenze proprie strutturali sono approssimati facendo uso del metodo Rayleigh-Ritz. Per quanto riguarda la dinamica del volo, si considera soltanto il movimento longitudinale del corpo: sotto particolari ipotesi, le equazioni di governo possono essere scritte in analogia a quelle di un velivolo convenzionale. La simulazione è condotta sopra diversi cicli in modo da poter studiare il comportamento del sistema nel tempo. L'analisi di stabilità è eseguita ricercando inizialmente l'orbita periodica di equilibrio del sistema completo (non lineare e instazionario) attraverso il metodo numerico "Optimized Shooting Method", per poi applicarne la teoria di Floquet. Infine, un semplice sistema di controllo in feedback è progettato per garantire il raggiungimento della configurazione desiderata (hovering).

Keywords: Micro Air Vehicles, Ala battente, Aeroelasticità, Dinamica del volo, Aerodinamica instazionaria, Teoria di Floquet.

ABSTRACT

Flapping flight has been the focus of research investigations for almost a century. The early studies were concerned with birds and insect flights and mainly carried out by biologists; more recently, there has been a significant interest in the modeling and simulation of flapping flights for design of Micro Air Vehicles (MAVs). A tight coupled Aerodynamic-Structure-Flight Dynamic model is here presented to analyze flapping wing Micro Air Vehicles' flight in hovering condition. The three sides of the problem interact together influencing each other, generating a full-coupled aeroelastic system. The unsteady model developed by Taha et al. is used to describe the aerodynamics: this formulation is able to capture unsteadiness along with non-conventional lift mechanisms typical of flapping flight, such as leading edge vortexes and rotational effects. The wings are described with Euler-Bernoulli beam model, which allows vertical and rotational displacement at each wing section. Modal expansion is employed to assess the section displacements and Rayleigh-Ritz method is used to approximate the structural natural mode shapes and frequencies. A brief comparison between flexible and rigid model is performed to detect the role of elasticity. Only longitudinal flapping flight dynamic near hover is considered: under specific assumptions, the equations of the longitudinal body motion can be written similarly to those of a conventional aircraft. The simulation is carried out over multiple cycles to access the system behave in time. Then, the Optimized Shooting Method is used to find the periodic equilibrium solution of the nonlinear time-periodic system, over which Floquet theory is performed to discuss stability. Finally, a simple feedback control system is developed on the associated linear time-invariant problem and then applied on the original one to guarantee the target mission (hovering).

Keywords: Micro Air Vehicles, Flapping, Aeroelasticity, Flight dynamics, Unsteady aerodynamics, Floquet theory.

Valerio, who's your best roomie?

— My best roomie

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare prima di tutto il mio supervisor di tesi Haithem Taha, Professore alla University of California, Irvine: la sua disponibilità, competenza e positività si sono rivelate senza confini e di incredibile valore.

La mia gratitudine va anche al Prof. Pierangelo Masarati del Politecnico di Milano, il quale nonostante la distanza è riuscito a seguirmi in questa impresa oltreoceano dimostrandosi sempre presente nei momenti di bisogno.

Un particolare ringraziamento lo devo a Hadasa e Mujtaba, senza i quali la mia esperienza in California sarebbe stata decisamente meno ricca e coinvolgente. Un profondo grazie a Gaia che nei momenti bui e di risultati insoddisfacenti ha creduto in me sempre e comunque. Grazie anche ai miei genitori, i cui nervi e sudore della fronte hanno reso tutto ciò possibile.

Ringrazio infine il mio gatto PrrMeao, la cui immensa bellezza e nullafacenza hanno agito da stimolo per tutto il mio percorso accademico.

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Micro Air Vehicles	1
1.2	Motivazioni	2
1.3	Organizzazione del lavoro	5
I	ACCOPIAMENTO DEI MODELLI	7
2	CINEMATICA	9
2.1	Descrizione	9
3	MODELLO AERODINAMICO	13
3.1	Fenomeni non convenzionali	13
3.2	Background dei modelli	14
3.3	Modello di Taha et al.	15
3.3.1	Principio di sovrapposizione di Duhamel	16
3.3.2	Formulazione di Γ_{QS}	18
3.4	Costruzione della portanza per ala rigida	21
4	MODELLO STRUTTURALE	25
4.1	Modello di trave ed equazioni di governo	25
4.2	Deformazioni attraverso espansione modale	29
4.2.1	Equazioni di governo in coordinate normali	29
4.2.2	Risoluzione nella pratica	30
4.3	Approssimazione dei modi e frequenze naturali	31
5	ACCOPIAMENTO DEI MODELLI	35
5.1	Dinamica del volo	35
5.2	Definizioni preliminari	37
5.2.1	Sistemi di riferimento	37
5.2.2	Grandezze cinematiche	38
5.3	Interazione dei modelli	41
6	RISULTATI	47
6.1	Parametri aerodinamici e strutturali	47
6.2	Simulazione	50
II	STABILITÀ E CONTROLLO	61
7	ANALISI DI STABILITÀ	63
7.1	Introduzione	63
7.2	Optimized Shooting Method	64
7.3	Linearizzazione e teoria di Floquet	69
7.4	Analisi di stabilità	73
8	CONTROLLO	75
8.1	Modus operandi	75
8.2	Sistema LTI	76
8.3	Assegnazione dei poli	79
8.4	Risultati	82

9 CONCLUSIONI 95

III APPENDICE 99

A APPENDICE 101

A.1 Validazione del codice implementato per l'applicazione del metodo Rayleigh-Ritz 101

A.2 Matrice di rotazione $[R_\mu]$ 103

A.3 Inerzia di flappeggio I_F 104

A.4 Proprietà strutturali ed inerziali 104

BIBLIOGRAFIA 109

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Esempio di Micro Air Vehicle (www.unmannedemagazine.com)	1
Figura 2	Stato dell'arte riguardante lo studio di Micro Air Vehicles ad ala battente	3
Figura 3	Rappresentazione schematica di un MAV	10
Figura 4	Leggi cinematiche imposte usando i parametri morfologici della <i>Drosophila Melanogaster</i>	11
Figura 5	Confronto tra C_L (grafici presi da [45])	21
Figura 6	Sezione generica dell'ala	22
Figura 7	Costruzione del C_L per il caso di <i>Drosophila Melanogaster</i>	23
Figura 8	Ala aeronautica rappresentata come superficie elastica	26
Figura 9	Ala aeronautica con segmenti in corda rigidi	28
Figura 10	Trave incastrata con proprietà in apertura arbitrarie	32
Figura 11	Funzioni di forma per flessione e torsione	34
Figura 12	Diagramma schematico di un MAV in condizione di hovering e orientazione generica	37
Figura 13	Percorso dei sistemi riferimento da quello inerziale a quello fisso sull'ala rigida	38
Figura 14	Percorso dei sistemi riferimento da quello inerziale a quello dell'ala elastica	38
Figura 15	Diagramma schematico dell'interazione tra i vari modelli per un MAV ad ala battente	42
Figura 16	Gestione dei carichi $F^{[ew]}$ provenienti dalla aerodinamica ed entranti nel modello strutturale e dinamica del volo	45
Figura 17	Leggi cinematiche imposte al MAV	49
Figura 18	Stima di ω_4 al crescere del numero di modi utilizzati nel metodo di approssimazione	50
Figura 19	Modi di vibrare approssimati dell'ala elastica sotto analisi	52
Figura 20	Coefficiente di portanza	55
Figura 22	Angolo computazionale $\alpha = \text{atan2}(V_z, V_x)$	56
Figura 23	Angolo di attacco reale	57
Figura 25	Traiettoria del MAV su sei cicli di battito	59
Figura 26	Confronto tra ala rigida ed elastica	59
Figura 27	Approcci differenti per analizzare la stabilità di sistemi NLTP	65

Figura 28	Orbita periodica nello spazio degli stati tridimensionale	69
Figura 31	Moltiplicatori di Floquet nel piano complesso. Il sistema è instabile qualora almeno uno degli autovalori è sia fuori dal cerchio unitario	74
Figura 32	Rappresentazione schematica del sistema di feedback in anello chiuso	76
Figura 33	Confronto degli autovalori ottenuti attraverso i due approcci di Fig. 27	80
Figura 34	Confronto tra gli autovalori del sistema LTI con e senza controllore	82
Figura 35	Perturbazione degli stati nel tempo per il sistema LTI	83
Figura 36	Variazione delle coordinate spaziali nel tempo (sistema di riferimento esterno)	83
Figura 37	Andamento degli angoli cinematici imposti dal controllo per il sistema LTI	84
Figura 38	Risposta nel tempo del sistema originale NLTP dotato di controllore	89
Figura 39	Coordinate inerziali e traiettoria del MAV	90
Figura 40	Rappresentazione dell'angolo cinematico imposto η per le fasi di upstroke e downstroke	91
Figura 41	Angoli cinematici Φ, ϕ_0 nel tempo imposti dal sistema di controllo	91
Figura 42	Moduli approssimativi di momento e potenza meccanica da applicare all'ala richiesti per il caso in esame	92
Figura 44	Trave incastrata di spessore unitario e larghezza linearmente variabile in apertura	101
Figura 45	Confronto tra soluzione approssimata ed esatta	102
Figura 46	Generico triangolo rettangolo di angolo μ e cateto opposto w' . Il restante cateto è unitario	103
Figura 47	Corda [m]	105
Figura 48	Massa dell'ala [kg]	105
Figura 49	Inerzia rotazionale [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	106
Figura 50	Rigidezza flessionale [$\text{N} \cdot \text{m}$]	106
Figura 51	Rigidezza torsionale [$\text{N} \cdot \text{m}$]	107

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1	Classificazione degli studi di interazione aeroelastica-dinamica del volo presenti in letteratura per MAV ad ala battente	4
Tabella 2	Modelli aerodinamici in letteratura per MAVs e insetti in condizione di hovering	15
Tabella 3	Parametri morfologici e aerodinamici dei tre insetti sotto analisi	21
Tabella 4	Parametri aerodinamici utilizzati per la simulazione	48
Tabella 5	Parametri morfologici dell'ala utilizzati per la simulazione	48
Tabella 6	Parametri strutturali del MAV	48
Tabella 7	Guess iniziali fornite al problema di ottimizzazione	67
Tabella 8	Risultati del problema di ottimizzazione	68

INTRODUZIONE

1.1 MICRO AIR VEHICLES

Lo studio del volo di uccelli ed insetti è stato oggetto di ricerca per oltre un secolo. I primi ad analizzare questo tipo di moto furono i biologi, il cui scopo fondamentale era comprendere la fisica che permettesse a questi animali di volare. Il battito delle ali, in inglese *flapping*, genera considerevoli forze aerodinamiche che consentono ai volatili di mantenersi in volo e compiere particolari manovre attraverso movimenti sofisticati e sfruttando l'interazione con l'aria circostante. Dal punto di vista pratico, gli ultimi decenni hanno visto un notevole interesse ingegneristico mirato al tentativo di applicare il flapping a velivoli non convenzionali di piccole dimensioni chiamati Micro Air Vehicles, o semplicemente MAVs. Questi non sono altro che droni di dimensioni molto ridotte con completa libertà di movimento in grado di assumere assetti differenti in base alla missione stabilita. I Micro Air Vehicles hanno la potenzialità di poter riunire informazioni in zone geografiche di qualsiasi tipo, consentendo monitoraggio ambientale e operazioni di sicurezza nazionale. La disponibilità di MAV ad ala battente efficienti consentirebbe un largo utilizzo a scopo militare per missioni di spionaggio e ricognizione: le dimensioni ridotte offrono una buona mimetizzazione e la bassa potenza necessaria al volo permetterebbe una notevole silenziosità a confronto con i velivoli ad ala rotante.

A causa delle caratteristiche comuni condivise tra MAVs e volatili biologici, le comunità aerospaziali e di scienze biologiche comunicano e collaborano attivamente in questo tipo di studio scambiando saperi



Figura 1: Esempio di Micro Air Vehicle (www.unmannedemagazine.com)

differenti come conoscenza biologica, modelli matematici, interpretazioni fisiche o tecniche di sperimentazione. Le strategie di volo esibite in natura hanno la potenzialità quindi di essere utilizzate nel design di MAVs ad ala battente [7, 25, 35, 38, 43]. Aerodinamica, struttura alare e dinamica del corpo rappresentano i tre principali settori di studio la cui interazione stretta rivela il problema completo. Modelli aerodinamici differenti descrivono la costruzione dei carichi alari includendo contributi differenti, mentre la scelta della tipologia di ala può condizionare significativamente le prestazioni in base all'assetto di volo scelto. In particolare, l'elasticità delle ali ha una notevole influenza sull'aerodinamica risultante. Diversi studi hanno dimostrato come l'energia accumulata dalle deformazioni elastiche sia rilasciata velocemente nelle fasi terminali di battito, agendo sugli angoli cinematici e migliorando la produzione di forze [39]. Inoltre, nella configurazione ad ala elastica alcuni fenomeni aerodinamici non-convenzionali caratterizzati dal flapping presentano una natura più stabile rispetto all'ala rigida, fornendo un netto vantaggio. Risultati [30] hanno mostrato un incremento delle forze verticali fino al 20% ad un rateo superiore rispetto all'incremento delle forze orizzontali: l'ala elastica genera carichi verticali con più efficienza.

Dato che i fenomeni aerodinamici sono prodotti dal movimento dinamico delle ali, questi sono sensibili alle variazioni del profilo cinematico [8, 12, 13]. In aggiunta a questo tipo di variazioni, ogni meccanismo che altera il movimento, come ad esempio la risposta strutturale dell'ala elastica, può influenzare i fenomeni aerodinamici instazionari insieme ai carichi risultanti. La maggior parte degli insetti sono dotati di ali leggere e flessibili che mostrano diversi livelli di risposta dinamica durante il movimento di flapping. Di conseguenza, le forze aerodinamiche (ed inerziali) agenti sulle ali inducono deformazioni elastiche le quali a loro volta influenzano i carichi stessi. Il risultato è dunque un problema di interazione fluido-struttura fortemente accoppiato che associa aerodinamica e dinamica strutturale dell'ala battente. L'ampiezza e contributo modale della risposta dinamica strutturale dipende da diversi fattori tra cui dimensione dell'insetto, geometria dell'ala, proprietà del materiale e carichi agenti.

1.2 MOTIVAZIONI

Nel presente lavoro si vuole analizzare numericamente un Micro Air Vehicle ad ala battente attorno alla sua configurazione di hovering per condurre successivamente studi di stabilità e controllo. Come già detto, il problema nella sua forma più completa vede la partecipazione di tre campi differenti: aerodinamica, struttura e dinamica totale del corpo. I tre lati diversi del problema sono stati largamente analizzati in letteratura nelle varie sotto-categorie provenienti dalle combinazioni dei tre. In Fig. 2 è rappresentato schematicamente lo stato dell'arte

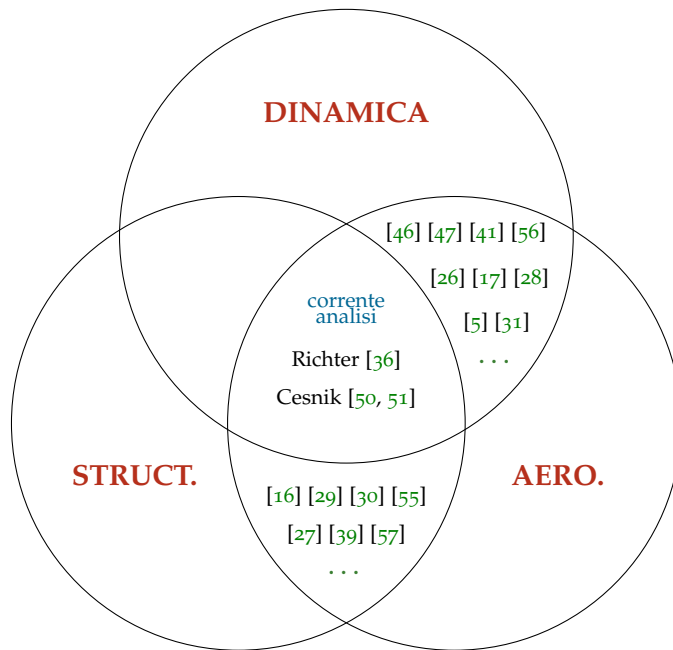


Figura 2: Stato dell'arte riguardante lo studio di Micro Air Vehicles ad ala battente

attuale riguardante lo studio dei Micro Air Vehicles. Trascurando il caso puramente dinamico-strutturale in quanto di scarso interesse nel contesto proposto, l'interazione singola tra aerodinamica e dinamica genera un problema di dinamica del volo; allo stesso tempo l'accoppiamento tra aerodinamica e struttura (inteso come descrizione dell'ala tramite modello elastico) dà vita alla sotto-categoria aeroelastica. Dinamica del volo e aeroelasticità sono state oggetto di profonda analisi attraverso l'uso di modelli più o meno efficienti. Rimane ancora piuttosto inesplorata la zona di intersezione fra i tre campi, nella quale è inserita la corrente trattazione. Si presentano qui tre principali termini di giudizio attraverso i quali confrontare i modelli di interazione presenti in letteratura: tipologia di accoppiamento (*tight* o *loose*), numero di g.d.l. e la capacità di includere la natura instazionaria del problema aerodinamico. L'accoppiamento stretto tra due o più modelli consente un realistico dialogo a doppio senso ma richiede allo stesso tempo una trattazione analitica non sempre facile da ottenere; in molti casi si sceglie di determinare quantità di interesse *offline* (ad esempio tramite solutori CFD) per poi adattare separatamente ad altre parti del problema, ottenendo così un *loose coupling*. Un elevato numero di gradi di libertà (sia per l'aerodinamica che per la struttura) invece può fornire soluzioni più accurate ma a costi computazionali troppo eccessivi per studi di stabilità e controllo. Infine, l'utilizzo di modelli aerodinamici quasi-stazionari devia i risultati dal caso reale.

Tabella 1: Classificazione degli studi di interazione aeroelastica-dinamica del volo presenti in letteratura per MAV ad ala battente

	Su-Cesnik [51]	Su-Cesnik [50]	Richter-Patil [36]
Accoppiamento	tight	tight	tight
g.d.l. AERO.	basso	alto	basso
g.d.l. STRUCT.	alto	alto	alto
Instazionarietà	×	✓	✓
LEV	✓	✓	×

Utilizzando i criteri di giudizio sopra espressi, Tab. 1 mostra un confronto tra le trattazioni già esistenti in letteratura riguardanti il problema completo aeroelastico e di dinamica del volo. In tabella è anche considerata la capacità del modello di includere il contributo dei vortici di bordo d'attacco (LEV), fenomenologia che come si vedrà nel capitolo 3 è fondamentale per l'aerodinamica del flapping. Nel loro primo lavoro [50] Su e Cesnik hanno condotto un interessante studio del problema accoppiato modellando le deformazioni dell'ala con gradi di libertà multipli (estensione, torsione e flessione rispetto due piani differenti). Il modello aerodinamico instazionario da loro utilizzato è quello di Ansari et al. [1] il quale tiene conto del rilascio di vortici da entrambi bordo di attacco con un elevato numero di gradi di libertà. Nella loro analisi Su e Cesnik hanno incontrato componenti ad alta frequenza per i carichi aerodinamici, le quali hanno portato la simulazione a divergere prima ancora di completare un ciclo. Chiaramente il modello di Ansari et al. non è adatto per analisi di stabilità e controllo. Richter e Patil [36] invece hanno indagato sull'effetto dell'elasticità alare sulla stabilità di un MAV in condizione di hovering. La struttura è descritta suddividendo l'ala con elementi di trave e membrane di rigidità differente, mentre il modello aerodinamico impiegato è il modello instazionario di Peters et al. [33] con un numero di g.d.l. contenuto (quindi più adatto per studi di stabilità) ma non in grado di catturare la fenomenologia LEV. Nel loro lavoro più recente, Su e Cesnik [51] hanno accoppiato il modello strutturale precedente al modello aerodinamico di Dickinson et al. [9] basato su espressioni empiriche per i coefficienti di portanza e resistenza. La formulazione utilizzata è quasi-stazionaria e quindi non tiene conto della natura *unsteady* del problema sotto esame.

Basandosi su questi dati, la motivazione principale per la quale gli studi presenti in letteratura non sono stati in grado di accoppiare in modo soddisfacente le tre componenti è la significativa incapacità di modellare l'aerodinamica instazionaria tenendo conto dei fenomeni di portanza non lineari (LEV), impiegando allo stesso tempo un modello sufficientemente compatto ed efficiente da poter essere usato

per la dinamica del volo e analisi di controllo. In luce di ciò, l'obiettivo del presente lavoro è fornire un modello completo aeroelastico e di dinamica del volo accoppiato in senso stretto in cui l'aerodinamica sia descritta fedelmente e il framework sia tale da essere adatto per analisi di stabilità e controllo.

1.3 ORGANIZZAZIONE DEL LAVORO

La presente trattazione è organizzata nel seguente modo:

PARTE I : l'accoppiamento dei tre modelli è formulato e descritto nel dettaglio. In particolare:

CAPITOLO 2 : breve descrizione della cinematica alare.

CAPITOLO 3 : dopo aver descritto i principali aspetti dell'aerodinamica ad ala battente, è presentato il modello utilizzato nell'analisi.

CAPITOLO 4 : presentazione del modello strutturale impiegato per descrivere l'ala elastica. Descrizione del metodo di Rayleigh-Ritz per l'approssimazione di modi e frequenze proprie strutturali.

CAPITOLO 5 : introduzione della dinamica del volo e formulazione analitica del problema completo accoppiato.

CAPITOLO 6 : presentazione dei risultati.

PARTE II : è condotto lo studio di stabilità e design del controllo. In particolare:

CAPITOLO 7 : introduzione al problema di stabilità nel contesto scientifico di volo ad ala battente. Applicazione dell'Optimized Shooting Method e teoria di Floquet per condurre analisi degli autovalori.

CAPITOLO 8 : design del sistema di controllo mirato al raggiungimento della configurazione di hovering.

CAPITOLO 9 : conclusioni del lavoro e presentazione di sviluppi futuri.

Parte I

ACCOPPIAMENTO DEI MODELLI

L'analisi proposta è focalizzata su un Micro Air Vehicle in configurazione di hovering, ovvero quando il velivolo è stazionato in volo con velocità nulla in ogni direzione. Questo assetto è consentito da uno specifico movimento delle ali, chiamato flapping. I carichi aerodinamici generati dal battito permettono di bilanciare il peso e quindi a mantenere il corpo sospeso. In questo breve capitolo è descritta la cinematica imposta esternamente alle ali, ricordando che essa è il mezzo attraverso il quale il volo è consentito.

2.1 DESCRIZIONE

Nel volo ad ala battente la cinematica dell'ala viene imposta dall'esterno in modo da garantire il movimento di flapping che meglio soddisfi le esigenze di interesse. Nella presente analisi l'obiettivo è lo studio di un MAV in condizione di hovering, quindi la cinematica da imporre dovrà essere tale da garantire il sostentamento in aria del velivolo stesso. Missioni differenti richiederanno ovviamente cinematiche dell'ala differenti.

I movimenti dell'ala rispetto al corpo sono espressi attraverso i tre angoli di Eulero:

- angolo di flapping φ
- angolo di affondo δ
- angolo di beccheggio η

L'angolo di affondo δ indica il movimento dell'ala al di fuori del piano di battito, generalmente considerato nullo in quanto la maggior parte degli insetti nella configurazione di hovering spazzano su un piano orizzontale (Dickinson et al. [9]). Fig. 3 mostra una rappresentazione schematica di un MAV le cui ali spazzano su un piano orizzontale.

La terna (x_b, y_b, z_b) è il sistema di riferimento del corpo, mentre (x_w, y_w, z_w) è il sistema di riferimento dell'ala. In una configurazione ad ala rigida gli unici due movimenti contemplati sono la rotazione φ attorno l'asse z_b e l'angolo di beccheggio dell'ala η attorno all'asse y_w . In questo framework la velocità totale vista da una sezione dell'ala a distanza r dalla cerniera di flappeggio sarà $U = r\dot{\varphi}$. La legge cinematica con cui viene descritto il movimento di battito è generalmente

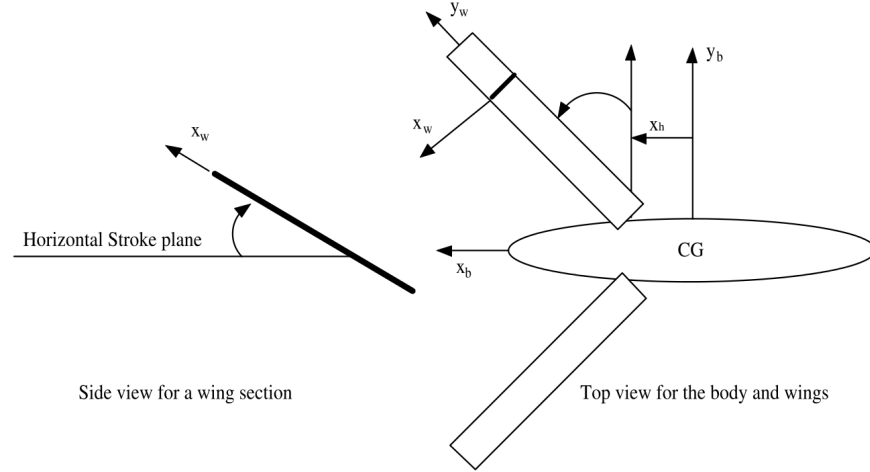


Figura 3: Rappresentazione schematica di un MAV

una legge armonica. Il lavoro qui proposto fa utilizzo dell'andamento

$$\varphi(t) = -\Phi \cos(\omega t) \quad (1)$$

con Φ ampiezza di battito.

L'angolo di beccheggio η è imposto e assume un valore costante nella fase centrale del battito (Fig. 4b). Nel flapping simmetrico η_d (downstroke) coincide con η_u (upstroke), ossia l'angolo di incidenza imposto all'ala nelle due fasi è lo stesso a meno di un fattore π che le distingue

$$\eta(t) = \begin{cases} \alpha_m & \dot{\varphi} > 0 \\ \pi - \alpha_m & \dot{\varphi} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

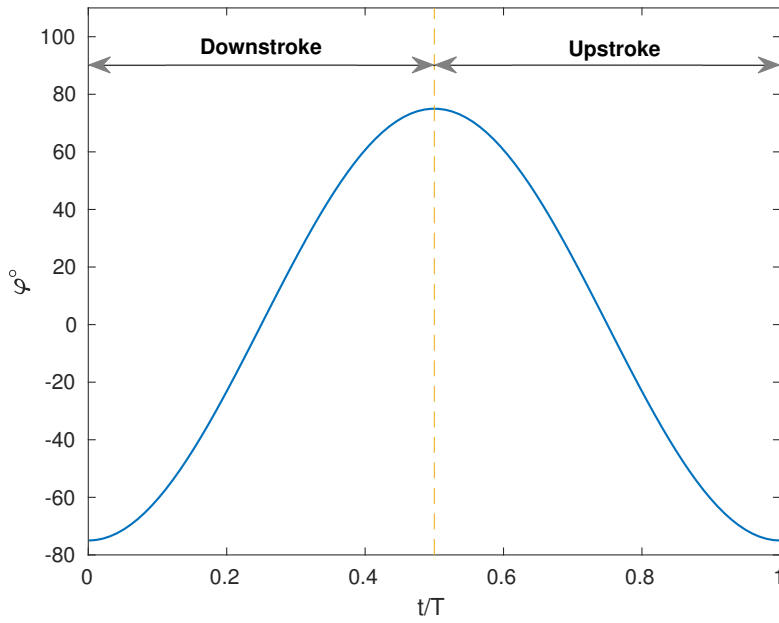
Nel flapping asimmetrico invece i due angoli non sono necessariamente uguali.

Nelle fasi terminali di battito l'ala ruota da una configurazione all'altra: l'andamento di η può essere imposto come

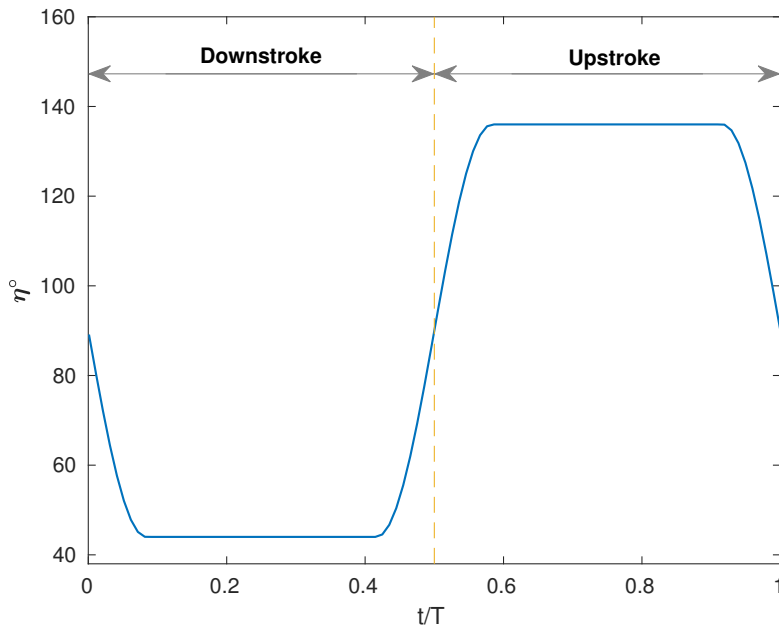
$$\eta(t) = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t_r} \left[(t - t_r) - \frac{\Delta t_r}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(t - t_r)}{\Delta t_r}\right) \right] \quad (3)$$

dove Δt_r è la durata di ogni fase di rotazione e t_r è il valore temporale a cui la rotazione inizia. Gli andamenti di φ e η precedentemente descritti sono raffigurati nel tempo in Fig. 4, tracciati usando i parametri morfologici dell'insetto *Drosophila Melanogaster* in condizione di flapping simmetrico ($\alpha_m = 46^\circ, \Phi = 75^\circ$).

In sezione 8 si vedrà come l'ampiezza di battito Φ che definisce la cinematica di flapping giochi un ruolo fondamentale nello sviluppo del sistema di controllo: agire sui parametri della cinematica infatti



(a) Angolo di flapping in funzione del tempo



(b) Angolo di beccheggio in funzione del tempo

Figura 4: Leggi cinematiche imposte usando i parametri morfologici della *Drosophila Melanogaster*

consente il raggiungimento della condizione di volo desiderata.

MODELLO AERODINAMICO

La letteratura degli ultimi anni propone diversi modelli mirati alla descrizione dell'aerodinamica propria di veivoli ad ala battente. Il flapping genera un campo di moto instazionario e non lineare che sfrutta fenomeni non convenzionali per incrementare i carichi aerodinamici. In questo capitolo sono enunciate e descritte le caratteristiche aerodinamiche relative a questa tecnica di volo, mostrando quei fenomeni e contributi che rendono la modellazione difficoltosa e più o meno accurata.

3.1 FENOMENI NON CONVENZIONALI

Partendo dall'osservazione sperimentale di insetti di diverso genere, è emerso il contributo di tre principali meccanismi di high-lifting non convenzionali, elencati successivamente (si vedano [14] e [9] per maggiori approfondimenti):

LEADING EDGE VORTEX (LEV) : vortice di bordo d'attacco che si aggiunge al vortice portante sull'ala, aumentando così la portanza. Questo fenomeno è facilmente osservabile su veivoli ad alto angolo di freccia o ala a delta. I LEV riscontrati nel volo degli insetti sono interessanti in quanto mostrano una natura stabile [2, 14]; questa stabilità viene generalmente attribuita ad un flusso in apertura diretto verso l'estremità alare, il quale indirizza i vortici verso la punta. Nel volo degli insetti, in analogia con i rotor degli elicotteri e le eliche, il movimento di rotazione genera un gradiente di velocità in apertura che fa nascere un gradiente di pressione: si genera in questo modo il flusso lungo l'ala. È importante sottolineare come il modello aerodinamico utilizzato valga soltanto sotto stretta ipotesi di LEV stabili. La natura stabile verrebbe meno nel caso in cui si abbiano alti numeri di Reynolds oppure una geometria di bordo d'attacco spessa e arrotondata. Ciononostante il Re più alto riscontrato su un insetto ($Re_{max} \simeq 4 \cdot 10^3$) garantisce ancora LEV stabili, e le ali sono generalmente molto sottili e dal bordo d'attacco affilato.

PORTANZA DI ROTAZIONE : questo fenomeno è dovuto alla rotazione dell'ala alla fine di ogni corsa: l'ala ruota dalla configurazione di upstroke a quella di downstroke (e viceversa) cambiando l'angolo di attacco. La velocità di rotazione dell'ala genera una circolazione che va ad aumentare la portanza aerodinamica.

EFFETTO “WAKE-CAPTURE” : sfrutta la scia formata dal movimento periodico delle ali per ottenere maggiore portanza nelle fasi terminali del ciclo di battito. Quest’ultimo effetto non è considerato in quanto molto difficile da modellare.

A caratterizzare maggiormente il volo ad ala battente, oltre ai meccanismi non convenzionali sopra citati, si aggiungono la natura instazionaria dell’aerodinamica e contributi non-circolatori e di attrito viscoso. Sfortunatamente la formulazione di un modello in grado di catturare fedelmente tutti questi fenomeni senza un notevole costo computazionale risulta molto difficile. La sezione 3.2 propone un confronto tra i principali modelli.

3.2 BACKGROUND DEI MODELLI

Negli ultimi vent’anni lo studio e la modellistica dell’aerodinamica del flapping ha fatto notevoli passi avanti; nella seguente sezione vengono elencati brevemente i principali modelli sviluppati, catalogandoli in base ai fenomeni e alle caratteristiche propri del flapping che sono in grado di catturare e descrivere. I modelli differiscono principalmente nella loro capacità di gestire la natura non stazionaria del problema e di catturare il contributo dei fenomeni di *high-lifting* descritti precedentemente. Generalmente queste due caratteristiche sono mutualmente esclusive: i modelli che catturano il contributo di LEV e portanza di rotazione sono stazionari (Dickinson et al. [9] oppure Berman e Wang [3]), mentre altri modelli focalizzati maggiormente sul lato *unsteady* trascurano parte dei meccanismi sopra citati (Peters et al. [33]), in particolar modo i LEV. I primi due modelli hanno forma algebrica, mentre il terzo include anche equazioni differenziali ordinarie agli stati finiti. I due modelli successivi invece si basano sulla simulazione numerica della cinematica dei vortici su diversi punti appartenenti alla superficie del profilo e della scia. Chiaramente i primi tre metodi, caratterizzati da un numero di gradi di libertà considerevolmente inferiore, offrono soluzioni ad un costo computazionale più modesto: risultano quindi più adatti per uno studio di dinamica del volo e controllo. Nell’analisi effettuata è utilizzato il modello aerodinamico di Taha et al [45]. Come si può vedere dalla tabella 2 questo modello è in grado di catturare LEV e portanza di rotazione senza però perdere la natura instazionaria del problema, con un numero di gradi di libertà ragionevole tale da consentire analisi di dinamica del volo, controllo e ottimizzazione. Nella tabella sono inclusi anche altri parametri, come ad esempio il contributo all’aerodinamica della massa aggiunta e dell’attrito viscoso (non trattato nel modello proposto).

Tabella 2: Modelli aerodinamici in letteratura per MAVs e insetti in condizione di hovering

	Dickinson [9]	Berman-Wang [3]	Peters [33]
Numero di g.d.l.	basso	basso	basso
LEV	✓	✓	×
Instazionarietà	×	×	✓
Portanza di rotazione	✓	✓	✓
Effetto “wake-capture”	×	×	×
Attrito viscoso	×	✓	×

	UVLM	Ansari [1]	Taha [45]
Numero di g.d.l.	alto	alto	basso
LEV	×	✓	✓
Instazionarietà	✓	✓	✓
Portanza di rotazione	✓	✓	✓
Effetto “wake-capture”	✓	✓	×
Attrito viscoso	×	×	×

3.3 MODELLO DI TAHA ET AL.

Il modello di Taha et al., utilizzato nell’analisi corrente, è un modello numerico a costo relativamente basso in forma di equazioni differenziali ordinarie (ODE) che consente di costruire le forze aerodinamiche durante il ciclo di flapping includendo l’instazionarietà e l’effetto dei LEV sui carichi aerodinamici.

Alla base della formulazione sviluppata da Taha et al. risiede l’estensione del principio di sovrapposizione di Duhamel (generalmente applicato in aerodinamica lineare instazionaria) a campi di moto con curve $C_L - \alpha$ arbitrarie. Questo approccio sostanzialmente utilizza la curva $C_L - \alpha$ statica per determinare la portanza instazionaria dovuta ad un movimento arbitrario dell’ala. Un aspetto specifico del modello è l’utilizzo della circolazione quasi-stazionaria come forzante aerodinamica invece dell’angolo di attacco o della velocità del profilo. Gli effetti dovuti alla geometria dell’ala (aspect ratio) sono inclusi nella forma empirica con cui è descritta la portanza statica dovuta ad un LEV stabile: questa verrà utilizzata per costruire la circolazione quasi-stazionaria (forzante aerodinamica del modello instazionario). Si ottiene così un modello aerodinamico instazionario completo, qui applicato su un MAV in condizione di hovering.

Si sottolinea come la formulazione qui presentata faccia riferimento ad un’ala rigida; la forma rimarrà concettualmente analoga nel caso di ala elastica a meno di contributi provenienti dalle deformazioni

strutturali (capitolo 5).

3.3.1 Principio di sovrapposizione di Duhamel

Dovuta alla loro predisposizione a catturare gli effetti instazionari in forma compatta, i modelli aerodinamici a stati finiti si sono rivelati un metodo efficiente per effettuare simulazioni aeroelastiche e di dinamica del volo/controllo. I modelli instazionari di Wagner [52] e Theodorsen [49] forniscono la base per la maggior parte dei modelli aerodinamici a stati finiti. La portanza instazionaria generata da un cambiamento a gradino nel movimento dell'ala (caso di ala battente) può essere descritta in funzione della portanza statica tramite la formulazione di Wagner:

$$\ell(s) = \ell_s W(s) \quad (4)$$

dove $W(s)$ è definita come la risposta nel tempo ad un gradino per un sistema dinamico lineare. Wagner ricavò la funzione $W(s)$ studiando la portanza instazionaria di una lastra piana. Il tempo adimensionale s per una geometria di corda c e corrente variabile $U(\tau)$ è definito come:

$$s = \frac{2}{c} \int_0^t U(\tau) d\tau \quad (5)$$

Una volta definiti questi termini è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione di Duhamel: la risposta dovuta ad un'eccitazione arbitraria (input) può essere scritta tramite integrale (sovrapposizione) utilizzando la funzione di risposta a gradino $W(s)$ e la variazione temporale della variabile di input.

Ad esempio la variazione nel tempo della portanza dovuta ad una variazione arbitraria dell'angolo di attacco può essere scritta come:

$$\ell(s) = \pi \rho U^2 c \left[\alpha(0) W(s) + \int_0^s \frac{d\alpha(\sigma)}{d\sigma} W(s - \sigma) d\sigma \right] \quad (6)$$

È molto importante precisare come $W(s)$ possa essere usata come risposta a gradino anche per input aerodinamici che non siano l'angolo di attacco. Alcuni modelli aerodinamici instazionari [53] utilizzano il principio di sovrapposizione di Duhamel forzando il sistema con la velocità normale scritta come $v = U\alpha$ oppure $v = U \sin \alpha$. La maggiore limitazione di queste formulazioni instazionarie classiche risiede nella loro inabilità di considerare curve di portanza $C_L - \alpha$ non convenzionali, ossia quelle curve che hanno al loro interno anche il contributo di LEV.

Sfruttando la dipendenza lineare tra portanza e circolazione Γ sotto ipotesi di flusso a potenziale, il modello di Taha et al. presenta la possibilità di generalizzare il principio di sovrapposizione di Du-

hamel anche a curve di portanza arbitrarie attraverso l'utilizzo della circolazione come forzante.

$$\ell(s) = \rho U(s) \left[\Gamma_{QS}(0)W(s) + \int_0^s \frac{d\Gamma_{QS}(\delta)}{d\delta} W(s-\delta) d\delta \right] \quad (7)$$

L'equazione (7) è quindi l'estensione della modellazione aerodinamica instazionaria tramite principio di Duhamel ad una curva $C_L - \alpha$ arbitraria e ad una velocità variabile arbitraria $U(s)$. Una delle principali assunzioni è che la funzione di risposta a gradino $W(s)$ possa essere utilizzata per rappresentare la risposta dinamica $\ell(s)$ anche per grandi valori di α .

Γ_{QS} è la circolazione quasi-stazionaria: come verrà illustrato nella sezione 3.3.2, un'adeguata formulazione di quest'ultima consentirà di inserire il contributo di LEV e portanza di rotazione.

Per essere resa più adatta ad analisi di stabilità e controllo, l'equazione (7) deve essere scritta nello spazio degli stati. R.T. Jones [21] ha proposto un'approssimazione agli stati finiti per $W(s)$ nella forma:

$$W(s) = 1 - A_1 e^{-b_1 s} - A_2 e^{-b_2 s} \quad (8)$$

Riscrivendo la (7) in termini delle variabili temporali dimensionali, t e τ , e integrando il secondo termine per parti si ottiene

$$\ell(s) = \rho U(t) \Gamma_{\text{eff}}(t) = \rho U(t) \left[\Gamma_{QS}(t)W(0) - \int_0^t \Gamma_{QS}(\tau) \frac{dW(t-\tau)}{d\tau} d\tau \right] \quad (9)$$

dove Γ_{eff} è la circolazione instazionaria effettiva. Usando l'approssimazione a due stati della funzione di Wagner (Eq. (8)) e richiamando la definizione di tempo adimensionale, il termine $\frac{dW(t-\tau)}{d\tau}$ viene scritto in forma compatta come

$$\frac{dW(t-\tau)}{d\tau} = -A_i \frac{2b_i}{c} U(\tau) e^{-\frac{2b_i}{c} \int_\tau^t U(\tau) d\tau} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

Γ_{eff} è quindi data da

$$\Gamma_{\text{eff}}(t) = (1 - A_1 - A_2)\Gamma_{QS} + x_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

dove x_i è scritto come

$$x_i(t) = \int_0^t \Gamma_{QS}(\tau) A_i \frac{2b_i}{c} U(\tau) e^{-\frac{2b_i}{c} \int_\tau^t U(\tau) d\tau} \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

L'equazione (12) rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$\dot{x}_i(t) = \frac{2b_i U(t)}{c} [-x_i(t) + A_i \Gamma_{QS}(t)] \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

con condizioni iniziali $x_i(0) = 0$.

Concludendo, la portanza circolatoria per unità di apertura è quindi scritta come

$$\ell(t) = \rho U(t) [(1 - A_1 - A_2)\Gamma_{QS}(t) + x_1(t) + x_2(t)] \quad (14)$$

con x_1 e x_2 stati aerodinamici interni soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{2b_1 U(t)}{c} [-x_1(t) + A_1 \Gamma_{QS}(t)] \\ \dot{x}_2(t) = \frac{2b_2 U(t)}{c} [-x_2(t) + A_2 \Gamma_{QS}(t)] \end{cases} \quad (15)$$

Una volta fornita una descrizione per la circolazione quasi-stazionaria Γ_{QS} sarà possibile ricavare il carico aerodinamico.

3.3.2 Formulazione di Γ_{QS}

La portanza circolatoria per unità di apertura definita nella sezione 3.3.1 richiede come termine di ingresso la circolazione quasi-stazionaria Γ_{QS} . Questo termine verrà qui descritto in funzione di un qualsiasi movimento dell'ala ($U(t)$, $\alpha(t)$) e di una curva $C_{L,s} - \alpha$ non lineare arbitraria. Questa formulazione consentirà di far emergere in Γ_{QS} i contributi dovuti ai vortici di bordo d'attacco e la portanza di rotazione.

Formalmente, la fenomenologia LEV viene attribuita al movimento traslatorio dell'ala, mentre la portanza di rotazione dipende per definizione dal movimento di rotazione dell'ala nelle fasi terminali di ciclo; la circolazione può essere quindi scomposta in due termini differenti per facilitarne la modellazione:

$$\Gamma = \Gamma_{\text{trasl}} + \Gamma_{\text{rot}} \quad (16)$$

Il termine Γ_{rot} richiede una trattazione piuttosto breve, infatti studi sul beccheggio di un profilo in un fluido a potenziale forniscono l'espressione

$$\Gamma_{\text{rot}}(t) = \pi c^2 \dot{\alpha}(t) \left(\frac{3}{4} - \hat{x}_0 \right) \quad (17)$$

che segue molto bene l'andamento sperimentale (vedere [15] per una maggiore trattazione). Il termine \hat{x}_0 rappresenta la posizione normalizzata dell'asse di beccheggio dell'ala rispetto al baricentro. La formulazione (17) consente quindi di tenere conto degli effetti istantanei di rotazione attraverso il termine $\dot{\alpha}(t)$.

Il termine Γ_{trasl} richiede invece una trattazione più approfondita. Utilizzando infatti la forma per ala traslante

$$\Gamma_{\text{trasl}}(t) = \frac{1}{2} c U(t) C_{L,s}(\alpha(t)) \quad (18)$$

con $C_{L,s}(\alpha(t))$ coefficiente di portanza statica, si può notare come sia richiesta una conoscenza a priori della curva di portanza statica. Questa è definita nel modello di Taha et al. attraverso la generalizzazione delle formule empiriche presenti in letteratura in modo da predire la curva di portanza statica dovuta ad un LEV (tendendo anche conto della geometria dell'ala).

Partendo da modelli empirici basati sullo studio sperimentale di insetti, la letteratura fornisce diversi modelli per il C_L contenenti il contributo dei vortici di bordo d'attacco, il più delle volte "personalizzati" per l'insetto sotto analisi. Il modello di Dickinson et al. [9] utilizza un'espressione algebrica quasi-statica in cui i coefficienti di portanza e resistenza sono funzione dell'angolo di attacco istantaneo

$$\begin{aligned} C_L &= 0.225 + 1.58 \sin(2.13\alpha - 7.20) \\ C_D &= 1.92 - 1.55 \cos(2.04\alpha - 9.82) \end{aligned} \quad (19)$$

Wang et al. [54] invece hanno suggerito una forma più semplice

$$\begin{aligned} C_L &= A \sin 2\alpha \\ C_D &= B - C \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (20)$$

dove i coefficienti A , B , C sono determinati sperimentalmente. I due modelli quasi-statici appena menzionati presentano però grandi limitazioni in quanto non tengono conto dell'aspetto instazionario associato al volo ad ala battente; inoltre, i coefficienti empirici attraverso cui sono definiti risultano fortemente sensibili alla geometria dell'ala.

Considerando la forma $C_L = A \sin 2\alpha$ utilizzata nel loro lavoro, Berman e Wang [3] hanno procurato i valori di A per i seguenti insetti: Sphingidae, *Drosophila Virilis* e *Drosophila Melanogaster*. In tabella 3 sono elencati questi valori insieme ai parametri morfologici (R , S e AR) dei tre insetti nominati. Ciononostante manca comunque un'espressione generale di questo coefficiente in funzione della geometria, ossia in funzione di AR .

Per angoli molto piccoli la formula di Wang et al. si riduce a $C_L = 2A\alpha$: segue che $2A$ può essere considerato come la pendenza della curva di portanza per ala tridimensionale $C_{L\alpha}$. Essendo inoltre il flapping associato ad ali dal ridotto allungamento, la *Extended Lifting Line Theory* (Schlichting e Truckenbrodt [37]) può essere usata per espri-

mere la dipendenza di C_{L_α} dall'aspect ratio attraverso la relazione

$$C_{L_\alpha} = \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{\left(\frac{\pi AR}{\alpha_0}\right)^2 + 1}} \quad (21)$$

dove AR è riferito ad una sola ala, quindi $AR = \frac{R^2}{S}$, e α_0 è la pendenza della curva di portanza di un profilo alare bidimensionale (pari a 2π nel caso di lastra piana o profili con spessori decisamente ridotti¹). Partendo dalla formulazione di Wang et al. e facendo uso della relazione (21), Taha et al. sono giunti alla seguente espressione del coefficiente di portanza statico

$$C_L = \frac{1}{2} \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{\left(\frac{\pi AR}{\alpha_0}\right)^2 + 1}} \sin 2\alpha \quad (22)$$

che è in buona concordanza con i risultati sperimentali. In Fig. 5 infatti viene mostrato un confronto tra le curve $C_L - \alpha$ degli insetti in tabella 3 tracciate utilizzando i seguenti metodi: formulazione (22) di Taha et al., la formula di Polhamus, la soluzione derivante dal flusso a potenziale ($C_L = C_{L_\alpha} \sin \alpha$) e infine l'andamento sperimentale di riferimento. Polhamus [34] utilizzò il concetto di "aspirazione" di bordo d'attacco per modellare il contributo LEV su ali a delta e ad alto angolo di freccia, scomponendo la portanza in due contributi sensibili alla geometria dell'ala (AR , angolo di freccia Λ e pianta alare). Il modello empirico di Dickinson (19) è usato in figura 5(a) come soluzione di riferimento per la *Drosophila Virilis*. Per gli altri due insetti il confronto è effettuato in riferimento alla formula $C_L = A \sin 2\alpha$ di Berman e Wang, usando come valori di A quelli presenti in tabella 3.

In Fig. 5 si può osservare una aspettata divergenza tra la soluzione derivante dal flusso a potenziale e quella di riferimento per angoli α relativamente alti. Il metodo proposto da Polhamus invece si mostra in buon accordo con la soluzione esatta. Ciononostante, la formulazione di Taha et al. (utilizzata nel presente lavoro) possiede una forma analitica più semplice e l'andamento del C_L è più vicino a quello di riferimento rispetto ai risultati di Polhamus per tutti gli insetti sotto analisi. In conclusione, la relazione (22) fornisce una valida approssimazione del coefficiente di portanza statico $C_{L,s}$ con al suo interno il contributo di LEV e geometria dell'ala.

La circolazione quasi-stazionaria completa è scritta quindi come

$$\Gamma_{QS}(t) = \frac{1}{2} c U(t) C_{L,s}(\alpha(t)) + \pi c^2 \left(\frac{3}{4} - \hat{x}_0 \right) \dot{\alpha}(t) \quad (23)$$

¹ Per profili alari convenzionali il valor α_0 può essere ottenuto da curve di portanza come quelle ricavate da Abbott e Doenhoff [19]

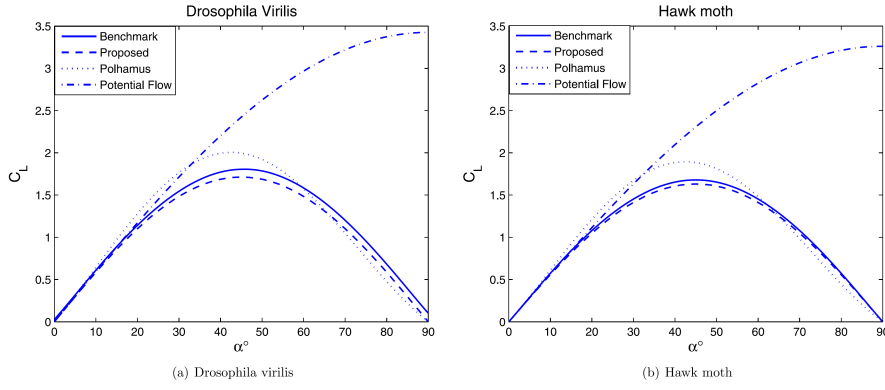


Figura 5: Confronto tra C_L (grafici presi da [45])

Tabella 3: Parametri morfologici e aerodinamici dei tre insetti sotto analisi

Insetto	R (mm)	S (mm ²)	AR	A
Sphingidae	51.9	947.8	2.84	1.678
Drosophila Virilis	3	2.97	3.10	-
Drosophila Melanogaster	2.02	1.36	3.00	1.833

3.4 COSTRUZIONE DELLA PORTANZA PER ALA RIGIDA

In questa sezione viene espressa la forma finale del carico aerodinamico partendo dalle leggi presentate in sezione 3.3 e applicandole ad un'ala battente rigida. Una volta scritta la forma completa, i valori della portanza ad ogni step temporale e per ogni sezione dell'ala possono essere calcolati facendo uso di un solutore numerico.

Ricordando che la velocità ad ogni sezione può essere scritta come $U = r\dot{\phi}$, le equazioni (14), (15) e (23) vengono riscritte inserendo la dipendenza dalla posizione in apertura e dal tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_C(r, t) = \rho r |\dot{\phi}(t)| [(1 - A_1 - A_2)\Gamma_{QS}(r, t) + x_1(r, t) + x_2(r, t)] \\ \Gamma_{QS}(r, t) = \frac{1}{2} c(r) r \dot{\phi}(t) C_{L,s}(\eta(t)) + \pi c^2(r) \left(\frac{3}{4} - \hat{x}_0\right) \dot{\eta}(t) \\ \dot{x}_i(r, t) = \frac{2 b_i r |\dot{\phi}(t)|}{c(r)} [-x_i(r, t) + A_i \Gamma_{QS}(r, t)] \quad j = i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (24)$$

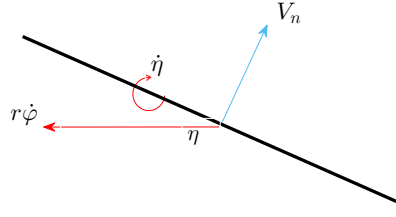


Figura 6: Sezione generica dell'ala

Si noti come la portanza espressa in (14) viene ora indicata come portanza circolatoria ℓ_C . Questa distinzione nasce dal fatto che il carico possiede anche un contributo non-circolatorio generato dalle forze di inerzia agenti sulla sezione in movimento. Schematizzando la sezione generica come in Fig. 6, l'accelerazione normale si ottiene tramite derivata temporale della velocità normale. La portanza non-circolatoria sarà quindi la proiezione della forza di inerzia lungo l'asse-corpo verticale

$$\ell_{NC} = -m_{app} a_n \cos \eta \quad (25)$$

con $m_{app}(r) = \frac{\pi}{4} \rho c^2(r)$ massa apparente della striscia 2D; l'accelerazione a_n è definita tramite la cinematica (Δx è la distanza tra baricentro dell'ala e asse di beccheggio)

$$a_n(r, t) = -r\ddot{\varphi} \sin \eta - r \dot{\varphi} \dot{\eta} \cos \eta - \ddot{\eta} \Delta x \quad (26)$$

Concludendo, si avrà $\ell = \ell_C + \ell_{NC}$, ossia contributo circolatorio (dipendente dalla circolazione) e non-circolatorio. Una volta ottenuto il carico per unità di apertura, la portanza totale agente sul MAV nel tempo è data dall'integrazione di ℓ lungo le due ali

$$L(t) = 2 \int_0^R \ell(r, t) dr \quad (27)$$

In Fig. 7 è raffigurato il carico totale adimensionalizzato costruito utilizzando i parametri morfologici e aerodinamici dell'insetto *Drosophila Melanogaster* ($f = 254\text{Hz}$, $\alpha_m = 46^\circ$, $\Phi = 75^\circ$). Il coefficiente di portanza è ottenuto dividendo il carico per una pressione dinamica di riferimento $\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2$, con U_{ref} velocità della sezione a metà apertura alare. Si può notare come nel passaggio tra una fase e l'altra, ossia quando l'ala ruota da una configurazione all'altra, vi sia una leggera crescita di C_L dovuta alla portanza di rotazione. Nelle fasi centrali del battito invece il contributo dei vortici di bordo d'attacco è dominante. È importante sottolineare come i carichi aerodinamici dipendano soltanto dalla geometria dell'ala e dalla cinematica ad essa imposta;

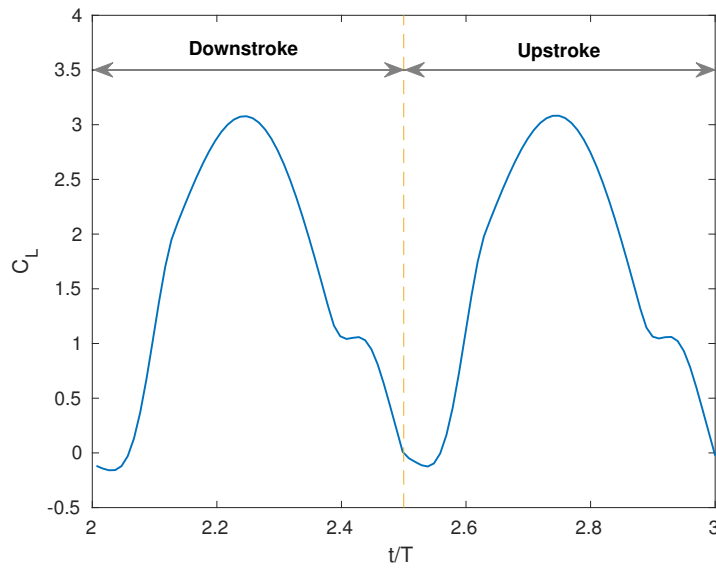


Figura 7: Costruzione del C_L per il caso di *Drosophila Melanogaster*

questo è dovuto al fatto che l'ala considerata è rigida. Nel capitolo 5 si vedrà come l'utilizzo di una conformazione alare elastica accoppi l'aerodinamica alla struttura: i carichi aerodinamici dipenderanno anche dalle deformazioni causate da loro stessi.

Il funzionamento del codice aerodinamico implementato è stato verificato confrontando i risultati con quelli ottenuti da Taha et al. [45] per diversi insetti nelle loro principali condizioni operative. L'obiettivo della verifica era una replica esatta.

MODELLO STRUTTURALE

4.1 MODELLO DI TRAVE ED EQUAZIONI DI GOVERNO

Se si considera una generica ala aeronautica come una superficie elastica con spessore ridotto rispetto a corda e apertura, gli spostamenti risultanti dall'applicazione di un carico possono essere espresse attraverso *influence functions* (funzioni di flessibilità) bidimensionali. Lo spostamento risultato di un carico laterale può essere scritto attraverso un integrale lungo la superficie alare

$$w(x, y) = \iint_S C(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (28)$$

dove $C(x, y; \xi, \eta)$ è la funzione di flessibilità 2D che descrive lo spostamento verticale in x, y dovuta ad una forza unitaria Z in ξ, η . Se la forza applicata è di natura dinamica $F_z(\xi, \eta, t)$, il carico laterale totale, includendo le forze di inerzia, assume la forma

$$Z(\xi, \eta, t) = -\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t) \quad (29)$$

dove $\rho(\xi, \eta)$ è la massa per unità di area. Una rappresentazione schematica è fornita in Fig. 8. L'interesse al caso di forzante dinamica nasce dal fatto che il carico agente sull'ala battente sotto analisi sia appunto di natura instazionaria. Sostituendo l'equazione (29) nella (28) si ottiene l'equazione integrale del moto dell'ala descritta

$$w(x, y) = \iint_S C(x, y; \xi, \eta) [-\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t)] d\eta \quad (30)$$

L'equazione (30) può essere risolta in termini delle frequenze e modi di vibrare propri della struttura (come si vedrà nella sezione 4.2). A questo punto è fondamentale stabilire i movimenti di deformazione consentiti alla struttura. Il modello di trave utilizzato nella presente analisi è il modello di trave di Eulero-Bernoulli: partendo dalla più generica trave di Timoshenko, si trascurano le deformazioni di scorrimento obbligando le sezioni non solo ad un comportamento rigido piano, ma anche a rimanere ortogonali alla linea d'asse alla struttura. In questo modo è consentita soltanto la flessione in apertura w e la rotazione di ogni sezione ϑ , non contemplando alcun tipo di deformazione in corda. Facendo riferimento alla struttura di base descritta nel capitolo 2, l'ala è quindi suddivisa in un numero finito di stazioni rigide in apertura, alle quali sono consentiti soltanto i due gradi di libertà nominati. Una scelta di questo tipo riduce certamente l'ac-

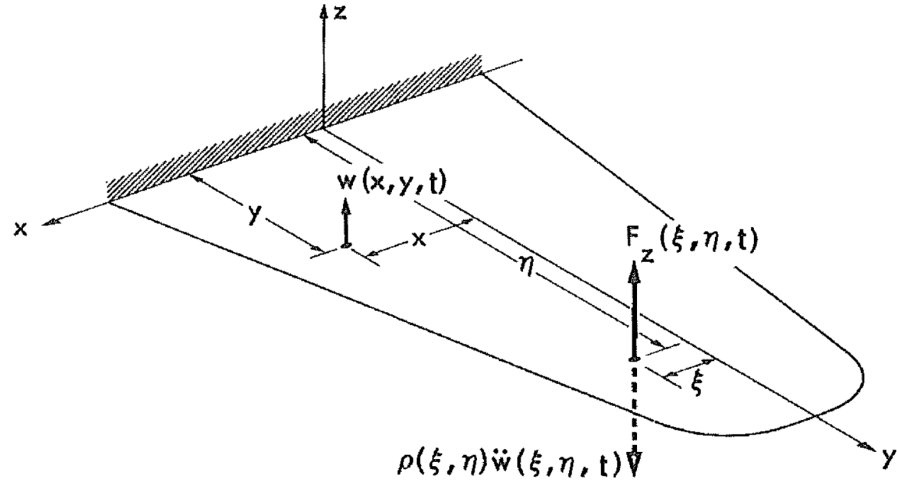


Figura 8: Ala aeronautica rappresentata come superficie elastica

curatezza con cui le deformazioni strutturali vengono stimate e si allontana dal caso realistico che mostra nelle ali degli insetti considerevoli deformazioni anche in corda. Una modifica della curvatura infatti produce notevoli vantaggi nella generazione della spinta aerodinamica, giocando un ruolo decisivo nel volo in avanti. La scelta effettuata è giustificata dal fatto che la struttura così descritta facilita l'accoppiamento con l'aerodinamica offrendo una forma generale compatta con numero di gradi di libertà ridotto, consentendo così studi di dinamica del volo, stabilità e controllo dell'intero veicolo ad un costo computazionale contenuto.

Sotto l'ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli, la cinematica della trave può essere scritta mediante il campo di spostamenti w e ϑ come

$$w(x, y) = w(y) - x\vartheta(y) \quad (31)$$

e la funzione di flessibilità $C(x, y; \xi, \eta)$ diventa

$$C(x, y; \xi, \eta) = C^{zz}(y, \eta) - xC^{\vartheta z}(y, \eta) + \xi xC^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) - \xi C^{z\vartheta}(y, \eta) \quad (32)$$

con $C^{pq}(y, \eta)$ spostamento nella direzione p in coordinata y dell'ala dovuta ad un carico unitario in direzione q applicato in η . Introducendo le equazioni (31) e (32) nella (30) si ottengono, previa manipolazione, le seguenti equazioni integrali di moto accoppiate per flessione e torsione:

$$w(y, t) = \int_0^l C^{zz}(y, \eta) [-m(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta + \int_0^l C^{z\vartheta}(y, \eta) [-I_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(y, t) = & \int_0^l C^{\vartheta z}(y, \eta) [-m(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta \\ & + \int_0^l C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) [-I_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta \end{aligned} \quad (34)$$

con

$$m(\eta) = \int_c \rho(\xi, \eta) d\xi = \text{massa per unità di apertura}$$

$$S_y(\eta) = \int_c \rho(\xi, \eta) \xi d\xi = \text{momento statico per unità di apertura}$$

$$I_y(\eta) = \int_c \rho(\xi, \eta) \xi^2 d\xi = \text{momento di inerzia per unità di apertura}$$

$$F_z(\eta, t) = \int_c F_z(\xi, \eta, t) d\xi = \text{forza esterna per unità di apertura}$$

$$t(\eta, t) = \int_c F_z(\xi, \eta, t) \xi d\xi = \text{momento esterno per unità di apertura}$$

Le equazioni (33) e (34) sono accoppiate sia elasticamente che inerzialmente. L'accoppiamento elastico è dovuto alle funzioni di flessibilità $C^{z\vartheta}(y, \eta)$ e $C^{\vartheta z}(y, \eta)$ mentre l'accoppiamento inerziale dipende dalla presenza del momento statico lungo l'asse y $S_y(\eta)$.

Queste equazioni sono applicabili ad ali rigide in corda, comprese ali a freccia per le quali il principale effetto dell'elasticità è l'amplificazione dell'accoppiamento flessione-torsione. Introducendo l'ipotesi di ala ad angolo freccia nulla e priva di discontinuità strutturali, si assume la presenza di un asse elastico: forze applicate all'ala lungo questo asse generano traslazioni delle sezioni senza produrre alcuna rotazione, mentre momenti applicati generano soltanto rotazione. Riferendo quindi i carichi all'asse elastico, si può eliminare l'accoppiamento elastico dalle equazioni (33) e (34), ottenendo così deformazioni accoppiate soltanto inerzialmente

$$w(y, t) = \int_0^l C^{zz}(y, \eta) [-m(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta \quad (35)$$

$$\vartheta(y, t) = \int_0^l C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) [-I_y(\eta)\ddot{\vartheta}(\eta, t) + S_y(\eta)\ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta \quad (36)$$

Non essendoci accoppiamento elastico tra flessione e torsione, è più conveniente lavorare con equazioni differenziali in termini delle rigidità flessionale e torsionale EI, GJ al posto delle equazioni integrali. Le equazioni di governo in forma differenziale possono essere facilmente ricavate considerando l'equilibrio dell'ala in Fig. 9 dotata di asse elastico. Considerando sia le forze applicate che quelle inerziali, il carico totale per unità di lunghezza è dato da

$$Z(y, t) = F_z(y, t) + m(y)s(y)\ddot{\vartheta}(y, t) - m(y)\ddot{w}(y, t) \quad (37)$$

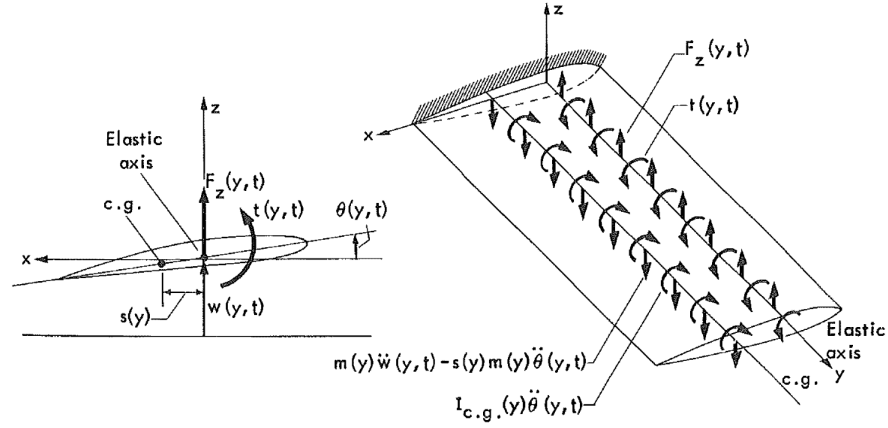


Figura 9: Ala aeronautica con segmenti in corda rigidi

e la variazione di momento torcente in y riferita all'asse elastico è

$$T'(y, t) = -t(y, t) + s(y) [m(y)s(y)\ddot{\theta}(y, t) - m(y)\ddot{w}(y, t)] + I_{c.g.}(y)\ddot{\theta}(y, t) \quad (38)$$

con $s(y)$ definito come in Fig. 9. Facendo valere l'ipotesi di deformazione di scorrimento nulla, si sostituiscono le equazioni (37) e (38) nella soluzione del modello di trave di Eulero-Bernoulli

$$\begin{aligned} [EI w''(y, t)]'' &= Z(y, t) \\ [GJ \vartheta'(y, t)]' &= T'(y, t) \end{aligned} \quad (39)$$

ottenendo così le equazioni differenziali di equilibrio alle derivate parziali

$$\begin{cases} m(y)\ddot{w}(y, t) - S_y(y) \ddot{\theta}(y, t) + [EI w''(y, t)]'' = F_z(y, t) & \text{flessione} \\ I_y(y)\ddot{\theta}(y, t) - S_y(y) \ddot{w}(y, t) - [GJ \vartheta'(y, t)]' = t_y(y, t) & \text{torsione} \end{cases} \quad (40)$$

dove $S_y = ms$ è il momento statico di massa per unità di lunghezza riferito all'asse elastico e $I_y = I_{c.g.} + ms^2$ è il momento di inerzia (anch'esso riferito all'asse elastico).

Le due PDE ricavate sono equivalenti alle equazioni integrali (35) e (36), e sono le leggi di governo implementate nel codice numerico proposto. Nel capitolo 5 si vedrà come aerodinamica e struttura siano implicitamente accoppiate essendo i carichi F_z e t_y in (40) esattamente le forze e momenti aerodinamici provenienti dall'aerodinamica.

4.2 DEFORMAZIONI ATTRAVERSO ESPANSIONE MODALE

Una volta definiti il modello di trave e le equazioni che ne regolano il moto, è sufficiente operare sulla descrizione degli spostamenti w e ϑ per garantire la risoluzione delle equazioni di governo.

L'espansione modale consente di esprimere le deformazioni di una struttura continua sottoposta a carichi dinamici in termini di frequenze e modi propri di vibrare della struttura stessa. Le deformazioni w e ϑ vengono quindi separate in un contributo spaziale e uno temporale:

$$w(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\mathbf{y}) \xi_i(t) \quad (41)$$

$$\vartheta(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(\mathbf{y}) \kappa_i(t) \quad (42)$$

Si definiscono ϕ , Θ come modi naturali normalizzati di flessione e torsione (dipendenti dallo spazio) mentre ξ , κ sono le coordinate normali tempo-varianti riferite ai due movimenti, ossia lo spostamento e rotazione dovuti ad ogni modo naturale. Le sommatorie nelle equazioni (41) e (42) hanno come indice i il quale fa riferimento ai gradi di libertà, teoricamente infiniti per un sistema continuo rappresentante una struttura aeronautica. La conoscenza di frequenze e modi propri risulta quindi indispensabile per la risoluzione del sistema (40): in sezione 4.3 verrà eseguita un'analisi su come ottenere queste quantità con una accuratezza più o meno accettabile.

4.2.1 Equazioni di governo in coordinate normali

Immaginando quindi di avere già a disposizione modi di vibrare e frequenze proprie ω della struttura sotto analisi, le equazioni di governo possono essere riscritte in funzione delle coordinate normali temporali di flessione e torsione ξ_i , κ_i proprie di ogni modo. Sostituendo infatti le espansioni modali (41) e (42) nel sistema (40) e manipolando i vari termini, le equazioni di governo si riducono al seguente set di equazioni differenziali ordinarie per flessione e torsione:

$$\begin{cases} M_i \ddot{\xi}_i + D_{ij} \dot{\kappa}_j + M_i \omega_i^2 \xi_i = \Xi_i \\ M_j \ddot{\kappa}_j + D_{ji} \dot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \kappa_j = \Upsilon_j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, \infty) \quad (43)$$

dove i pedici i, j fanno riferimento ai modi di vibrare i, j -esimi di flessione e torsione, rispettivamente. Gli scalari

$$M_i = \int_0^L \phi_i^2 m \, dy \quad M_j = \int_0^L \Theta_j^2 I_0 \, dy$$

sono le masse generalizzate dei modi i, j -esimi. Allo stesso modo sono definite le forze generalizzate

$$\Xi_i = \int_0^L F_z(y, t) \phi_i \, dy \quad \Upsilon_j = \int_0^L t_y(y, t) \Theta_j \, dy$$

Il termine D_{ij} invece esprime l'accoppiamento inerziale tra flessione e torsione ed è definito come

$$D_{ij} = - \int_0^L \phi_i \Theta_j S(y) \, dy$$

Raccogliendo i contributi dei vari modi in matrici e vettori e facendo uso di pedici distinti per riferirsi alle due deformazioni contemplate (*bending* e *twist*), il sistema (43) può essere riscritto prima in forma

$$\begin{cases} [M_b] \ddot{\underline{\xi}} + [D] \ddot{\underline{\kappa}} + \underline{\omega_b}^2 [M_b] \underline{\xi} = \underline{\Xi} \\ [M_t] \ddot{\underline{\kappa}} + [D]^T \ddot{\underline{\xi}} + \underline{\omega_t}^2 [M_t] \underline{\kappa} = \underline{\Upsilon} \end{cases} \quad (44)$$

e successivamente nella forma finale compatta (45) classica dei sistemi dinamici

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [M_b] & [D] \\ [D]^T & [M_t] \end{bmatrix}}_{[M_{TOT}]} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{\xi}} \\ \ddot{\underline{\kappa}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\omega_b}^2 [M_b] & [0] \\ [0] & \underline{\omega_t}^2 [M_t] \end{bmatrix}}_{[K_{TOT}]} \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\Xi} \\ \underline{\Upsilon} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Avendo a disposizione modi di vibrare e frequenze proprie, la risoluzione numerica del sistema (45) con l'utilizzo di condizioni iniziali su ogni coordinata normale e sulle loro derivate prime consente di ricavare le deformazioni della struttura nello spazio e nel tempo tramite le equazioni (41) e (42).

4.2.2 Risoluzione nella pratica

In sezione 4.2.1 si è vista la formulazione delle equazioni di moto di un sistema continuo la cui soluzione esatta richiederebbe un numero indefinito di gradi di libertà. Quando però si ha a che fare con casi realistici la risoluzione dovrà per forza richiedere un certo grado di approssimazione. Questa approssimazione consiste generalmente nell'assumere che lo spazio di configurazione della struttura defor-

mata possa essere approssimato come un sistema equivalente con un numero finito di gradi di libertà. Una volta fatto questo passo, il sistema (45) si riduce ad un set finito di ODE nella variabile indipendente tempo da risolvere simultaneamente. Si considera quindi soltanto un numero limitato di modi di vibrare e coordinate normali.

Questo metodo è molto utilizzato nella trattazione di problemi aeroelastici ed è in genere efficiente in quanto, nella maggior parte dei casi, soltanto un numero relativamente ridotto di modi è necessario per descrivere le deformazioni della struttura.

4.3 APPROSSIMAZIONE DEI MODI E FREQUENZE NATURALI

In sezione 4.2 si è visto come le deformazioni di una struttura continua sottoposta a carichi dinamici possano essere espresse in termini delle frequenze e modi di vibrare propri. Se non in casi molto specifici (ad esempio trave uniforme) questi non possono essere determinati in modo esatto, ed è quindi necessario utilizzare metodi di approssimazione. In questa sezione viene spiegato come ricavare i modi ϕ, Θ e le corrispettive frequenze ω_b, ω_t di una trave aeronautica a sezione variabile in apertura; queste quantità sostituite nelle equazioni (41) e (42) consentiranno di esprimere gli spostamenti di deformazione.

Come già stabilito, i gradi di libertà di una struttura aeronautica sono infiniti e di conseguenza anche il numero di modi e frequenze proprie: i metodi di approssimazione servono per stimare un numero ristretto di questi ultimi. Esistono diversi tipi di metodi, ma la maggior parte di questi si riconduce alla scrittura di set di equazioni lineari omogenee da risolvere simultaneamente. Il metodo di approssimazione usato nella presente trattazione è il metodo di Rayleigh-Ritz. Esso fa parte del gruppo dei così detti *metodi energetici*, in quanto approssimano modi e frequenze partendo dal principio dei lavori virtuali o, più nello specifico, dalla formulazione di Lagrange di questo principio

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (46)$$

qui scritta per il caso di vibrazioni libere e piccoli spostamenti. Le quantità T e U indicano l'energia cinetica e di deformazione, rispettivamente, derivate in funzione di un numero finito di coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n .

Il metodo di Rayleigh-Ritz applicato alla trave incastrata di sezione variabile di Fig. 10 consente di esprimere la curva di flessione dell'asse neutro come

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) q_i(t) \quad (47)$$

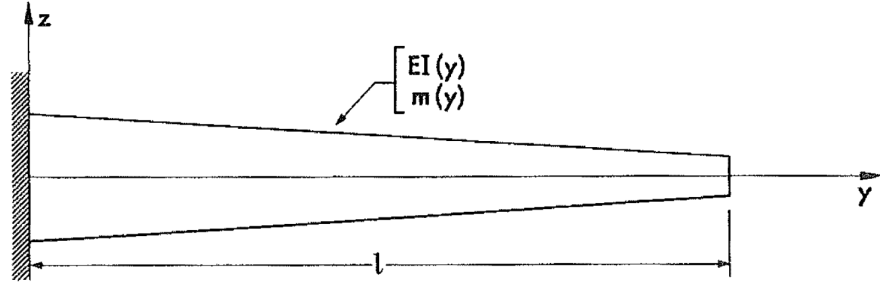


Figura 10: Trave incastrata con proprietà in apertura arbitrarie

Le funzioni $\gamma_i(y)$ sono funzioni di spostamento arbitrarie tali da soddisfare le condizioni al contorno geometriche $\gamma_i(0) = \gamma_i'(0) = 0$, e sono selezionate in modo da rendere possibile una buona approssimazione dei modi richiesti attraverso una loro combinazione. Le quantità $q_i(t)$ sono invece coordinate generalizzate rappresentanti il contributo di ognuna delle funzioni di spostamento alla costruzione dei singoli modi di vibrare. Esprimendo l'energia cinetica e di deformazione facendo uso della (47) e sostituendole nell'equazione di Lagrange, si ottengono le equazioni differenziali di moto libero

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (48)$$

con $m_{ij} = \int_0^l \gamma_i \gamma_j m dy$ e $k_{ij} = \int_0^l EI \gamma_i'' \gamma_j'' dy$. Considerando soluzioni armoniche di ampiezza \bar{q}_i e frequenza ω si ottiene

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - m_{ij} \omega^2) \bar{q}_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (49)$$

Il set di equazioni caratteristiche (49) può essere risolto numericamente per n valori approssimati di ω^2 , ai quali sono associati un set di valori adimensionali $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$.

I valori $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ sono quindi approssimazioni dei primi n autovalori flessionali esatti del problema originale, e i corrispondenti modi di vibrare sono esprimibili come

$$\phi_r(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) \bar{q}_i^{(r)} \quad (r = 1, \dots, n) \quad (50)$$

Queste soluzioni rappresentano soltanto un'approssimazione dei modi naturali esatti, in quanto sono limitate dal numero di funzioni di forma γ_i scelte e dalla loro natura. L'approssimazione è migliore per i modi di ordine più basso e diventa progressivamente peggiore per i gradi più alti. Essendo le soluzioni di ordine più alto meno accurate, vengono generalmente scartate.

La scelta delle funzioni di forma risulta un'operazione fondamen-

tale in quanto l'efficienza del metodo di approssimazione dipende largamente da queste. I requisiti generali che le funzioni devono seguire sono due: il rispetto delle condizioni al contorno geometriche e l'indipendenza lineare. L'indipendenza lineare richiede l'impossibilità di esprimere una delle funzioni come combinazione delle restanti; tanto più queste saranno lontane dalla dipendenza lineare, tanto più saranno adatte per l'utilizzo richiesto. La forma più semplice è di queste funzioni è la forma polinomiale; formule standard tali da rispettare le varie condizioni al contorno sono state derivate per problemi specifici. L'espressione polinomiale di flessione utilizzata nella presente trattazione è quella proposta da Duncan [10] per il caso di trave incastrata

$$\gamma_j(y) = \frac{1}{6}(j+2)(j+3) \left(\frac{y}{l}\right)^{j+1} - \frac{1}{3}j(j+3) \left(\frac{y}{l}\right)^{j+2} + \frac{1}{6}j(j+1) \left(\frac{y}{l}\right)^{j+3} \quad (51)$$

con $j = 1, \dots, n$.

La formulazione per il caso torsionale risulta completamente analoga: ciascun modo di vibrare viene approssimato tramite la sommatoria

$$\Theta_r(y) = \sum_{i=1}^n \tau_i(y) \bar{q}_i^{(r)} \quad (r = 1, \dots, n) \quad (52)$$

con $\tau_i(y)$ funzioni di forma torsionali e \bar{q}_i soluzioni del problema agli autovalori (49) scritto però per il caso di torsione, quindi utilizzando $m_{ij} = \int_0^l \tau_i \tau_j I_0 dy$ e $k_{ij} = \int_0^l GJ \tau_i'' \tau_j'' dy$.

Le funzioni di forma $\tau(y)$ utilizzate nel presente lavoro sono funzioni sinusoidali

$$\tau_j(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{2l}\right) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (53)$$

in analogia con [44]. In Fig. 11 sono rappresentati i primi tre andamenti delle funzioni flessionali (51) e torsionali (53).

Avvalendosi quindi del metodo di Rayleigh-Ritz, il codice scritto approssima i primi n modi e frequenze proprie di una trave incastrata con geometria e proprietà inerziali variabili in apertura; queste quantità dipendono soltanto dallo spazio, quindi la loro stima non partecipa alla simulazione temporale attraverso la quale sono ricavate le coordinate normali ξ, κ . La validazione del codice implementato per quanto riguarda il metodo di Rayleigh-Ritz è presentata in Appendice A.1. Una volta ottenuti modi propri e coordinate normali, le deformazioni di flessione e torsione sono calcolate per ogni istante di tempo e per ogni stazione in apertura attraverso le equazioni (41) e (42).

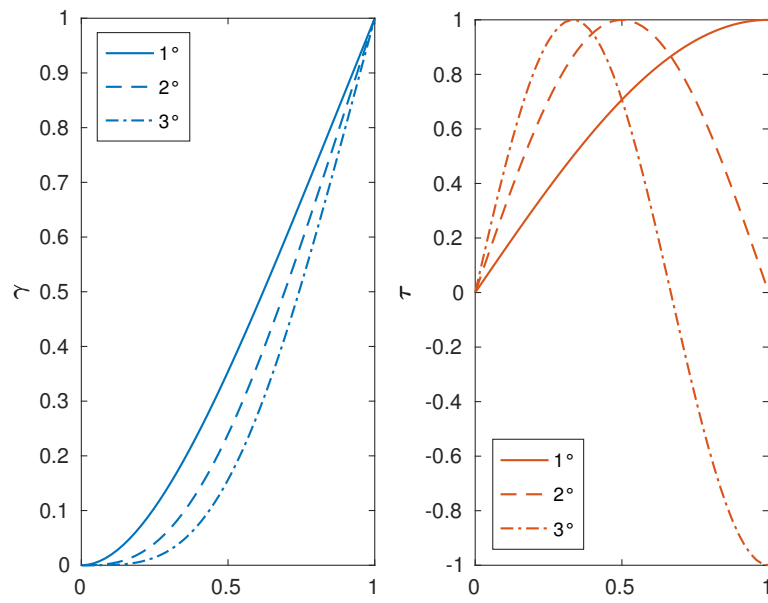


Figura 11: Funzioni di forma per flessione e torsione

ACCOPPIAMENTO DEI MODELLI

In questo capitolo ci si occuperà dell'accoppiamento tra modello aerodinamico e modello strutturale, con l'aggiunta della dinamica del volo. Facendo riferimento alla schematizzazione di Fig. 2, i tre elementi sopracitati interagiscono tra di loro influenzandosi a vicenda, generando un problema aeroelastico completo la cui formulazione è alla base del presente lavoro. L'accoppiamento eseguito è di tipo stretto (*tight coupling*): l'interazione è mutua e avviene in entrambi i sensi, contrariamente a diverse analisi presenti in letteratura nelle quali risultati di modelli differenti sono calcolati separatamente e fatti comunicare successivamente senza quindi un'interazione a doppio senso (*loose coupling*). Questo ultimo approccio è tipicamente utilizzato nel caso in cui struttura e fluidodinamica vengono affrontate separatamente con modelli CSD (computational structural dynamic) e CFD (computational fluid dynamic): i carichi stimati in un sistema vengono trasferiti all'altro facendo comunicare le rispettive griglie all'interfaccia. L'utilizzo è giustificato qualora nel problema in analisi forze aerodinamiche e risposta strutturale raggiungano un equilibrio o una soluzione periodica in assenza di disturbi esterni. Il metodo è quindi largamente adoperato nell'analisi di veivoli ad ala battente attorno alle loro configurazioni di hovering o volo in avanti [6, 18, 20, 27, 30].

La formulazione presentata nelle seguenti sezioni si occupa dell'accoppiamento diretto tra aerodinamica, struttura e dinamica del volo. Partendo dal codice completo sviluppato, il settaggio preliminare a zero di tutti i termini riguardati la dinamica del volo consentono di isolare il sistema aerodinamico-strutturale, offrendo così la possibilità di un confronto tra ala rigida ed elastica. Il modello aerodinamico di Taha et al. verrà modificato in modo da poter risentire delle deformazioni strutturali e della dinamica del MAV stesso attorno alla configurazione di hovering. I risultati sono esposti nel capitolo 6.

5.1 DINAMICA DEL VOLO

La dinamica del volo di un MAV ad ala battente costituisce un sistema dinamico non lineare, tempo-variante e multi-corpo. Il sistema risulta anche multi-scala in quanto associato a due scale di tempo differenti: una propria del movimento veloce di flappeggio (insieme ai carichi aerodinamici ad esso associati) e infine la scala di tempo relativamente lenta dei movimenti del corpo. Una importante ipotesi solitamente adottata nell'analisi della dinamica del volo dei MAV è il

poter trascurare gli effetti inerziali delle ali. Questa supposizione viene giustificata in quanto la massa delle ali è notevolmente ridotta se paragonata alla massa del corpo. Nel loro lavoro [26], Sun et al. hanno derivato le equazioni della dinamica complete e individuato i termini specifici dovuti agli effetti inerziali delle ali. Il confronto con i risultati ottenuti omettendo quei termini ha mostrato un comportamento pressoché analogo, giustificandone così l'omissione. Weihua e Cesnik [51] invece hanno studiato la stabilità dinamica di un MAV ad ala flessibile tenendo conto degli effetti di inerzia: la loro analisi ha dimostrato che l'aumento di questi contributi genera meccanismi destabilizzanti sia per la dinamica longitudinale che per quella laterale.

Nel presente lavoro la dinamica del volo viene affrontata considerando soltanto gradi di libertà rigidi del corpo e trascurando gli effetti inerziali del movimento delle ali. Questa assunzione rimuove la natura multi-corpo del problema e consente la descrizione della dinamica longitudinale del MAV attraverso le stesse equazioni di moto di un aeromobile generico.

Il set convenzionale di assi-corpo x_b, y_b, z_b solitamente usato nella dinamica del volo è lo stesso qui utilizzato: partendo dal centro di gravità, l'asse x_b punta verso la prua, l'asse y_b è diretto verso l'ala destra e infine z_b è tale da completare la terna. Essendo l'analisi focalizzata solamente sulla dinamica longitudinale, la rotazione del corpo viene definita soltanto tramite l'angolo di beccheggio θ . Le equazioni di moto longitudinali del MAV sono quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qw - g \sin \theta \\ qu + g \cos \theta \\ 0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} X \\ \frac{1}{m} Z \\ \frac{1}{I_y} M \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

o in annotazione vettoriale compatta $\dot{\chi} = \mathbf{f}(\chi, t)$ con g accelerazione di gravità, m massa del corpo e I_y momento di inerzia rispetto all'asse y . Infine χ è il vettore delle variabili di stato $\chi = [u, w, q, \theta]^T$ costituito dalle velocità u, w del baricentro lungo le direzioni x_b, z_b , e dall'angolo di beccheggio e velocità angolare θ, q riferiti all'asse y_b . I carichi generalizzati X, Z, M sono le forze aerodinamiche in direzione x_b, z_b e il momento aerodinamico rispetto all'asse y_b , rispettivamente.

Il sistema di equazioni non lineari (54) dovrà essere risolto per ogni istante di tempo nelle sue variabili di stato, forzato dai carichi aerodinamici provenienti dal modello aerodinamico i quali dipendono direttamente anche dalle deformazioni della struttura. In sezione 5.2 si vedrà come anche le variabili di stato influenzino l'aerodinamica (e di conseguenza la struttura).

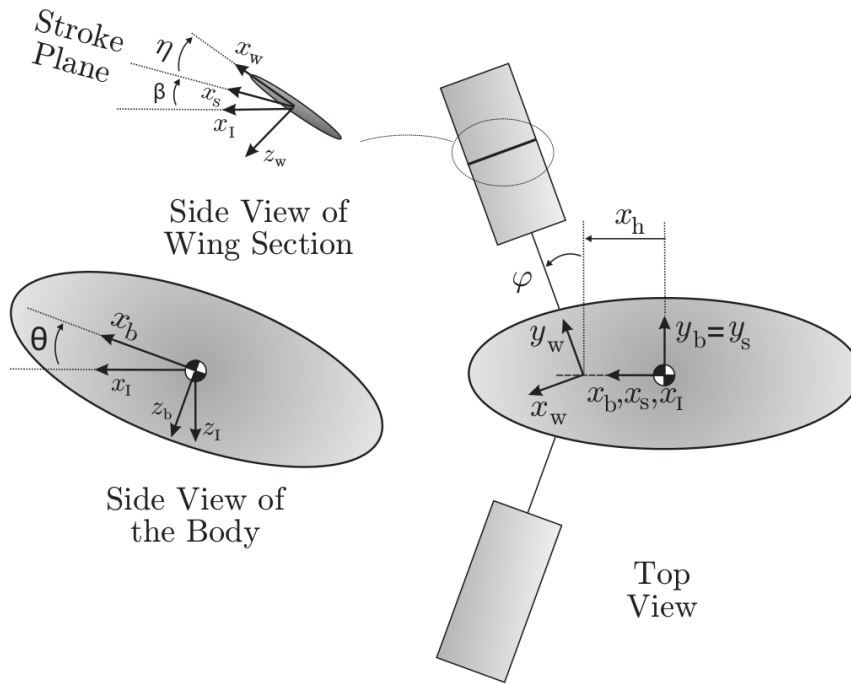


Figura 12: Diagramma schematico di un MAV in condizione di hovering e orientazione generica

5.2 DEFINIZIONI PRELIMINARI

5.2.1 Sistemi di riferimento

Essendo l'obiettivo di questa analisi l'accoppiamento dei tre modelli aerodinamico-strutturale e di dinamica del volo, risulta indispensabile una rigorosa definizione di sistemi di riferimento. Questa necessità nasce dal fatto che i modelli agiscono su frames differenti, come si vedrà successivamente.

In Fig. 12 è fornita una rappresentazione schematica di un MAV in condizione di hovering nel caso in cui le ali siano rigide. Quattro sistemi di riferimento principali sono utilizzati per descrivere il movimento di corpo ed ali: un sistema di riferimento inerziale $\{x_I, y_I, z_I\}$, il sistema di riferimento assi-corpo $\{x_b, y_b, z_b\}$ già descritto nella sezione precedente, un sistema di riferimento proprio del piano di battito $\{x_s, y_s, z_s\}$, e infine un sistema di riferimento fissato sull'ala rigida $\{x_w, y_w, z_w\}$.

La sequenza di angoli di Eulero imbardata-beccheggio-rollio convenzionale (ψ, θ, ϕ) tradizionalmente usata per i veivoli ad ala fissa è qui utilizzata per descrivere l'orientazione del corpo, anche se come già detto soltanto l'angolo θ verrà tenuto in considerazione. Il piano di battito è inclinato rispetto al piano orizzontale di un angolo β . Entrambi i piani x_b-z_b e x_s-z_s sono quindi ottenuti partendo dal frame inerziale e ruotando di θ e β , rispettivamente, attorno l'asse y_I . Il si-

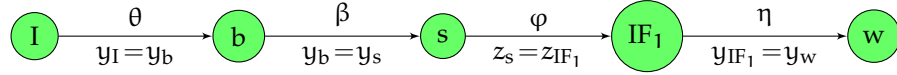


Figura 13: Percorso dei sistemi riferimento da quello inerziale a quello fisso sull'ala rigida

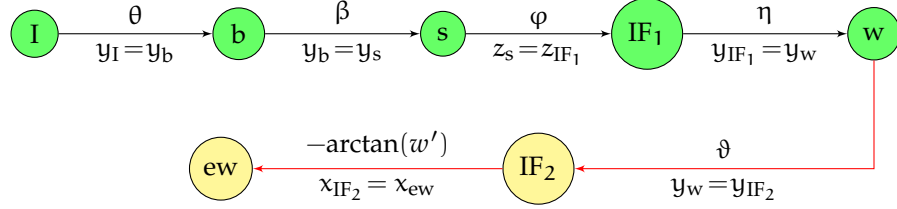


Figura 14: Percorso dei sistemi riferimento da quello inerziale a quello dell'ala elastica

stema di riferimento fisso all'ala è invece definito in modo tale da essere perfettamente allineato al sistema di riferimento di battito per angoli di cinematica (φ, η) nulli. Ruotando di un angolo di flapping φ attorno all'asse z_s si giunge ad un frame intermedio iniziale indicato con IF_1 , dal quale il sistema di riferimento fisso dell'ala rigida può essere ottenuto muovendosi di η (angolo di incidenza imposto) attorno all'asse y_{IF_1} . È importante evidenziare come l'angolo cinematico di affondo δ sia trascurato per le motivazioni enunciate in sezione 2.1. Il set di sistemi di riferimento descritto fino ad ora è quello classico utilizzato nell'analisi di dinamica del volo per MAV in condizione di hovering. Il percorso di rotazioni tra i vari frame è ripercorribile schematicamente in Fig. 13.

L'aggiunta dei gradi di libertà flessionale e torsionale comporta la necessità di un quinto sistema di riferimento principale, questa volta riferito all'ala elastica. Questo frame è indicato col pedice "ew" - *elastic wing* - e contempla prima la rotazione ϑ di ogni sezione lungo l'asse y_w (sistema di riferimento intermedio secondario IF_2) e infine l'angolo di flessione in apertura attorno all'asse x_{IF_2} dato trigonometricamente da $-\arctan(w')$ sotto l'ipotesi di piccole deformazioni, con w' derivata spaziale della deformazione verticale. Si è giunti così al sistema di riferimento finale proprio dell'ala elastica, sul quale i carichi aerodinamici provenienti dal modello aerodinamico (accoppiato con modello strutturale e dinamica del volo) verranno costruiti nello spazio e nel tempo. Il percorso completo delle rispettive rotazioni è mostrato in Fig. 14.

5.2.2 Grandezze cinematiche

Come si vedrà in sezione 5.3 le grandezze di entrata al modello aerodinamico necessarie per stimare i carichi aerodinamici sull'ala sono il vettore velocità e velocità angolare propri di ogni stazione in aper-

tura; più nello specifico, soltanto le componenti orizzontali e verticali della velocità e la componente y del vettore velocità angolare, entrambe espresse nel sistema di riferimento *elastic wing*. Richiamando il modello aerodinamico di Taha et al., infatti, forze e momenti aerodinamici sono espressi in funzione di velocità, velocità angolare e angolo di attacco in ogni punto dell'ala. Come visto nel capitolo 3, il caso di ala rigida riduce queste quantità ad essere semplicemente $r\dot{\phi}$, $\dot{\eta}$ e η , rispettivamente, dato che le deformazioni alari e la dinamica dell'intero corpo non entrano in gioco.

L'aggiunta di queste ultime porta alla necessità di ridefinire le grandezze cinematiche $\mathbf{V}^{[ew]}$ e $\boldsymbol{\omega}^{[ew]}$ in modo tale da tenere direttamente conto dell'accoppiamento tra i tre modelli. L'angolo di attacco puntuale può essere ottenuto partendo dal vettore velocità attraverso la relazione

$$\alpha = \arctan \left[\frac{V_z^{[ew]}}{V_x^{[ew]}} \right] \quad (55)$$

avvalendosi dell'ipotesi di piccoli angoli. Partendo da queste tre quantità, il modello aerodinamico sarà in grado di costruire i carichi nel sistema di riferimento dell'ala elastica tenendo anche conto del movimento del corpo e delle deformazioni delle ali.

Facendo riferimento al MAV schematizzato in Fig. 12, il vettore velocità per ogni sezione alare nel sistema di riferimento ala elastica può essere espresso partendo dalla velocità della cerniera e sommando il prodotto vettoriale tra velocità angolare e distanza di ogni sezione dalla cerniera stessa. Dato che l'ala è libera di flettersi, si aggiunge anche un contributo $-\dot{w}$ in direzione z_{ew}

$$\mathbf{V}^{[ew]}(r, t) = \mathbf{V}_h^{[ew]} + \boldsymbol{\omega}^{[ew]} \times r \mathbf{j}_{ew} - \dot{w} \mathbf{k}_{ew} \quad (56)$$

dove \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} sono i vettori unitari lungo gli assi x , y e z nel sistema di riferimento indicato dal pedice. La velocità della cerniera è nota nel sistema di riferimento assi-corpo in funzione delle variabili di stato

$$\mathbf{V}_h^{[b]} = u \mathbf{i}_b + (w - x_h \dot{\theta}) \mathbf{k}_b \quad (57)$$

quindi per essere espressa nel frame *elastic wing* va moltiplicata per opportune matrici di rotazione definite tramite il percorso di sistemi di riferimento di Fig. 14. Rinominando l'angolo di flessione $-\arctan(w')$ come μ con lo scopo di alleggerire l'annotazione, e ricordando che le rotazioni η e ϑ avvengono lungo lo stesso asse, le matrici di rotazione

possono essere così espresse:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_\beta] &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_\varphi] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{R}_{\eta+\vartheta}] &= \begin{bmatrix} \cos (\eta+\vartheta) & 0 & -\sin (\eta+\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin (\eta+\vartheta) & 0 & \cos (\eta+\vartheta) \end{bmatrix} & [\mathbf{R}_\mu] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -w' \\ 0 & w' & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{58}$$

La matrice $[\mathbf{R}_\mu]$ proposta in (58) è ottenuta da semplici considerazioni geometriche riportate in Appendice A.2. Il vettore velocità della cerniera nel sistema di riferimento ala elastica diventa quindi

$$\mathbf{V}_h^{[ew]} = \underbrace{[\mathbf{R}_\mu][\mathbf{R}_{\vartheta+\eta}][\mathbf{R}_\varphi][\mathbf{R}_\beta]}_{[\mathbf{R}_{TOT}]} \mathbf{V}_h^{[b]} \tag{59}$$

Resta da esprimere il vettore velocità angolare. Considerando ogni rotazione attorno ai rispettivi assi si può scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}') \mathbf{j}_s - \dot{\varphi} \mathbf{k}_{IF_1} + (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \mathbf{j}_{IF_2} - \dot{w}' \mathbf{i}_{ew} \tag{60}$$

tenendo l'angolo β costante (ossia l'inclinazione tra il piano di battito delle ali e il piano orizzontale non varia nel tempo). La derivata temporale dell'angolo di flessione $\mu = -\arctan(w')$ è $-\frac{\dot{w}'}{1+w'^2}$; trascurando i termini di ordine superiore al primo avvalendosi dell'ipotesi di piccole deformazioni, la derivata si riduce al termine $-\dot{w}'$ appunto usato nella (60). Riferendosi al frame ala elastica si ottiene

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}^{[ew]} &= [\mathbf{R}_\mu][\mathbf{R}_{\vartheta+\eta}][\mathbf{R}_\varphi] \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}^{[b]} + [\mathbf{R}_\mu][\mathbf{R}_{\vartheta+\eta}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{pmatrix}^{[IF_1]} + \\
 &+ [\mathbf{R}_\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\eta} + \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}^{[IF_2]} + \begin{pmatrix} -\dot{w}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{[ew]}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Avendo a disposizione il vettore $\boldsymbol{\omega}^{[ew]}$ si possono così ottenere le grandezze cinematiche desiderate $(\omega_y, V_x, V_z)^{[ew]}$ di input al modello aerodinamico (V_x e V_z si ottengono sostituendo le equazioni (57),(59) e (61) nella (56)).

Un'altra grandezza richiesta dal modello aerodinamico è l'accele-

razione normale di ogni stazione alare necessaria per calcolare la portanza non-circolatoria, come si era visto in sezione 3.4. Nel sistema di riferimento dell'ala elastica questa è esprimibile semplicemente derivando nel tempo la componente z del vettore velocità:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{d}{dt} [V_z^{[ew]}] = \\
&= \dot{w}' u \sin \varphi \cos \beta + w' u \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \beta + \\
&\quad - \dot{w}' (w - x_h q) \sin \varphi \sin \beta + \\
&\quad - w' (w - x_h q) \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \beta + \\
&\quad + u (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \cos (\eta + \vartheta) \cos \varphi \cos \beta + \\
&\quad - u \sin (\eta + \vartheta) \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \beta + \\
&\quad - (\dot{z} - x_h \dot{\theta}) (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \cos (\eta + \vartheta) \cos \varphi \sin \beta + \\
&\quad + (w - x_h q) \sin (\eta + \vartheta) \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \beta + \\
&\quad - u (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \sin (\eta + \vartheta) \sin \beta + \\
&\quad - (w - x_h q) (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \sin (\eta + \vartheta) \cos \beta + \\
&\quad - r q \dot{\varphi} \cos \varphi \cos (\eta + \vartheta) + r q \sin \varphi (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \sin (\eta + \vartheta) + \\
&\quad + r \dot{\varphi} \sin (\eta + \vartheta) + r \dot{\varphi} (\dot{\eta} + \dot{\vartheta}) \cos (\eta + \vartheta) \tag{62}
\end{aligned}$$

La derivazione nel tempo di $V_z^{[ew]}$ è stata svolta manualmente per poter individuare e rimuovere i termini di derivata seconda temporale, in quanto non possono essere risolti dalla simulazione numerica implementata.

È di fondamentale importanza sottolineare come tutte grandezze espresse in questa sezione siano funzione sia dalla posizione in apertura che dal tempo, e come siano direttamente dipendenti dal modello strutturale (attraverso le deformazioni w, ϑ) e dalla dinamica del volo (attraverso u, w, θ, q).

5.3 INTERAZIONE DEI MODELLI

Come già anticipato nelle sezioni precedenti, i carichi aerodinamici generati dal battito delle ali del MAV sono rappresentati come funzione della cinematica imposta all'ala stessa, dalle deformazioni strutturali consentite dal modello di trave contemplato e infine dalla dinamica longitudinale del corpo. Il problema sotto analisi è quindi un problema aeroelastico completo con l'aggiunta della dinamica del volo, risolvibile nel tempo attraverso simulazione numerica. L'interazione è rappresentata in Fig. 15, dove i blocchi K, A, S e FD fan rispettivamente riferimento alla cinematica imposta all'ala, modello aerodinamico, modello strutturale e dinamica del volo.

Nello schema presentato si vede come, previa definizione della cinematica imposta all'ala e dell'inclinazione del piano di battito β , il modello aerodinamico costruisca forze e momenti partendo dai vet-

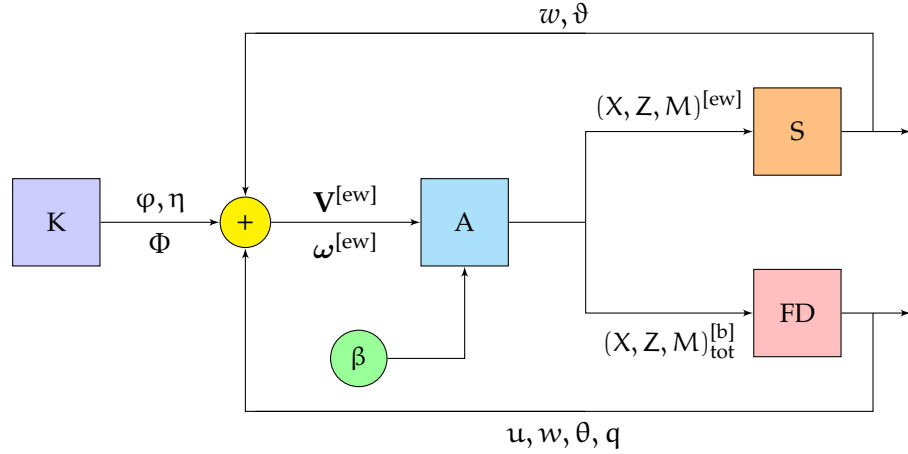


Figura 15: Diagramma schematico dell'interazione tra i vari modelli per un MAV ad ala battente

tori velocità e velocità angolare di ogni stazione in apertura. I carichi costruiti ad ogni step temporale sentono il contributo diretto delle deformazioni alari e della dinamica del volo, le quali a loro volta sono forzate dall'aerodinamica stessa.

Il modello aerodinamico utilizzato per il problema accoppiato rimane formalmente il modello di Taha et al. presentato nel capitolo 3, dove però le quantità utilizzate come input (velocità e velocità angolare di ogni stazione in apertura) dipenderanno adesso anche dalle deformazioni e dal movimento longitudinale del MAV, non più soltanto dalla cinematica imposta all'ala come nel caso di ala rigida. Definendo puntualmente l'angolo di attacco come

$$\alpha(r, t) = \arctan \left[\frac{V_z^{[ew]}(r, t)}{V_x^{[ew]}(r, t)} \right] \quad (63)$$

e richiamando la definizione di coefficiente di portanza statico (22), le circolazioni instazionarie effettive di dei due movimenti di rotazione e traslazione dell'ala sono definite come

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{rot,eff}}(r, t) &= (1 - A_1 - A_2) \Gamma_{\text{rot,QS}} + x_1(r, t) + x_2(r, t) \\ \Gamma_{\text{trasl,eff}}(r, t) &= (1 - A_1 - A_2) \Gamma_{\text{trasl,QS}} + x_3(r, t) + x_4(r, t) \end{aligned} \quad (64)$$

dove le circolazioni quasi-stazionarie $\Gamma_{\text{rot,QS}}, \Gamma_{\text{trasl,QS}}$ dipendono dalla geometria dell'ala e dalle velocità in apertura espresse precedentemente

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{rot,QS}}(r, t) &= \pi c(r) \Delta x(r) \omega_y^{[ew]}(r, t) \\ \Gamma_{\text{trasl,QS}}(r, t) &= -A c(r, t) \left| \mathbf{V}^{[ew]}(r, t) \right| \sin \alpha(r, t) \end{aligned} \quad (65)$$

con $\Delta x(r) = \left(\frac{3}{4} - \widehat{x}_0\right) c(r)$ e A funzione dell'allungamento alare AR tramite

$$A = \frac{1}{2} \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{\left(\frac{\pi AR}{\alpha_0}\right)^2 + 1}} \quad (66)$$

A differenza del caso ad ala rigida, si è deciso di assegnare due stati aerodinamici per ognuna delle due circolazioni (di rotazione e di traslazione) per un totale di quattro stati variabili in apertura e nel tempo che soddisfano le seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2 b_1 |\mathbf{V}^{[ew]}|}{c} [-x_1 + A_1 \Gamma_{\text{rot,QS}}] \\ \dot{x}_2 &= \frac{2 b_2 |\mathbf{V}^{[ew]}|}{c} [-x_2 + A_2 \Gamma_{\text{rot,QS}}] \\ \dot{x}_3 &= \frac{2 b_1 |\mathbf{V}^{[ew]}|}{c} [-x_3 + A_1 \Gamma_{\text{trasl,QS}}] \\ \dot{x}_4 &= \frac{2 b_2 |\mathbf{V}^{[ew]}|}{c} [-x_4 + A_2 \Gamma_{\text{trasl,QS}}] \end{aligned} \quad (67)$$

Una volta definita la portanza non-circolatoria Z_{NC} nel sistema di riferimento *elastic wing* come $Z_{\text{NC}}^{[ew]} = -m_{\text{app}} \alpha_n$ facendo uso della (62) per esprimere l'accelerazione normale, il vettore delle forze aerodinamiche nelle tre direzioni x, y, z è costruito per ogni stazione alare nel tempo nella seguente forma

$$\begin{cases} \chi^{[ew]} = \rho V_z^{[ew]} \Gamma_{\text{rot,eff}} \\ Y^{[ew]} = 0 \\ Z^{[ew]} = \rho V_x^{[ew]} \Gamma_{\text{trasl,eff}} - \rho V_x^{[ew]} \Gamma_{\text{rot,eff}} + Z_{\text{NC}}^{[ew]} \end{cases} \quad (68)$$

tramite il quale è possibile determinare il vettore dei momenti aerodinamici

$$\begin{cases} M_x^{[ew]} = Z^{[ew]} r \\ M_y^{[ew]} = -Z_C^{[ew]} (x_{\text{ea}} - x_{\text{cp}}) c + Z_{\text{NC}}^{[ew]} (x_{\text{cg}} - x_{\text{ea}}) c - \frac{\pi}{16} \rho |\mathbf{V}^{[ew]}| c^3 \omega_y^{[ew]} \\ M_z^{[ew]} = -\chi^{[ew]} r \end{cases} \quad (69)$$

dove $x_{\text{ea}}, x_{\text{cp}}$ e x_{cg} sono le posizioni adimensionali di asse elastico, centro aerodinamico e centro di gravità di ogni sezione alare espresse partendo dal bordo di attacco; il contributo $-\frac{\pi}{16} \rho |\mathbf{V}^{[ew]}| c^3 \omega_y^{[ew]}$ provie-

ne dalla rotazione dell'ala nelle fasi terminali (si veda Binsplinghoff et al. [4] o Fung [15]).

Lo schema di Fig. 15 mostra chiaramente come ad ogni ciclo di iterazione temporale il modello aerodinamico riceva in input i vettori $\mathbf{V}^{[ew]}$, $\omega^{[ew]}$ provenienti dall'iterazione precedente e costruisca la distribuzione dei carichi aerodinamici per ogni stazione alare nel sistema di riferimento ala elastica attraverso i set di equazioni (68) e (69). Questi carichi forzeranno il modello strutturale e la dinamica del volo in modo tale da ottenere le deformazioni alari e i movimenti globali del corpo, i quali definiranno a loro volta i nuovi vettori $\mathbf{V}^{[ew]}$, $\omega^{[ew]}$ da utilizzare nell'iterazione successiva.

È fondamentale però notare come modello strutturale e dinamica del volo necessitino di carichi aerodinamici in ingresso espressi su sistemi di riferimento differenti. La struttura alare viene forzata da forze e momenti espressi nel sistema di riferimento *elastic wing*, quindi riceve come ingresso i carichi $(X, Z, M_y)^{[ew]}$ direttamente provenienti dal modello aerodinamico. Richiamando infatti le definizioni proposte nel capitolo 4, i vettori di forze e momenti generalizzati Ξ, Υ agenti sulla struttura sono ora scritti come

$$\begin{aligned}\Xi_i &= \int_0^R Z^{[ew]}(r, t) \phi_i dr & (i = 1, \dots, n) \\ \Upsilon_j &= \int_0^R M_y^{[ew]}(r, t) \Theta_j dr & (j = 1, \dots, n)\end{aligned}\tag{70}$$

senza più quindi utilizzare i carichi generici F_z, t_y . Le grandezze Ξ, Υ forzano ad ogni iterazione temporale il sistema dinamico di equazioni differenziali ordinarie (45) la cui risoluzione consente di costruire le deformazioni w, ϑ nello spazio e nel tempo.

Dall'altro lato invece la dinamica del volo longitudinale del MAV è dettata dalle equazioni (54) non lineari nelle variabili di stato $\chi = [u, w, q, \theta]^T$, i cui termini forzanti sono i carichi aerodinamici globali agenti sul corpo $(X, Z, M_y)_{tot}^{[b]}$ ottenuti integrando forze e momenti di interesse lungo le due ali

$$\begin{aligned}X_{tot}^{[b]} &= 2 \int_0^R X^{[b]} dr \\ Z_{tot}^{[b]} &= 2 \int_0^R Z^{[b]} dr \\ M_{tot}^{[b]} &= 2 \int_0^R M_y^{[b]} dr\end{aligned}\tag{71}$$

La dinamica del volo è quindi risolta partendo da carichi espressi nel sistema di riferimento assi-corpo; i vettori di forze e momenti uscenti dal modello aerodinamico espressi nel frame ala elastica sono quindi riportati nel sistema di riferimento corretto ad ogni ciclo di iterazione,

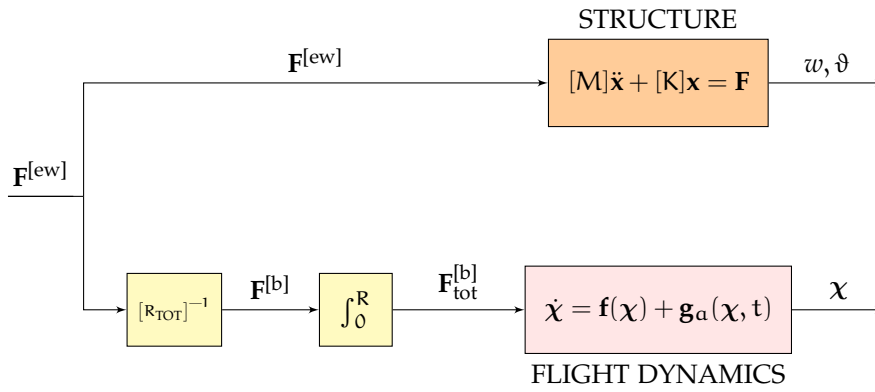


Figura 16: Gestione dei carichi $\mathbf{F}^{[ew]}$ provenienti dalla aerodinamica ed entranti nel modello strutturale e dinamica del volo

consentendo così di risolvere il movimento globale del corpo. Questa operazione è eseguita facendo uso delle matrici di rotazione

$$\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}^{[b]} = [R_{TOT}]^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}^{[ew]} \quad (72)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}^{[b]} = [R_{TOT}]^{-1} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}^{[ew]}$$

In Fig. 16 è riassunto schematicamente il percorso di gestione dell'output del modello aerodinamico, dove con \mathbf{F} è indicato il vettore dei carichi generico.

RISULTATI

In questo capitolo vengono forniti tutti i dati necessari per definire aerodinamica e struttura del MAV sotto analisi. Sono infine presentati i risultati della simulazione numerica effettuata con il codice scritto dall'autore.

6.1 PARAMETRI AERODINAMICI E STRUTTURALI

I parametri morfologici iniziali utilizzati per effettuare l'analisi sono stati scelti facendo riferimento ad un MAV in fase costruzione del gruppo di ricerca Flapping Wing Micro Air Vehicle, presso la University of California, Irvine (USA).

Tab. 4 mostra i parametri utilizzati per descrivere la cinematica delle ali mentre Tab. 5 contiene i parametri morfologici dell'ala. In Tab. 6 sono invece inseriti i valori utilizzati per descrivere il modello strutturale e la dinamica del volo. La simulazione è stata quindi effettuata con una ampiezza di battito Φ pari a 70° e angolo di incidenza imposto $\alpha_m = 45^\circ$; si è utilizzato flapping simmetrico, ossia gli angoli di incidenza di upstroke e downstroke coincidenti. Una volta definiti Φ e α_m il valore della frequenza è stato settato in modo tale che la portanza totale generata dalle ali (configurazione rigida) bilanciasse indicativamente il peso totale del corpo, essendo la configurazione desiderata quella di hovering. Le sezioni alari sono descritte come lastre piane rigide di spessore costante h e corda variabile in apertura, per avvicinarsi il più possibile al caso realistico. Definito il valore \bar{c} alla radice, l'andamento della corda in apertura è di tipo ellittico

$$c(r) = \bar{c} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (73)$$

e lo è di conseguenza anche la distribuzione della massa, essendo spessore e densità costanti. Il momento di inerzia rotazionale I_0 di ogni sezione attorno al proprio asse y è stimato partendo da corda, massa e spessore di ogni stazione. La superficie alare è ottenuta integrando la distribuzione della corda in apertura $S = \int_0^R c(r) dr$, dalla quale si ricava una stima dell'allungamento AR . Le rigidezze flessionali e torsionali EI, GJ adoperate hanno anch'esse andamento ellittico e si riferiscono ai valori alla radice \bar{EI}, \bar{GJ} presenti in tabella 6.

I vari andamenti in apertura di corda, massa, inerzia rotazionale e rigidezze sono riportati in Appendice A.4. La cinematica imposta all'ala è mostrata in Fig. 17 dove la prima metà del ciclo descrive la fase di downstroke in cui le ali si muovono verso la prua, mentre

Tabella 4: Parametri aerodinamici utilizzati per la simulazione

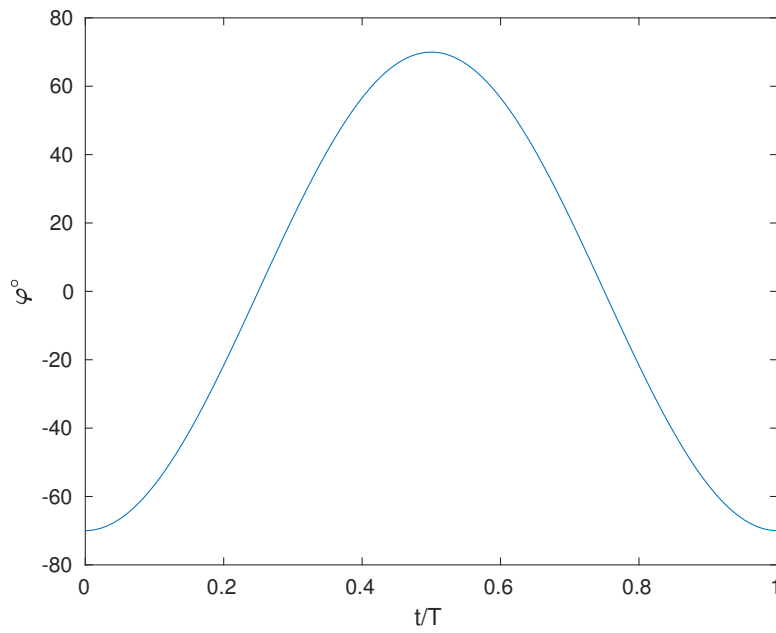
Parametri aerodinamici	Valore	Unità di misura
f	45	Hz
Φ	70	deg
α_m	45	deg
Δt_r	0.25T	s

Tabella 5: Parametri morfologici dell'ala utilizzati per la simulazione

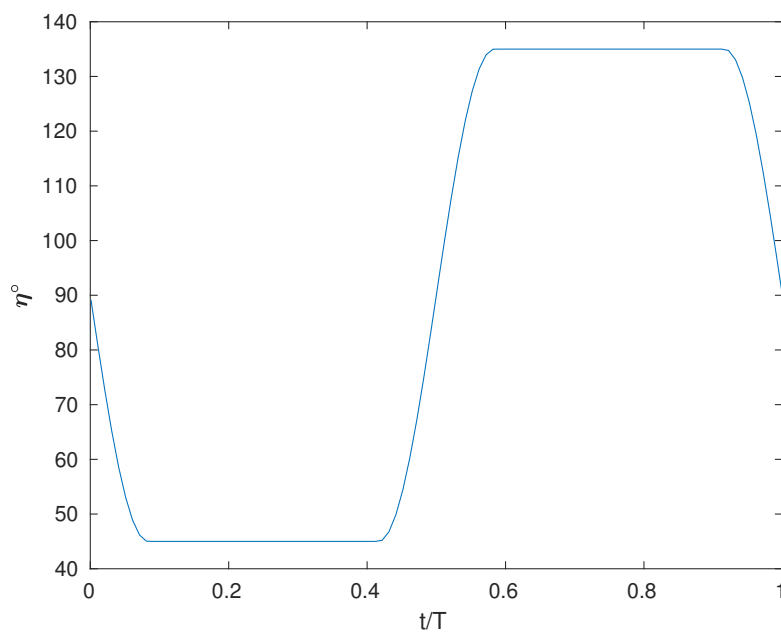
Parametri morfologici	Valore	Unità di misura
R	125	mm
\bar{c}	93	mm
h	1	mm
S	0.0091	m ²
AR	1.72	-
x_h	0	mm
\hat{x}_0	0.3	-
x_{cg}	0.5	-
x_{cp}	0.25	-
x_{ea}	0.5	-

Tabella 6: Parametri strutturali del MAV

Parametri strutturali	Valore	Unità di misura
Massa alare m_w	0.0144	kg
Massa totale del corpo M	0.1435	kg
Momento di inerzia del corpo I_y	$3.4314 \cdot 10^{-4}$	kg · m ²
Rigidezza flessionale \bar{E}	0.0194	N · m
Rigidezza torsionale \bar{G}	0.2391	N · m



(a) Angolo di flapping in funzione del tempo



(b) Angolo di incidenza imposto in funzione del tempo

Figura 17: Leggi cinematiche imposte al MAV

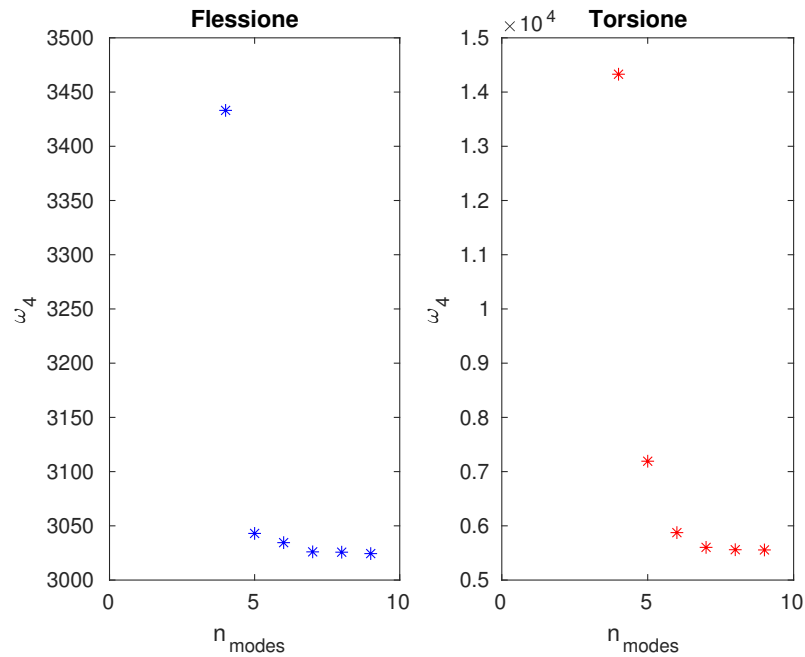


Figura 18: Stima di ω_4 al crescere del numero di modi utilizzati nel metodo di approssimazione

nella seconda metà del ciclo tornano indietro (upstroke) dopo aver ruotato di 90° lungo il loro asse di beccheggio.

6.2 SIMULAZIONE

La simulazione è stata eseguita utilizzando il software Matlab[®]. Il lato spazio-variante del problema è risolto dal codice al di fuori della simulazione temporale; come si è visto nel capitolo 4 infatti le deformazioni strutturali sono approssimate come prodotto tra un numero finito di modi di vibrare e le coordinate normali. I modi propri della struttura alare, flessionali e torsionali, con le rispettive frequenze naturali, non dipendono dal tempo quindi vengono approssimati una volta soltanto per poi essere passati alla simulazione numerica come variabili globali.

L'approssimazione di modi e frequenze propri delle ali è stata effettuata utilizzando il metodo di Rayleigh-Ritz riferendosi alla formulazione presentata in sezione 4.3. Si è scelto di condurre l'approssimazione considerando sette modi ($n_{\text{modes}} = 7$) per poi utilizzarne soltanto i primi quattro ($n_{\text{used}} = 4$). Questa scelta è giustificata dal fatto che l'approssimazione dei primi modi diventa più accurata man mano che aumenta il numero di modi considerati, a discapito degli ultimi che saranno meno precisi e vengono quindi scartati. Focalizzandosi quindi sull'ultimo modo che si è deciso di utilizzare (il quarto), si è cercato il numero di modi da usare per il quale l'approssimazione del quarto fosse soddisfacente. In Fig. 18 sono rappresentate le ap-

prossimazioni delle frequenze ω_4 relative ai modi di vibrare quarti di flessione e torsione per valori crescenti di n_{modes} . A cominciare da $n_{\text{modes}} = 7$ entrambe le frequenze di flessione e torsione si assestano su valori pressoché costanti, rendendo così tale numero una scelta valida per ottenere una buona approssimazione delle grandezze desiderate.

Facendo uso del metodo di Rayleigh-Ritz, le frequenze approssimate di flessione e torsione dell'ala elastica sotto analisi sono le seguenti, presentate in ordine crescente

$$\omega_b = \begin{pmatrix} 111 \\ 599 \\ 1582 \\ 3026 \end{pmatrix} \text{ Hz} \quad \omega_t = \begin{pmatrix} 948 \\ 2499 \\ 4029 \\ 5603 \end{pmatrix} \text{ Hz} \quad (74)$$

In Fig. 19 sono invece riportati i rispettivi modi propri approssimati, normalizzati rispetto il valore in estremità e costruiti partendo dalle funzioni geometriche di forma (51),(53). Nel grafico y ed L indicano rispettivamente posizione in apertura e lunghezza totale dell'ala. Entrambe le distribuzioni di ϕ, Θ sono quindi note nello spazio e sono mandate alla simulazione temporale per ricavare le grandezze necessarie.

Il calcolo temporale si occupa invece della risoluzione delle varie equazioni differenziali ordinarie provenienti dai modelli aerodinamico-strutturale e di dinamica del volo. Il solutore utilizzato è la function `ode45` di Matlab[®], la quale presenta un ordine di accuratezza medio nella risoluzione di equazioni ODE. Ad ogni step temporale la simulazione risolve il problema completo accoppiato nelle sue incognite differenziali, poste a zero nelle condizioni iniziali. I set di ODE che vengono risolti sono i seguenti

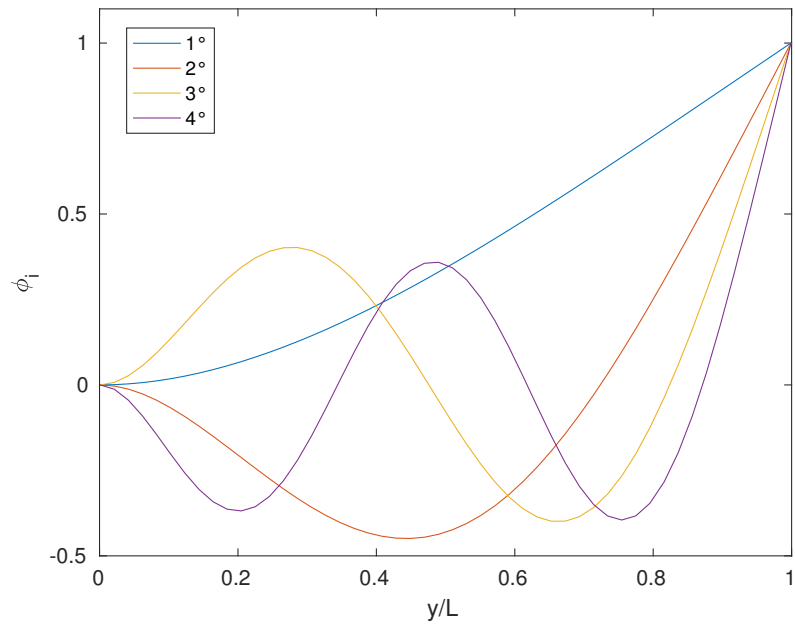
AERODINAMICA: equazioni (67) nei quattro stati aerodinamici x_1, x_2, x_3, x_4 per ognuna delle cinquanta stazioni alari in apertura.

STRUTTURA: sistema di equazioni differenziali di secondo grado (45) nelle otto coordinate normali di flessione/torsione ξ, κ e rispettive derivate prime $\dot{\xi}, \dot{\kappa}$.

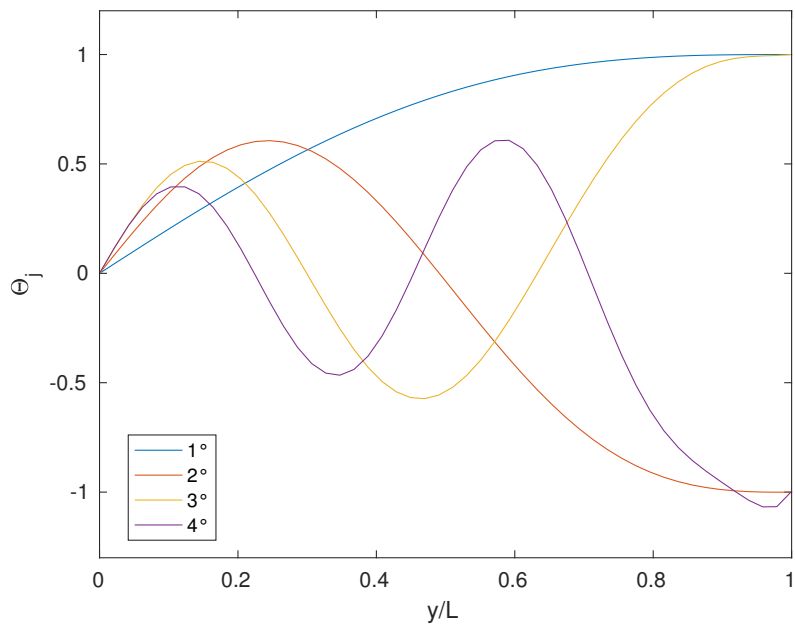
DINAMICA DEL VOLO: equazioni della dinamica longitudinale del corpo (54) nelle quattro variabili di stato u, w, q, θ .

Si ha quindi un totale di 220 equazioni differenziali in 220 incognite. Una volta terminata la simulazione temporale è possibile ricostruire al di fuori di essa tutte le grandezze desiderate, ora note sia in apertura alare che nel tempo. I grafici che seguono mostrano i risultati su sei cicli di battito.

Il coefficiente di portanza totale generato dal contributo aerodinamico di entrambe le ali è rappresentato in Fig. 20. La portanza totale



(a) Flessione



(b) Torsione

Figura 19: Modi di vibrare approssimati dell'ala elastica sotto analisi

nel tempo è costruita integrando in apertura i carichi aerodinamici nel sistema di riferimento assi-corpo e successivamente riportandoli nel sistema di riferimento inerziale

$$L(t) = 2 \int_0^R \left[-Z^{[bl]}(r, t) \cos \theta(t) + X^{[bl]}(r, t) \sin \theta(t) \right] dr \quad (75)$$

Dividendo il carico per una pressione dinamica di riferimento $\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2$ calcolata alla stazione alare mediana si ottiene in questo modo il coefficiente di portanza totale. Il C_L mostrato risente dell'accoppiamento dei tre modelli e risulta quindi differente dal coefficiente di portanza mostrato in Fig. 7 riferito soltanto all'ala rigida.

Le deformazioni alari di flessione e torsione sono costruite utilizzando i modi di vibrare approssimati e le coordinate normali ξ, κ uscenti dalla simulazione temporale. Gli andamenti sono riportati in Fig. 21. Come si può vedere l'entità delle deformazioni è oscillante nel tempo essendo esse generate da carichi aerodinamici tempo-varianti. Gli spostamenti verticali delle sezioni dovuti alla flessione sono nulli alla radice dell'ala e crescono spostandosi verso l'estremità. In Fig. 21c lo spostamento w è mostrato in apertura per particolari valori temporali durante il secondo ciclo di battito. La flessione raggiunge deformazioni fino ai 15 mm in modulo mentre la torsione supera i 1.5° . In Fig. 21d si può notare come le ultime dieci stazioni in apertura mantengano approssimativamente un angolo di torsione costante.

Entrambe le deformazioni e la dinamica del volo contribuiscono a modificare l'angolo di attacco istantaneo di ogni stazione alare. Nel caso di ala rigida spazzante su un piano orizzontale (capitolo 3) l'angolo di attacco visto dal modello aerodinamico nelle fasi di upstroke/downstroke deriva direttamente dall'angolo di incidenza imposto η ; definire invece l'angolo di input al modello aerodinamico usando l'espressione già vista

$$\alpha = \arctan \left[\frac{V_z^{[ew]}}{V_x^{[ew]}} \right]$$

consente al problema completo di tenere conto dell'accoppiamento tra i modelli. A livello computazionale il codice stima l'angolo α usando il comando `atan2(Vz, Vx)` invece del generico `atan(Vz/Vx)`, essendo richiesto un angolo nei quattro quadranti e non nel range $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

È importante evidenziare come l'angolo "computazionale" α tramite il quale il modello aerodinamico costruisce i carichi non coincida con l'angolo di attacco reale AOA. Quest'ultimo può essere definito partendo da α via

$$\begin{cases} \text{AOA} = +\alpha & \text{downstroke} \\ \text{AOA} = -\alpha & \text{upwnstroke} \end{cases} \quad (76)$$

generando un angolo visto dall'ala pressoché costante se non nelle fasi terminali di rotazione da una configurazione all'altra. Questo comportamento si può vedere chiaramente in Fig. 23 dove l'angolo di attacco risulta nel complesso costante e con un valore attorno ai 40° . Fig. 22 mostra invece l'andamento di α : i picchi che intercorrono tra fasi di upstroke e downstroke sono dovuti al passaggio tra quadranti differenti nel calcolo della tangente inversa.

Si ricorda ancora come α , e di conseguenza anche l'angolo di attacco reale, siano dipendenti sia dal tempo che dalla posizione in apertura: spostandosi dalla radice dell'ala verso l'estremità ogni stazione dovrà aggiungere all'angolo imposto η un contributo diretto di torsione ϑ lungo lo stesso asse, più un contributo indotto dovuto alla flessione. Entrambi questi elementi variano nello spazio-tempo influenzando così l'angolo finale stesso. Tale differenza nello spazio, seppur di ordine di grandezza contenuto, è facilmente apprezzabile in entrambe le Fig. 22,23 di cui è proposta una porzione ingrandita. Infine, è importante sottolineare come l'angolo di attacco reale sia anche dipendente dalla dinamica dell'intero MAV attraverso le variabili di stato χ . Il movimento longitudinale partecipa quindi alla costruzione di α nel tempo e questo si può notare ad esempio in Fig. 23 osservando l'andamento medio di AOA in radice: essendo le deformazioni nulle in radice, l'angolo di attacco differisce da η esattamente a causa della dinamica del volo (essendo β tenuto a zero nella simulazione).

Per quanto riguarda la dinamica globale del MAV, l'andamento delle variabili di stato longitudinali proposto in Fig. 24 mostra una netta instabilità. Essendo la configurazione sotto analisi quella di hovering, i risultati desiderati avrebbero velocità in avanti, verticale e angolare con media nulla; al contrario la simulazione lanciata per sei cicli indica una u media negativa e velocità verticale crescente in modo uniforme (sistema di riferimento assi-corpo). Questo significa che per un osservatore esterno il MAV cade accelerando e muovendosi in direzione x negativa. La traiettoria è rappresentata in Fig. 25 dove gli assi sono riferiti ad un frame generico esterno. Anche l'angolo di beccheggio θ mostra una natura decisamente instabile, diminuendo quasi linearmente nel tempo e modificando così l'assetto del MAV. Obiettivo della seconda parte di questo lavoro sarà lo studio della stabilità e la progettazione di un sistema di controllo tale da garantire con successo la condizione di hovering.

Per concludere la prima parte della trattazione, è proposto un confronto tra il problema aeroelastico accoppiato e il modello puramente ad ala rigida. Partendo dal codice implementato completo, basta porre a zero le variabili proprie dei singoli modelli per isolare soltanto

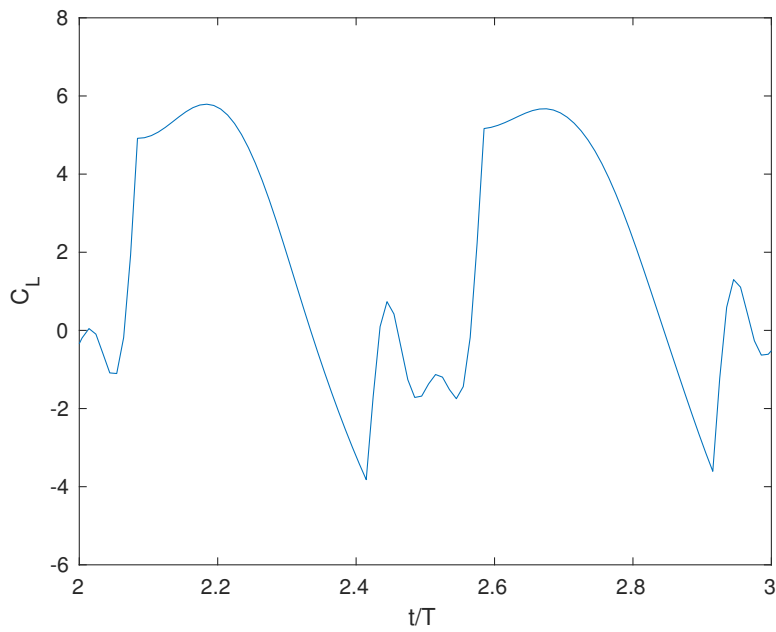


Figura 20: Coefficiente di portanza

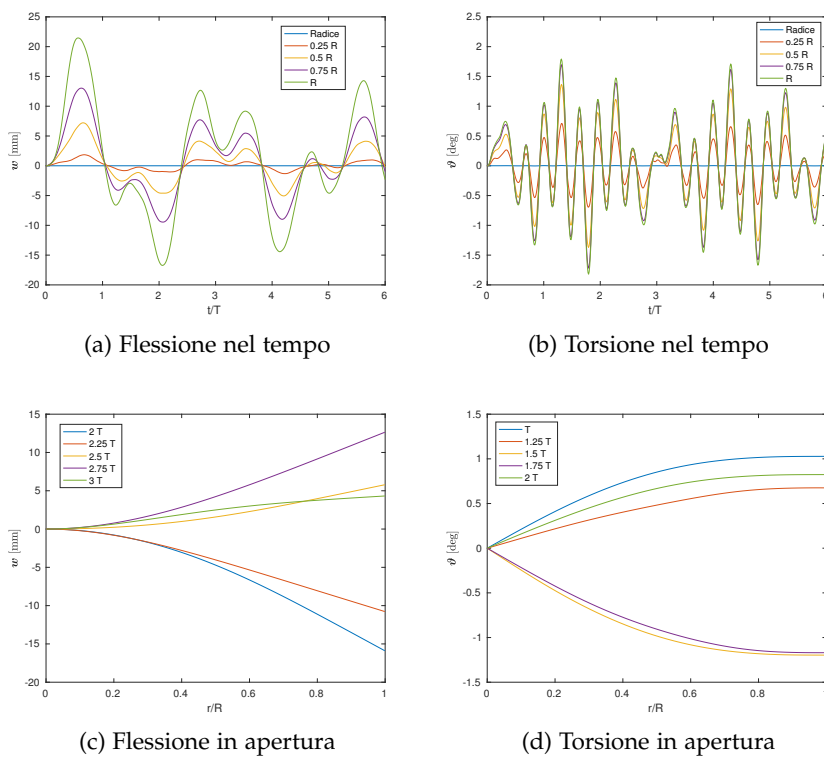
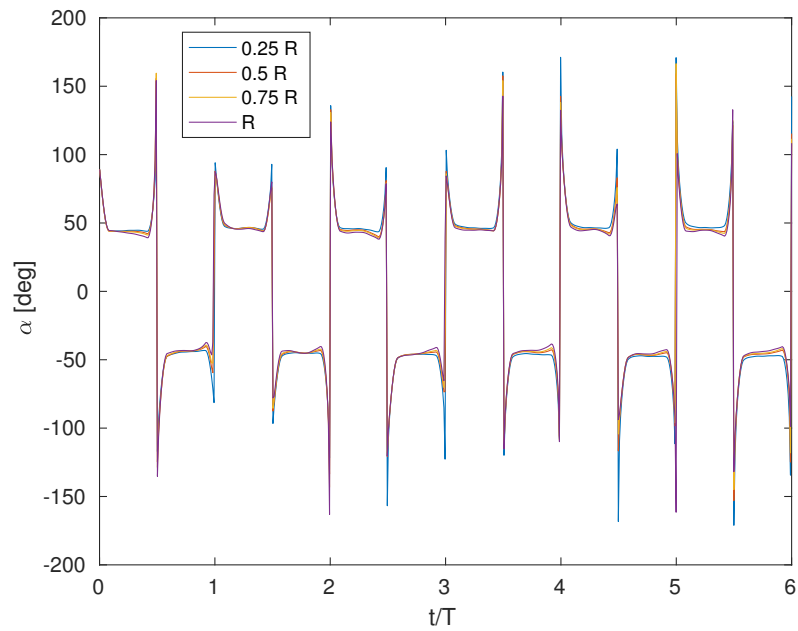
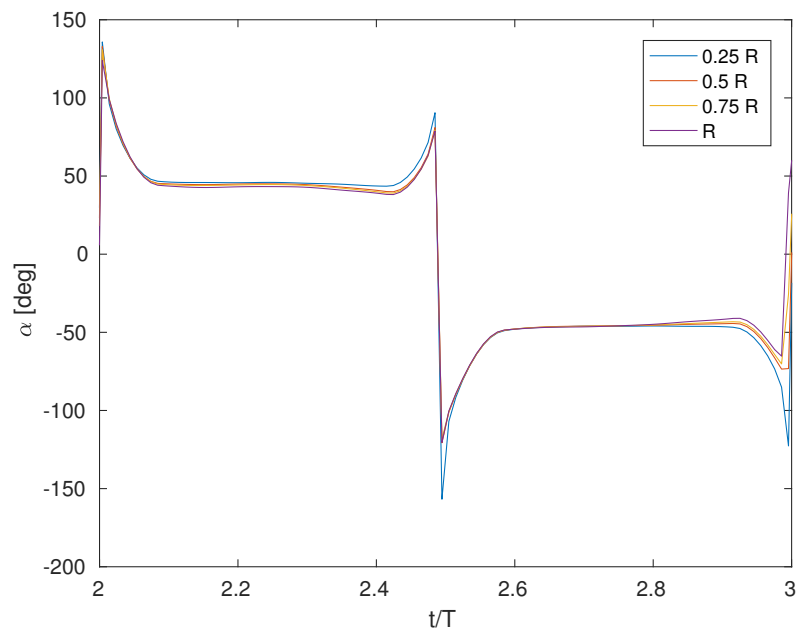
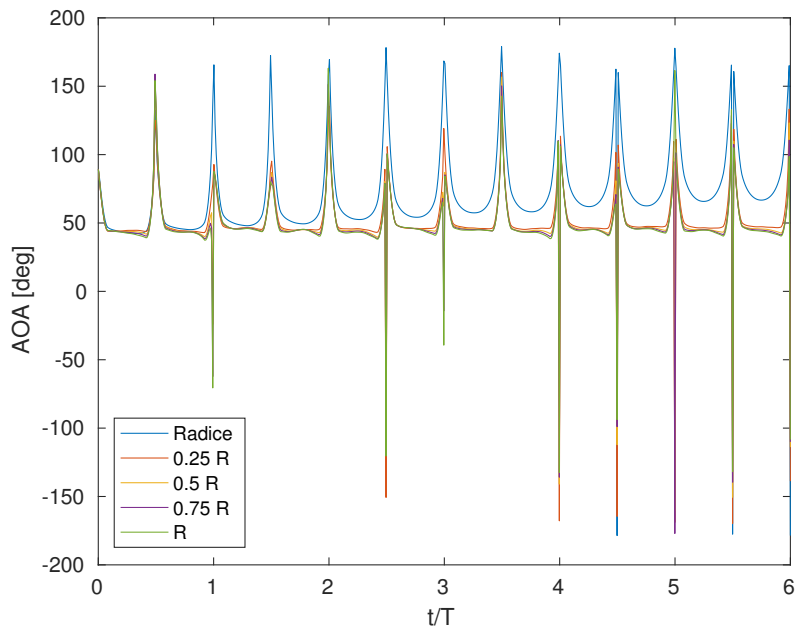
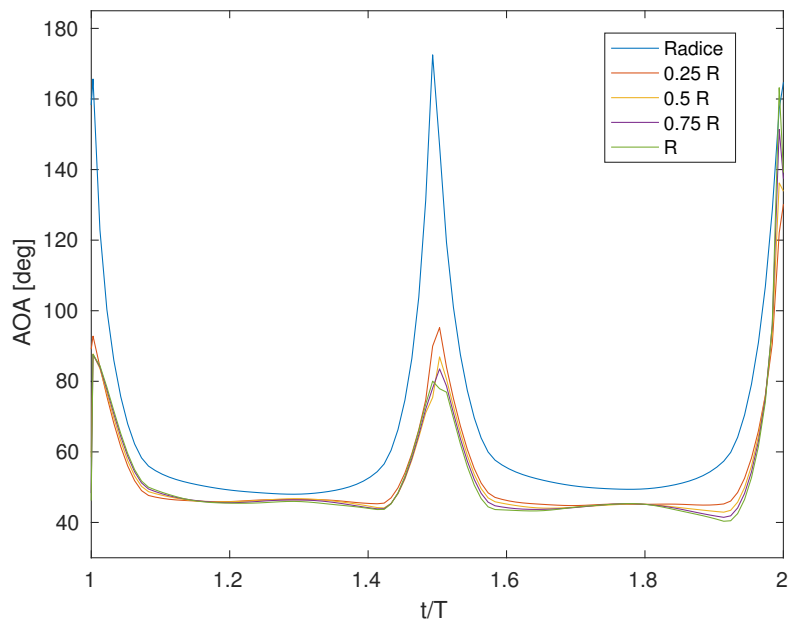


Figura 21: Deformazioni nel tempo e in apertura

(a) Angolo α in funzione del tempo(b) Porzione ingrandita di α Figura 22: Angolo computazionale $\alpha = \text{atan2}(V_z, V_x)$



(a) Angolo di attacco reale nel tempo



(b) Porzione ingrandita dell'angolo di attacco reale

Figura 23: Angolo di attacco reale

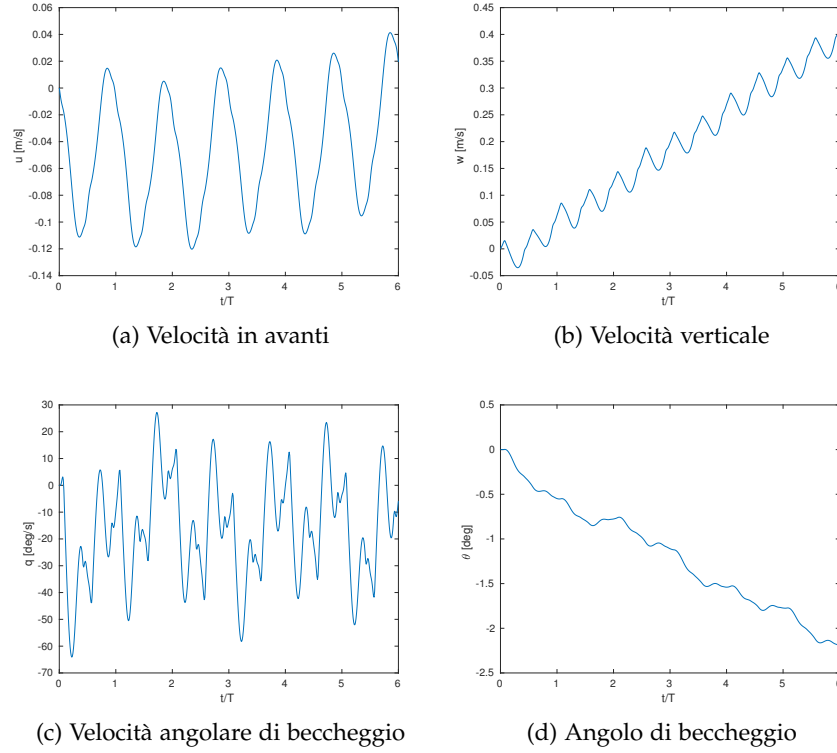


Figura 24: Simulazione della dinamica del volo proveniente dai tre modelli accoppiati

una parte del problema. I risultati del caso aeroelastico sono quindi ottenuti imponendo

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ m/s} & w &= 0 \text{ m/s} \\ q &= 0 \text{ rad/s} & \theta &= 0 \text{ rad} \end{aligned} \quad (77)$$

all'inizio della simulazione. Il problema ad ala rigida semplice invece risolve lo stesso identico codice facendo valere le condizioni (77) e settando anche le deformazioni strutturali a zero (insieme alle rispettive derivate temporali e spaziali). I coefficienti di portanza provenienti dalle due configurazioni differenti sono riportati in Fig. 26. Il metro di misura utilizzato per il confronto è

$$\Delta \overline{C_L} \% = \frac{\overline{C_{L\text{elastic}}} - \overline{C_{L\text{rigid}}}}{\overline{C_{L\text{rigid}}}} \% \quad (78)$$

Trascurando il primo ciclo transitorio, la differenza tra C_L elastico e rigido è del -11% indicando un calo di prestazioni dal punto di vista aerodinamico. I risultati ottenuti sono chiaramente molto sensibili alla cinematica imposta e alle proprietà elastiche con cui si sono descritte le ali. Si ricorda inoltre che l'analisi proposta è riferita soltanto alla configurazione di hovering. Lo scompenso di carichi provenien-

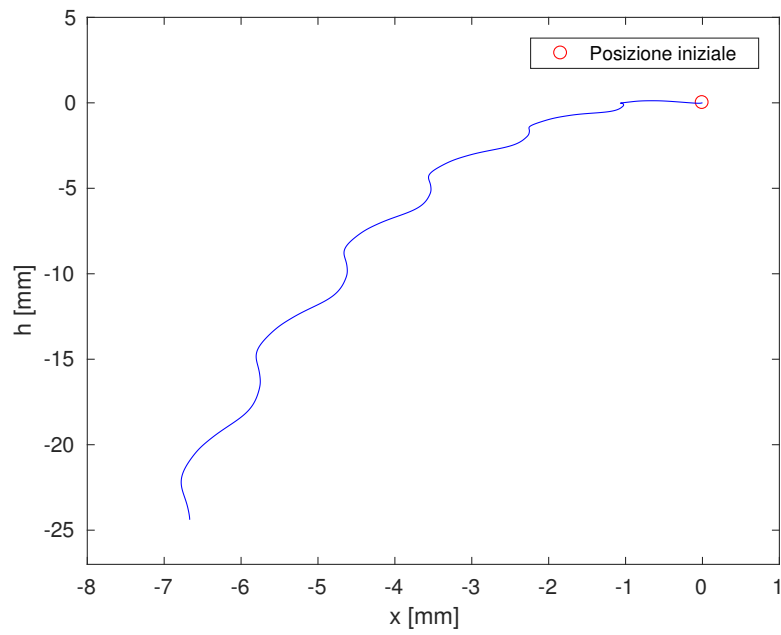


Figura 25: Traiettoria del MAV su sei cicli di battito

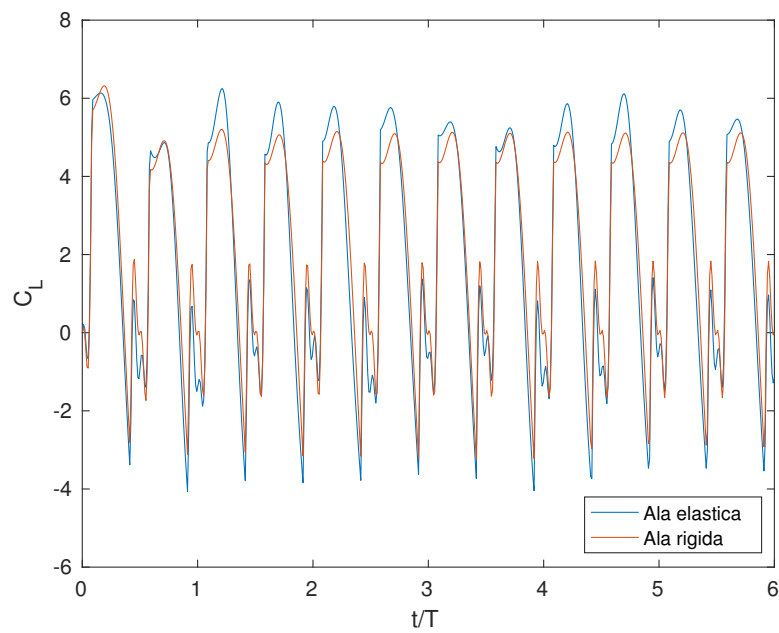


Figura 26: Confronto tra ala rigida ed elastica

te dal confronto non è quindi in contrasto con l'obiettivo principale del lavoro, ossia l'utilizzo di ali deformabili per avvicinarsi sempre di più al volo ad ala battente osservato in natura. Un ottimo spunto per analisi successive è la ricerca di proprietà strutturali, geometriche e cinematiche tali da rendere l'elasticità favorevole per il MAV in considerazione e in questa configurazione di volo.

Parte II

STABILITÀ E CONTROLLO

L'analisi condotta sulla dinamica dell'intero veivolo ha mostrato l'incapacità del corpo di sostenere il proprio peso e mantenere un assetto particolare. La seconda parte di questo lavoro (capitoli 7 e 8) è rivolta allo studio di stabilità e controllo centrati sulla configurazione di hovering.

7.1 INTRODUZIONE

La dinamica del volo ad ala battente è oggetto di particolare interesse per la comunità scientifica che si occupa dei Micro Air Vehicles. Anche i modelli più semplici infatti implicano una dinamica multi-corpo, non lineare e instazionaria. Come già chiarito in sezione 5.1 una assunzione comune è trascurare gli effetti inerziali delle ali sulla dinamica globale del corpo. A giustificare questa ipotesi la grande differenza tra massa alare e massa del corpo con la conseguente possibilità di trascurare gli effetti multi-corpo. Si giunge così ad equazioni di governo longitudinali analoghe a quelle di veivoli convenzionali. Ciò nonostante, il flapping genera carichi aerodinamici instazionari che conducono ad un modello dinamico tempo-variante, la cui natura si scosta dalla dinamica del volo classica. In condizione di hovering non si ha quindi un punto fisso di equilibrio, bensì un'orbita periodica di equilibrio.

Trascurando gli effetti inerziali delle ali, la dinamica del volo di un MAV ad ala battente può essere rappresentata tramite un sistema periodico non lineare, in inglese NLTP. L'analisi di stabilità di un sistema di questo genere (e riferendosi alla configurazione di hovering) è generalmente condotta scegliendo uno dei due approcci rappresentati schematicamente in Fig. 27. Nel primo approccio si procede mediando nel tempo in modo da ottenere un sistema non lineare tempo-invariante (NLTI) con un punto singolo di equilibrio. Per frequenze di battito sufficientemente elevate, il teorema della media garantisce che la stabilità esponenziale del punto fisso soluzione del sistema NLTI implichi che la corrispondente orbita periodica del problema originale NLTP sia anch'essa esponenzialmente stabile. Per determinare la stabilità del punto fisso basta linearizzare il sistema NLTI ottenendo così un modello lineare e tempo-invariante (LTI) e conducendo successivamente uno studio degli autovalori.

Un via meno comune ma comunque utilizzata ([24, 42, 51]) consiste nel trovare la soluzione periodica del sistema NLTP attraverso approccio numerico. Linearizzando attorno a questa soluzione si ottiene un

sistema lineare periodico (LTP) la cui stabilità può essere esaminata tramite la teoria di Floquet.

La condizione di hovering richiede solitamente frequenze di battito relativamente elevate se comparate con il volo in avanti. Come già riferito, la dinamica di un MAV in hovering vede due scale di tempo differenti: quella veloce delle ali e quella più lenta riferita al movimento del corpo. Se il rapporto tra le due scale è sufficientemente grande, il primo approccio di Fig. 27 (media temporale) risulta intuitivamente giustificabile e quindi adatto ad analisi di stabilità. Un grande vantaggio del secondo approccio invece è la sua validità anche per problemi con scale simili. D'altro canto, l'applicazione della teoria di Floquet è applicabile soltanto se si ha a disposizione la matrice fondamentale soluzione del sistema LTP, la cui stima non è facile nella pratica: trovare l'orbita periodica attorno la quale ricavare la soluzione della matrice fondamentale richiede tipicamente l'utilizzo di metodi numerici.

Riassumendo, sebbene il secondo approccio (Floquet) non abbia limitazioni sulla natura del sistema periodico sotto analisi, l'inevitabile necessità di un'implementazione numerica preclude la possibilità di analizzare il comportamento dinamico del sistema a livello analitico. Allo stesso tempo, seppur il teorema della media consenta una trattazione analitica, la sua applicazione a problemi privi di una netta separazione di scale temporali rende i risultati discutibili. La via scelta per condurre l'analisi di stabilità nel presente lavoro è la seconda. Parte del primo approccio verrà comunque usato nel capitolo 8 per ottenere il sistema lineare tempo-invariante LTI sul quale progettare il sistema di controllo.

7.2 OPTIMIZED SHOOTING METHOD

Avendo deciso di affrontare lo studio di stabilità attraverso il secondo approccio di Fig. 27, il primo passo è quello di catturare l'orbita periodica del MAV che assicuri l'hovering.

$$\text{NLTP} \xrightarrow{\text{OSM}} \text{orbita periodica} \xrightarrow{\text{lineariz.}} \text{LTP} \xrightarrow{\text{Floquet}} \text{stabilità}$$

Come già detto, la scelta effettuata implica l'utilizzo di metodi numerici. L'*Optimized Shooting Method* (OSM) qui adoperato è un metodo numerico proposto da Botha e Dednam [11] il quale mira alla ricerca delle soluzioni periodiche di sistemi non lineari sia stazionari che instazionari. Il metodo è basato principalmente sull'algoritmo di Levenberg-Marquardt (LMA), uno schema di ottimizzazione ai minimi quadrati per problemi non lineari. Per spiegare brevemente il funzionamento, si suppone che si voglia adattare la soluzione ottenuta ad una funzione desiderata $\hat{y}(t; \mathbf{p})$ per un set particolare di m valori (t_i, y_i) . La variabile indipendente è t mentre \mathbf{p} è un vettore di

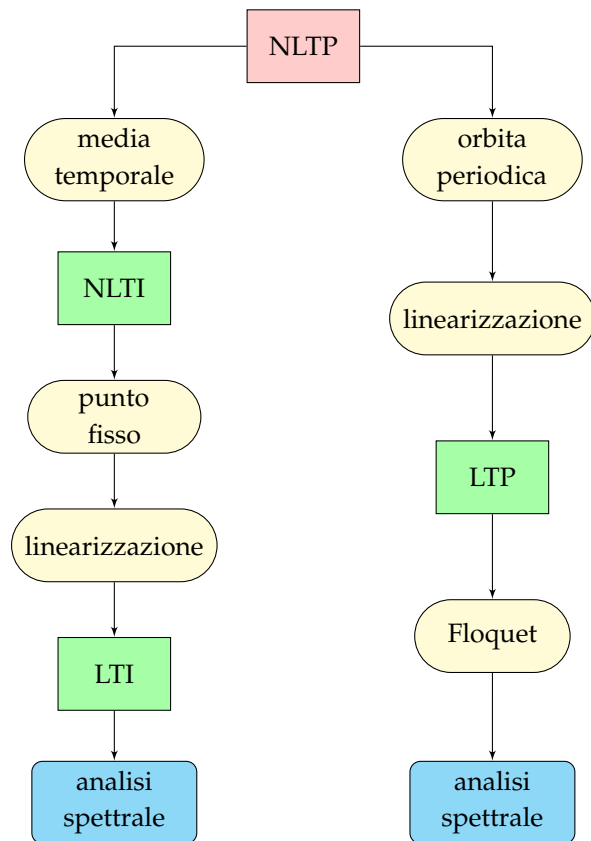


Figura 27: Approcci differenti per analizzare la stabilità di sistemi NLTP

n parametri di sistema. La risoluzione di questo problema richiede la minimizzazione della somma pesata degli scarti quadrati tra i dati misurati e la funzione desiderata, ossia

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{y(t_i) - \tilde{y}(t_i; \mathbf{p})}{w_i} \right]^2 \quad (79)$$

con w_i peso i -esimo. Tradizionalmente si utilizzano due metodi differenti per ottenere il minimo: il metodo di discesa del gradiente e il metodo Gauss-Newton. L'algoritmo LMA aggiorna i parametri di sistema in modo adattivo, scegliendo la direzione di ricerca facendo uso incrociato di entrambi i metodi sopracitati. Se si è molto distanti dal minimo della funzione, il metodo di discesa del gradiente entra in gioco per garantire un avvicinamento veloce alla soluzione. All'avvicinarsi della soluzione al minimo, l'algoritmo LMA prediligerà automaticamente il metodo di Gauss-Newton per il quale la convergenza è più rapida. Riferendosi al caso sotto analisi, l'idea principale è la minimizzazione di un vettore di residui valutato su istanti di tempo ad un ciclo gli uni dagli altri.

Considerando infatti un sistema dinamico non lineare

$$\dot{x} = f(x, \alpha, t) \quad (80)$$

con $x, f \in \mathbb{R}^n$ e α vettore di parametri di sistema $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, il sistema si definisce periodico se

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall \quad t \geq 0 \quad (81)$$

dove T è il periodo ($T > 0$). Il metodo OSM può essere applicato ad ogni sistema esprimibile nella forma (80). Le condizioni al contorno sul periodo possono essere semplificate introducendo il tempo adimensionale τ , tramite il quale il sistema diventa

$$\dot{x} = T f(x, \alpha, T\tau) \quad (82)$$

$\tau = 1$ indica quindi un periodo completo. Nella pratica esistono vie differenti per definire il vettore dei residui: queste dipenderanno dalle quantità (condizioni iniziali e parametri) da ottimizzare. Il residuo qui utilizzato è nella seguente forma

$$\mathbf{R} = [x(1) - x(0), x(1 + \Delta\tau) - x(\Delta\tau), \dots, x(1 + (p-1)\Delta\tau) - x((p-1)\Delta\tau)] \quad (83)$$

con $\Delta\tau$ step di integrazione fissato a $\Delta\tau = 2^{-10}$ in analogia con il lavoro di Botha. Il numero naturale p nella formulazione del residuo è un requisito dell'algoritmo LMA e deve essere scelto tale da rendere il numero delle componenti di \mathbf{R} maggiore o al più uguale al numero di quantità da ottimizzare. Il principale obiettivo è quindi

Tabella 7: Guess iniziali fornite al problema di ottimizzazione

C.I.	guess	Parametri	guess
\hat{u}_0	0.1	Φ	46°
\hat{w}_0	1.01	α_d	31°
\hat{q}_0	$-0.4 \cdot \frac{\pi}{180}$	α_u	33°
θ_0	$-0.4 \cdot \frac{\pi}{180}$		

minimizzare il vettore dei residui così da ottenere quei parametri e condizioni iniziali che pongono il sistema non lineare in equilibrio ($\mathbf{R} = 0$ fornisce la soluzione periodica).

RISULTATI Essendo interessati a catturare l'orbita periodica che garantisca l'hovering bisogna assicurarsi che le velocità medie del centro di gravità (velocità verticale e orizzontale) siano nulle. Si è scelto quindi di introdurre due nuovi stati x, h riferiti alla posizione longitudinale del MAV vista da un osservatore esterno. I due stati partecipano quindi alla simulazione temporale e sono calcolabili attraverso

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \theta + w \sin \theta \\ \dot{h} &= u \sin \theta - w \cos \theta\end{aligned}\quad (84)$$

Dal punto di vista della cinematica, l'introduzione del flapping asimmetrico ($\eta_{\text{downstroke}} \neq \eta_{\text{upstroke}}$) offre un grado di libertà in più utile per ottenere i risultati ricercati. Vincolando la frequenza di battito a $f = 45\text{Hz}$, i parametri e condizioni iniziali scelti da ottimizzare sono le quattro variabili di stato iniziali $\chi_0 = (u_0, w_0, q_0, \theta_0)$, l'ampiezza di battito Φ e i due angoli cinematici imposti α_d, α_u ossia η per le condizioni di downstroke/upstroke rispettivamente. I valori assegnati come guess iniziali sono riportati in Tab. 7 all'interno della quale le tre velocità sono adimensionalizzate attraverso le grandezze caratteristiche R, T del problema sotto analisi

$$\hat{u} = u \cdot \frac{T}{R} \quad \hat{w} = w \cdot \frac{T}{R} \quad \hat{q} = q \cdot T \quad (85)$$

Il vettore \mathbf{R} è invece costituito dai valori residui delle quattro va-

Tabella 8: Risultati del problema di ottimizzazione

C.I.	valore esatto	Parametri	valore esatto
\hat{u}_0	0.034438	$\bar{\Phi}$	79.8201°
\hat{w}_0	0.013272	α_d	27.9731°
\hat{q}_0	$-0.91558 \cdot \frac{\pi}{180}$	α_u	34.8473°
θ_0	$-4.8448 \cdot \frac{\pi}{180}$		

riabili di stato e dei due stati virtuali x, h , calcolati su sei istanti di tempo differenti ($p = 6$). La sua forma completa è

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
 \hat{u}(1) - \hat{u}(0) \\
 \hat{u}(1 + \Delta\tau) - \hat{u}(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 \hat{u}(1 + 5\Delta\tau) - \hat{u}(5\Delta\tau) \\
 \\
 \hat{w}(1) - \hat{w}(0) \\
 \hat{w}(1 + \Delta\tau) - \hat{w}(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 \hat{w}(1 + 5\Delta\tau) - \hat{w}(5\Delta\tau) \\
 \\
 \hat{q}(1) - \hat{q}(0) \\
 \hat{q}(1 + \Delta\tau) - \hat{q}(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 \hat{q}(1 + 5\Delta\tau) - \hat{q}(5\Delta\tau) \\
 \\
 \theta(1) - \theta(0) \\
 \theta(1 + \Delta\tau) - \theta(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 \theta(1 + 5\Delta\tau) - \theta(5\Delta\tau) \\
 \\
 x(1) - x(0) \\
 x(1 + \Delta\tau) - x(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 x(1 + 5\Delta\tau) - x(5\Delta\tau) \\
 \\
 h(1) - h(0) \\
 h(1 + \Delta\tau) - h(\Delta\tau) \\
 \vdots \\
 h(1 + 5\Delta\tau) - h(5\Delta\tau)
 \end{bmatrix} \quad (86)$$

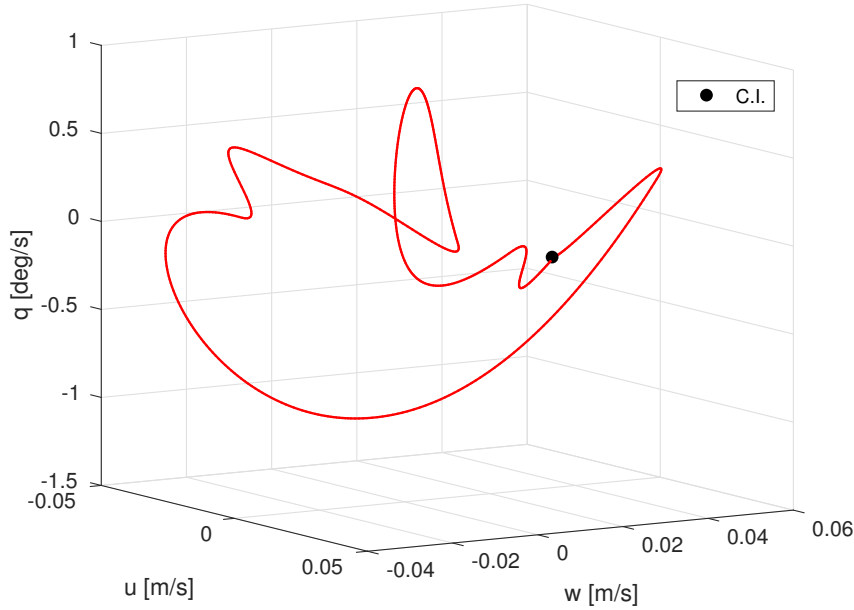


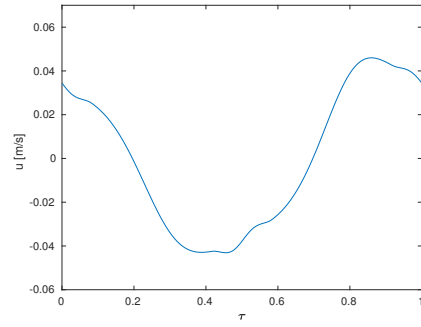
Figura 28: Orbita periodica nello spazio degli stati tridimensionale

L'algoritmo di ottimizzazione minimizza la variazione di questi sei stati in modo da trovare le sette grandezze $(u_0, w_0, q_0, \theta_0, \bar{\Phi}, \alpha_d, \alpha_u)$ che garantiscono la condizione di hovering. I risultati sono raccolti in Tab. 8. Per il caso in analisi quindi l'ampiezza di flapping che garantisce l'orbita periodica in hovering è $\bar{\Phi} = 79.8201^\circ$ mentre l'angolo imposto all'ala nel movimento di ritorno deve essere maggiore di quello di andata.

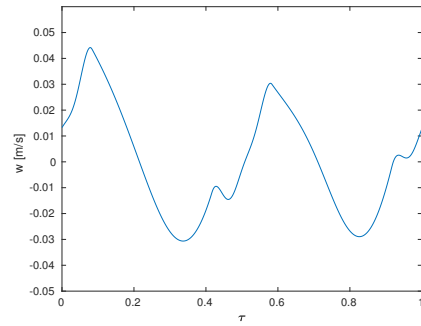
Lanciando la simulazione completa partendo dalle nuove condizioni al contorno e con i parametri corretti, si ottiene l'orbita periodica raffigurata in Fig. 28 nel spazio degli stati (u, w, q) . In Fig. 29 e 30 sono mostrati gli andamenti degli stati nel tempo adimensionale τ . Come si può notare, l'utilizzo dei valori uscenti dall'ottimizzazione rende perfettamente periodico l'andamento di ogni stato: in particolare gli stati virtuali x, h partono da una posizione e ritornano al punto di partenza per $\tau = 1$, ossia $t = T$. La traiettoria dell'orbita periodica è presentata in Fig. 30c. È fondamentale sottolineare come l'orbita di equilibrio trovata sia valida soltanto per un ciclo: la forte non-linearità del problema scosterebbe i risultati calcolati sui cicli successivi.

7.3 LINEARIZZAZIONE E TEORIA DI FLOQUET

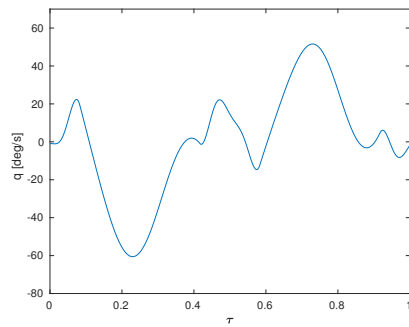
Una volta ottenuti i parametri e C.I. che garantiscono la soluzione periodica, si procede con la linearizzazione del sistema per poter suc-



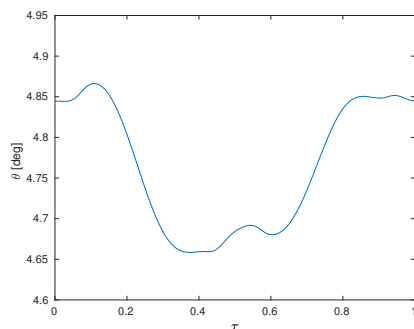
(a)



(b)

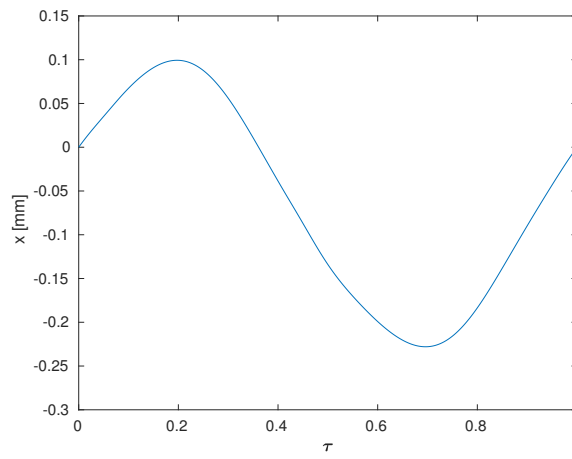


(c)

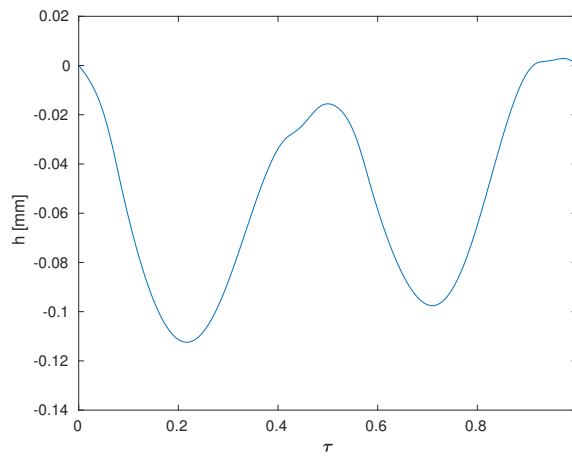


(d)

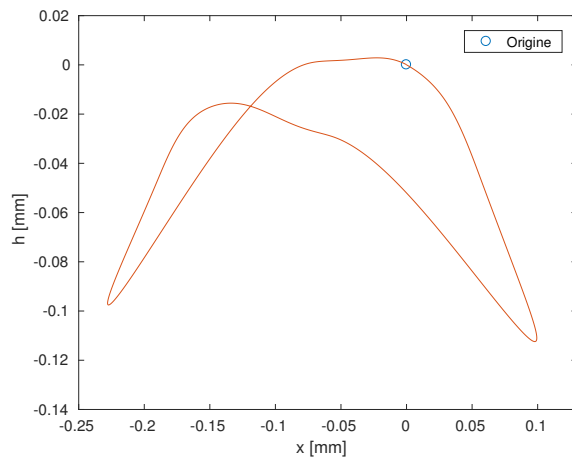
Figura 29: Variabili di stato per un ciclo di simulazione calcolate partendo dalle quantità ottimizzate



(a)



(b)



(c)

Figura 30: Posizioni singole nel tempo e traiettoria del MAV per un ciclo di simulazione

cessivamente applicare la teoria di Floquet e compiere l'analisi di stabilità.

$$\text{NLTP} \xrightarrow{\text{OSM}} \text{orbita periodica} \xrightarrow{\text{lineariz.}} \text{LTP} \xrightarrow{\text{Floquet}} \text{stabilità}$$

Partiti dal sistema NLTP del tipo $\dot{x} = f(x, t)$ si è trovata la soluzione di equilibrio periodico $\tilde{x}(t)$ tale che $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}(t), t)$. Considerando la variazione $\Delta x = x - \tilde{x}$, si linearizza attorno alla soluzione di equilibrio

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - f(\tilde{x}(t), t) = \\ &= \cancel{f(\tilde{x}, t)} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}} \Delta x - \cancel{f(\tilde{x}, t)} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x = \tilde{x}(t), t) \right]}_{[\tilde{\mathbf{A}}(t)]} \Delta x \end{aligned} \quad (87)$$

utilizzando un'espansione di Taylor troncata al primo ordine. Si ottiene così il sistema lineare periodico LTP nella forma

$$\Delta \dot{x} = [\tilde{\mathbf{A}}(t)] \Delta x \quad (88)$$

con $[\tilde{\mathbf{A}}(t)]$ matrice quadrata periodica di periodo T , ossia $[\tilde{\mathbf{A}}(t)] = [\tilde{\mathbf{A}}(t + T)]$. La teoria di Floquet [32] richiede di risolvere sistema LTP (88) in modo da ottenere la matrice transizione di stato $[\Phi(t, t_0)]$, la quale lega la soluzione generica a quella riferita ad un tempo iniziale t_0

$$\Delta x(t) = [\Phi(t, t_0)] \Delta x_0 \quad (89)$$

Ogni colonna della matrice transizione di stato rappresenta una soluzione linearmente indipendente del sistema (88), ossia

$$[\dot{\Phi}(t, t_0)] = [\tilde{\mathbf{A}}(t)] [\Phi(t, t_0)] \quad (90)$$

L'analisi di stabilità dell'orbita periodica è condotta studiando i moltiplicatori di Floquet, ossia gli autovalori della matrice transizione di stato calcolata sul singolo periodo. Questa nuova matrice è chiamata matrice di monodromia ed è quindi definita come

$$[\mathcal{M}] = [\Phi(T, 0)] \quad (91)$$

Chiamando Λ_s gli gli autovalori di $[\mathcal{M}]$, il sistema sistema (88) è stabile se il modulo dei moltiplicatori è minore dell'unità

$$|\Lambda_s| < 1 \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (92)$$

Nella presente trattazione linearizzazione e costruzione della matrice di monodromia sono eseguite numericamente. Più nello speci-

fico, invece di linearizzare e poi integrare il problema su un ciclo si è presa la direzione opposta: la linearizzazione è stata effettuata per differenze finite attorno alla soluzione di equilibrio già integrata sul periodo. La matrice di monodromia è quindi calcolata numericamente linearizzando per differenze finite, facendo riferimento alla forma

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\tilde{x}}^T = \frac{\phi_T^f(\tilde{x} + \varepsilon) - \phi_T^f(\tilde{x})}{\varepsilon} \quad (93)$$

dove la generica funzione di flusso $\phi_T^f(\psi_0)$ indica la soluzione del sistema sopra il singolo periodo T dovuta alle condizioni iniziali ψ_0 . La soluzione attorno la quale si linearizza è quella definita dalle condizioni iniziali $\tilde{x} = \chi_0 = (u_0, w_0, q_0, \theta_0)$ provenienti dal metodo di ottimizzazione.

Basandosi sulla (93), si conducono le differenze finite attorno ogni componente del vettore degli stati χ_0 , potendo così definire le singole colonne della matrice $[\mathcal{M}]$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}_{(1)} &= \frac{\phi_T^f(u_0 + \varepsilon, w_0, q_0, \theta_0) - \phi_T^f(\chi_0)}{\varepsilon} \\ \underline{\mathcal{M}}_{(2)} &= \frac{\phi_T^f(u_0, w_0 + \varepsilon, q_0, \theta_0) - \phi_T^f(\chi_0)}{\varepsilon} \\ \underline{\mathcal{M}}_{(3)} &= \frac{\phi_T^f(u_0, w_0, q_0 + \varepsilon, \theta_0) - \phi_T^f(\chi_0)}{\varepsilon} \\ \underline{\mathcal{M}}_{(4)} &= \frac{\phi_T^f(u_0, w_0, q_0, \theta_0 + \varepsilon) - \phi_T^f(\chi_0)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (94)$$

La matrice completa sarà quindi

$$[\mathcal{M}] = \left[\underline{\mathcal{M}}_{(1)} \mid \underline{\mathcal{M}}_{(2)} \mid \underline{\mathcal{M}}_{(3)} \mid \underline{\mathcal{M}}_{(4)} \right] \quad (95)$$

7.4 ANALISI DI STABILITÀ

In sezione 7.3 si è visto come costruire numericamente la matrice di monodromia $[\mathcal{M}]$ tramite integrazione e linearizzazione. Le differenze finite sono state condotte utilizzando un incremento infinitesimo $\varepsilon = 10^{-2}$. Seguono autovalori e rispettivi autovettori di $[\mathcal{M}]$:

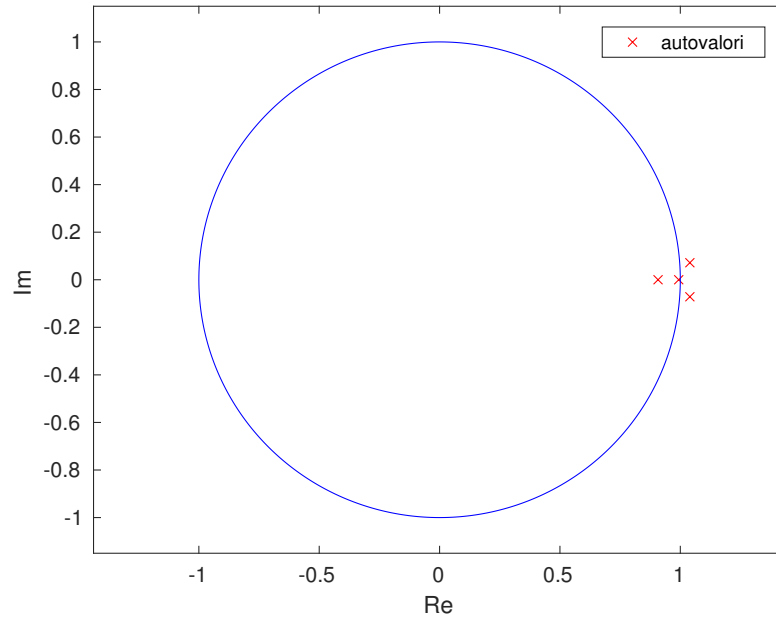


Figura 31: Moltiplicatori di Floquet nel piano complesso. Il sistema è instabile qualora almeno uno degli autovalori è sia fuori dal cerchio unitario

$$\begin{array}{cccc}
 1.0397 + 0.0716i & 1.0397 - 0.0716i & 0.9075 & 0.9934 \\
 \begin{pmatrix} -0.2452 + 0.3282i \\ -0.0173 + 0.0333i \\ 0.0376 + 0.0639i \\ 0.9084 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.2452 - 0.3282i \\ -0.0173 - 0.0333i \\ 0.0376 - 0.0639i \\ 0.9084 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.4040 \\ 0.0305 \\ -0.0871 \\ 0.9101 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.3402 \\ -0.9394 \\ -0.0083 \\ 0.0417 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Si ricorda come il criterio di stabilità si basi sul modulo degli autovalori, il quale deve essere inferiore dell'unità. I primi due autovalori (in rosso) sono quindi instabili e dettano l'instabilità del sistema globale. Si può vedere dai rispettivi autovettori come l'instabilità sia principalmente dovuta all'ultimo termine, il quale è associato all'angolo di beccheggio θ . Questo risultato era prevedibile in quanto in sezione 6.2 si era visto come θ diminuisse quasi linearmente nel tempo senza quindi assumere un andamento periodico stabile.

I moltiplicatori di Floquet possono essere rappresentati nel piano complesso (Fig. 31) insieme alla circonferenza di raggio unitario per consentire un rapido confronto visivo.

CONTROLLO

Una volta provata l'instabilità della condizione di equilibrio in hovering, si procede con il design del sistema di controllo. Dopo aver definito gli ingressi attraverso i quali agire sul sistema e la tipologia di controllore desiderato, si farà in modo di ottenere il problema lineare tempo-invariante LTI sul quale operare in fase di progetto. Una volta ottenuti risultati soddisfacenti si applicherà lo stesso controllore sul sistema reale NLTP.

8.1 MODUS OPERANDI

Si vuole progettare un sistema di controllo per il MAV sotto analisi tale da garantire il ritorno all'orbita periodica di hovering qualora il corpo si trovi al di fuori di essa a causa di disturbi o di instabilità propria. Essendo il problema di natura non lineare e instazionaria, il progetto del controllo verrà eseguito sul sistema lineare tempo-invariante associato al problema reale: soltanto quando la risposta del sistema LTI sarà soddisfacente il design scelto potrà essere applicato al problema originale, garantendo così il ritorno del MAV alla configurazione desiderata.

Riferendosi alla formulazione classica dei sistemi dinamici, il problema linearizzato è scritto come

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (96)$$

con \mathbf{x} , \mathbf{u} vettori degli stati e ingressi, e \mathbf{A} , \mathbf{B} matrici che legano rispettivamente stati e ingressi alla dinamica del sistema. È necessario quindi scegliere le quantità in ingresso tramite le quali operare il controllo. Le grandezze imposte dall'esterno che consentono il volo del MAV sono generalmente quelle che definiscono il movimento dell'ala: angolo meccanico di incidenza η e l'ampiezza di battito finora indicata con Φ . Un ulteriore ingresso al sistema è il già descritto angolo β che indica il movimento dell'ala fuori dal piano orizzontale. Queste elencate sono le grandezze che consentono di interagire in modo diretto con la dinamica del sistema. Basandosi sui risultati ottenuti in sezione 6 i quali mostravano il MAV in caduta con un angolo di beccheggio decrescente nel tempo, si è scelto di progettare il controllo agendo sul movimento di flappeggio dell'ala dettato da φ . Partendo dalla legge armonica precedentemente utilizzata $\varphi(t) = -\Phi \cos(\omega t)$, l'aggiunta

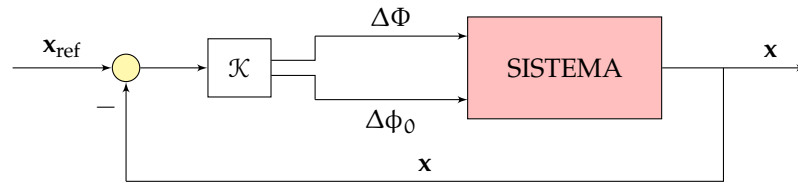


Figura 32: Rappresentazione schematica del sistema di feedback in anello chiuso

di un termine di offset ϕ_0 porta ad una nuova definizione dell'angolo di flapping

$$\varphi(t) = \phi_0 - \Phi \cos(\omega t) \quad (97)$$

L'angolo di offset ϕ_0 (fino ad ora considerato nullo) indica geometricamente la posizione dalla quale l'ala inizia il suo movimento di flappeggio. La nuova legge (97) dispone di due termini tramite i quali è possibile agire direttamente sulla dinamica del sistema: l'angolo Φ infatti influenza la magnitudine del carico aerodinamico mentre ϕ_0 modifica la posizione del carico totale risultante lungo l'asse longitudinale del MAV.

L'assetto di volo desiderato è quindi ottenibile regolando in tempo reale i valori di questi due angoli: si ha

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta\Phi \\ \Delta\phi_0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

Il sistema di controllo è progettato per assegnazione dei poli (sezione 8.2) e si basa su un feedback del vettore degli stati completo. Gli ingressi saranno quindi esprimibili attraverso gli stati come $\mathbf{u} = -\mathcal{K}\mathbf{x}$, con \mathcal{K} matrice di pesi proveniente dal controllo. Il sistema dinamico finale in anello chiuso sarà

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathcal{K}\mathbf{B})}_{\mathbf{A}_{cl}} \mathbf{x} \quad (99)$$

dove il pedice "cl" è riferito a *closed loop*. Il sistema di feedback è rappresentato schematicamente in Fig. 32: il termine \mathbf{x}_{ref} indica il vettore degli stati di riferimento desiderati.

8.2 SISTEMA LTI

In questa sezione è mostrato come ottenere il sistema LTI (96) equivalente partendo dal sistema originale non-lineare tempo-invariante. Si descriverà infine la tipologia di controllore scelta.

La procedura operativa che conduce al sistema lineare stazionario coincide formalmente con il primo percorso che si era proposto in

Fig. 27. Il teorema della media converte il sistema NLTP in un sistema autonomo non-lineare per il quale l'orbita periodica di equilibrio si riduce ad un punto fisso proprio del sistema mediato. Linearizzare attorno a questa posizione conduce al sistema LTI desiderato, dal quale si può effettuare analisi di stabilità e design del controllo.

Il generico sistema dinamico non-autonomo è rappresentato come

$$\dot{\chi} = \epsilon \mathbf{f}(\chi, t) \quad (100)$$

Facendo riferimento a Khalil [22], se \mathbf{f} è T-periodica in t , il sistema dinamico mediato proveniente da (100) è scritto come

$$\dot{\bar{\chi}} = \epsilon \bar{\mathbf{f}}(\bar{\chi}) \quad (101)$$

con $\bar{\mathbf{f}}(\chi) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\chi, \tau) d\tau$. Il teorema della media sostiene che per ϵ sufficientemente piccoli la stabilità esponenziale del sistema mediato garantisce anche quella del sistema periodico originale. Introducendo la nuova variabile temporale $\tau = \omega t$ con ω frequenza di flapping, è facilmente dimostrabile come ϵ sia inversamente proporzionale a ω rendendo così il teorema della media uno strumento valido soltanto per problemi con grande separazione delle scale temporali. Essendo però costretti ad intraprendere questa via con il fine di progettare il controllo, si è trascurata la condizione di frequenze di battito elevate. Fortunatamente, come si vedrà in seguito, l'analisi di stabilità del sistema LTI fornisce risultati analoghi a quelli ottenuti intraprendendo l'altra strada (teoria di Floquet).

Nella presente trattazione si è considerato come punto fisso di equilibrio la media temporale dell'orbita periodica proveniente dal problema di ottimizzazione OSM presentato in sezione 7.2. Partendo dai risultati mostrati in Fig. 29 e mediando sopra il periodo T si è ottenuto il vettore $\bar{\chi}$ contenente le variabili di stato al punto di equilibrio

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.002 \text{ m/s} \\ 0.0002 \text{ m/s} \\ 0.04 \text{ }^\circ/\text{s} \\ 4.77 \text{ }^\circ \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ }^\circ/\text{s} \\ 4.77 \text{ }^\circ \end{pmatrix} \quad (102)$$

i cui valori numerici di velocità e velocità angolare sono intuitivi. L'obiettivo è quindi costruire il sistema tempo-invariante linearizzato attorno a $\bar{\chi}$ sul quale progettare il controllo. Richiamando i concetti

espressi in sezione 8.1 e inserendo per comodità gli stati virtuali x, h nel vettore delle variabili di stato, la struttura finale sarà

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{h} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & -g \cos \bar{\theta} & 0 & 0 \\ Z_u & Z_w & Z_q & -g \sin \bar{\theta} & 0 & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \bar{\theta} & \sin \bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \bar{\theta} & -\cos \bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \\ \Delta x \\ \Delta h \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_\Phi & X_{\Phi_0} \\ Z_\Phi & Z_{\Phi_0} \\ M_\Phi & M_{\Phi_0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \Delta \Phi \\ \Delta \Phi_0 \end{pmatrix} \quad (103)$$

dove Δ indica la perturbazione dalla posizione di equilibrio. Per quanto riguarda il vettore di ingressi \mathbf{u} , i termini $\Delta \Phi, \Delta \Phi_0$ indicano la variazione esercitata dal controllo sui valori cinematici di equilibrio per i quali si era ottenuta l'orbita periodica in hovering, ossia

$$\bar{\Phi} = 79.8201^\circ \quad \bar{\Phi}_0 = 0^\circ$$

Ad ogni ciclo di battito i parametri cinematici precedentemente ottenuti sono "corretti" con le quantità $\Delta \Phi, \Delta \Phi_0$ modificando così il movimento dell'ala

$$\varphi(t) = \underbrace{\bar{\Phi}_0 + \Delta \Phi_0}_{\Phi_0} - \underbrace{(\bar{\Phi} + \Delta \Phi)}_{\Phi} \cos \omega t \quad (104)$$

Le derivate di stabilità mediate sul periodo T che compongono la matrice \mathbf{A} insieme alle sei componenti non-nulle di \mathbf{B} sono approssimate per differenze finite. Ad esempio, X_u è calcolata come

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \quad \text{con} \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = \frac{\bar{X}^{(u)} - \bar{X}^{(eq)}}{\varepsilon u^*}$$

dove m, ε, u^* sono rispettivamente massa totale del veivolo, incremento infinitesimo e velocità di riferimento adimensionalizzata $u^* = \frac{R}{T}$. La quantità $\bar{X}^{(eq)}$ indica il carico orizzontale nel sistema assi-corpo

$X^{[b]}$ ottenuto risolvendo il problema nella condizione di equilibrio ($\bar{\chi}, \Delta\Phi = \Delta\phi_0 = 0$) e mediato nel tempo sopra il periodo

$$\bar{X}^{(eq)} = \frac{1}{T} \int_0^T X^{[b]}(t) dt \quad (\bar{\chi}, \Delta\Phi = \Delta\phi_0 = 0) \quad (105)$$

Il termine $\bar{X}^{(u)}$ è ottenuto anch'esso tramite media temporale: questa volta però il carico $X^{[b]}$ proviene dalla simulazione in cui si è perturbato lo stato u di una quantità εu^* attorno alla condizione di equilibrio

$$\bar{X}^{(u)} = \frac{1}{T} \int_0^T X^{[b]}(t) dt \quad (u = \varepsilon u^*, \Delta\Phi = \Delta\phi_0 = 0) \quad (106)$$

Allo stesso modo si possono ottenere Z_u e M_u :

$$Z_u = \frac{1}{m} \frac{\bar{Z}^{(u)} - \bar{Z}^{(eq)}}{\varepsilon u^*} \quad M_u = \frac{1}{I_y} \frac{\bar{M}_y^{(u)} - \bar{M}_y^{(eq)}}{\varepsilon u^*}$$

Perturbando singolarmente tutti gli stati si possono così approssimare le derivate di stabilità che compongo **A**. I termini $-g \cos \bar{\theta}$ e $-g \sin \bar{\theta}$ provengono dalla semplice linearizzazione dei contributi gravitazionali (Eq. (54)).

Le componenti di **B** sono stimate analogamente alla derivate di stabilità: i carichi necessari per la linearizzazione provengono dalla simulazione effettuata attorno al punto di equilibrio $\bar{\chi}$, perturbando volta per volta gli angoli cinematici di una quantità $\varepsilon \Phi$.

8.3 ASSEGNAZIONE DEI POLI

In sezione 8.2 si è mostrata la procedura per ottenere il sistema LTI partendo dal sistema originale non lineare tempo-variante. La matrice **A** è quindi costruita per il caso in analisi. Seguono gli autovalori con rispettivi autovettori:

$$\begin{array}{cccc} 1.7724 + 3.4371i & 1.7724 - 3.4371i & -4.1898 & -0.3173 \\ \left(\begin{array}{c} 0.2533 + 0.4409i \\ 0.0290 + 0.0358i \\ 0.8226 \\ 0.0975 - 0.1891i \\ -0.0007 + 0.0019i \\ 0.1319 - 0.0062i \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 0.2533 - 0.4409i \\ 0.0290 - 0.0358i \\ 0.8226 \\ 0.0975 + 0.1891i \\ -0.0007 - 0.0019i \\ 0.1319 + 0.0062i \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} -0.5139 \\ -0.0366 \\ 0.8250 \\ -0.1969 \\ 0.0015 \\ 0.1230 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 0.0817 \\ 0.2912 \\ 0.0005 \\ -0.0017 \\ 0.8931 \\ -0.3329 \end{array} \right) \end{array}$$

La condizione di stabilità è dettata dalla parte reale degli autovalori. In rosso sono evidenziati gli autovalori con parte reale positiva,

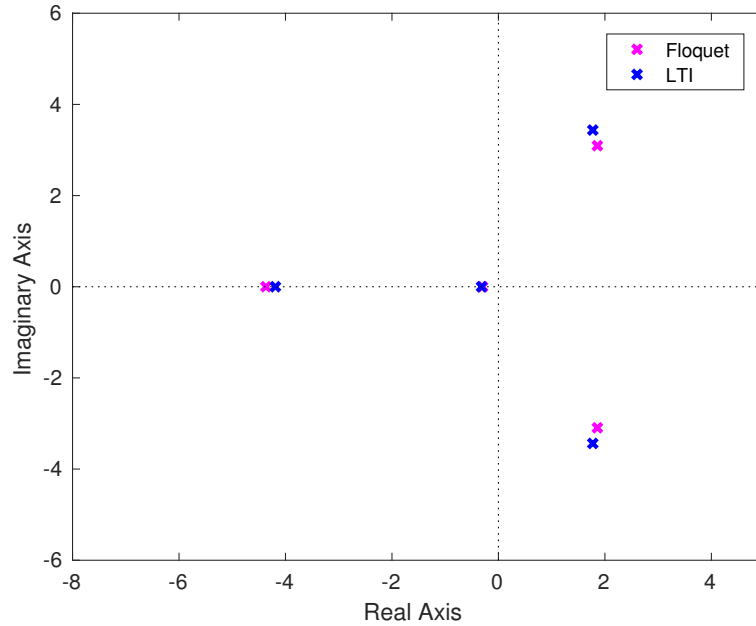


Figura 33: Confronto degli autovalori ottenuti attraverso i due approcci di Fig. 27

quindi instabili. In analogia con i risultati ottenuti nel capitolo 7, l'instabilità è principalmente dovuta al movimento di beccheggio. Gli autovettori sono composti da sei elementi in quanto si erano inseriti nella matrice del sistema anche gli stati virtuali x, h : i due autovalori aggiuntivi provenienti da quest'ultimi non sono riportati poiché irrilevanti.

Non avendo imposto nessuna condizione sulla separazione delle scale temporali ci si aspetta che gli autovalori del sistema LTI associato siano diversi (e meno corretti) di quelli ottenuti in sezione 7.4 attraverso la teoria di Floquet. Il confronto tra i risultati provenienti dai due approcci differenti può essere condotto attraverso la relazione

$$z = e^{Ts} \quad (107)$$

la quale lega gli autovalori nel dominio di analisi di Floquet z a quelli nel dominio di Laplace s . Prendendo come risultato di riferimento corretto quello ottenuto tramite Floquet, si può vedere in Fig. 33 come l'analisi di stabilità condotta sul sistema LTI porti a risultati pressoché analoghi e quindi validi.

Il controllo è quindi effettuato sul sistema lineare tempo-invariante tramite semplice retroazione del vettore degli stati. Nel caso in cui le misure di quest'ultimo siano disponibili, l'ingresso di controllo può essere generato ad ogni step temporale moltiplicando i valori dello stato per il guadagno statico \mathcal{K} , ottenendo la forma già vista (99). Es-

sendo il sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) raggiungibile, gli autovalori di $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathcal{K}\mathbf{B}$ possono essere imposti arbitrariamente in modo da garantire la stabilità del sistema controllato: si è scelto quindi di progettare il controllo per assegnazione dei poli. Dato il sistema generico (96) e un vettore \mathbf{p} contenente gli autovalori del sistema ad anello chiuso desiderati, il comando `place` di Matlab[®] calcola la matrice di guadagni \mathcal{K} tale che la retroazione degli stati $\mathbf{u} = -\mathcal{K}\mathbf{x}$ posizioni i poli del sistema controllato esattamente in \mathbf{p} . Gli autovalori di \mathbf{A}_{cl} saranno quindi le componenti di \mathbf{p} .

Essendo il sistema del sesto ordine, l'assegnazione dei valori desiderati è stata effettuata senza un criterio teorico particolare. Si è deciso di prendere come posizioni di riferimento gli autovalori provenienti da un sistema del secondo ordine con tempo di assestamento $T_s = 9T$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.9$, con l'aggiunta di altri quattro valori crescenti in modulo. Si è quindi simulata la risposta temporale del relativo sistema lineare controllato per input nulli e condizioni iniziali diverse da quelle di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$. Essendo lo scopo quello di progettare il controllo sul sistema LTI per applicarlo successivamente al sistema originale, è di fondamentale importanza ottenere un buon comportamento del sistema LTI controllato: data la natura non lineare e fortemente instazionaria del problema originale, il controllore progettato sarà efficace soltanto se ben funzionante sul sistema LTI associato. In luce di ciò, si sono modificate manualmente le componenti di \mathbf{p} finché non si è trovata la giusta combinazione di valori che desse una buona risposta temporale del sistema LTI controllato.

In seguito a numerosi tentativi, i valori scelti da assegnare ai poli sono i seguenti

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -10 + 4.8432i \\ -10 - 4.8432i \\ -12 \\ -14 \\ -16 \\ -18 \end{pmatrix}$$

e sono confrontati in Fig. 34 con gli autovalori del sistema non controllato. La matrice di guadagni che consente la collocazione desiderata è

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 5.0393 & -1.5723 & 0.0826 & -1.9970 & 13.4178 & 29.4218 \\ -2.3729 & -0.1719 & 0.0850 & 2.6534 & 0.3626 & -7.7854 \end{bmatrix}$$

Ad ogni step temporale la retroazione dello stato muove la dinamica del sistema verso gli autovalori imposti attraverso \mathcal{K} . La simu-

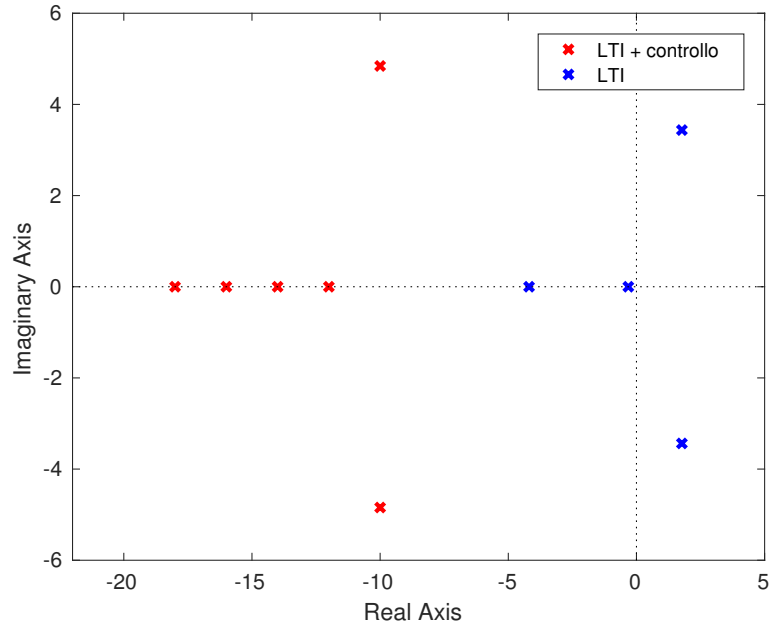


Figura 34: Confronto tra gli autovalori del sistema LTI con e senza controllore

lazione temporale eseguita sul sistema lineare è quindi lo strumento di perfezionamento utilizzato per il design del controllore. Fig. 35-37 mostrano i risultati della simulazione su 50 cicli per input nulli e set di condizioni iniziali $x_0 = [0 \ 0.1 \ 0 \ 5 \cdot \frac{\pi}{180} \ 0 \ 0]$.

Come si può vedere in Fig. 35 e 36 le variazioni degli stati dalla condizione di equilibrio (ossia \bar{x} e $x = h = 0$) vanno tutte a zero entro i primi 40 cicli, in seguito a transitori in cui le ampiezze di oscillazione sono accettabilmente contenute. Fig. 37 mostra invece l'andamento degli angoli cinematici Φ , ϕ_0 uscenti dal sistema di controllo: questi vengono modificati ad ogni ciclo in modo da contrastare lo scostamento degli stati dalla condizione di equilibrio fino ad assestarsi su due valori costanti una volta eliminata la perturbazione. In giallo sono tracciate le rette passanti per i valori all'equilibrio, ossia i valori per cui si ha hovering ($\bar{\Phi} = 79.8201^\circ$, $\bar{\phi}_0 = 0$).

8.4 RISULTATI

Una volta ottenuti risultati soddisfacenti per il sistema lineare stazionario LTI si può procedere applicando il controllore progettato al sistema originale NLTP. Nella pratica, essendo la natura del problema differente, è necessario adattare la retroazione degli stati ad un sistema non più tempo-invariante, bensì periodico.

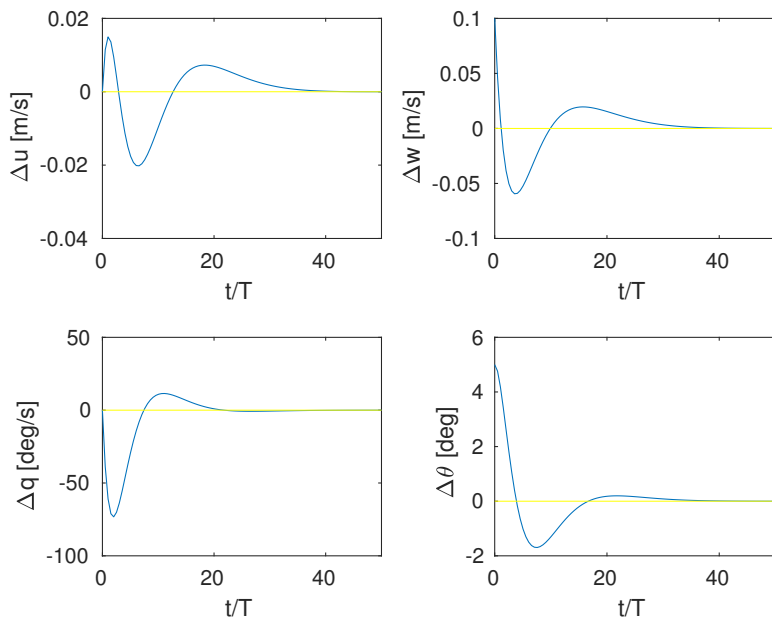


Figura 35: Perturbazione degli stati nel tempo per il sistema LTI

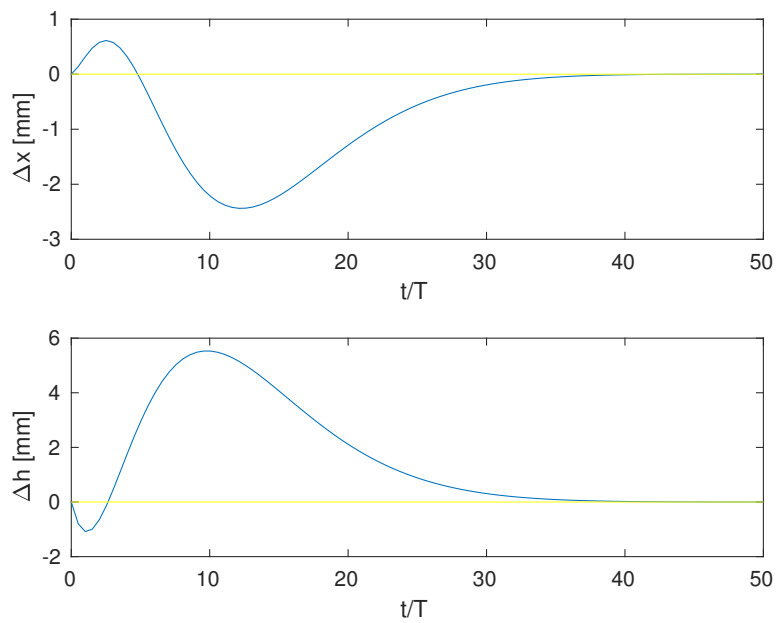


Figura 36: Variazione delle coordinate spaziali nel tempo (sistema di riferimento esterno)

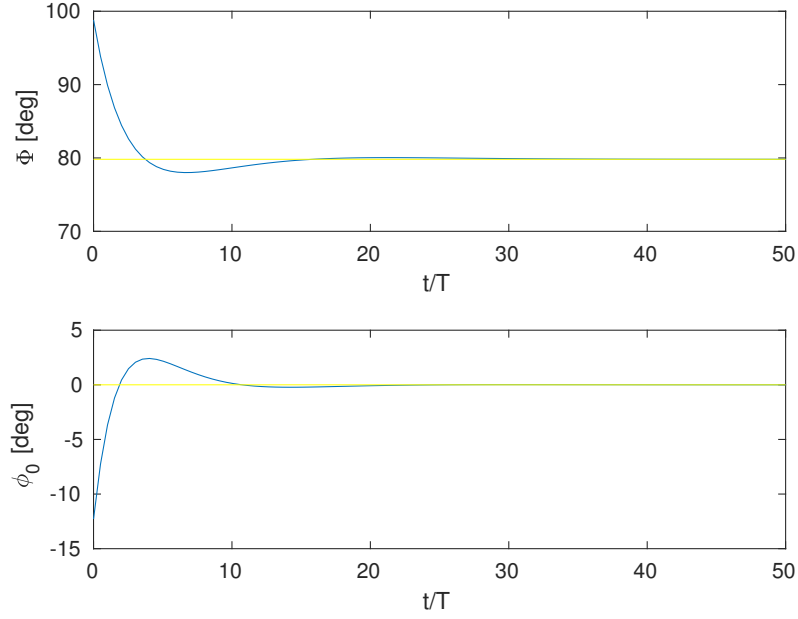


Figura 37: Andamento degli angoli cinematici imposti dal controllo per il sistema LTI

Richiamando la scrittura $\mathbf{u} = -\mathcal{K}\mathbf{x}$, le variazioni degli angoli di controllo sono scritte in forma esplicita come

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= -\mathcal{K}_{11}\Delta\mathbf{u} - \mathcal{K}_{12}\Delta\mathbf{w} - \mathcal{K}_{13}\Delta\mathbf{q} - \mathcal{K}_{14}\Delta\theta - \mathcal{K}_{15}\Delta\mathbf{x} - \mathcal{K}_{16}\Delta\mathbf{h} \\ \Delta\phi_0 &= -\mathcal{K}_{21}\Delta\mathbf{u} - \mathcal{K}_{22}\Delta\mathbf{w} - \mathcal{K}_{23}\Delta\mathbf{q} - \mathcal{K}_{24}\Delta\theta - \mathcal{K}_{25}\Delta\mathbf{x} - \mathcal{K}_{26}\Delta\mathbf{h}\end{aligned}\quad (108)$$

con \mathcal{K}_{ij} componenti della matrice dei guadagni ottenuta in sezione 8.3. Sfruttando i valori numerici della condizione di equilibrio (102), la scrittura può essere alleggerita nella seguente forma

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= -\mathcal{K}_{11}\mathbf{u} - \mathcal{K}_{12}\mathbf{w} - \mathcal{K}_{13}\mathbf{q} - \mathcal{K}_{14}(\theta - \bar{\theta}) - \mathcal{K}_{15}\mathbf{x} - \mathcal{K}_{16}\mathbf{h} \\ \Delta\phi_0 &= -\mathcal{K}_{21}\mathbf{u} - \mathcal{K}_{22}\mathbf{w} - \mathcal{K}_{23}\mathbf{q} - \mathcal{K}_{24}(\theta - \bar{\theta}) - \mathcal{K}_{25}\mathbf{x} - \mathcal{K}_{26}\mathbf{h}\end{aligned}\quad (109)$$

È importante evidenziare come gli ingressi $\Delta\Phi, \Delta\phi_0$ varino da ciclo a ciclo ma siano costanti all'interno di ognuno di essi: la cinematica infatti è modificata soltanto al termine di ogni periodo. Diversamente, le variabili di stato $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{q}, \theta, \mathbf{x}, \mathbf{h}$ dipendono puntualmente dal tempo cambiando istante per istante. In luce di ciò, le equazioni (109) non risultano valide per il problema e vanno modificate in modo da far combaciare le scale temporali. Il codice numerico è stato quindi implementato in modo che al termine di ogni ciclo di battito siano calcolate le medie temporali degli stati sul singolo periodo: il confronto di queste quantità con la condizione di equilibrio del sistema LTI ($\bar{\mathbf{x}}$) detta quindi la retroazione attraverso la matrice \mathcal{K} , definendo

correttamente la cinematica per il ciclo di battito successivo. Per un numero totale N di cicli si ha quindi

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{i+1} &= -\mathcal{K}_{11}\tilde{u}_i - \mathcal{K}_{12}\tilde{w}_i - \mathcal{K}_{13}\tilde{q}_i - \mathcal{K}_{14}(\tilde{\theta}_i - \bar{\theta}) - \mathcal{K}_{15}\tilde{x}_i - \mathcal{K}_{16}\tilde{h}_i \\ \Delta\phi_{0,i+1} &= -\mathcal{K}_{21}\tilde{u}_i - \mathcal{K}_{22}\tilde{w}_i - \mathcal{K}_{23}\tilde{q}_i - \mathcal{K}_{24}(\tilde{\theta}_i - \bar{\theta}) - \mathcal{K}_{25}\tilde{x}_i - \mathcal{K}_{26}\tilde{h}_i\end{aligned}\quad (110)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ e usando il segno $\tilde{\cdot}$ per riferirsi alle quantità mediate nel tempo.

La simulazione è stata effettuata per un totale di 140 cicli in modo da lasciare al sistema di controllo il tempo sufficiente per agire. Seguono i risultati.

In Fig. 38 è rappresentata la risposta temporale del sistema NLTP in seguito all'applicazione del controllore progettato: come si può notare, a differenza dei risultati di sezione 6.2 l'andamento delle variabili di stato nel tempo non diverge, bensì assume un comportamento periodico stabile a partire dal quarantesimo ciclo. Questo significa che in circa 0.9 secondi il sistema di controllo riesce a stabilizzare la dinamica longitudinale, consentendo al MAV di immettersi nella configurazione di hovering. Essendo il problema sotto analisi instabile di natura propria non si sono introdotti ulteriori disturbi: si è quindi lanciata la simulazione semplicemente partendo da condizioni iniziali nulle. La risposta ottenuta ricorda un sistema del secondo ordine, oscillando nel transitorio iniziale per poi muoversi verso la soluzione a regime. Il transitorio non è caratterizzato da bruschi *overshooting*: i picchi massimi sono decisamente contenuti, definendo così una risposta dinamica soddisfacente. In Fig. 38b è presentata una porzione ingrandita della simulazione per un intervallo temporale ristretto. Si nota come gli stati siano caratterizzati da andamenti armonici con oscillazioni anche su scale temporali più veloci. Le tre velocità hanno media pressoché nulla, mentre l'angolo di beccheggio θ si assesta su un valore medio positivo di 9.94° . Si ricorda che u, w, q sono espresse nel sistema di riferimento assi-corpo, quindi i loro valori medi non devono essere necessariamente nulli affinché la condizione di hovering sia garantita. Riportando le velocità nel sistema di riferimento inerziale esterno e integrandole successivamente, si ottengono le coordinate del MAV nel tempo $x(t), h(t)$. Fig. 39a mostra i loro andamenti con valori espressi in millimetri. A partire dal quarantesimo ciclo sia x che h mantengono valori costanti in media, implicando così il raggiungimento della configurazione desiderata. Partendo dal punto di origine di coordinate $(0, 0)$ cerchiato in rosso, il MAV cade spostandosi verso destra finché viene stabilizzato dal sistema di controllo: la posizione di hovering raggiunta ha coordinate $(24, -41)$ mm espresse nel frame di un osservatore esterno.

In Fig. 40-41 è rappresentata la cinematica imposta all'ala. Nella prima figura è fornita una rappresentazione schematica del movimento

di beccheggio per una sezione alare generica. Le fasi di downstroke e upstroke sono distinte attraverso l'uso di colori differenti e si sono evidenziate in nero le posizioni del bordo di attacco. Per i cambi di configurazione si è usato un tratto più sottile. La posizione della cerniera ad ogni istante di tempo giace invece sulla linea tratteggiata gialla. Si nota come le due fasi principali del movimento abbiano angoli di incidenza differenti: questo è dovuto alla scelta di utilizzare flapping asimmetrico. Più nello specifico, gli angoli utilizzati nella simulazione sono chiaramente quelli forniti dal metodo di ottimizzazione in sezione 7.2 ($\alpha_d = 27.9731^\circ$, $\alpha_u = 34.8473^\circ$) per i quali l'orbita periodica è garantita. Fig. 41 mostra invece i valori di Φ e ϕ_0 imposti dal sistema di controllo ad ogni ciclo di battito. Si ricorda come l'angolo di offset ϕ_0 consente al controllore di cambiare la posizione di applicazione del carico totale aerodinamico lungo l'ala, mentre Φ ne può aumentare o ridurre l'intensità. Coerentemente coi risultati precedenti, il quarantesimo ciclo determina l'inizio di un andamento stabile. Al posto di mantenere un valore costante (risultato ottimale), entrambi gli angoli imposti oscillano: il sistema di controllo richiede quindi una continua modifica delle quantità cinematiche per poter garantire il sostentamento del peso e l'assetto del MAV. Ad ogni modo, tralasciando la fase transitoria, il valore medio dell'ampiezza di battito che consente l'hovering ($\bar{\Phi}_c = 81.04^\circ$) risulta essere maggiore dell'ampiezza $\bar{\Phi}$ per la quale si era ottenuta l'orbita periodica di equilibrio, rappresentata con una linea gialla in Fig. 41. Questo risultato è in perfetto accordo con i recenti studi di Taha et al. [48],[47] i quali hanno condotto analisi sulla dinamica di un MAV ad ala rigida senza però trascurare gli effetti inerziali dovuti alle ali. Rilassando questa comune ipotesi sono emersi risultati interessanti, tra cui il fatto che il contributo inerziale medio delle ali non sia nullo: in aggiunta al meccanismo principale di portanza (aerodinamico) vi sono ulteriori contributi al carico totale dovuti all'inerzia alare i quali possono generare termini di portanza negativa; essi svaniscono per $m_w = 0$ o $C_{L_\alpha} = 0$. Tramite analisi algebrica delle derivate di stabilità, queste forze deportanti sono state attribuite all'interazione tra aerodinamica e dinamica del volo. Una possibile spiegazione è che nel compiere il movimento di downstroke venga generata una forza inerziale istantanea X_I . Questa forza induce sul corpo una velocità negativa u_I che a sua volta conduce ad un carico deportante Z_I . In altre parole la velocità dell'ala relativa all'aria ferma nella quale si muove, rilevante per la determinazione dei carichi aerodinamici, è inferiore alla velocità di flapping a causa del movimento del corpo in direzione opposta. Un comportamento analogo si ha nella fase di ritorno. L'effetto finale è una riduzione del carico totale, in analogia con i risultati ottenuti da Wu et al. nella loro analisi numerica [17]. Tornando alla presente trattazione, il fatto che il controllore richieda un'ampiezza di flapping superiore a quella ottenuta dall'analisi di stabilità esprime la necessi-

ta del MAV di generare più portanza, in accordo con le considerazioni sopra citate. Il difetto di carico può essere quindi associato all'accoppiamento aerodinamica-dinamica del volo e ci si aspetta aumenti al crescere del rapporto tra massa alare e massa del veivolo $\frac{m_w}{m}$.

Avendo a disposizione l'andamento di Φ, ϕ_0 nel tempo e di conseguenza la legge oraria (104) che definisce il movimento imposto all'ala $\varphi(t)$, si può condurre un'analisi quantitativa su momento meccanico e potenza richiesti da fornire all'ala una volta raggiunta la configurazione di hovering. In prima approssimazione il momento imposto dal controllo può essere scritto come

$$\tau_\varphi(t) = I_F \ddot{\varphi}(t) \quad (111)$$

e quindi $\tau_\varphi(t) = |\tau| \cos(\omega t)$ essendo φ armonico, con $|\tau| = I_F \omega^2 \Phi$ e I_F inerzia di flappeggio. La formulazione di I_F è proposta in Appendice A.3. Allo stesso modo è definita la potenza richiesta

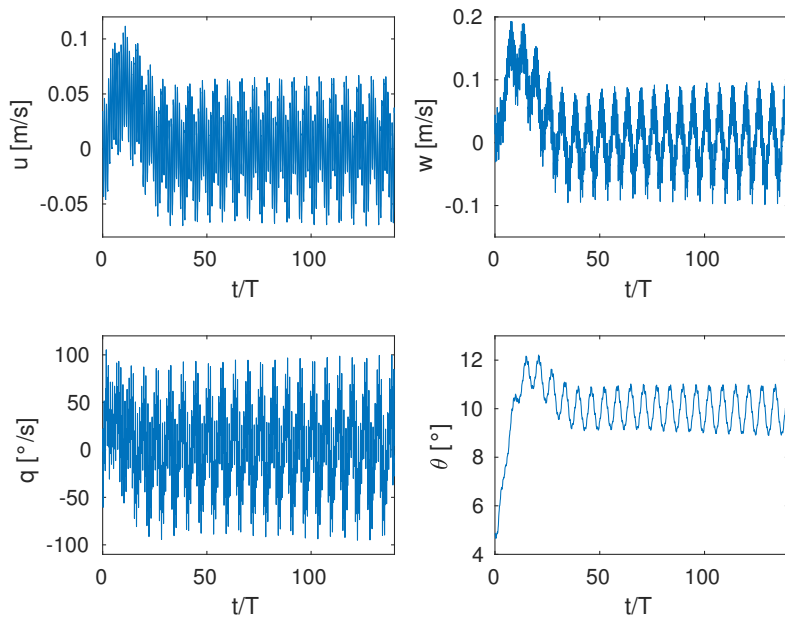
$$P_\varphi(t) = \tau_\varphi \dot{\varphi} = |P| \cos(\omega t) \quad (112)$$

con $|P| = I_F \omega^3 \Phi^2$. Gli andamenti di $|\tau|$ e $|P|$ nel tempo sono riportati in Fig. 42. Essendo direttamente dipendenti da Φ la loro forma è analoga: il momento di controllo oscilla attorno ad un valore medio $|\tau| = 13.11 \text{ Nm}$ mentre la potenza richiesta media è $|P| = 5273 \text{ W}$. Questi valori sono stati calcolati partendo dal quarantesimo ciclo prima del quale la configurazione di hovering non è ancora raggiunta.

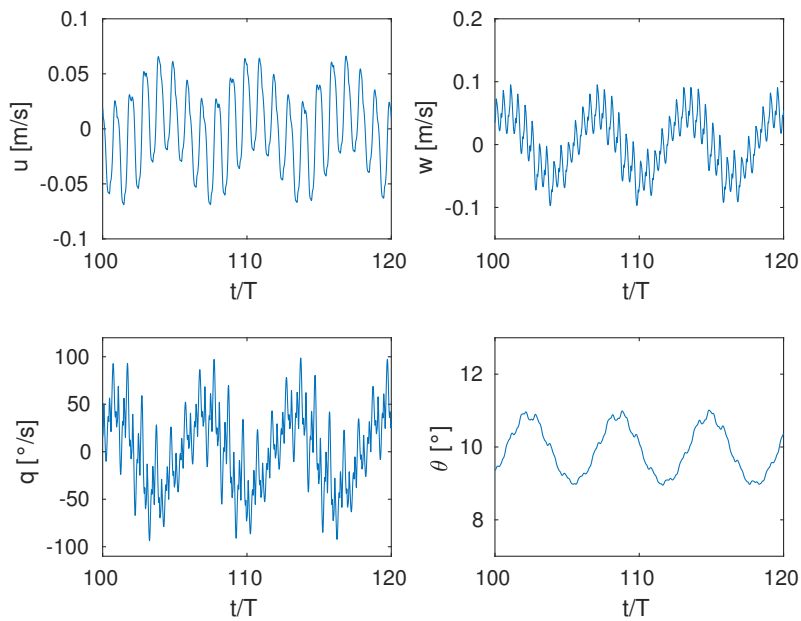
In fine Fig. 43 mostra l'andamento delle deformazioni alari per la simulazione completa: in Fig. 43a e 43c sono rappresentate flessione e torsione dell'ultima stazione in apertura ($r = R$), posizione per la quale le deformazioni sono massime. Come ci si può aspettare basandosi sui risultati della dinamica, gli andamenti nel tempo sono nel complesso uniformi, assumendo una forma periodica a partire dal ventesimo ciclo circa. Lo spostamento verticale massimo della punta supera i 10mm; la torsione invece raggiunge i 2° . Le porzioni ingrandite (Fig. 43b 43d) raffigurano w e ϑ una volta raggiunta la configurazione di hovering. Le deformazioni crescono entrambe spostandosi in apertura verso la punta dell'ala. Sia w che ϑ sono nulli in radice essendo l'incastro della trave associata.

É importante sottolineare come contrariamente ad altri studi effettuati sul volo in hovering ad ala rigida [23, 47] non si sia riusciti a stabilizzare la dinamica del MAV con un semplice *pitch feedback*, ossia attraverso la retroazione del solo angolo di beccheggio θ . Nel progettare il sistema di controllo si è inizialmente scelta una soluzione di questo tipo senza però ottenere buoni risultati: la risposta del sistema LTI ha mostrato un decadimento delle perturbazioni eccessivamente lento e quindi la incapacità di garantire l'hovering nel sistema origina-

le. Anche l'aggiunta degli stati u, w all'interno della retroazione si è mostrata poco efficace. Soltanto l'utilizzo del vettore variabili di stato completo χ ha finalmente fornito i risultati desiderati. Questa soluzione ovviamente è svantaggiosa dal punto di vista della realizzazione costruttiva in quanto il MAV dovrà essere dotato di quattro sensori di misurazione al posto di uno solo (caso *pitch feedback*).

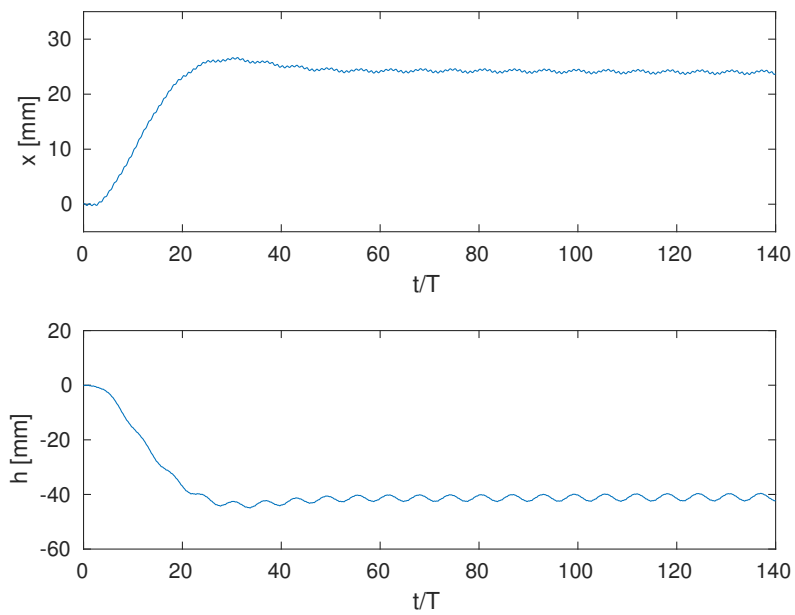


(a) Simulazione su 140 cicli di battito

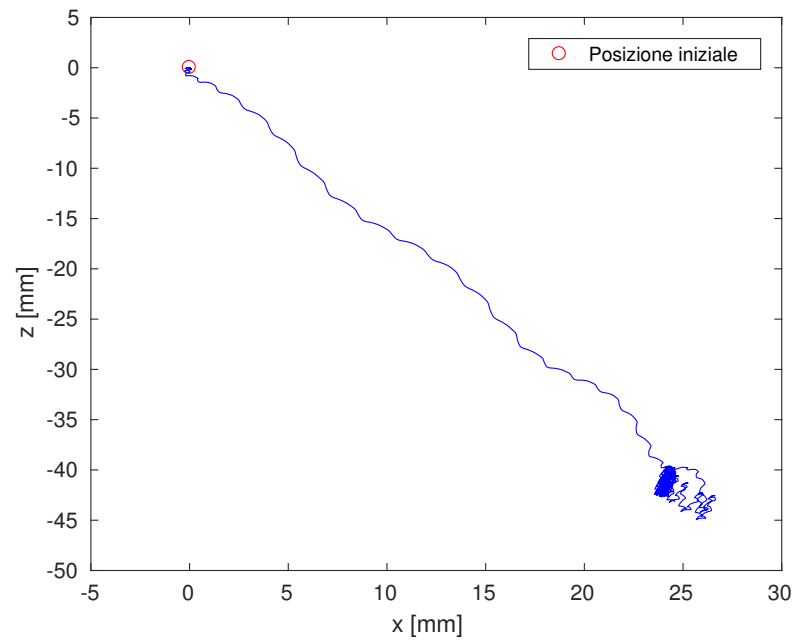


(b) Porzione ingrandita della simulazione a transitorio esaurito

Figura 38: Risposta nel tempo del sistema originale NLTP dotato di controllore



(a) Coordinate del MAV nel sistema di riferimento di un osservatore esterno



(b) Traiettoria del MAV: in seguito ad un transitorio iniziale, la configurazione di hovering è raggiunta

Figura 39: Coordinate inerziali e traiettoria del MAV

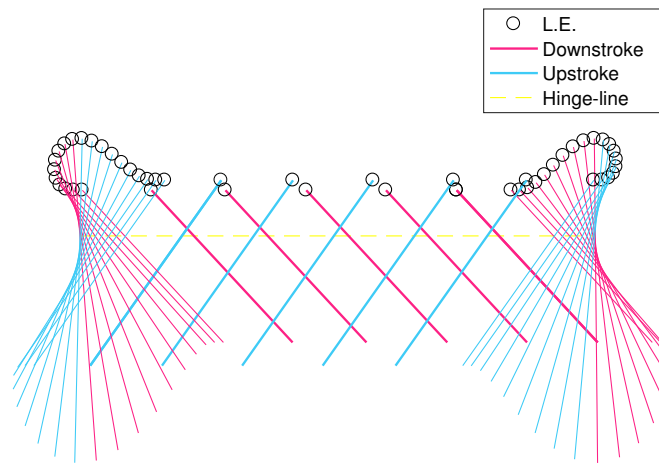


Figura 40: Rappresentazione dell'angolo cinematico imposto η per le fasi di upstroke e downstroke

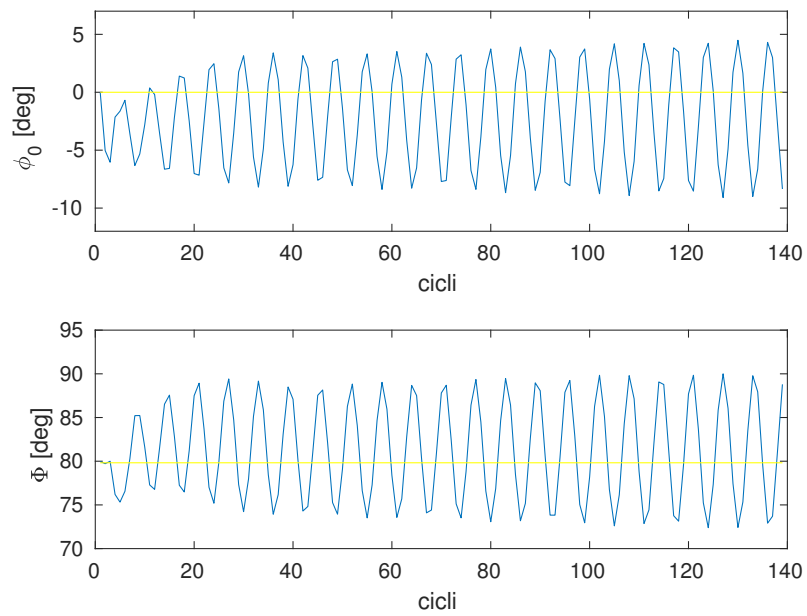


Figura 41: Angoli cinematici Φ, ϕ_0 nel tempo imposti dal sistema di controllo

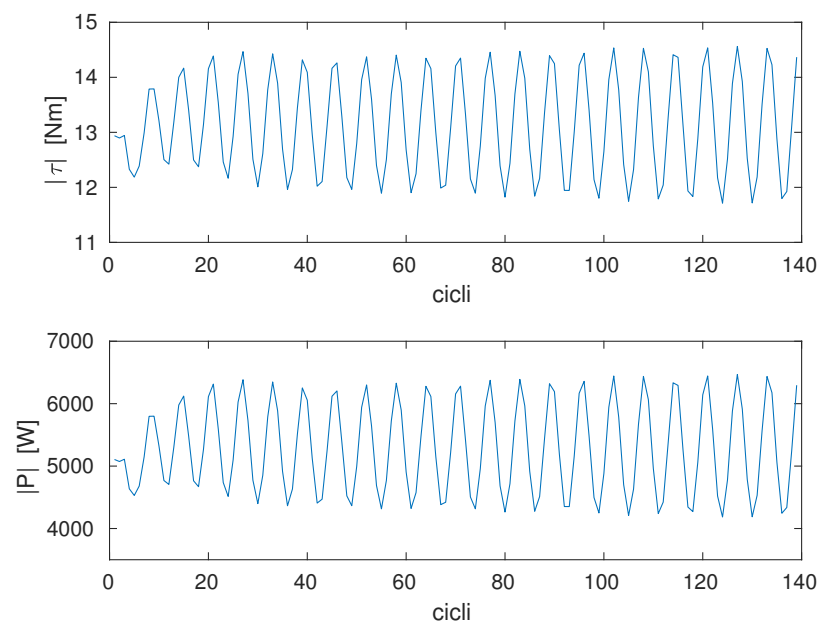
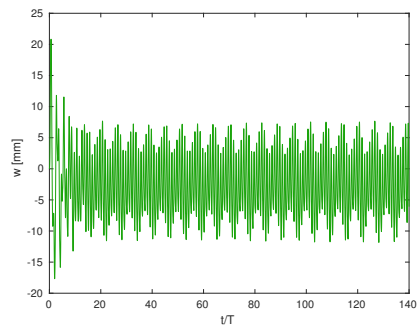
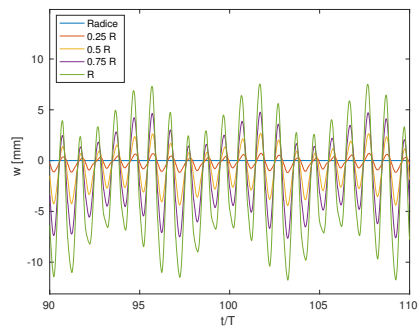


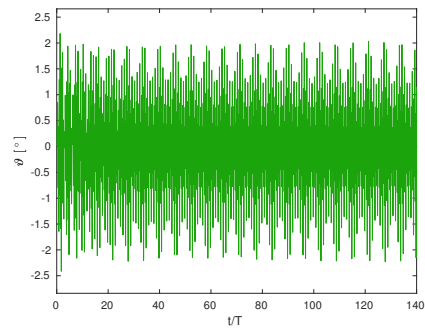
Figura 42: Moduli approssimativi di momento e potenza meccanica da applicare all'ala richiesti per il caso in esame



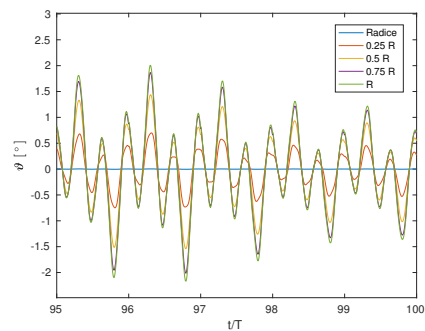
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 43: Deformazioni alari di flessione e torsione nel tempo

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro si è voluto analizzare un Micro Air Vehicle (MAV) ad ala battente attorno alla configurazione di hovering. Sotto determinate ipotesi, si sono accoppiate le equazioni di moto del corpo ai modelli aerodinamico e strutturale in modo da ottenere il comportamento dinamico del MAV. Si è quindi studiata la stabilità e progettato un sistema di controllo tale da garantire la configurazione desiderata.

Partendo dal modello aerodinamico per ala rigida di Taha et al. si è fatto in modo che la struttura alare contemplasse anche deformazioni strutturali. L'interesse rivolto ad ali elastiche è fortemente giustificato poiché consente di avvicinarsi al volo ad ala battente osservabile in natura. Spinti da questo obiettivo, si è deciso di accoppiare il modello aerodinamico al semplice modello di trave di Eulero-Bernoulli: ogni sezione alare in apertura è libera di compiere spostamenti rigidi muovendosi verticalmente e ruotando attorno al proprio asse elastico. Generati da forze e momenti aerodinamici, questi spostamenti sono descritti nello spazio e nel tempo attraverso espansione modale finita, previa approssimazione di frequenze e modi propri di vibrare essendo l'ala di geometria variabile in apertura. Le deformazioni in corda non sono contemplate. L'utilizzo di un modello di piastra avrebbe riprodotto più fedelmente la struttura sotto analisi aggiungendo ulteriori gradi di libertà, complicando però notevolmente lo studio di stabilità e controllo condotto nella seconda parte della trattazione. Essendo questo l'obiettivo finale il modello aerodinamico di Taha et al. si è presentato come un valido strumento in quanto risolve l'aerodinamica con un livello di fedeltà *low-to-medium* ad un costo computazionale contenuto, senza perdere la natura instazionaria del problema e la fenomenologia non-convenzionale propria del flapping (vortici di bordo d'attacco e portanza rotazionale). Una volta definiti opportuni sistemi di riferimento e impostata la cinematica alare, si sono scritte le equazioni di moto del corpo sotto l'azione dei carichi periodici, esprimendo ogni quantità direttamente in funzione delle deformazioni e della aerodinamica. I tre modelli aerodinamico, strutturale e di dinamica del volo interagiscono contemporaneamente in un sistema completo *tight coupled*.

La simulazione è stata eseguita utilizzando i parametri aerodinamici, morfologici e strutturali di un MAV in costruzione nel Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale dell'università University of California, Irvine (USA). In accordo con i numerosi studi presenti in letteratura i risultati indicano instabilità del volo in hovering: le variabili di stato che descrivono la dinamica longitudinale del corpo

non oscillano con media nulla ma anzi divergono all'aumentare del tempo insieme alle deformazioni strutturali fino a raggiungere valori di scarso significato fisico.

Nella seconda parte del lavoro ci si è concentrati sull'analisi di stabilità per giustificare i risultati ottenuti. La via intrapresa è stata quella di risolvere numericamente un problema di ottimizzazione in modo da trovare la soluzione periodica di equilibrio del sistema non lineare tempo-variante, attorno la quale linearizzare il problema e adottare la teoria di Floquet. La ricerca dell'orbita periodica si è rivelata difficoltosa in quanto fortemente dipendente dalle guess iniziali fornite all'algoritmo di ottimizzazione: numerosi tentativi sono stati eseguiti prima di ottenere quei parametri $\bar{\Phi}, \alpha_d, \alpha_u$ che insieme alle corrette condizioni iniziali garantissero la chiusura dell'orbita. Nonostante ciò, si è scelto questo approccio poiché fornisce la soluzione esatta senza limitazioni dovute al caso in analisi (nessun vincolo sulle scale temporali di corpo e ali). L'analisi dei moltiplicatori di Floquet ha mostrato instabilità in hovering dovuta all'angolo di beccheggio. Questo risultato conferma le previsioni ed è in accordo con la letteratura. Di conseguenza, si è progettato un sistema di controllo per consentire il raggiungimento dell'assetto desiderato. In fase iniziale si è cercato di stabilizzare il volo con un semplice pitch feedback attraverso la sola ampiezza di battito Φ . Questa scelta però non si è rivelata adatta in quanto funzionante soltanto sul sistema lineare stazionario LTI associato e non sul caso originale. Si è quindi preferita una retroazione del vettore variabili di stato completo con l'aggiunta degli stati virtuali x, h (coordinate inerziali) agendo sul sistema non soltanto tramite Φ ma anche via angolo di offset ϕ_0 . La matrice di pesi necessaria per il feedback è ottenuta tramite assegnazione dei poli nel sistema LTI e successivamente applicata sul sistema originale. Una volta individuata una valida combinazione di pesi, il controllore progettato si è mostrato in grado di condurre il MAV nella configurazione di hovering partendo da condizioni iniziali al di fuori della propria orbita periodica. Il tempo impiegato è inferiore 1s. Considerando l'assetto di volo raggiunto, sono infine calcolati in prima approssimazione momento meccanico e potenza richiesti.

SVILUPPI FUTURI I risultati ottenuti nel presente lavoro fanno riferimento ad uno specifico set di parametri morfologici e strutturali. Uno spunto decisamente valido per sviluppi futuri sarebbe condurre uno studio parametrico per analizzare la risposta del sistema. Si è visto ad esempio come nel caso in analisi l'ala elastica sia meno efficiente di quella rigida: sarebbe interessante trovare la giusta combinazione di parametri (in particolare le caratteristiche elastiche) tale per cui le prestazioni siano incrementate fino a rendere questa configurazione vantaggiosa. Per quanto riguarda la parte di stabilità, invece, la scelta di utilizzare il metodo di Floquet renderebbe la realizzazione

di uno studio parametrico molto onerosa e in parte futile. L'orbita periodica di equilibrio è infatti ottenuta con un metodo numerico fortemente dipendente dalle C.I., il quale darebbe risultati decisamente differenti al cambiare di un solo parametro. Il sistema di controllo sviluppato inoltre non si basa su un criterio universale per l'assegnazione dei poli. Il confronto tra risultati provenienti da diversi parametri strutturali avrebbe quindi uno scarso significato fisico.

Come si è già visto nel capitolo 8 anche l'inerzia delle ali è un interessante oggetto di studi: variare il rapporto tra massa alare e massa del corpo può generare nuovi contributi delle forze aerodinamiche dovuti all'interazione tra aerodinamica e dinamica del volo. Anche qui uno studio parametrico consentirebbe di trovare la condizione di ottimo.

Infine si ricorda che l'analisi condotta è riferita esclusivamente alla configurazione di hovering: il modello aeroelastico sviluppato, in seguito ad opportune modifiche, renderebbe possibile lo studio di altre condizioni di volo tra cui il volo in avanti, nel quale l'elasticità alare gioca un ruolo fondamentale.

Parte III

APPENDICE

APPENDICE

A.1 VALIDAZIONE DEL CODICE IMPLEMENTATO PER L'APPLICAZIONE DEL METODO RAYLEIGH-RITZ

Si vuole qui mostrare la validità del codice implementato per l'approssimazione dei modi di vibrare di una struttura a geometria variabile in apertura attraverso il metodo di Rayleigh-Ritz. Facendo riferimento a [4], si considera una trave incastrata (Fig. 44) di spessore unitario e larghezza linearmente variabile in apertura. Il metodo di Rayleigh-Ritz è implementato con lo scopo di approssimare i primi tre modi di vibrare flessionali e confrontarli con la soluzione esatta. Per il calcolo la trave è stata divisa in dieci segmenti uguali e sono state considerate le seguenti distribuzioni di massa e rigidezza flessionale in apertura

$$[m] = 2b\rho \begin{bmatrix} 1 \\ .92 \\ .84 \\ .76 \\ .68 \\ .60 \\ .52 \\ .44 \\ .36 \\ .28 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad [EI] = \frac{2b^3}{3} E \begin{bmatrix} 1 \\ .7787 \\ .5927 \\ .4389 \\ .3144 \\ .2160 \\ .1406 \\ .08518 \\ .04665 \\ .02195 \\ .0080 \end{bmatrix}$$

Avvalendosi della formulazione presentata in sezione 4.3, i primi tre modi della trave sono approssimati e rappresentati in Fig. 45 insieme alla soluzione esatta proposta da [40]. I risultati raffigurati sono

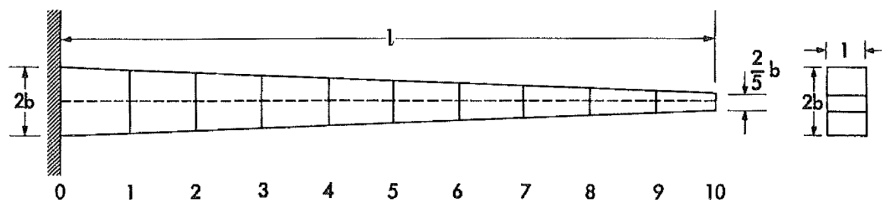
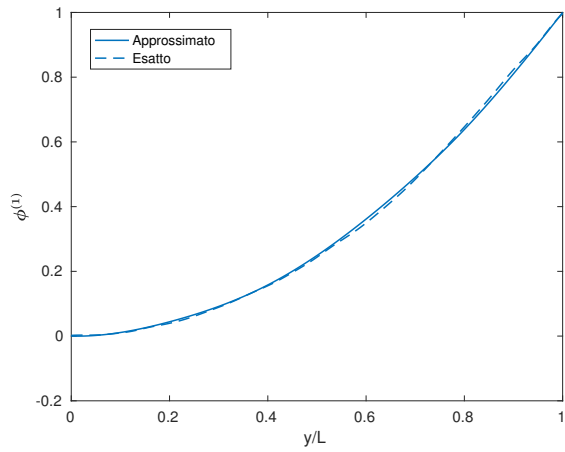
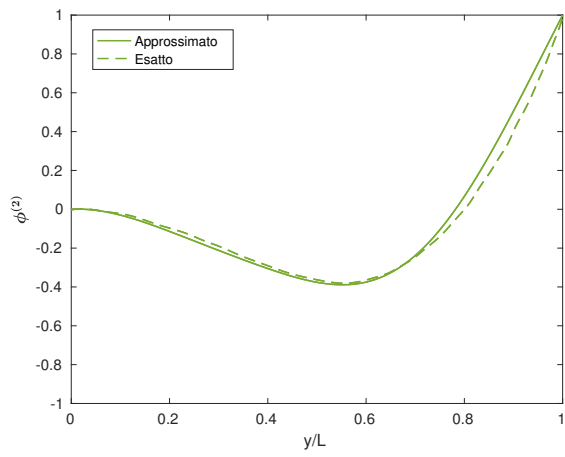


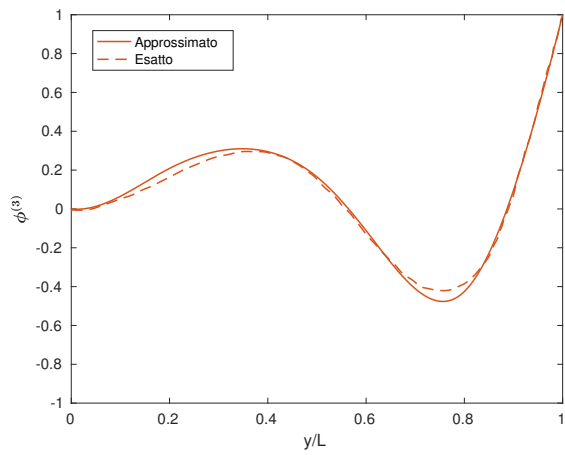
Figura 44: Trave incastrata di spessore unitario e larghezza linearmente variabile in apertura



(a) Modo 1



(b) Modo 2



(c) Modo 3

Figura 45: Confronto tra soluzione approssimata ed esatta

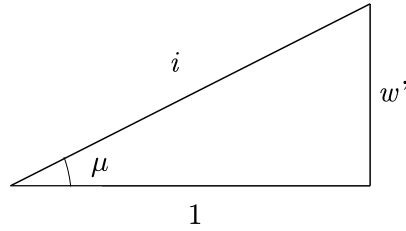


Figura 46: Generico triangolo rettangolo di angolo μ e cateto opposto w' . Il restante cateto è unitario

stati ottenuti considerando i primi sei termini dell'espansione e sono in buona concordanza con le soluzioni di riferimento.

A.2 MATRICE DI ROTAZIONE $[R_\mu]$

Riferendosi al percorso di sistemi di riferimento mostrato in Fig. 14 si vuole scrivere la matrice di rotazione che lega il frame IF_2 al frame *elastic-wing*. Essendo l'angolo di rotazione pari a $-\arctan(w')$, la matrice è definita come

$$[R_{-\arctan(w')}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\arctan w') & -\sin(\arctan w') \\ 0 & \sin(\arctan w') & \cos(\arctan w') \end{bmatrix}$$

Definendo $\mu = -\arctan(w')$ per alleggerire l'annotazione, semplici considerazioni trigonometriche possono semplificare la matrice appena scritta. Essendo infatti $\tan(\mu) = \frac{w'}{1}$, si può considerare il generico triangolo rettangolo (Fig. 46) di angolo μ e cateto opposto w' . Il restante cateto è unitario: segue così l'ipotenusa $i = \sqrt{1+w'^2}$.

In luce di ciò, la matrice di rotazione è riscritta come

$$\begin{aligned} [R_{-\arctan(w')}] &= [R_\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+w'^2}} & -\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} \\ 0 & \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+w'^2}} \end{bmatrix} \simeq \\ &\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -w' \\ 0 & w' & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

trascurando i termini di ordine superiore al primo. Si ottiene quindi la forma presentata in sezione 5.2.2.

A.3 INERZIA DI FLAPPEGGIO I_F

L'inerzia dell'ala quando il movimento di flapping le viene imposto è esprimibile come

$$I_F = I_x \sin^2(\alpha_m) + I_z \cos^2(\alpha_m) \quad (113)$$

Indicando con $m' = \rho h$ la distribuzione uniforme di massa per unità di superficie, le proprietà inerziali dell'ala sono stimate come

$$\begin{cases} I_x = 2 \int_0^R m' r^2 c(r) dr \\ I_y = 2 \int_0^R m' \hat{d}^2 c^3(r) dr \\ I_z = I_x + I_y \end{cases} \quad (114)$$

dove \hat{d} è la distanza tra la linea di cerniera e la linea baricentrica normalizzata tramite la corda. Prendendo come α_m la media aritmetica tra angolo di downstroke e upstroke, l'inerzia di flappeggio risultante per il caso in analisi è $I_F = 1.1596 \cdot 10^{-4} \text{kg m}^2$.

A.4 PROPRIETÀ STRUTTURALI ED INERZIALI

Riferendosi ai valori riportati in Tab. 4-6 seguono gli andamenti in apertura di corda, massa, inerzia rotazionale e rigidezze riferiti all'ala elastica.

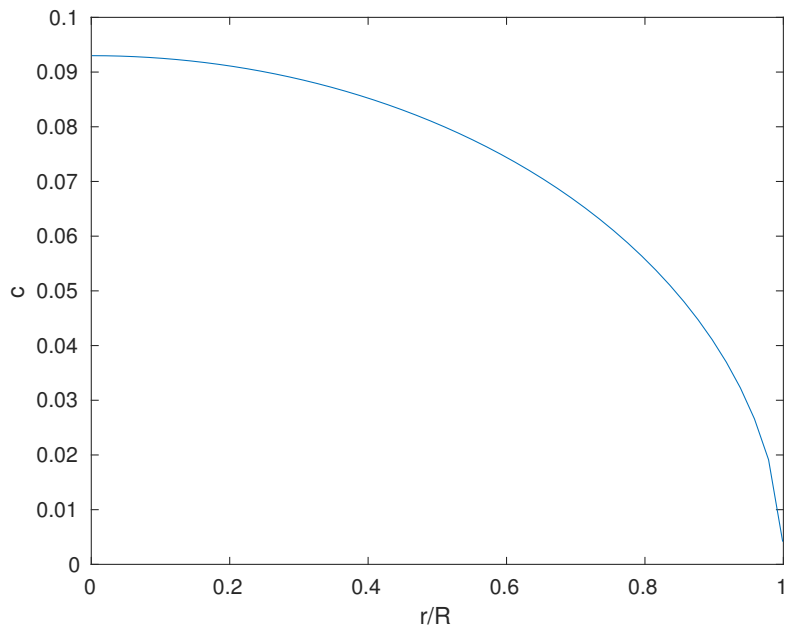


Figura 47: Corda [m]

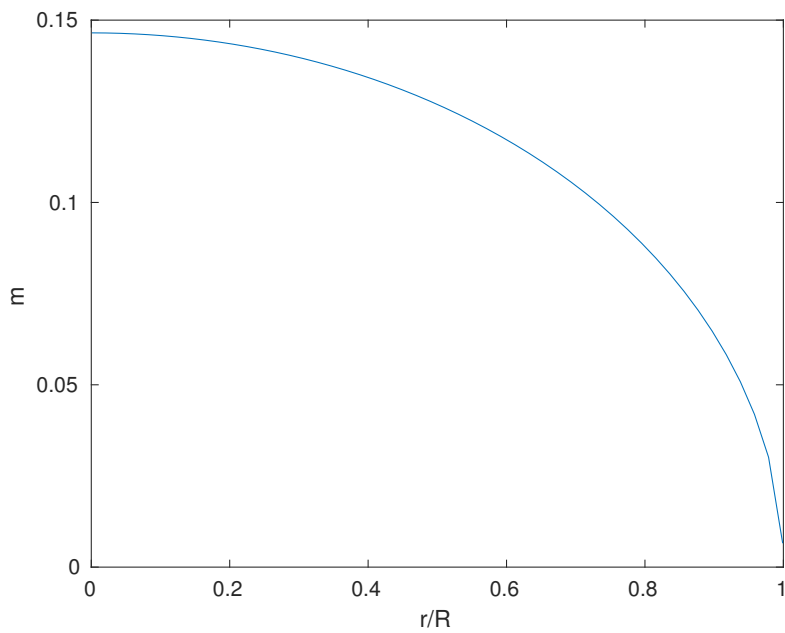
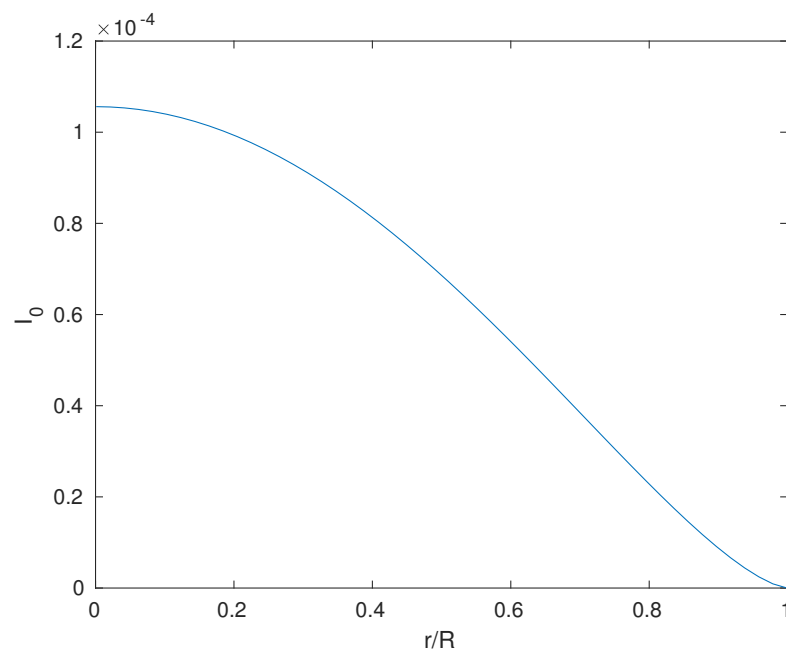
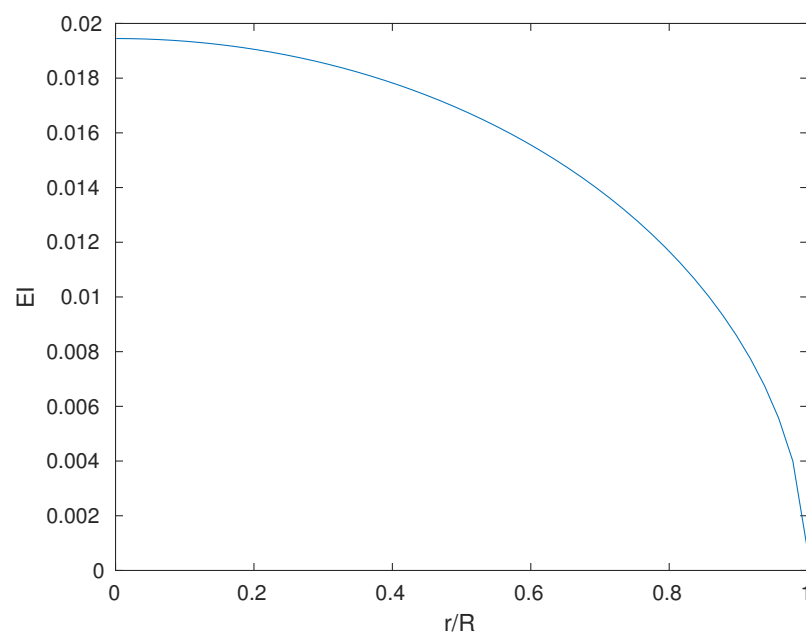
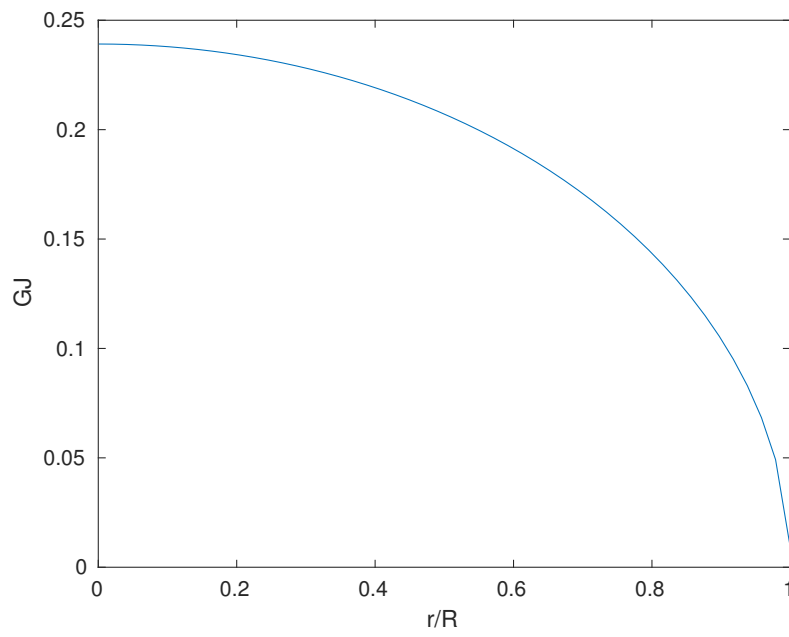


Figura 48: Massa dell'ala [kg]

Figura 49: Inerzia rotazionale [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]Figura 50: Rigidezza flessionale [$\text{N} \cdot \text{m}$]

Figura 51: Rigidezza torsionale [$N \cdot m$]

BIBLIOGRAFIA

- [1] S.A. Ansari, R. Zbikowski e K. Knowles. «Non-linear unsteady aerodynamic model for insect-like flapping wings in the hover. Part 1 and 2: Methodology and analysis». In: *J. Aerosp. Eng.* 220 (2006), pp. 61–83,169–186.
- [2] C. Van den Berg e C.P. Ellington. «The three-dimensional leading-edge vortex of a hovering model hawk moth». In: *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 352 (1997), pp. 329–340.
- [3] G.J. Berman e Z.J. Wang. «Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight». In: *J. Fluid Mech* 582 (2007), pp. 153–168.
- [4] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, e R. L. Halfman. *Aeroelasticity*. New York, Chap. 5. Dover, 1996.
- [5] Bo Cheng e Xinyan Deng. «Translational and Rotational Damping of Flapping Flight and Its Dynamics and Stability at Hovering». In: *IEEE Transactions on Robotics* 27 (2011), pp. 849–864.
- [6] S.K. Chimakurthi, J. Tang, R. Palacios, C.E.S. Cesnik e W. Shyy. «Computational aeroelasticity framework for analyzing flapping wing micro air vehicles». In: *AIAA Journal* 47 (2009), pp. 1865–1878.
- [7] Pines DJ e Bohorquez F. «Challenges facing future micro-air-vehicle development». In: *J Aircraft* 43 (2006), pp. 290–305.
- [8] M.H. Dickinson. «The effects of wing rotation on unsteady aerodynamic performance at low Reynolds numbers». In: *Journal of Experimental Biology* 192 (1994), pp. 179–206.
- [9] M.H. Dickinson, F.-O. Lehmann e S.P. Sane. «Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight». In: *Science* 284 (1999), pp. 1954–1960.
- [10] W. J. Duncan. «Mechanical admittances and their application to oscillation problems». In: *Br. A.R.C. R. and M.* 2000 (1947).
- [11] Botha A. E. e Dednam W. «Optimized shooting method for finding periodic orbits of nonlinear dynamical systems». In: *Engineering with Computers* 31 (2015), pp. 749–762.
- [12] C.P. Ellington. «The aerodynamics of hovering insect flight. III. Kinematics». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B.* 305 (1984), pp. 41–78.
- [13] C.P. Ellington e A.L.R. Thomas. «The mechanics of flight in the Hawkmoth *Manduca Sexta* II. Aerodynamic consequences of kinematic and morphological variation». In: *Journal of Experimental Biology* 200 (1997), pp. 2723–2745.

- [14] C.P. Ellington, C.V. den Berg, A.P. Willmott e A.L.R. Thomas. «Leading-edge vortices in insect flight». In: *Nature* 384 (1996), pp. 626–630.
- [15] Y.C. Fung. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. New York 1969.
- [16] A. Gogulapati, P. P. Friedmann, E. Kheng e W. Shyy. «Approximate Aeroelastic Modeling of Flapping Wings in Hover». In: *AIAA Journal* 51 (2013).
- [17] Wu J. H., Zhang Y. L. e Sun M. «Hovering of Model Insects: Simulation by Coupling Equations of Motion with Navier–Stokes Equations». In: *Journal of Experimental Biology* 212 (2009), pp. 3313–3329.
- [18] M. Hamamoto, Y. Ohta, K. Hara e T. Hisada. «Application of fluid–structure interaction analysis to flapping flight of insects with deformable wings». In: *Adv. Robot.* 21 (2007), pp. 1–21.
- [19] A.E. Von Doenhoff I.H. Abbott. *Theory of Wing Sections*. Dover Publications, New York, 1959.
- [20] D. Ishihara, T. Horie e M. Denda. «A two-dimensional computational study on the fluid–structure interaction cause of wing pitch changes in dipteran flapping flight». In: *J. Exp. Biol.* 212 (2009), pp. 1–10.
- [21] R.T. Jones. «Operational treatment of the nonuniform lift theory to airplane dynamics». In: *Tech. Rep. NACA* 667 (1938).
- [22] Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2013.
- [23] Taylor G. K., Bomphrey R. J. e Hoen J. «Insect Flight Dynamics and Control». In: *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (2006).
- [24] Dietl J. M. e Garcia E. «Stability in Ornithopter Longitudinal Flight Dynamics». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 31 (2008), pp. 1157–62.
- [25] Platzer M., Jones K., Young J. e Lai J. «Flapping wing aerodynamics: progress and challenges». In: *AIAA Journal* 46 (2008), pp. 2136–2149.
- [26] Sun M., Wang J. e Xiong Y. «Dynamic flight stability of hovering insects». In: *Acta Mechanica Sinica* 23 (2007), pp. 231–246.
- [27] Aaron McClung, Raymond Maple, Donald Kunz e Philip Beran. «Examining the Influence of Structural Flexibility on Flapping Wing Propulsion». In: *49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/A-SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2008).

- [28] Gao N., Aono H. e Liu H. «A numerical analysis of dynamic flight stability of hawkmoth hovering». In: *Journal of Biomechanical Science and Engineering* 4 (2009), pp. 105–116.
- [29] T. Nakata, H. Liu, Y. Tanaka, N. Nishihashi, X. Wang e A. Sato. «Aerodynamics of a bio-inspired flexible flapping-wing micro air vehicle». In: *Bioinsp. Biomim.* 6 (2011).
- [30] Toshiyuki Nakata e Hao Liu. «A fluid–structure interaction model of insect flight with flexible wings». In: *Journal of Computational Physics* 231 (2012), pp. 1822–1847.
- [31] Christopher T. Orłowski e Anouck R. Girard. «Modeling and Simulation of Nonlinear Dynamics of Flapping Wing Micro Air Vehicles». In: *AIAA Journal* 49 (2011), pp. 969–981.
- [32] Friedmann P. P. «Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity». In: *Computers & Mathematics with Applications* 12 (1986), pp. 131–148.
- [33] D.A. Peters, S. Karunamoorthy e W. Cao. «Finite-state induced flow models, Part I: Two-dimensional thin airfoil». In: *J. Aircr.* 44 (1995), pp. 1–28.
- [34] E.C. Polhamus. «A concept of the vortex lift of sharp-edge delta wings based on a leading-edge-suction analogy». In: *Tech. Rep. NASA* (1966).
- [35] Zbikowski R., Ansari SA. e Knowles K. «On mathematical modelling of insect flight dynamics in the context of micro air vehicles». In: *Bioinsp. Biomim.* 1 (2006), R26–37.
- [36] M. N. Richter e M. J. Patil. «Influence of Wing Flexibility on the Stability of Flapping Flight». In: *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference* (2010).
- [37] H. Schlichting e E. Truckenbrodt. *Aerodynamics of the Airplane*. McGraw-Hill, 1979.
- [38] Tang J Viieru D Liu H. Shyy W Lian Y. *Aerodynamics of low Reynolds number flyers*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [39] W. Shyy, H. Aono, S.K. Chimakurthi, P. Trizila, C.-K. Kang, C.E.S. Cesnik e H. Liu. «Recent progress in flapping wing aerodynamics and aeroelasticity». In: *Progress in Aerospace Sciences* 46 (2010), pp. 284–327.
- [40] J. N. Siddall e G. Isakson. «Approximate Analytical Methods for Computing Natural Modes and Frequencies of Vibration.» In: *Report of M.I.T. Aeroelastic and Structures Laboratory for the Office of Naval Research* (1951).

- [41] Mao Sun e Yan Xiong. «Dynamic flight stability of a hovering bumblebee». In: *Journal of Experimental Biology* 208 (2005), pp. 447–459.
- [42] Bierling T. e Patil M. In: *Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics* (2009), pp. 2–5.
- [43] Muller TJ. «Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications». In: *AIAA Prog Astronaut Aeronaut* 195 (2001).
- [44] Haithem E. Taha e Muhammad R. Hajj. «Effects of the Stealth Requirements on the Aerodynamic Performance of the X-47B». In: *54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2013).
- [45] Haithem E. Taha, Muhammad R. Hajj e Philip S. Beran. «State-space representation of the unsteady aerodynamics of flapping flight». In: *Aerospace Science and Technology* 34 (2014), pp. 1–11.
- [46] Haithem E. Taha, Muhammad R. Hajj e Ali H. Nayfeh. «Longitudinal Flight Dynamics of Hovering MAVs/Insects». In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 37 (2014), pp. 970–979.
- [47] Haithem E. Taha, Muhammad R. Hajj e Craig A. Woolsey. «Geometric Control Approach to Longitudinal Stability of Flapping Flight». In: *Journal of Guidance, Control, and Dinamics* 39 (2016).
- [48] Haithem E. Taha, Muhammad R. Hajj, Craig A. Woolsey, Sevak Tahmasian e Ali H Nayfeh. «The need for higher-order averaging in the stability analysis of hovering, flapping-wing flight». In: *Bioinspiration & Biomimetics* 10 (2015).
- [49] T. Theodorsen. «General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter». In: *Tech. Rep. NACA* 496 (1935).
- [50] Su W. e Cesnik C. E. S. «Nonlinear Aeroelastic Simulations of a Flapping Wing Micro Air Vehicle Using Two Unsteady Aerodynamic Formulations». In: *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2010).
- [51] Su W. e Cesnik C. E. S. «Flight dynamic stability of a flapping wing MAV in hover». In: *AIAA-Paper-2011-2009* (2011).
- [52] H. Wagner. «Uber die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflugeln». In: *Z. Angew. Math. Mech.* 5 (1925).
- [53] B. Van der Wall e J.G. Leishman. «The influence of variable flow velocity on unsteady airfoil behavior». In: *J. Am. Helicopter Soc.* 39 4 (1994).
- [54] Z.J. Wang, J.M. Birch e M.H. Dickinson. «Unsteady forces in hovering flight: computation vs experiments». In: *J. Exp. Biol.* 207 (2004), pp. 449–460.

- [55] P. Wu, P. Ifju e B. Stanford. «Flapping Wing Structural Deformation and Thrust Correlation Study with Flexible Membrane Wings, journal = *AIAA Journal*, year = 2010, volume = 9,» in: ().
- [56] Yan Xiong e Mao Sun. «Dynamic flight stability of a bumblebee in forward flight». In: *Acta Mechanica Sinica* 24 (2008), pp. 25–36.
- [57] Q. Zhu. «Numerical simulation of a flapping foil with chordwise or spanwise flexibility». In: *AIAA Journal* 45 (2007), pp. 2448–82.

COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both \LaTeX and \LyX .