POLITECNICO DI MILANO
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Laurea Magistrale in Computer Engineering

Caratterizzazione di Meccanismi Economici Contingenti agli Eventi

Relatore: Prof. Nicola GATTI, Politecnico di Milano
Correlatori: Prof. Carmine VENTRE, University of Essex

Elaborato di tesi
Giovanni ZURETTI
Matr. 842081

Anno Accademico 2016-2017

Abstract

Mechanism Design is a branch of the Game Theory that describes and models situations where agents do not try to achieve their goal directly by performing the best action, but they declare which type of action they will perform and the mechanism decides the outcomes for them. Such mechanisms are, for example, auctions where the agents make an offer, the auctioneer assigns the goods to the best offer and receives a payment. An even more interesting kind of economic mechanisms can be found in settings where the valuations of agents and the payments to the auctioneer depend on the realization of some events that may or may not happen. Studying Mechanism Design in such settings is interesting for many possible applications, such as Sponsored Search Auctions or the allocation of tasks to machines. However, it does not exist any model that describes such settings from a general and theoretical point of view. In this work we provide a general definition for the valuations of agents in settings where valuations depend on events and we show how to extend the standard VCG to these settings (EC-VCG). Furthermore, we provide alternative mechanisms to the standard VCG which allow us to guarantee different properties from those guaranteed by the VCG. At last, we provide a generalization of Myerson Mechanisms and we show under which constraints it can be applied to settings in which the valuations of agents depend on the realization of events.

Sommario

La progettazione di meccanismi economici è un'area della Teoria dei Giochi che descrive e modella quelle situazioni in cui ogni agente non prova a raggiungere i propri obiettivi personali interagendo con gli altri agenti, ma tale interazione è mediata da un meccanismo, che raccoglie le azioni che gli agenti desiderano compiere e in base ad esse sceglie un risultato. Un esempio di meccanimi economici sono le aste, dove un banditore mette all'asta un oggetto, gli agenti dichiarano la cifra che sono disposti a spendere per tale oggetto e il banditore assegna l'oggetto all'agente che ha fatto l'offerta più alta. Una tipologia di meccanismi economici ancora più interessanti, sono quei meccanismi in cui le valutazioni degli agenti e i pagamenti al banditore dipendo dall'avvenimento di alcuni eventi. Studiare la progettazione dei meccanismi economici in questo scenario è interessante per molte applicazioni come le Sponsored Search Auction o l'assegnamento di compiti a delle macchine. Tuttavia, non esiste un modello che descriva questi scenari in maniera generale e da un punto di vista teorico. In questa tesi proporremo un definizione generale per le valutazioni degli agenti negli scenari in cui queste dipendono dalla realizzazione di eventi e mostreremo come estendere meccanismi noti in letteratura come il meccanismo VCG al tali scenari (EC-VCG). Inoltre proporremo meccanismi alternativi a questo, che garantiscano, sotto differenti condizioni, alcune delle proprietà garantite dalla VCG. Infine proporremo una generalizzazione dei meccanismi di Myerson e mostreremo sotto quali vincoli tale generalizzazione può essere applicata agli scenari in cui le valutazioni degli agenti dipendono dagli eventi.

Indice

Capitolo 1

Introduzione ai Meccanismi Contingenti agli Eventi

In questa breve introduzione esporremo l'area di ricerca che ha interessato questo lavoro, definiremo quale problema è stato affrontato, i contributi originali portati e come essi siano stati organizzati in questo lavoro.

1.1 Introduzione all'area di ricerca e al problema

L'area di ricerca in cui si inserisce il nostro lavoro è quella della Teoria dei Giochi, anche nota come Teoria delle Decisioni Interattive, ovvero quella teoria che studia come ottimizzare le decisioni in problemi caratterizati dall'interazione fra due o più agenti. L'elemento di fondamentale aggiunta rispetto alla Teoria delle Decisioni classica è la presenza di interazione fra più parti potenzialmente con interessi e scopi diversi. Questo tipo di teoria ha un ruolo fondamentale nei campi dell'Intelligenza Artificiale e dell'Informatica Teorica, in particolareper quanto riguarda la modellazione dei mercati che, per definizione, sono ambienti in cui agenti con diversi interessi hanno possibilità di interagire tra di loro. È quindi molto interessante studiare questa disciplina. In questo lavoro ci occuperemo di una sottoarea della Teoria dei Giochi, quella della progettazione di meccanismi economici per la regolazione delle interazioni fra gli agenti, nota in letteratura come Mechanism Design. Obbiettivo di questa branca della Teoria dei Giochi è creare meccanismi e regole che incanalino le interazioni al fine di ottenere alcuni risultati specifici, come l'ottimizzazione del benessere sociale o la possibilità che l'interazione abbia un'utilità per tutte le parti in causa. I meccanismi economici sono quindi dei modelli matematici che permettono di descrivere delle interazioni fra agenti, siano essi persone, computer, aziende che offrono servizi o altre tipologie di agenti. Il più classico esempio di meccanismo economico è quello delle aste, dove un banditore mette a disposizione un bene e altri agenti esprimono una valutazione per tale oggetto, dichiarando quanto sono disposti a spendere per ottenerlo. Il meccanismo sarà dunque quel processo che, raccolte le valutazioni degli agenti, deciderà a chi assegnare l'oggetto e quale sarà la somma da pagare. Negli ultimi anni, grazie al business delle pubblicità online, sono emersi dei meccanismi molto interessanti e molto redditizi. Google AdWords, sistema che implementa il meccanismo che decide quali pubblicità compaiono su Google a fronte di una ricerca da parte di un utente, è stato fonte di più di 50 miliardi di dollari di guadagno per Google nel solo 2013 [1]. Tali meccanismi effettuano un'asta online ogni volta che viene avviata una ricerca e portano alla selezione di un gruppo di pubblicità che verranno mostrate, in un certo ordine, all'utente. Nel momento in cui l'utente seleziona effettivamente una delle pubblicità con un click, avviene il pagamento da parte del fornitore di tale pubblicità a Google. Analogamente, se andiamo a considerare gli introiti pubblicitari di un social network come Facebook, essi ammontano nel 2015 a più di 16 miliardi di dollari [2], di cui una parte significativa proviene da pubblicità che sfruttano la stessa tipologia di meccanismo pay-per-click utilizzata da Google. Questa dinamica, che si può ritrovare anche in ambiti diversi da quello delle pubblicità online, per esempio nell'assegnazione di un compito da svolgere ad alcune macchine che vengono pagate solo a compito svolto, viene detta contigente agli eventi.[1] Questo termine sta a significare che, a differenza di un asta normale, per esempio, i pagamenti non avvengono una volta che il bene o il servizio è stato assegnato bensì successivamente, in seguito all'accadimento o meno di un evento (nell'esempio di Google AdWords e Facebook, quando avviene il click sulla pubblicità). L'altra dinamica che vogliamo evidenziare è che la dipendenza dalla realizzazione degli eventi introduce nel meccanismo un fattore che nelle aste normali non c'è, ovvero che è possibile, per il banditore, osservare quella che abbiamo chiamato valutazione degli agenti. L'introduzione di questi fattori in un meccanismo economico genera delle particolarità, per cui, in questi scenari, non è sufficiente adottare meccanismi già presenti e consolidati in letteratura, poichè essi saranno limitati e non potranno garantire le proprietà che solitamente vengono ricercate nella progettazione di tali meccanismi. Per questo motivo, a seconda degli specifici casi di studio, vengono creati Meccanismi Coningenti agli Eventi ad hoc e non esiste un modello generale su cui, ad oggi, sia posibile basarsi per affrontare un nuovo scenario in cui si ponesse il problema di creare un meccanismo che debba te-

[1] In inglese Execution Contingent (EC).

nere conto del possibile accadimento di eventi esterni al meccanismo stesso. Riteniamo dunque sia interessante provare a creare un modello matematico che descriva in modo adeguato tutti i casi di studio, andando oltre la realizzazione di meccanismi ad hoc. Gli obbiettivi di questa tesi saranno quindi: individuare un modello descrittivo che sia il più generale possibile per scenari con eventi, vedere quali meccanismi economici possono essere implementati a partire da tale modello e dimostrare quali sono le proprietà che valgono in essi.

1.2 Contributi originali

I contributi originali che daremo tramite questo lavoro sono i seguenti: identificheremo un insieme di classi di funzioni di valutazione degli agenti che siano abbastanza generali per descrivere e modellare tutti i possibili casi e scenari con eventi; proporremo un estensione del meccanismo VCG standard, vedremo sotto quale condizione ciò è possibile e quali proprietà valgono sotto tale condizione; ove non fosse verificata la condizione precedente proporremo dei meccanismi Groves equivalenti alternativi (stocastici e non stocastici) e vedremo quali proprietà riusciamo a garantire tramite essi; proveremo l'impossibilità di usare l'idea dell'esecuzione contingente per estendere anche i meccanismi di Myerson agli scenari con eventi; infine proporremo un'estensione dei meccanismi di Myerson che ci permetterà di applicare tali meccanismi ad una classe ristretta di funzioni di valutazione in presenza di eventi.

1.3 Struttura della tesi

Il lavoro verrà quindi strutturato nel seguente ordine:

- Capitolo 2: presenteremo il Mechanism Design classico, senza e con interdipendenza nelle valutazioni degli agenti, e vedremo in quali testi nella letteratura è stato affrontato il problema degli scenari con eventi.
- Capitolo 3: individueremo quali sono le classi di funzioni di valutazione necessarie a descrivere in modo sufficientemente generale tutte le possibili casistiche e definiremo tali funzioni.
- Capitolo 4: definiremo quali sono i meccanismi applicabili a fronte di scenari in cui le valutazioni dipendono dagli eventi e ne esporremo e dimostreremo le proprietà.

- Conclusioni e sviluppi futuri: Trarremo le conclusioni del nostro lavoro e proporremo possibili strade da percorrere per sviluppare ulteriormente questo argomento.

Capitolo 2

Teoria dei Meccanismi Economici

Iniziamo la trattazione riportando le nozioni alla base della teoria dei meccanismi economici. In questo capitolo definiremo cos'è un meccanismo economico (Sezione 2.1) e presenteremo quali sono le classi di funzioni di valutazione più interessanti (Sezione 2.2) rispetto a cui implementare i meccanismi; definirimeno poi quali sono le proprietà interessanti per un meccanismo economico (Sezione 2.3) e riporteremo i meccanismi più interessanti presenti in letteratura (Sezione 2.4, Sezione 2.5, Sezione 2.6, Sezione 2.7), che saranno poi il punto di partenza per sviluppare meccanismi applicabili negli scenari con eventi. Infine, riporteremo i lavori presenti in letteratura in cui sono stati tratta meccanismi in scenari con eventi e da cui è emersa l'idea di contingenza agli eventi (Sezione 2.8).

2.1 Definizione di meccanismo economico

Partiamo, dunque, dalla definizione di meccanismi economici standard a rivelazione diretta. Possiamo definire tali meccanismi, come una tupla (Θ_1,. . . ,Θ_n, X, f) dove

- N è lo spazio degli agenti, $n = |N|$, e i è l'indice che utilizzeremo per indicare un agente generico,
- X è lo spazio delle allocazioni, $k = |X|$, e x indica un'allocazione generica, e $X_{-N'}$ è lo spazio di allocazione dove il gruppo di agenti $N' \subseteq N$ è stato rimosso,
- $\Theta_i \subseteq \mathbb{R}$, spazio compatto, è lo spazio dei tipi dell'agente i,
- $f : \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_n \rightarrow \mathbb{R}$ è la social choice function.

Definiamo poi $\theta_i \in \Theta_i$ il tipo dell'agente i-esimo, e $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ il profilo dei tipi degli agenti. Un meccanismo economico standard permetterà a chi lo governa, il banditore, e agli agenti partecipanti di interagire nel seguente modo: il banditore offre qualcosa che è di interesse per gli agenti (un bene in suo possesso dal quale vuole guadagnare dei soldi, un task che desidera venga completato, etc.) e che gli può portare una certa utilità; gli agenti dichiarano qual è il loro tipo, ovvero il legame che c'è tra ciò che offre il banditore e il loro interesse (quanto sono disposti a spendere per il bene offerto, quanto è il costo che verrebbe sostenuto per il completamento di un task, etc.); tramite una social choice function, dato un profilo di tipi, il meccanismo sceglie una possibile allocazione nello spazio di allocazioni X; infine si procede con il calcolo dei pagamenti che saranno positivi se gli agenti devono pagare una somma al banditore e negativi nel caso contrario. Come già detto, il tipo ci permette di definire l'interesse degli agenti all'interno del meccanismo. Questo ci permette di definire quella che chiamiamo funzione di valutazione $v_i(\theta_i, x)$ dell'agente, che dipende dal tipo e dall'allocazione. Un meccanismo in cui la funzione di valutazione dipende direttamente dal tipo dell'agente, e quindi in cui l'unico modo che l'agente ha per influenzare il meccanismo è riportare il suo tipo, è detto meccanismo a rivelazione diretta. Vediamo ora come classificare i diversi tipi di meccanismi a seconda di come varia la funzione di valutazione degli agenti.

2.2 Classi di funzione di valutazione in assenza di interdipendenza

In generale possiamo distinguere diverse funzioni di valutazione a seconda dell'ambiente, lineare o quasi lineare, in cui eseguiamo il meccanismo e a seconda del numero di parametri, singolo o multiplo. In seguito andremo a definire meglio questi concetti con l'utilizzo di esempi, mappati all'interno della Tabella 2.1. Sottolineiamo inoltre come questa distinzione sia stata fatta escludendo funzioni di valutazione con interdipendenza tra i tipi degli agenti, ovvero quei casi in cui la funzione di valutazione non dipende solo dal tipo proprio dell'agente ma anche dal tipo degli altri agenti. Questo caso verrà trattato singolarmente e successivamente.

Tabella 2.1: Classi di funzioni di valutazione ed esempi di meccanismi.

	Lineare	**Quasi Lineare**
Esempi	Sponsored Search Auction	Un tipo diverso per ogni allocazione

Prima di andare a vedere nello specifico le diverse tipologie di ambienti e i diversi esempi, ai fini di rendere più chiara la trattazione, andremo a definire cosa intendiamo per utilità degli agenti. Definiamo l'utilità dell'agente i-esimo come:

$$U_i = v_i - p_i.$$

L'utilità è quindi la differenza tra la valutazione dell'agente e il pagamento che questo deve al meccanismo. Notiamo che per nessuno dei termini sono stati specificati i parametri da cui dipendono. Questo perchè in diversi casi essi possono dipendere da parametri diversi, e quindi si è voluta dare una definizione che fosse il più generale possibile. Approfondiamo ora i diversi ambienti e i diversi esempi.

2.2.1 Ambiente quasi-lineare

Un ambiente quasi lineare è caratterizzato da una funzione di utilità per gli agenti definita come

$$U_i(\theta, x) = v_i(\theta, x) - p_i, \tag{2.1}$$

ed è detto quasi lineare perchè la funzione di utilità è lineare eccetto per il termine $v_i(\theta, x)$, che è la valutazione degli agenti rispetto all'allocazione x. Possiamo dire che se $v_i : X \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ allora non siamo in presenza di interdipendenza, ovvero la valutazione dell'agente i-esimo, oltre che dall'allocazione, dipende solo dal proprio tipo e non da quello di qualche altro agente. Se, invece, la valutazione dell'agente i-esimo dovesse dipendere anche dal tipo di altri agenti diremo che siamo in presenza di interdipendenza tra i tipi.

2.2.2 Ambiente lineare

In un ambiente lineare la funzione di utilità degli agenti sarà lineare nel tipo dell'agente e nel pagamento, e quindi esprimibile come

$$U_i(\theta_i, x) = \theta_i\, w_i(x) - p_i, \tag{2.2}$$

con $w_i : X \to \mathbb{R}$. È dunque lineare perchè la funzione di valutazione dell'agente non è più una qualsiasi funzione, come nel caso di ambiente quasi lineare, ma deve essere del tipo $v_i(\theta_i, x) = \theta_i\, w_i(x)$, ovvero lineare non in assoluto, poichè $w(x)$ potrebbe non essere lineare, ma lineare rispetto al tipo dell'agente.

2.2.3 Esempi nei diversi ambienti

Vediamo ora due esempi atti a descrivere ogni tipologia di ambiente che abbiamo precedentemente individuato.

Il caso delle Sponsored Search Auctions

Come primo esempio di caso con valutazione lineare a singolo parametro vediamo quello delle Sponsored Search Auctions, utilizzate nell'advertisement online. In questo scenario abbiamo un insieme di slot a cui può essere assegnata una pubblicità. Gli agenti competono per ottenere uno di questi slot affinchè appaia la propria pubblicità, a cui associano un valore e una probabilità di essere selezionata. In linea di principio, quindi, la valutazione degli agenti dipende da due parametri: il valore che ottiene l'agente quando la sua pubblicità viene selezionata dagli utenti e la probabilità che tale pubblicità venga selezionata, che chiameremo *Click Through Rate* (CTR). Tuttavia se consideriamo questo secondo parametro di pubblica conoscenza, sia per gli agenti che per l'auctioneer, ecco che abbiamo un esempio di valutazione lineare a singolo parametro. Infatti possiamo scrivere la valutazione come

$$v_i(x) = \theta_i \, w_i(x) = \theta_i \, \mathrm{CTR}_i,$$

dove θ_i è il valore che ottiene l'agente i-esimo dal click da parte degli utenti sulla sua pubblicità e CTR_i, noto, il suo *Click Through Rate.* Vediamo ora ad un esempio in cui la funzione di valutazione degli agenti sia quasi lineare.

Un tipo diverso per ogni allocazione

Come esempio di valutazione in ambiente quasi lineare presentiamo il caso più generale possibile. In questo esempio avremo quindi, per ogni agente, un tipo multi parametro che varia a seconda dell'allocazione. Il tipo θ_i di ogni agente non è più un solo parametro che va messo nella funzione di valutazione lineare, come nel caso precedente, ma si traduce in una matrice $h \times k$ del seguente tipo:

	x_1	x_2	...	x_k
θ_1	...	...	...	...
θ_2	...	...	...	...
...	...	...	...	...
θ_h	...	...	...	...

Quindi, poichè il tipo dell'agente varia a seconda dell'allocazione, la funzione di valutazione non potrà più essere semplicemente lineare nel tipo secondo un fattore moltiplicativo, ma sarà quasi lineare e ad ogni allocazione corrisponderà un tipo diverso.

2.3 Proprietà desiderabili dei Meccanismi Economici

Prima di passare a definire alcuni dei meccanismi economici che possono essere usati e implementati negli scenari precedenti per determinare l'allocazione e i pagamenti degli agenti, definiamo le proprietà più interessanti che possono avere tali meccanismi. Le proprietà che più ci interessano sono:

- Compatibilità degli Incentivi (IC),
- Efficienza Allocativa (AE),
- Razionalità Individuale (IR),
- No deficit (WBB).[1]

Ora spiegheremo più nel dettaglio queste proprietà.

2.3.1 Compatibilità degli incentivi

Un meccanismo economico è IC se tutti gli agenti riportano il loro vero tipo. Affinchè ciò sia vero è necessario che il meccanismo sia costruito in modo tale che per gli agenti riportare il vero sia la cosa più conveniente. Formalmente quindi, una social choice function f è IC se

$$\forall i \in N, \forall \theta \in \Theta \colon U_i(f(\bar{\theta}_i, \theta_{-i}), \bar{\theta}_i) \geq U_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \hat{\theta}_i),$$

dove $\bar{\theta}_i$ è il tipo vero dell'agente i-esimo e $\hat{\theta}_i$ è il tipo riportato dall'agente al meccanismo. Più precisamente in questo caso parleremo di IC nelle strategie dominanti o DSIC. Diremo invece che un meccanismo economico è IC in ex-post se

$$\forall i \in N \colon U_i(f(\bar{\theta}_i, \theta_{-i}), \bar{\theta}_i) \geq U_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \hat{\theta}_i)$$

dove $\bar{\theta}_i$ è il tipo vero dell'agente i-esimo, $\hat{\theta}_i$ è il tipo riportato dall'agente al meccanismo, e θ_{-i} è il tipo vero riportato degli altri agenti. In questo caso quindi la condizione è meno stringente, perchè richiediamo semplicemente che, posto che gli altri agenti riportino il vero, la strategia migliore per l'agente i-esimo sia quella di riportare il suo tipo vero. Questa proprietà, sia nella sua forma in ex-post che in strategie dominanti, è una delle più importanti dal punto di vista del banditore. Infatti è quella che assicura che

[1]Come acronimi, per consistenza della letteratura, abbiamo utilizzato gli equivalenti in lingua inglese, ovvero: Indivual Rationality (IR), Allocative Efficiency (AE), Incentive Compatibility (IC), Weakly Budget Balance (WBB) e Strognly Budget Balance(SBB).

il meccanismo si svolga come è stato progettato. Se non dovesse valere, significherebbe che gli agenti possono manipolare a piacere il meccanismo per trarne un vantaggio, a svantaggio, invece, del banditore.

2.3.2 Efficienza Allocativa

Per Efficienza Allocativa di un meccanismo economico intendiamo che, dato un profilo di tipi, l'allocazione x scelta è ottima tra le possibili allocazioni. Più formalmente, un meccanismo economico è AE se:

$$\forall \theta \in \Theta, x^*(\theta) \in \max \{x(\theta) \in X\}$$

dove $x^*(\theta)$ è l'allocazione scelta dal meccanismo. Quello che richiediamo al meccanismo con questa proprietà è dunque che, fissata una cifra di merito, l'allocazione scelta ottimizzi tale cifra. Nel nostro caso considereremo un meccanismo efficiente quando tra le possibili allocazioni selezionerà una tra le allocazioni di valore massimo. La nostra cifra di merito è dunque il valore della stessa allocazione.

2.3.3 Razionalità Individuale

La Razionalità Individuale è la proprietà che impone che l'utilità degli agenti prendenti parte al meccanismo non sia strettamente negativa. Più formalmente possiamo dire che una social choice function f è IR se:

$$\forall i \in N, \forall \theta \in \Theta \colon U_i(f(\theta), \theta_i) \geq \bar{U}_i(\theta_i),$$

dove $\bar{U}_i(\theta_i)$ è l'utilità che avrebbe l'agente i se non partecipasse al meccanismo. Questa proprietà impone quindi che sia conveniente partecipare al meccanismo per gli agenti, che, come visto, matematicamente si traduce nel concetto che per nessun agente l'utilità sia negativa.

2.3.4 No deficit

Un meccanismo economico è detto WBB se la somma dei pagamenti degli agenti al meccanismo non è strettamente negativa, cioè se

$$\sum_{i \in N} p_i(\theta) \geq 0.$$

Il caso in cui la somma dei pagamenti sia strettamente maggiore di zero il meccanismo è detto Strongly Budget Balance (SBB). Quello che è richiesto al meccanismo tramite questa proprietà è, in altre parole, che il meccanismo sia vantaggioso per il banditore, e quindi che la sua utilità sia non negativa.

Definite tutte le proprietà vediamo ora quali sono i meccanismi più notevoli in letteratura e quali proprietà valgano per essi. Infine, riprenderemo uno degli esempi precedentemente fatti e vedremo come sia possibile implementare per esso uno dei meccanismi che descriveremo.

2.4 Meccanismi di Groves

I meccanismi più importanti in ambiente quasi lineare sono senza dubbio i meccanismi di Groves, che sono definiti nel seguente modo. Un meccanismo a rivelazione diretta descritto dalla tupla $(\Theta_1, \ldots, \Theta_n, X, f)$, dove $f(\theta) = (x(\theta), p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta))$, è un meccanismo di Groves se

- $x(\theta) \in \underset{x' \in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{n} v_i(\theta_i, x')$,
- $p_i(\theta) = h_i(\theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x(\theta)) \forall i \in N$,

dove $h_i : \Theta_{-i} \to \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria su θ_i. I meccanismi di Groves sono IR e WBB solo se la funzione $h_i(\theta_{-i})$ è scelta in modo corretto, altrimenti queste due proprietà potrebbero non essere verificate. Sono inoltre DSIC (Dominant Strategy Incentive Competible) per il teorema di Groves, che riportiamo di seguito.

Teorema 2.1. *Qualsiasi social choice function f per cui $(\Theta_1, \ldots, \Theta_n, X, f)$ è un meccanismo di Groves è DSIC.*

Non riporteremo la prova di tale teorema, ma è chiaramente intuitivo che, poichè gli agenti non possono controllare i pagamenti e la funzione di allocazione massimizza la valutazione degli agenti, quello che conviene di più agli agenti sia riportare il vero. Infine i meccanismi di Groves sono AE per il teorema di Green-Laffont, che ha il seguente enunciato:

Teorema 2.2. *Se qualsiasi valutazione, senza restrizioni, v_i è possibile dato un qualche $\theta_i \in \Theta_i$, allora dato un meccanismo AE, tale meccanismo può essere DSIC solo se è un meccanismo di Groves.*

Poichè la dimostrazione di tale teorema è più complicata ed interessante rispetto alla precedente, che era chiaramente più intuitiva, la riporteremo di seguito.

Dimostrazione. Come prima cosa, mostriamo matematicamente il significato del teorema di Green-Laffont. Quello che il teorema ci dice è che se l'allocazione è efficiente, cioè soddisfa la seguente condizione matematica

$$\sum_{i \in N} v_i(x^*(\theta), \theta(i)) \geq \sum_{i \in N} v_i(x, \theta(i)) \forall x \in X,$$

che ci dice che fissato il profilo di tipi θ l'allocazione scelta x^* è massima tra le possibili allocazioni di X, allora l'unico meccanismo DSIC è che implementa tale allocazione è un meccanismo di Groves. Che in altri termini vuol dire che i pagamenti saranno definiti come quelli definiti da Groves, ovvero

$$p_i(\theta) = h_i(\theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x^*(\theta)) \forall i \in N.$$

Notiamo inoltre che possiamo scrivere p_i anche come

$$p_i(\theta) = h_i(\theta_i, \theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x(\theta_i, \theta_{-i})). \tag{2.3}$$

Dobbiamo dimostrare che h_i non dipende da θ_i quando il meccanismo è DSIC. Procediamo per assurdo, ovvero supponendo che il meccanismo sia DSIC ma per qualche $\theta_i, \hat{\theta}_i$ e θ_{-i} abbiamo $h_i(\theta_i, \theta_{-i}) \neq h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$. Allora possiamo considerare due casi. Nel primo caso abbiamo che l'allocazione scelta x^* non cambia, ovvero che $x^*(\theta_i, \theta_{-i}) = x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$. Allora, se il meccanismo è DSIC, avremo per definizione che

$$v_i(x^*(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) - p_i(\theta_i, \theta_{-i}) \geq v_i(x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i) - p_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}),$$

e contemporaneamente che

$$v_i(x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \hat{\theta}_i) - p_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \geq v_i(x^*(\theta_i, \theta_{-i}), \hat{\theta}_i) - p_i(\theta_i, \theta_{-i}).$$

Ma, poichè $x^*(\theta_i, \theta_{-i}) = x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$, le due disuguaglianze implicano che $p_i(\theta_i, \theta_{-i}) = p_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$, e quindi che $h_i(\theta_i, \theta_{-i}) = h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$ portandoci così ad una contraddizione. Nel secondo caso, invece, abbiamo che $x^*(\theta_i, \theta_{-i}) \neq x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$. Supponiamo ora, senza perdita di generalità, che $h_i(\theta_i, \theta_{-i}) < h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$. Consideriamo come tipo vero per l'agente i il tipo $\theta_i^c \in \Theta_i$ tale per cui

$$v_i(x, \theta_i) = \begin{cases} -\sum_{j \neq i} v_j(x^*(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_j) & \text{se } x = x^*(\theta_i, \theta_{-i}) \\ -\sum_{j \neq i} v_j(x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_j) + \varepsilon & \text{se } x = x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.4}$$

con $\varepsilon > 0$ a piacere. Allora l'agente i preferirà riportare il tipo $\hat{\theta}_i$. Notiamo infatti che $x^*(\theta_i^c, \theta_{-i}) = x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$ poichè tale allocazione massimizza

$$v_i(x, \theta_i^c) + \sum_{j \neq i} v_j(x, \theta_j),$$

e inoltre, per quanto detto nella prima parte della dimostrazione, essendo le due allocazioni equivalenti avremo anche $h_i(\theta_i^c, \theta_i) = h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$. Essendo poi il meccanismo DSIC, abbiamo che

$$v_i(x^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i^c) - p_i(\theta_i^c, \theta_{-i}) \geq v_i(x^*(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) - p_i(\theta_i, \theta_{-i}).$$

Sostituendo nella disequazione l'Equazione 2.3 e l'Equazione 2.4, troviamo che

$$\varepsilon - h_i(\theta_i^c, \theta_{-i}) \geq -h_i(\theta_i, \theta_{-i}) = h_i(\theta_i^c, \theta_{-i}) - \varepsilon \leq h_i(\theta_i, \theta_{-i}).$$

Da quanto detto precedentemente abbiamo quindi che

$$h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) - \varepsilon \leq h_i(\theta_i, \theta_{-i}). \tag{2.5}$$

Tuttavia per ipotesi avevamo che $h_i(\theta_i, \theta_{-i}) < h_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$ e quindi se scegliamo un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, l'Equazione 2.5 sarà violata. Questo ci fa giungere a una contraddizione e completa la dimostrazione. □

Abbiamo visto dunque come sono definiti i meccanismi di Groves e quali proprietà hanno. Abbiamo anche visto che affinchè alcune proprietà valgano è necessario scegliere in modo adeguato la funzione h_i e implementarla correttamente. L'implementazione più famosa di h_i per un meccanismo di Groves è quella dei pagamenti di Clarke, che va a definire il noto meccanismo VCG. In un meccanismo VCG (Vickrey-Clarke-Groves) definiamo $h_i(\theta_{-i})$ come

$$h_i(\theta_{-i}) = \max_{x' \in X_{-i}} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x').$$

I meccanismi VCG godono di tutte le proprietà che abbiamo descritto precedentemente, ovvero IR, AE, IC e WBB. Infatti abbiamo che sicuramente

$$h_i \geq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x^*(\theta))$$

poichè h_i massimizza il termine a destra dell'equazione. Quindi tutti i pagamenti sono non negativi e il meccanismo sarà sicuramente WBB. Inoltre, possiamo scrivere l'utilità dell'agente i-esimo come

$$U_i(x^*, \theta_i) = v_i(x^*, \theta_i) + \sum_{j \neq i} v_j(x^*, \theta_j) - h_i(\theta_{-i})$$

dove i due termini positivi sommati danno il valore dell'allocazione, che quindi sarà sempre maggiore o uguale al termine negativo, poichè, dato che la valutazione di ogni agente è positiva, se togliamo un agente dal meccanismo le possibili allocazioni x' non potranno mai avere un valore superiore ad x^*. Quindi anche l'utilità per ogni agente sarà positiva e il meccanismo è IR. Questo conclude la nostra trattazione dei meccanismi di Groves standard. Procederemo ora con l'analizzare brevemente una generalizzazione di questi meccanismi.

2.5 Meccanismi Weighted Groves

I meccanismi Weighted Groves sono una generalizzazione dei meccanismi di Groves definita nel segunete modo. Un meccanismo $(\Theta_1, \ldots, \Theta_n, X, f)$ dove $f(\theta) = (x(\theta), p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta))$, è un meccanismo Weighted Groves se

- $x(\theta) \in \operatorname*{argmax}_{x' \in X} c_x + \sum_{i=1}^{n} w_i v_i(\theta_i, x')$,
- $p_i(\theta) = \frac{1}{w_i} h_i(\theta_{-i}) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{w_j}{w_i} v_j(\theta_j, x(\theta)) - \frac{c_{x(\theta)}}{w_i} \quad \forall i \in N.$

Questo meccanismo è dunque più generale rispetto a un meccanismo di Groves semplice, perchè considera come funzione di allocazione non solo la somma delle valutazioni degli agenti ma anche una sua qualsiasi trasformazione affine. Le proprietà che otteniamo sono molto simili a quelle dei meccanismi di Groves.

Teorema 2.3. *Qualsiasi social choiche function f, per cui $(\Theta_1, \ldots, \Theta_n, X, f)$ è un meccanismo Weighted Groves, è DSIC.*

Questa proprietà è quindi comune sia ai meccanismi Weighted Groves che ai meccanismi di Groves semplici. Inoltre, la caratterizzazione di Roberts e il teorema di Green-Laffont per i meccanismi Weighted Groves ci portano a fare anche le seguenti considerazioni che ci permettono dunque di arricchire ulteriormente la caratterizzazione dei meccanismi di Groves.

Teorema 2.4. *Se qualsiasi valutazione, senza restrizioni, v_i è possibile per qualche $\theta_i \in \Theta_i$, una social choiche function $f(\theta) = (x(\theta), p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta))$ può essere DSIC solo se $x(\theta)$ è un massimizzatore affine.*

Teorema 2.5. *Se qualsiasi valutazione, senza restrizioni, v_i è possibile per qualche $\theta_i \in \Theta_i$, nessuna social choice function è AE (neanche dopo una trasformazione affine) e SBB.*

Passiamo ora alla trattazione dei meccanismi economici di Myerson.

2.6 Meccanismi di Myerson

Finora abbiamo trattato meccanismi in ambiente quasi lineare. Un esempio di meccanismi economici in ambiente lineare, invece, sono i meccanismi di Myerson, che sono definiti nel seguente modo. Un meccanismo a rivelazione diretta descritto dalla tupla $(\Theta_1, \ldots, X, f)$, dove $f(\theta) = (x(\theta), p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta))$, è un meccanismo di Myerson se

- $x(\theta)$ è una funzione di allocazione arbitraria monotona,
- $p_i(\theta) = \theta_i \, w_i(x) - \int_0^{\theta_i} w_i(x(\theta_i', \theta_{-i})) \, d\theta_i' + h_i(\theta_{-i})$,

dove $h_i : \Theta_{-i} \to \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria su θ_i. Definiti i meccanismi di Myerson, definiamo anche sotto quale condizione essi sono IC. A tal proposito, utilizzeremo la caratterizzazione dei meccanismi IC per agenti con singolo parametro data da Archer e Tardos in [5]. I teoremi che riportiamo dal lavoro precedentemente citato sono i seguenti:

Teorema 2.6. *La funzione di allocazione $x(\theta)$ ammette uno schema di pagamenti in cui gli agenti riportano il vero tipo se e solo se è strettamente crescente.*

Teorema 2.7. *Posto vero il Teorema 2.6, il meccanismo è IC se e solo se i pagamenti sono nella forma*

$$p_i(\theta_i, \theta_{-i}) = \theta_i \, w_i(x) - \int_0^{\theta_i} w_i(x(\theta_i', \theta_{-i})) \, d\theta_i' + h_i(\theta_{-i}).$$

Il primo teorema ci dà una condizione su come debba essere la funzione di allocazione nei meccanismi a singolo parametro in modo tale da avere uno schema di pagamenti che ci permetta di ottenere un meccanismo IC. Il secondo teorema ci dice che gli unici pagamenti con cui è possibile avere un meccanismo IC, data una funzione di allocazione decrescente, sono quelli definiti da Myerson. Inoltre possiamo ridefinire i pagamenti in modo tale per cui non soddisfino solo la proprietà che il meccanismo sia IC ma anche IR.

Teorema 2.8. *Una funzione di allocazione strettamente crescente ammette uno schema di pagamenti in cui gli egenti riportino il vero e siano incentivati a partecipare al meccanismo, se e solo se $\int_{-\infty}^{\theta_i} w_i(x(\theta_i', \theta_{-i})) \, d\theta_i' < \infty \; \forall i, b_{-i}$. Allora possiamo definire i pagamenti come:*

$$p_i(\theta_i, \theta_{-i}) = \theta_i \, w_i(x) - \int_{-\infty}^{\theta_i} w_i(x(\theta_i', \theta_{-i})) \, d\theta_i'.$$

Concludiamo in questo modo la trattazione sulla teoria dei Meccanismi Economici Standard senza interdipendenza. Nella prossima sezione discuteremo come in letterature è stato affrontato il problema di valutazioni con interdipendenza tra gli agenti.

2.7 Meccanismi Economici in presenza di Interdipendenza

Vediamo ora cosa cambia in presenza di interdipendenza tra le valutazioni degli agenti, ovvero quando la valutazione di un agente non dipende più solamente dal proprio tipo ma anche dal tipo degli altri. Nel trattare questo tipo di meccanismi ci riferiremo principalmente al lavoro di Jehiel e Maldovanu [6]. Iniziamo dunque con la definizione del modello a cui faremo riferimento. Il meccanismo sarà composto da:

- Lo spazio degli agenti N, con $n = |N|$, e i è l'indice che utilizzeremo per indicare un agente generico.
- Lo spazio delle allocazioni X, $K = |X|$. A differenza di quanto fatto per i meccanismi standard, indicizzeremo le allocazioni con $k = 1, \ldots, K$.
- Il tipo privato dell'agente i-esimo θ_i, scelto dallo spazio $\Theta_i \subseteq \Re^{K \times N}$ secondo una densità continua di probabilità $f_i(\theta_i) > 0$, indipendente dal tipo degli altri agenti. Ogni agente conosce il proprio tipo e le densità di tuti gli agenti.
- Denoteremo con θ^i_{jk} il parametro che dice come l'agente i influenza la valutazione dell'agente j nell'allocazione k e con Θ_{-i} lo spazio dei tipi degli agenti diversi da i.
- Infine, per evitare confusione tra social choice function e la densità di probabilità con cui gli agenti scelgono il loro tipo, definiamo $\phi_k(\theta)$ la social choice function, con $\forall k, \theta$, $0 \leq \phi_k(\theta) \leq 1$ e $\forall \theta$, $\sum_{k=1}^{K} \phi_k(\theta) = 1$. In questo caso, quindi, vediamo la social choice function come una distribuzione di probabilità sulle allocazioni.

Andiamo ora a definire l'utilità e le valutazioni degli agenti. Definiamo l'utilità degli agenti come

$$U_i^k(\theta) = V_i^k(\theta^1_{ik}, \ldots, \theta^n_{ik}) - p_i,$$

dove $V_i^k(\theta^1_{ik}, \ldots, \theta^n_{ik}) = \sum_{j=1}^{n} a^j_{ik}\, \theta^j_{ik}$è la valutazione dell'agente i e p_i il pagamento assegnatogli. Inoltre i parametri $\{a^j_{ik}\}_{1 \leq k \leq K, 1 \leq i,j \leq n}$ sono di comune conoscenza tre gli agenti. Come funzione di allocazione sceglieremo, come per i meccanismi senza interdipendenza, una funzione efficiente che massimizza la somma delle valutazioni degli agenti. Scelta la funzione di allocazione, dobbiamo ora definire i pagamenti. Definiamo per ogni agente la funzione di pagamento condizionato in atteso $y_i \colon \Theta_i \to \Re$ e la funzione di probabilità di assegnazione condizionata in atteso $q_i \colon \Theta_i \to \Re^K$ come:

$$y_i(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} p_i(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i}$$

$$q_i^k(\theta_i) = \int_{\Theta_{-i}} \phi_k(\theta_i, \theta_{-i}) f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i}.$$

Assumiamo ora che l'agente i ritenga che gli altri agenti riportino il vero e che egli riporti il tipo $\hat{\theta}_i$ quando il suo tipo vero è θ_i. Allora l'utilità in atteso dell'agente i è data da:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}[U_i(\hat{\theta}_i, \theta_i)] = \int_{\Theta_{-i}} [\sum_k (\phi_k(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \sum_{j=1}^{n} a_{ik}^j \, \theta_{ik}^j)] f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i} + y_i(\hat{\theta}_i) = \\ \sum_k a_{ik}^j \, \theta_{ik}^j \, q_i^k(\hat{\theta}_i) + \sum_k \int_{\Theta_{-i}} [(\phi_k(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) \sum_{j \neq i} a_{ik}^j \, \theta_{ik}^j)] f_{-i}(\theta_{-i}) d\theta_{-i} + y_i(\hat{\theta}_i).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Per quanto riguarda la caratterizzazione di tale meccanismo, riporteremo di seguito i teoremi più interessanti a riguardo, senza tuttavia riportarne le dimostrazioni.

2.7.1 IC nei Meccanismi con Interdipendenza

Prima di proseguire, per semplificare la notazione, quando un agente riporta il vero ci riferiremo alla sua utilità in atteso come $V_i(\theta_i)$, con $V_i(\theta_i) = \mathbb{E}[U_i(\theta_i, \theta_i)]$.

Teorema 2.9. *Sia $(\phi, p_1, \ldots, p_n)$ un meccanismo economico a rivelazione diretta e sia $\{q_i\}_{i=1}^n$ la probabilità degli assegnamenti condizionati ad esso associata. Per ogni agente i, sia $Q_i(\theta_i) \colon \Re^{K \times N} \to \Re^{K \times N}$ il campo vettoriale dove, per ogni alternativa k, la coordinata ki-esima è data da $a_{ik}^i \, q_i^k(\theta_i)$ e la coordinata kj-esima, $j \neq i$, è zero. Allora $(\phi, p_1, \ldots, p_n)$ è IC se e solo se valgono le due seguenti condizioni:*

1. *$\forall i$, il campo vettoriale Q_i è monotono e conservativo.*

2. $\forall i$, $\forall \theta_i, \hat{\theta}_i \in \Theta_i$, $V_i(\theta_i) = V_i(\hat{\theta}_i) + \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} Q_i(\tau_i) d\tau_i$.

Quello che chiediamo nel teorema, anche se espresso in termini differenti, non è nient'altro che la condizione che abbiamo già visto affinchè un meccanismo sia IC, cioè che l'utilità che ha ogni agente nel riportare il suo vero tipo non sia minore di quando riporta un tipo diverso da quello vero. Matematicamente esprimiamo questo concetto con il vincolo che Q_i, il campo vettoriale definito da coordinate che esprimono come l'agente i può influenzare il meccanismo variando il proprio tipo, debba essere conservativo e monotono, ovvero non sia possibile per l'agente incrementare la propria utilità cambiando il proprio tipo. L'utilità dell'agente sarà dunque massima quando riporta il vero. Quest'ultima constatazione deriva dalla seconda condizione, che dice che l'utilità è massima all'interno del campo quando l'agente riporta il vero e ovunque esso si sposti, indipendentemente dal percorso seguito per spostarsi, la sua utilità diminuirà di $\int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} Q_i(\tau_i) d\tau_i$. Jehiel e Maldovanu riportano, poi, un risultato di impossibilità andando ad identificare un insieme significativo di profili di tipi degli agenti per cui è impossibile avere un meccanismo AE e IC. Successivamente, invece, identificano un altro insieme di tipi per cui, sotto una certa condizione, è possibile ottenere un meccanismo AE ed IC. Pur non riportando i teoremi a riguardo con le relative dimostrazioni, riteniamo sia utile citare tale risultato a scopo di completezza, e per fare intuire che non è sempre possibile garantire IC.

2.7.2 Caso a singolo parametro

Quanto visto precedentemente è stato fatto prendendo in considerazione il caso più generale possibile. Ai fini della nostra trattazione è però interessante vedere cosa succede quando il tipo privato dell'agente è singolo, ovvero quando, data l'allocazione k-esima, possiamo scrivere la valutazione dell'agente come

$$V_i^k(\theta_i, \theta_{-i}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}^j \theta_i.$$

Assumiamo poi che non esistano allocazioni diverse per cui un agente sia indifferente, cioè, che, per ogni agente i, non esistono $k, k', k' \neq k$ per cui $a_{ik}^i = a_{ik'}^i$. Ci baseremo quindi sulla seguente assunzione:

$$\forall i, \forall k, k', a_{ik}^i > a_{ik'}^i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^i > \sum_{j=1}^{n} a_{jk'}^i \tag{2.7}$$

La condizione 2.7 richiede che la sequenza di alternative, ottenuta ordinando il tipo privato dell'agente i in termini di impatto sulla sua valutazione personale, sia la stessa ottenuta ordinando il tipo privato di i in termini di impatto sul benessere sociale. Possiamo riscrivere la condizione come

$$\forall i,\, \forall k, k',\, \frac{a^i_{ik}}{a^i_{ik'}} > 1 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} a^i_{jk}}{\sum_{j=1}^{n} a^i_{jk'}} > 1.$$

Teorema 2.10. *Si assuma che la condizione 2.7 sia soddisfatta. Allora esiste un Meccanismo Bayesiano che sia AE e IC.*

Nel caso a singolo parametro, quindi, otteniamo un risultato di valenza molto più generale rispetto a quello nel caso multi-dimensionale, in quanto la condizione affinchè il meccanismo sia AE e IC si riduce ad un vincolo di monotonia che in generale piò essere sempre soddisfatto.

2.8 Meccanismi contingenti agli eventi

Esistono in letteratura dei risultati in cui i pagamenti dipendono dalla realizzazione di eventi, come quello ben noto delle Sponsored Search Auctions. Non esiste, tuttavia, una trattazione generale di questi problemi, poichè i lavori presenti in letteratura si limitano a dare dei risultati specifici a dei casi di studio senza portare un approcio più teorico e generale al problema. Tali risultati, che hanno fornito un punto di partenza per il nostro lavoro, sono riportati nei seguenti lavori: Mechanism Design for Federated Sponsored Search Auctions (Sofia Ceppi, Nicola Gatti, Enrico H. Gerding, 2011), in cui viene studiato un caso particolare delle sopracitate Search Sponsored Auctions; Scalable Mechanism Design for the Procurement of Services with Uncertain Duration (Enrico Gerding, Sebastian Stein, Kate Larson, Alex Rogers, Nicholas R. Jennings, 2011), dove viene trattato l'assegnamento di un compito (task) a delle macchine che ricevono una ricompensa solo se terminano tale compito. In questo lavoro viene introdotta la dicitura di Contingenza agli Eventi a cui faremo riferimento anche nei meccanismi che proporremo nel nostro lavoro. Mechanism Design for Scheduling with Uncertain Execution Time (Vincent Conitzer, Angelina Vidali, 2014), lavoro che tratta un caso simile al precedente, l'assegnamento di un compito a una macchina, ma che aggiunge la possibilità di riassegnare continuamente il compito ad altre macchine. Il problema dell'allocazione di task viene affrontato anche nel lavoro Fault tolerant mechanism design (Ryan Porter, Amir Ronen, Yoav Shoham, Moshe Tennenholtz, 2008) dove viene messo in evidenza l'inadeguatezza del meccanismo GVA (Generalized Vicrey Auction) per affrontare tale problema, ma vengono proposti meccanismi alternativi (per i casi single task e multiple task) che ottengono invece delle proprietà buone. Infine, sono presenti in letteratura lavori sui meccanismi con verifica (Truthful optimization using mechanism with verification, Carmine Ventre, 2014), che hanno dei punti di contatto con l'idea di contingenza degli eventi. Tali lavori utilizzano l'idea, che non riprenderemo direttamente ma che ha fornito spunti di riflessione utile per capire come impostare il nostro lavoro, di verificare che quanto riportato dagli agenti sia vero per calcolare i pagamenti. Nel caso di verifica avvenuta con successo i pagamenti verrano calcolati normalmente, altrimenti chi avrà riportato il falso verrà penalizzato.

Capitolo 3

Caratteristiche degli scenari con eventi

In questo capitolo tratteremo in modo più accurato ciò che caratterizza gli scenari con eventi. Daremo una definizione formale di cosa intendiamo per evento (Sezione 3.1), definiremo come cambia la validità dei meccanismi economici quando introduciamo gli eventi (Sezione 3.2) e individueremo quali modelli in termini di funzione di valutazione sono adatti per meccanismi economici dipendenti da eventi (Sezione 3.3 e Sezione 3.4). Infine mapperemo i casi studio sui modelli da noi proposti (Sezione 3.5).

3.1 Definizione formale degli eventi

Prima di procedere alla definizione di meccanismi contingenti agli eventi, vediamo quali sono gli elementi fondamentali che richiedono l'adozione di tali meccanismi e quali possibili funzioni di valutazione possono avere gli agenti a seconda dello scenario in cui si trovano ad operare. Iniziamo dunque con introdurre gli eventi. Definiamo:

- $E = e_1, e_2, \ldots, e_m$ l'insieme degli eventi, dove $m = |E|$ è la cardinalità dell'insieme, ed e indica l'evento generico,
- $P(e|\theta, x)$ la probabilità che l'evento e accada dato il vettore dei parametri θ e l'allocazione x.

La tipologia di eventi che considereremo sono eventi binari, per cui è possibile soltanto che un evento accada o non accada, e indipendenti. Inoltre, l'introduzione degli eventi ci obbliga a considerare in un nuovo modo le proprietà desiderabili dei meccanismi economici che abbiamo definito nella

Sezione 2.3. Affronteremo ora questo argomento, che sarà importante per capire in che modo valgono le proprietà nei meccanismi che andremo a definire successivamente.

3.2 Validità universale e in atteso

Dobbiamo quindi introdurre un modo per identificare come le proprietà di AE, IC, IRR e WBB valgono rispetto agli eventi nei meccanismi Execution Contingent. Useremo la dizione di proprietà universalmente valida quando una proprietà varrà a valle della conoscenza degli eventi. Quindi diremo che una proprietà è universalmente valida quando una volta eseguito il meccanismo e conosciuti gli eventi questa sia effettivamente valida. Useremo la dizione di validità in atteso, invece, quando una proprietà è valida a monte della realizzazione degli eventi. Quindi, se una proprietà è valida prima che venga eseguito il meccanismo e senza conoscere gli eventi diremo che essa è valida in atteso (rispetto agli eventi). Un meccanismo in cui le proprietà valgono universalmente sarà dunque più robusto di un meccanismo in cui esse valgano solo in atteso, dal momento che il venire meno di una delle proprietà una volta che il meccanismo viene eseguito potrebbe essere svantaggioso per gli agenti, il governatore del meccanismo o entrambi. Tuttavia, garantire le proprietà in atteso rispetto alle probabilità è sufficiente affinchè sia gli agenti che il banditore siano incentivati a partecipare al meccanismo e ci permetterà di definire effettivamente dei meccanismi Execution Contigent, cosa che sarebbe alquanto più complicata se non impossibile se volessimo provare a garantire tutte le proprietà universalmente. Procediamo ora con l'individuazione delle funzioni di valutazione degli agenti in presenza di scenari che contengano eventi.

3.3 Individuazione dei modelli per Meccanismi Economici Execution Contingent

L'introduzione degli eventi permette di definire diverse classi di meccanismi oltre a quelle definite nella Sezione 2.2. Questa considerazione è una naturale conseguenza di come cambia la relazione fra il tipo dell'agente e la sua valutazione negli scenari Execution Contingent. Infatti, se consideriamo il tipo privato degli agenti, esso non sarà più solo un'informazione che riguarda esclusivamente il valore della valutazione in una certa allocazione, ma potrebbe anche riguardare la probabilità con cui gli eventi si verificheranno. Questa considerazione ci ha portato a impostare il lavoro partendo dall'individuazio-

Tabella 3.1: Relazioni fra tipo dell'agente, valutazione ed eventi.

		Tipo-Eventi		
		$\emptyset$	Singolo	Multiplo
Tipo-Valore	$\emptyset$	$\emptyset$	Dipendenza dal tipo solo nelle probabilità	Dipendenza dal tipo (multiplo) solo nelle probabilità
	Singolo	Standard Mechanism Design	Dipendenza dal tipo nel valore e nelle probabilità	Dipendenza dal tipo singolo nel valore e multiplo nelle probabilità
	Multiplo	Standard Mechanism Design	Dipendenza dal tipo multiparametro nel valore ma non nelle probabilità	Dipendenza dal tipo multiparametro sia nel valore che nelle probabilità

ne di quali casistiche, nella relazione tra informazione privata dell'agente e valutazione dello stesso, possano comparire in scenari Execution Contingent. Abbiamo quindi individuato le seguenti casistiche, poichè il tipo dell'agente può influenzare direttamente: solo la valutazione, ed essere singolo o multiplo, solo la probabilità degli eventi, ed essere ancora singolo o multiplo, oppure entrambi, come mostrato nella Tabella 3.1.

Partendo dai casi studio, abbiamo quindi individuato diverse tipologie di meccanismi EC che richiedono un diverso adattamento della funzione di valutazione degli agenti. Queste tipologie, in ambiente lineare, sono, come mostrato nella Tabella 3.2: a singolo parametro solo rispetto alle probabilità, a singolo parametro nella valutazione, a parametro multiplo rispetto all'allocazione, a parametro multiplo rispetto agli eventi e a parametro multiplo rispetto sia agli eventi che all'allocazione. Due precisazioni sono necessarie prima di entrare nel dettaglio dei casi specifici che abbiamo elencato. La prima è che, rispetto alla Tabella 3.1, abbiamo considerato solo casi in cui la relazione informativa tra tipo dell'agente e probabilità degli eventi sia a singolo parametro. Questo per non appesantire ulteriormente la notazione, in quanto il caso multiparametro nelle probabilità è di facile estensione rispetto al caso singolo parametro. La seconda precisazione è che i modelli riportati sono lineari poichè il termine ρ, quando presente, è conoscenza comune nel meccanismo e le probabilità sono considerate note, non a priori ma una volta eseguito il meccanismo. Se così non fosse il modello non risulterebbe lineare e non potremmo andare ad applicare i meccanismi che presenteremo in segui-

Tabella 3.2: Individuazione tipologie e valutazioni.

Ambiente	Tipologia	Descrizione	Valutazione
Lineare	Singolo parametro sulla probabilità degli eventi	Ogni agente ha un singolo tipo che influisce solo sulle probabilità degli eventi	$\sum_E (P(e\|\theta, x)\rho_i^e(x))$
	Singolo parametro sulla valutazione	Ogni agente ha un singolo tipo che influisce sulla valutazione	$\theta_i \sum_E (P(e\|\theta, x)\rho_i^e(x))$
	Multi parametro classico	Il tipo dell'agente dipende dall'allocazione	$\sum_E (\theta_i(x)P(e\|\theta, x)\rho_i^e(x))$
	Multi parametro sugli eventi	Il tipo dell'agente dipende dagli eventi	$\sum_E (\theta_i^e P(e\|\theta, x)\rho_i^e(x))$
	Multi parametro generalizzato	Il tipo degli agenti dipende sia dall'allocazione che dagli eventi	$\sum_E (\theta_i^e(x)P(e\|\theta, x))$
Quasi Lineare	-	-	-

to. Tuttavia entrambe le assunzioni sono ragionevoli. Infatti, come vedremo, il termine ρ esprime una preferenza degli agenti su eventi e allocazione, che è ragionevole considerare nota. Per quanto riguarda le probabilità, invece, l'idea stessa di Execution Contingency è legata al fatto che nell'esecuzione del meccanismo il governatore di tale meccanismo è in grado di osservare i tipi veri dei giocatori, per cui anche in questo caso l'assunzione fatta risulta essere ragionevole. Per questi motivi le funzioni di valutazione risultano lineari, poichè possiamo esprimere le funzioni di valutazione degli agenti come $v_i = \alpha\, \theta_i$ dove θ_i è il tipo generico dell'agente, sia esso singolo o multiplo, e α è un parametro reale, nel nostro caso composto dalla sommatoria sugli eventi delle probabilità degli stessi moltiplicate per la preferenza ρ, comunemente nota, degli agenti.

3.4 Funzione di Valutazione degli Agenti

Vedremo ora più nel dettaglio perchè abbiamo associato determinate funzioni di valutazione per gli agenti ai corrispondenti casi. Partiremo dalla funzione di valutazione più generale e scenderemo nel particolare andando a specificare, di volta in volta, quali cambiamenti avvengono e che significato hanno.

3.4.1 Caso multi parametro generalizzato

Nel caso più generale definiamo la funzione di valutazione dell'agente i-esimo come

$$v_i(\theta_i^e(x), x) = \sum_E (\theta_i^e(x) P(e|\theta, x)). \tag{3.1}$$

Si tratta, appunto, del caso più generale possibile poichè non vengono fatte restrizioni sul tipo degli agenti che può quindi essere multiplo a dipendere sia dall'allocazione che dagli eventi. Il tipo di ogni agente si configura quindi come una matrice di tante righe quante sono le possibili allocazioni e di tante colonne quanti sono il numero degli eventi. Possiamo, infatti, riscrivere il tipo dell'agente i-esimo come $\theta_i^E(x) = \theta_i(x, e)$, e quindi definirlo come una matrice $k \times m$ nel seguente modo:

	e_1	e_2	$\dots$	e_m
x_1	$\theta_i(x_1, e_1)$	$\theta_i(x_1, e_2)$	$\dots$	$\theta_i(x_1, e_m)$
x_2	$\theta_i(x_2, e_1)$	$\theta_i(x_2, e_2)$	$\dots$	$\theta_i(x_2, e_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	$\theta_i(x_k, e_1)$	$\theta_i(x_k, e_2)$	$\dots$	$\theta_i(x_k, e_m)$

Per ogni coppia (allocazione, evento) abbiamo dunque un tipo diverso che esprime la preferenza dell'agente sulla coppia stessa.

3.4.2 Caso multi parametro rispetto agli eventi

Vediamo ora un altro caso multiparametro in cui, a differenza del precedente, il tipo degli agenti dipende solo dagli eventi, ma non dall'allocazione. La valutazione dell'agente sarà dunque espressa in modo diverso, ovvero come

$$v_i(\theta_i^e, x) = \sum_E (\theta_i^e P(e|\theta, x) \rho_i^e(x)), \tag{3.2}$$

dove $\rho_i^e(x)$ è un termine che indica la preferenza dell'agente rispetto all'allocazione. Questo non vuol dire che il tipo dell'agente dipenda dall'allocazione, altrimenti ricadremmo nel caso generale, bensì esprime una preferenza sulle allocazioni da parte dell'agente che è di conoscenza comune nel meccanismo (nota, quindi, sia agli agenti sia a chi governa il meccanismo). Possiamo vedere questo termine come una matrice in cui, fissato l'evento, la preferenza dell'agente varia a seconda dell'allocazione. Questo termine, come già detto, deve essere di pubblica conoscenza in quanto, se così non fosse, la valutazione non sarebbe più lineare. È importante inoltre notare che l'espressione della

valutazione non può essere ulteriormente compattata, ovvero non possiamo esprimere ρ solo in funzione dell'allocazione, come mostreremo nel seguente esempio.
Immaginiamo di avere 2 eventi $\{e_1, e_2\}$ e 2 allocazioni $\{x_1, x_2\}$. Possiamo quindi, per esempio, scrivere

$$\rho_i(x, e) = \begin{bmatrix} \rho_i^{e_1}(x_1) & \rho_i^{e_2}(x_1) \\ \rho_i^{e_1}(x_2) & \rho_i^{e_2}(x_2) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \theta_i^e = \begin{bmatrix} \theta_i^{e_1} & \theta_i^{e_2} \end{bmatrix}.$$

Se andassimo a calcolare la funzione di valutazione noteremmo che, a seconda di che evento e che allocazione stiamo considerando, tutti e quattro i valori sono necessari per calcolare tale funzione. Non possiamo dunque compattare il termine $\rho_i^e(x)$ esprimendolo solo in funzione dell'allocazione come $\rho_i(x)$. Se facessimo così, infatti, il modello non sarebbe abbastanza generale, poichè non saremmo in grado di esprimere la preferenza dell'agente su tutte le possibili coppie (allocazione, evento).

3.4.3 Caso multi parametro classico

In modo simmetrico rispetto al caso precedente, potremmo avere scenari in cui il tipo dell'agente, multi parametro, varia solo a seconda dell'allocazione e non a seconda degli eventi. In questo caso esprimiamo la valutazione come:

$$v_i(\theta_i(x), x) = \sum_E (\theta_i(x) P(e|\theta, x) \rho_i^e(x)). \tag{3.3}$$

Anche in questo caso necessitiamo che il termine $\rho_i^e(x)$ dipenda sia dall'allocazione che dall'evento che stiamo considerando, perchè, analogamente al caso precedente, se così non fosse il modello non sarebbe generale abbastanza. Non possiamo dunque in questo caso esprimere $\rho_i^e(x)$ solo in funzione dell'evento come ρ_i^e. Abbiamo dunque, fino ad ora, espresso le funzioni degli agenti nei casi multiparametro, che abbiamo visto poter derivare da preferenze variabili degli agenti sulle allocazioni, sugli eventi o entrambi. Veniamo ora a dei casi più semplici, in cui ogni agente ha una preferenza generale e non più particolare. Poichè la preferenza degli agenti è esprimibile come un'unica variabile, ci troviamo quindi in un caso a singolo parametro.

3.4.4 Caso a Singolo Parametro rispetto alla valutazione

In questo caso il tipo dell'agente sarà quindi unico, senza alcuna dipendenza da eventi o allocazioni, e la funzione di valutazione risultante verrà espressa come:

$$v_i(\theta_i, x) = \theta_i \sum_E (P(e|\theta, x)\rho_i^e(x)). \tag{3.4}$$

Notiamo che il termine $\rho_i^e(x)$ non scompare in questo, in quanto, ancora una volta, fondamentale per catturare una possibile preferenza dell'agente sulle allocazioni e sugli eventi. Questa classe di funzioni di valutazione è utile per affrontare tutti quei casi in cui per gli agenti esiste solo una preferenza generale nel meccanismo, che corrisponde, molto spesso, al valore che attribuiscono al bene o servizio per il quale competono con gli altri agenti all'interno del meccanismo. Un'altra osservazione interessante è che anche il caso in cui il tipo dell'agente sia composta da una coppia (valore, probabilità di un evento) è accomunabile al caso singolo parametro. Anche se l'agente, di fatto, ha due parametri che descrivono il suo tipo, la casistica citata ricade nel caso in cui l'agente influisce con singolo parametro sul valore della sua valutazione e sempre con singolo parametro sulla probabilità degli eventi. E quindi la valutazione riportata è adatta a descrivere questo caso.

3.4.5 Caso a Singolo Parametro rispetto alle probabilità

Veniamo infine a un caso ancora più semplice, in cui il tipo di un agente influenza la sua valutazione solo nella misura in cui influenza le probabilità degli eventi. In altre parole, all'interno della funzione di valutazione dell'agente, il suo tipo compare solo quando andiamo a considerare le probabilità degli eventi. Avremo quindi una funzione del tipo

$$v_i(\theta, x) = C_i \sum_E (P(e|\theta, x)\rho_i^e(x)). \tag{3.5}$$

dove C_i è una costante di pubblica informazione. Può capitare, infatti, che l'unica informazione privata degli agenti riguardi la probabilità degli eventi e che la comunicazione di tale parametro sia l'unico modo con cui viene loro concesso di interagire con il meccanismo. Questa funzione di valutazione ci fa, infine, comprendere meglio perchè abbiamo considerato solamente il caso in cui il tipo dell'agente agisca a singolo parametro sulle probabilità degli eventi. Infatti, all'interno della notazione da noi usata, il caso multiparametro rispetto alla probabilità degli eventiandrebbe ad influire solo sul termine $P(e|\theta, x)$ senza, tra l'altro, cambiarne la notazione. I modelli da noi individuati sono dunque sufficientemente completi per descrivere tutte le possibili casistiche che possono nascere in scenari Execution Contingent. Ciò che faremo, prima di passare alla definizione e caratterizzazione di meccanismi per l'ambito EC, sarà quello di mappare gli esempi presenti in letteratura e da cui siamo partiti per svolgere questo lavoro nelle casistiche definite in questa sezione.

3.5 Mappatura dei casi di studio

Proseguiamo, quindi, mostrando come i casi di studio presenti in letteratura, da cui è nata l'idea di costruire un modello che fosse il più generico possibile, si mappano sui modelli proposti. Nella Tabella 3.3 vediamo tale mappatura e nelle sezioni seguenti vedremo qual è il processo logico che ci ha portato a scegliere quale classe assegnare ad ogni caso. Purtroppo non tutte le casistiche individuate sono associate ad un esempio, poichè mancano tali esempi o non sono stati da noi trovati nella letteratura consultata prima di avviare il nostro lavoro. Questo, se da un lato ci impedisce di confrontare con lavori precedenti alcuni aspetti dei nostri modelli, dall'altro permette al nostro lavoro di poter essere in futuro un punto di partenza per quelle tipologie di problemi e casi di studio che non sono ancora stati trattati.

Tabella 3.3: Classificazione stato dell'arte.

Ambiente	Tipologia	Caso di Studio
Lineare	Singolo parametro rispetto alle probabilità	Federated Sponsored Auctions con un ad per agente e valori noti [Gatti, Ceppi, Gerding 2011]
	Singolo parametro rispetto alla valutazione	Federated Sponsored Auctions con un ad per agente [Gatti, Ceppi, Gerding 2011], Machine scheduling [Gerding, Stein, Larson, Rogers, Jennings 2011]
	Multi parametro classico	-
	Multi parametro rispetto agli eventi	Federated Sponsored Auctions, con più ads per agente [Gatti, Ceppi, Herding 2011], Federation of Service Providers,[Sofia Ceppi, Enrico H. Gerding, Nicola Gatti 2012]
	Multi parametro generalizzato	-
Quasi Lineare	-	-

Vediamo ora nello specifico gli esempi proposti in tabella.

3.5.1 Federated Sponsored Auction con esternalità

Il primo esempio proposto è il caso Federated Sponsored Auction con esternalità [7]. Lo scenario è quello dell'advertisment per motori di ricerca e dell'allocazione di pubblicità a un numero fisso di slot disponibili per il motore di ricerca. Ogni agente possiede i propri ads per i quali ha una valutazione personale composta dalla qualità e dal valore dell'ad, dove per qualità intendiamo la probabilità di una pubblicità di essere scelta dagli utenti e per valore il beneficio economico che tale evento porta agli agenti. Si profilano quindi tre possibili casi, che corrispondono ad altrettante funzioni di valutazione diverse. Il primo caso è quello a singolo parametro esclusivamente nelle probabilità. Il tipo θ_i di ogni agente consisterà, dunque, solo nella qualità del proprio ad, che sarà quindi l'unico parametro riportato dagli agenti al meccanismo, mentre il valore dell'ad sarà una costante nota pubblicamente, indicata con $value_i$. Inoltre ogni agente possiede un solo ad, poichè altrimenti cadremmo in un caso multiparametro. L'evento che andremo a considerare è il click da parte degli utenti sull'ad. La presenza di esternalità, citata nel titolo della sezione, è dovuta al fatto che la probabilità che il click avvenga o meno, il *click-through-rate* (CTR), è data non solo dalla qualità dell'ad stesso (e quindi dal tipo dell'agente), ma anche dal numero e dalla qualità degli ad che vengono allocati negli slot che lo precedono. Nel caso singolo parametro rispetto alla probabilità quella che si viene a creare è una catena markoviana tra gli ads che vengono allocati. Indicheremo con $c_i(x)$ il coefficiente della catena di Markov per il quale la probabilità di click verrà moltiplicato. Avremo quindi un solo evento per agente, $e_i = \left\{ "Click\ dell'Ad\ dell'agente\ i" \right\}$, a cui verrà associata la seguente probabilità:

$$P(e_i|\theta, x) = \mathrm{CTR}_{i,x} = \theta_i \, c_i(x).$$

Per quanto riguarda la valutazione dell'agente i-esimo avremo un solo termine, poichè abbiamo un solo evento per il quale $\rho_i^e(x)$=1. Possiamo quindi scrivere che

$$v_i(\theta, x) = value_i \, \mathrm{CTR}_{i,x}.$$

Il secondo caso è sempre un caso a singolo parametro, in cui però il tipo dell'agente è formato dalla coppia $(valore, qualit)$. Ogni agente interagisce con il meccanismo riportando quindi due parametri. Tuttavia, poichè un parametro si lega, in modo singolare, direttamente al valore finale della valutazione mentre l'altro influenza solo le probabilità, ricadiamo nel caso esposto nella Tabella 3.1 in cui il tipo dell'agente si relaziona a singolo parametro con la probabilità e, sempre a singolo parametro, con il valore della valutazione. Il tipo degli agenti sarà allora nella forma di $\theta_i = Braketr_i, q_i$, dove r_i indica il valore dell'ad e q_i la qualità. Anche in questo caso dovremo avere un solo ad per agente altrimenti finiamo in un caso multiparametro. La probabilità dell'evento $e_i = \left\{ \text{"}Click\ dell'Ad\ dell'agente\ i\text{"} \right\}$ sarà quindi, analogamente al caso precedente:

$$P(e_i|\theta, x) = \mathrm{CTR}_{i,x} = q_i\, c_i(x),$$

e, di conseguenza, la valutazione sarà

$$v_i(\theta, x) = r_i\, \mathrm{CTR}_{i,x}.$$

Infine, potremmo avere un caso multiparametro, simile al precedente ma con la differenza che ogni agente può possedere più di un ad, e, quindi, più multiple coppie $(valore, qualit)$, una per ogni pubblicità in suo possesso. Possiamo considerare questo caso come multiparametro rispetto agli eventi, poichè avremo un evento diverso per ogni pubblicità di ogni agente. Possiamo, dunque, scrivere gli eventi come $e_{i,j} = \left\{ \text{"}Click\ dell'Ad\ j-esimo\ dell'agente\ i\text{"} \right\}$, e la probabilità ad essi associata come

$$P(e_{i,j}|\theta, x) = \mathrm{CTR}_{i,x} = \theta_i^{e_{i,j}}\, c_i(x). \tag{3.6}$$

La valutazione avrà quindi la seguente forma:

$$v_i(\theta_i^e, x) = \sum_E (\theta_i^e\, \mathrm{CTR}_{i,x} \rho_i^e(x)), \tag{3.7}$$

con $\rho_i^e(x) = 1 \quad \forall e \in \bigcup_j e_{i,j}$. Considerare il parametro $\rho_i^e(x) = 1$ significa considerare che gli agenti hanno uguale preferenza sui loro propri ad. Nel caso avessero una preferenza diversa per diversi ad, occorrerà semplicemente modificare il parametro ρ che è, ricordiamo, di conoscenza comune. Questo caso studio ci ha dato la possibilità di far vedere la flessibilità e la generalità del nostro modello, che è abbastanza generale da poter adattarsi a scenari simili in cui vengono fatti piccoli cambiamenti, come l'aggiunta di parametri.

3.5.2 Procurement of Services with Uncertain Duration

Il secondo caso, trattato in [8], riguarda l'assegnazione di un task da svolgere entro un tempo massimo D. In questo caso abbiamo N agenti che competono affinchè il task T venga loro assegnato. Ad ogni istante di tempo, a meno che non sia già stato completato, il task può venire assegnato ad uno degli agenti a cui ancora non è stato assegnato. Gli agenti sostengono un costo nello svolgere il task, ma nel caso questo venga completato con successo, riceveranno in cambio un pagamento che compensi lo sforzo. Il tipo di ogni agente è composto quindi dal costo di sostenere il task c_i e dalla distribuzione di probabilità $F_i(t)$ sull'intervallo $[0, D]$, che comunica con quale probabilità l'agente pensa di poter completare il task entro D. Quindi avremo che $\theta_i = \langle c_i, F_i(t) \rangle$, e quindi siamo ancora una volta nel caso a singolo parametro dato da una coppia di parametri in cui uno influisce in modo diretto sul valore dell'allocazione e l'altro sulle probabilità degli eventi. Oltre a questo definiamo il set delle allocazioni X come il set dei possibili scheduling delle macchine, e uno schedule generico come $x = \langle (a_1, t_1), ..., (a_n, t_n) \rangle \in X$ con $n \leq |N|$, $a_i \in I$, dove ogni elemento rappresenta l'assegnamento del task al tempo t_i all'agente a_i. Notiamo la differenza che corre tra a_1 e i_1, poichè a_1 non indica il primo agente, bensì l'agente che viene allocato per primo. Infine, notiamo che ogni agente rimane assegnato al task anche se qualcun'altro lo ha già risolto e anche se è già scaduta la deadline, quindi affinchè l'agente paghi il costo di eseguire il task l'unica cosa da richiedere è che il task gli venga assegnato. Ora per ogni scheduling x possiamo definire la probabilità che il task sia completato entro un tempo $t \leq D$ come

$$Prob(T_x \leq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{a_i}(t - t_i)).$$

Andiamo ora a vedere come sarà la funzione di valutazione degli agenti. Avremo come evento, per ogni agente, l'evento $e_i = \left\{ \text{"}L'agente\ a_i\ completa\ il\ task\text{"} \right\}$ e la probabilità ad esso associata sarà

$$P(e_i|\theta, x) = 1 - Prob(T_x \leq t_i) = 1 - (1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - F_{a_j}(t_i - t_j))) = \prod_{j=1}^{i-1} (1 - F_{a_j}(t_i - t_j)).$$

La valutazione sarà dunque,

$$v_i(\theta_i, x) = c_i \, (1 - Prob(T_x \leq t_i)). \tag{3.8}$$

La particolarità di questo caso è che, sebbene il tipo dell'agente sia dato da una coppia (valore, probabilità), il secondo parametro non ha alcuna influenza per gli agenti sulla propria valutazione, ma influenza solo la valutazione degli altri. Questo è dovuto alla scelta particolare fatta in [8], di lasciare che, una volta avviato il task, il costo per l'agente venga comunque sostenuto interamente.

3.5.3 Federation of Service Providers

Vediamo ora il caso Federation of Service Providers [9]. L'idea alla base è simile a quella delle Federated Sponsored Auction, anche se in questo caso non abbiamo più pubblicità, ma dei servizi offerti da parte degli agenti agli utenti da allocare a degli slot messi a disposizione da un centro di controllo. Lo scopo di chi governa il meccanismo, ovvero il centro di controllo, è di soddisfare la domanda degli utenti occupando gli slot con i servizi migliori. Abbiamo dunque un insieme di agenti N e un insieme di servizi J, dove il servizio j-esimo può essere offerto da più di un agente $i \in N$. Per ogni servizio che un agente offre, esso riporta, similmente al caso delle Federated Sponsored Auction multiparametro, una coppia (valore, qualità). Per scegliere quale servizio di quale agente allocare negli slot, il centro di controllo fa una media sul prodotto valore $\times$ qualità dei servizi offerti in comune dagli agenti. Tra i servizi che, in media, risultano migliori, sceglierà quello dell'agente per cui il prodotto valore $\times$ qualità è massimo. Di nuovo, siamo in un caso multiparametro in cui il tipo degli agenti dipende dagli eventi. Avremo quindi i seguenti eventi: $e_{i,j} = \left\{ \text{"}L'utente\ seleziona\ il\ servizio\ j - esimo\ dell'agente\ i\text{"} \right\}$, ovvero un evento diverso per ogni servizio di ogni agente. La probabilità dell'evento $e_{i,j}$ sarà data da

$$P(e_{i,j}|\theta, x) = \frac{\sum_{i \in N : j \in J_i} q_{i,j}}{\sum_{i \in N : j \in J_i} 1} \sum_{z \in Z} x_{i,j,z} \tag{3.9}$$

Dove J_i è l'insieme dei servizi offerti dall'agente i, $q_{i,j}$ è la qualità del servizio j per l'agente i, e $\sum_{z \in Z} x_{i,j,z} = 1$ se il servizio j dell'agente i è allocato almeno in uno degli slot possibili, zero altrimenti. Quella che viene considerata come la probabilità vera con cui un servizio può venire selezionato non è dunque la probabilità riportata dall'agente che viene allocato, ma la media che viene calcolata sulle qualità riportate da tutti gli agenti che offro quel determinato servizio. La valutazione degli agenti sarà data dalla somma su tutti gli eventi favorevoli, cioè su tutti quelli eventi che vedono un loro servizio selezionato dagli agenti.

$$v_i(\theta_i^e, x) = \sum_E \left(\theta_i^{e_{i,j}} \frac{\sum_{i \in N : j \in J_i} q_{i,j}}{\sum_{i \in N : j \in J_i} 1} \sum_{z \in Z} x_{i,j,z} \right). \tag{3.10}$$

Questo esempio ci permette di mostrare come il nostro modello sia estendibile anche a casi in cui si abbia un'interdipendenza tra gli agenti non solo nella probabilità degli eventi, che infatti è condizionata al tipo di tutti gli agenti, ma anche quando siamo in presenza di una forte interdipendenza nella scelta dell'allocazione. Quello che distingue questo caso da quello molto simile delle Federated Sponsored Auction è, infatti, che il centro di controllo, per scegliere come allocare gli slot, non confronta semplicemente le informazioni riportate dagli agenti, ma utilizza tutte le informazioni riportate, facendone una media, per capire quali sono i servizi da cui si può attendere un maggiore valore, e solo in seguito confronta le informazioni private degli agenti tra di loro.

3.6 Sintesi sugli scenari EC

In questo capitolo abbiamo quindi visto come cambia la definizione dei meccanismi economici e le loro proprietà quando introduciamo gli eventi. Abbiamo poi definito nuove classi di funzione di valutazione, dovute anch'esse all'introduzione degli eventi, e quali possibili scenari possono essere modellati utilizzando tali funzioni. Nel prossimo capitolo vedremo invece come implementare, a partire da queste definizioni, dei meccanismi economici che possano essere utilizzati in tali scenari e quali proprietà valgono in essi.

Capitolo 4

Meccanismi Economici per scenari con eventi

Quanto visto nel capitolo precedente ci ha fatto individuare le possibili funzioni di valutazioni che possono avere gli agenti in uno scenario Execution Contingent. Tuttavia ciò non è sufficiente per una trattazione completa dell'argomento. Per descrivere un meccanismo economico Execution Contingent nella sua interezza, dobbiamo specificare, in aggiunta alla definizione delle valutazioni, come viene scelta l'allocazione e come vengono calcolati i pagamenti. Questi due elementi, oltre a completare la descrizione di come avviene l'interazione fra gli agenti e chi governa il meccanismo, ci permettono di stabilire quali tra le proprietà interessanti definite nella Sezione 2.3 sono valide. Nella nostra trattazione, vedremo innanzitutto come adattare il ben noto meccanismo VCG a scenari Execution Contingent, e come cambiano le proprietà per esso valide. Proporremo poi dei meccanismi alternativi, sia di Groves che non di Groves, con diverse proprietà rispetto al meccanismo VCG. Infine vedremo, quando le funzioni di valutazione sono a singolo parametro, come possiamo adattare i meccanismi di Myerson agli scenari EC.

4.1 Meccanismi VCG equivalenti

Iniziamo quindi con la trattazione dei meccanismi VCG in presenza di Execution Contingency (EC-VCG). Essendo dei meccanismi di Groves, la funzione di allocazione sarà la stessa funzione riportata nella Sezione 2.4, ovvero la funzione che massimizza la somma delle valutazioni degli agenti. Essere in uno scenario Execution Contingent non ha un impatto particolare su questa parte del meccanismo per quanto riguarda i meccanismi di Groves. Più interessante è, invece, vedere come cambiano i pagamenti in scenari Execution

Contingent, poichè da essi e dalla loro definizione dipendono le proprietà di IC, IR, e WBB.

4.1.1 Pagamenti EC-VCG

I pagamenti che andremo definire in questa sezione sono validi per tutti i modelli individuati nel capitolo precedente, per cui andremo a definirli su quello che è il modello più generale, ovvero quello muliparametro generalizzato. Innanzitutto, ci siamo chiesti se i pagamenti nel nostro modello potessero essere uguali ai pagamenti definiti nella VCG standard e sotto quali condizioni questo fosse vero. Sappiamo che i pagamenti in VCG sono definiti come:

$$p_i(\theta, x^*) = h_i(\theta_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(\theta_j, x^*(\theta)), \tag{4.1}$$

dove $h_i = \underset{x' \neq x^*}{\operatorname{argmax}} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} v_j(\theta_j, x')$. Per quanto riguarda l'EC-VCG, definiremo due tipi di pagamenti: i pagamenti contingenti, ovvero quei pagamenti che verranno effettuati dagli agenti quando il meccanismo verrà eseguito, e i pagamenti in atteso rispetto agli eventi. L'analisi delle proprietà si baserà su questa seconda tipologia di pagamenti. I pagamenti contingenti potranno poi essere molto diversi dai pagamenti in atteso, ma questo non sarà di nostro interesse, poichè, affinchè il meccanismo sia interessante, è sufficiente garantire che le proprietà positive dei meccanismi valgano in atteso, fatto non scontato e non sempre garantito. Possiamo scrivere i pagamenti contingenti come

$$p_i(\theta, x^*) = h_i(\theta_{-i}) - \sum_{E} f(e) \sum_{j \neq i} \theta_j^e(x^*), \tag{4.2}$$

dove $f(e)$ è una funzione definita nel seguente modo:

$$f(e) = \begin{cases} 1 & \text{se l'evento } e \text{ accade} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Notiamo che nei pagamenti contingenti non consideriamo più la probabilità degli eventi, poichè questi o accadranno o non accadranno. Il compito della funzione $f(e)$ è proprio quello di modellare questa binarietà. La probabilità è presente, quindi, solo nei pagamenti in atteso. Prendendo il modello nel caso più generalizzato, vediamo ora come esprimere tali pagamenti. Iniziamo definendo la parte negativa del pagamento. Essa risulterà essere

$$\sum_{j \neq i} \sum_{E} \theta_j^e(x^*) P(e|\theta, x^*) \rho_j^e(x^*) = \sum_{E} P(e|\theta, x^*) \sum_{j \neq i} \theta_j^e(x^*) \rho_j^e(x^*), \tag{4.3}$$

che non è controllabile dall'agente i e, in atteso, è uguale a $\sum_{j \neq i} v_j(x^*(\theta), \theta_j)$.
Possiamo esprimere poi la funzione $h_i(\theta_{-i})$ come

$$\underset{x' \in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{j \neq i} \sum_{E} \theta_j^e(x') P(e|\theta, x') \rho_j^e(x'), \tag{4.4}$$

dove, siccome x' non è osservabile, se

$$\frac{\partial P(e|\theta, x')}{\partial \theta_i} = 0 \; \forall x' \in X_{-i}, \tag{4.5}$$

allora possiamo applicare la VCG standard per calcolare i pagamenti, altrimenti dovremo usare un altro metodo. Questo perchè, siccome x' non è osservabile, se qualche $x' \in X_{-i}$ dipende dal tipo dell'agente i, vuol dire che pur essendo stato tolto dal meccanismo l'agente i-esimo continua ad influenzare in qualche modo l'allocazione, e questo renderebbe la funzione $h_i(\theta_{-i})$ dipendente dal tipo del giocatore i-esimo. Dunque, se la condizione 4.5 non fosse vera, non potremmo adottare la VCG standard per calcolare i pagamenti, in quanto la parte positiva del pagamento non sarebbe più indipendente dal tipo riportato dagli agenti, che quindi potrebbero riportare il falso per manipolare il pagamento. Questa condizione pone quindi un vincolo agli scenari di applicabilità per la EC-VCG e ci ha interrogato su quali meccanismi poter adottare quando non fosse verificata. In seguito, proporremo tre meccanismi di Groves alternativi alla VCG standard e un quarto meccanismo, non di Groves, per provare ad affrontare questo problema di non facile natura. La possibilità di un agente di influenzare le possibili allocazioni, anche quando esso non sia presente nel meccanismo, dà all'agente stesso un grosso potere sul meccanismo e non è facile trovare soluzioni che annullino questo potere di manipolazione, in modo tale da rendere il meccanismo IC. Analizzando le proprietà di tali meccanismi vedremo infatti che, garantire la proprietà di IC, ci obbligherà a sacrificare qualcuna delle altre proprietà. Prima di procedere con la definizione di tali meccanismi, però, vediamo quali proprietà valgono per la EC-VCG quando consideriamo i pagamenti in atteso che abbiamo definito.

4.1.2 Proprietà dei meccanismi EC-VCG

Considerate le proprietà definite nella Sezione 2.3 (IC, IR, WBB e AE), vediamo quali di esse valgono nella EC-VCG, tenendo presente che la proprietà più desiderabile da garantire, per chi progetta il meccanismo, è quella di IC, che, ricordiamo, significa impedire agli agenti di manipolare a proprio piacimento il meccanismo. Tale proprietà è fondamentale per garantire che il meccanismo faccia ciò per cui è stato progettato e non sia in balia delle azioni degli agenti. In particolare, imporremo che la proprietà valga in ex-post (cfr. Sezione 2.3.1) e in atteso rispetto agli eventi (cfr. Sezione 3.2), poichè, nei casi studio da cui siamo partiti, abbiamo visto che provare a garantire tale proprietà in altro modo risulta alquanto difficile o troppo stringente per garantire le altre proprietà. Verifichiamo quindi che il meccanismo EC-VCG sia ex-post IC in atteso.

Teorema 4.1. *Se la condizione verificata nell'Equazione 4.5 è vera, allora, la EC-VCG, in atteso, risulta equivalente ad una VCG standard.*

Infatti sotto la condizione 4.5, nell'EC-VCG

- La funzione di allocazione è la stessa della VCG normale, e massimizza la valutazione degli agenti.
- I pagamenti non sono manipolabili dagli agenti che quindi hanno come strategia migliore quella di riportare il vero.

Vediamo ora come valgono le altre proprietà.

Teorema 4.2. *Poichè la funzione di allocazione della VCG è efficiente, allora lo sarà anche la funzione di allocazione della EC-VCG.*

La proprietà di efficienza allocativa è quindi conservata, e lo sarà per tutti i meccanismi di Groves che proporremo, proprio per come è definita la funzione di allocazione nei meccanismi di Groves. Inoltre:

Teorema 4.3. *Sotto l'ipotesi di IC, poichè l'EC-VCG è equivalente alla VCG, le proprietà di IR e WBB valgono in atteso per la EC-VCG se valgono per la VCG normale.*

Le proprietà che abbiamo nella VCG si ritrovano quindi, sotto le condizioni precedentemente descritte, anche nell'EC-VCG. Sottolineiamo tuttavia che, sotto compatibilità degli incentivi, in alcuni casi la VCG potrebbe non essere IR o WBB. Possiamo quindi affermare che considerati quei casi in cui queste proprietà valgono nella VCG, esse varranno in atteso anche nella EC-VCG. Faremo ora un approfondimento sulla proprietà WBB in atteso. Poichè è una proprietà del meccanismo che dipende solo dai pagamenti, essa potrebbe non essere valida anche quando gli agenti riportano il vero, nel caso in cui i pagamenti non fossero pensati in modo adeguato. Oppure si potrebbe verificare che i pagamenti risultino negativi. Nella prossima sezione affronteremo questo problema, e porteremo ad esempio un caso in cui sotto IC la EC-VCG risulta WBB in atteso, e invece non risulti tale nel caso in cui gli agenti riportino il falso.

4.1.3 WBB nei meccanismi EC-VGC

Sappiamo che, affinchè il meccanismo sia WBB in atteso, per tutte le allocazioni, non deve valere l'effetto di singolo agente. Questo risultato lo conosciamo dalla letteratura che ci porta la seguente definizione ed il teorema successivo.

Definizione 1. In un meccanismo economico è assente l'effetto di singolo agente se per ogni agente i e per ogni possibile profilo di tipi θ, esiste un'allocazione $x' \in X_{-i}$ tale per cui

$$\sum_{j \in I \setminus \{i\}} v_j(x', \theta_j) \geq \sum_{j \in I \setminus \{i\}} v_j(x(\theta), \theta_j)$$

dove $x(\theta)$ è un'allocazione ottima.

Teorema 4.4. *Se non c'è effetto di singolo agente, il meccanismo VCG è WBB e tutti i pagamenti sono non negativi.*

Prendiamo ora un caso in cui abbiamo 2 agenti, 3 possibili allocazioni ed un solo evento. Possiamo dunque scrivere che

- $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ è il set delle allocazioni,
- $\{\theta_1, \theta_2\}$ sono i tipi degli agenti,
- $e \in E$ è l'evento che andremo a considerare.

Nel nostro caso, inoltre, i tipi degli agenti influenzeranno solo le probabilità dell'evento e. Abbiamo poi che

- in x_0 $\rho_1^e(x_0) = \rho_2^e(x_0) = 1$, e indicheremo $P[e|\theta, x_0] = P_0(\theta_1, \theta_2)$,
- in x_1 $\rho_1^e(x_1) = 1, \rho_2^e(x_1) = 0$, e indicheremo $P[e|\theta, x_1] = P_1(\theta_1)$,
- e infine in x_2 $\rho_1^e(x_2) = 0, \rho_2^e(x_2) = 1$, e indicheremo $P[e|\theta, x_2] = P_2(\theta_2)$.

Partendo dal caso in cui l'allocazione ottima sia x_0, questo ci porta a scrivere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 2P_0(\theta_1, \theta_2) \geq P_1(\theta_1) \\ 2P_0(\theta_1, \theta_2) \geq P_2(\theta_2) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} P_1(\theta_1) \geq P_0(\theta_1, \theta_2) \\ P_2(\theta_2) \geq P_0(\theta_1, \theta_2) \end{cases} . \tag{4.6}$$

Il primo sistema deve essere soddisfatto poichè altrimenti l'allocazione x_0 non sarebbe efficiente. Il secondo sistema, invece, ci permette appunto di esprimere le condizioni affinchè nel meccanismo non ci sia alcun effetto di singolo agente, e quindi questo risulti WBB in atteso. Dai due sistemi possiamo ottenerne uno che racchiuda entrambe le condizioni, ovvero

$$\begin{cases} P_1(\theta_1) \geq P_0(\theta_1, \theta_2) \geq \dfrac{P_1(\theta_1)}{2} \\ P_2(\theta_2) \geq P_0(\theta_1, \theta_2) \geq \dfrac{P_2(\theta_2)}{2} \end{cases} .$$

Vediamo subito che tale sistema è impossibile quando $\frac{P_1(\theta_1)}{2} > P_2(\theta_2)$ o $\frac{P_2(\theta_2)}{2} > P_1(\theta_1)$. In questo caso dovremo dunque imporre $P_0(\theta_1, \theta_2) = 0$ dove il sistema risulti impossibile, altrimenti il meccanismo non risulterebbe WBB in atteso neanche sotto ipotesi di IC in atteso. Nell'intervallo in cui il sistema è risolvibile porremo invece $P_0(\theta_1, \theta_2)$ uguale alla media dell'intervallo, e quindi costante, ma altre funzioni potrebbero essere utilizzate. Possiamo quindi definire:

$$P_0(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{P_1(\theta_1)}{2} > P_2(\theta_2) \text{ o } \frac{P_2(\theta_2)}{2} > P_1(\theta_1) \\ \dfrac{\min\{P_1(\theta_1) + \frac{P_2(\theta_2)}{2}, P_2(\theta_2) + \frac{P_1(\theta_1)}{2}\}}{2} & \text{altrimenti} \end{cases} . \tag{4.7}$$

Considerando invece come allocazioni ottime x_1 o x_2 la situazione è molto più semplice. Infatti in questi due casi non è mai presente l'effetto di singolo agente ed in entrambi i casi, sotto IC, il pagamento in atteso sarà positivo. Infatti se consideriamo la parte negativa del pagamento $\sum_{j \neq i} v_j(\theta_j, x^*)$, essa sarà zero per entrambi gli agenti, e quindi il pagamento risulterà positivo. Vediamo ora un risultato interessante.

Teorema 4.5. *In un meccanismo EC-VCG esistono per i tipi degli agenti degli intervalli in cui:*

- *Per qualsiasi combinazione dei tipi, sotto IC in atteso, il meccanismo è WBB in atteso,*
- *esiste un sottoinsieme dei tipi su questi intervalli di dimensione non nulla, per cui se gli agenti riportano il falso il meccanismo non è più WBB*

Dimostrazione. Il primo punto è subito verificato da quanto detto nella sezione precedente, ossia dall'equivalenza tra meccanismi EC-VCG e VCG standard sotto ipotesi di IC. Mostriamo, invece, con un esempio, che anche il secondo punto del teorema è verificato. Prendiamo $\theta_1 = \theta_2 = \frac{2}{3}$, $P_1(\theta_1) = \theta_1$

e $P_2(\theta_2) = \theta_2$. L'allocazione ottima in questo caso è $x^* = x_0$, poichè massimizza la somma delle valutazioni degli agenti. Sotto IC, in atteso, avremo dunque:

$$\mathbb{E}[p_1(\theta, x^*)] = \operatorname*{argmax}_{x' \in X_{-i}} \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta_{-i}, x')\rho_j^e(x') - \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta, x^*)\rho_j^e(x^*) = P_2(e|\theta_2, x_2) - P_0(e|\theta, x_0) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6},$$

ed in maniera analoga

$$\mathbb{E}[p_2(\theta, x^*)] = \operatorname*{argmax}_{x' \in X_{-i}} \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta_{-i}, x')\rho_j^e(x') - \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta, x^*)\rho_j^e(x^*) = P_1(e|\theta_1, x_1) - P_0(e|\theta, x_0) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}.$$

Sotto IC in atteso il meccanismo risulta quindi WBB in atteso. Se invece gli agenti riportassero un tipo più piccolo del tipo vero, ciò che accadrebbe è che il meccanismo non sarebbe più WBB in atteso. Infatti, mettiamo che il tipo riportato dagli agenti fosse $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \frac{1}{3}$, allora, poichè la parte negativa del pagamento dipende dal tipo vero, avremo

$$\mathbb{E}[p_1(\theta, x^*)] = \operatorname*{argmax}_{x' \in X_{-i}} \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\hat{\theta}_{-i}, x')\rho_j^e(x') - \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta, x^*)\rho_j^e(x^*) = P_2(e|\hat{\theta}_2, x_2) - P_0(e|\theta, x_0) = \frac{1}{3} - \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6},$$

e, ancora una volta, analogamente

$$\mathbb{E}[p_2(\theta, x^*)] = \operatorname*{argmax}_{x' \in X_{-i}} \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\hat{\theta}_{-i}, x')\rho_j^e(x') - \sum_E \sum_{j \neq i} P(e|\theta, x^*)\rho_j^e(x^*) = P_1(e|\hat{\theta}_1, x_1) - P_0(e|\theta, x_0) = \frac{1}{3} - \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Il meccanismo risulta quindi non WBB in atteso. □

Questo risultato è abbastanza interessante, poichè ci fa capire che se tutti gli agenti deviano dal vero è possibile per chi governa il meccanismo incorrere in una perdita. Ne consegue che, in scenari in cui chi governa il meccanismo sospetti potenziali collusioni fra gli agenti, in modo tale per cui tutti sono convinti nel deviare dal ripotare il vero, usare un meccanismo EC-VCG potrebbe risultare inadeguato, e bisognerebbe considerare altre tipologie di meccanismi.

4.1.4 Esempio

Portiamo ora un esempio in cui la condizione fondamentale che abbiamo affinchè l'EC-VCG risulti equivalente alla VCG standard sia violata. Supponiamo di avere due agenti con tipo $\theta_i \in [0, 1]$ e con le seguenti valutazioni:

- $v_1(\theta, x) = \theta_1$,
- $v_2(\theta, x) = \theta_1\theta_2$.

e supponiamo di avere un solo evento e per ogni agente per cui $\rho_i^e(x) \neq= 0$ e $\rho_i^e(x) = 1$, e supponiamo che nell'allocazione scelta tutti gli eventi siano possibili. Supponiamo che i tipi degli agenti siano $\theta_1 = 0.9$ e $\theta_2 = 0.5$, allora possiamo scrivere i pagamenti come:

- $p_1(\theta) = \theta_1 * 0.5 - 0.9 * 0.5$,
- $p_2(\theta) = 0.9 - 0.9 = 0$.

In questo caso è subito evidente come non possa valere li Equazione 4.5, poichè se anche escluso dal meccanismo, il tipo del primo agente continua ad influenzare la vakutazione dell'eltro agente e l'allocazione. Il termine h_i del pagamento p_1 non è dunque calcolabile in atteso, a meno di non considerare il tipo riportato dal primo agente. Tuttavia se così facessimo, allora il primo agente potrebbe manipolare il meccanismo a suo piacimento e riportare un tipo fittizio $\theta_1 = 0 + \varepsilon$ con ε piccolo a piacere per ottenere un pagamento negativo. Il meccanismo quindi non è più IC.

4.2 Meccanismi non stocastici Groves equivalenti

Spostiamo ora la nostra attenzione su meccanismi differenti dalla VCG classica, perchè riteniamo utile ai fini della trattazione esplorare meccanismi che risultino applicabili e con proprietà interessanti anche qualora non valesse la condizione, definita nell'Equazione 4.5, necessaria ai meccanismi EC-VCG per essere ex-post IC in atteso. Poichè, in questo caso, gli agenti sono in grado di influenzare le allocazioni anche qualora essi siano assenti dal meccanismo, progettare meccanismi che risultino IC ci obbligherà a sacrificare qualcuna delle altre proprietà, che, di conseguenza, non saranno tutte garantite. Non avremo, quindi, un meccanismo solo che sia equivalente, nelle proprietà, al meccanismo EC-VCG per i casi in cui questo non è applicabile. Chi debba progettare un meccanismo sotto tali condizioni dovrà decidere a quali proprietà dare più peso e scegliere di conseguenza.

4.2.1 MinRep Groves

Il primo meccanismo alternativo che presentiamo è il meccanismo MinRep, che è un meccanismo di Groves, e dunque avrà la stessa funzione di allocazione di tali meccanismi. Esso ci permette, inoltre, di calcolare i pagamenti anche quando il tipo riportato dall'agente i continua ad avere influenza sull'allocazione nonostante questo non sia presente all'interno del meccanismo. Per fare ciò, nel calcolare la parte h_i del pagamento, terremo conto del tipo dell'agente escluso tramite una variabile, θ_i', che chiameremo tipo riportato virtuale, che denota il tipo dell'agente i che minimizza il benessere sociale. Prendendo d'esempio il caso a singolo parametro, possiamo definire quindi h_i come:

$$h_i(\theta) = \min_{\theta_i' \in \Theta_i} \left\{ \underset{x' \in X_{-i}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{j \neq i} \theta_j \sum_{E} P(e|\theta, x') \rho_j^e(x') \right] \right\}.$$

Vediamo, quindi, quali proprietà valgono quando definiamo la funzione h_i in take modo.

Teorema 4.6. *Il meccanismo MinRep è AE, IC in atteso e IR in atteso.*

Dimostrazione. Se andiamo a considerare la funzione di utilità degli agenti in atteso avremo

$$\mathbb{E}[u_i(\theta, x^*)] = v_i(\theta_i, x^*) - h_i(\theta) + \sum_{j \neq i} v_j(\theta_j, x^*(\theta)) = sw(\theta, x^*) - \min_{\theta_i' \in \Theta_i} sw(\theta_i', \theta_{-i}, x'(\theta_i', \theta_{-i})),$$

dove $sw(\theta, x)$ indica il benessere sociale provveduto dal meccanismo, con $sw(\theta_i', \theta_{-i}, x'(\theta_i', \theta_{-i}))$ definito come nell'Equazione 4.4. L'utilità in atteso è quindi sempre maggiore uguale a zero, poichè la parte positiva, che viene massimizzata durante l'allocazione, sarà al peggio uguale alla parte negativa. □

Il meccanismo tuttavia non sarà WBB poichè, essendo che in h_i minimizziamo il social welfare, è possibile che i pagamenti risultino negativi.

Esempio

Riprendiamo l'esempio della Sezione 4.1.4 e vediamo come cambiano le cose in questo caso. Utilizzando il meccanismo MinRep stiamo minimizzando il social welfare, e quindi sceglieremo $\theta_1' = 0$. In questo modo il meccanismo, come già detto, non risulterà WBB, tuttavia gli agenti non hanno incentivi nel non riportare il vero, e quindi, a differenza di quanto succedeva con l'EC-VCG, possiamo garantire la proprietà di IC (oltre ad IR e AE). Supponiamo di avere $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = 0.6$, allora avremo:

- $p_1 = 0 - 0.9 * 0.6 = -0.54$,
- $p_2 = 0.9 - 0.9 = 0$.

4.2.2 MaxRep Groves

Il secondo meccanismo che proponiamo è il meccanismo MaxRep, anch'esso di Groves. Questo meccanismo è simile al precedente, tuttavia questa volta al posto che minimizzare il social welfare sul tipo riportato virtuale dell'agente i-esimo, lo massimizzeremo. Questo, come si può intuire, ci farà perdere la proprietà del meccanismo di essere IR in atteso, ma ci farà guadagnare la proprietà di WBB in atteso. In questo caso scriveremo quindi la parte h_i del pagamento come:

$$h_i(\theta) = \max_{\theta'_i \in \Theta_i} \left\{ \operatorname*{argmax}_{x' \in X_{-i}} \left[\sum_{j \neq i} \theta_j \sum_{E} P(e|\theta, x') \rho_j^e(x') \right] \right\}.$$

Anche in questo caso definiamo quali sono le proprietà che valgono per questo meccanismo.

Teorema 4.7. *Il meccanismo MaxRep è AE, IC in atteso e WBB in atteso.*

Dimostrazione. In questo caso possiamo scrivere il pagamento in atteso come:

$$\mathbb{E}[p_i(\theta, x^*)] = \max_{\theta'_i \in \Theta_i} sw(\theta'_i, \theta_{-i}, x'(\theta'_i, \theta_{-i})) - sw_{-i}(\theta_{-i}, x^*),$$

dove $sw_{-i}(\theta_{-i}, x^*)$ è definito nell'Equazione 4.3. Essendo la parte negativa del pagamento al più uguale alla parte positiva, deduciamo che il meccanismo è WBB in atteso. □

Abbiamo quindi guadagnato la proprietà di WBB a discapito di IR, poichè l'utilità degli agenti potrà, talvolta, essere negativa. Questi primi due esempi ci fanno capire bene che non è facile, sotto l'ipotesi di non validità di 4.5, garantire tutte le proprietà e che qualcosa vada sacrificato per avere un meccanismo ex-post IC in atteso. Ci siamo chiesti se, unendo questi due meccanismi, potessimo fare meglio e ottenere tutte le proprietà desiderabili. Quello che ci aspettavamo è che ciò non fosse effettivamente possibile, come vedremo nella prossima sezione. Prima di procedere, però, riprenderemo l'esempio portato già per i precedenti meccanismi e vedremo cosa succede in questo caso.

Esempio

Applicando il meccanismo MaxRep all'esempio della Sezione 4.1.4, otteniamo un meccanismo AE, IC e WBB. Infatti, per il primo agente avremo $\theta'_1 = 1$. Supponiamo di avere $\theta_1 = 0.4$, $\theta_2 = 0.8$, allora otteremo i seguenti pagamenti:

- $p_1 = 0.8 - 0.4 * 0.8 = 0.48$,
- $p_2 = 0.4 - 0.4 = 0$.

In questo caso il meccanismo non è IR, quindi, come già detto, la proprietà non vale in generale. In alcuni casi più fortunati invece tale proprietà è presente (per esempio se scegliessimo, nell'esempio precendente, $\theta_1 = 0.9$)

4.2.3 AvgRep

Abbiamo infatti definito una variazione dei meccanismi MinRep e MaxRep che chiameremo AvgRep. Quello che considereremo è una combinazione lineare e convessa dei due meccanismi appena citati, per cui possiamo definire:

$$h_i^{Avg}(\theta) = \alpha h_i^{Min}(\theta) + (1-\alpha) h_i^{Max}(\theta),$$

con $\alpha \in [0,1]$. Inoltre, in h_i,α non può dipendere dal tipo dell'agente i-esimo, altrimenti il meccanismo non sarebbe IC. Potrebbe, in linea di principio dipendere da θ_{-i}, ma ai fini della nostra trattazione questo non cambia niente rispetto a considerare, come faremo, α costante. Il primo risultato trovato è il seguente.

Teorema 4.8. *Non esiste un $\alpha \in [0,1]$ che renda il meccanismo AvgRep AE, IC in atteso, IR in atteso, e WBB in atteso.*

Dimostrazione. Dai meccanismi precedenti sappiamo che $h_i^{Max} \geq sw_{-i}(\theta_{-i}, x^*)$ e $sw(\theta, x^*) \geq h_i^{Min}$. Possiamo dunque derivare la condizione per cui un meccanismo, in atteso, sia IR e allo stesso tempo WBB, cioè

$$sw(\theta, x^*) \geq h_i \geq sw_{-i}(\theta_{-i}, x^*),$$

che in generale non era vero per i meccanismi MinRep e MaxRep. Notiamo che è sempre possibile trovare un α che faccia cadere h_i^{Avg} in questo intervallo. Tuttavia, se andassimo effettivamente ad usare questo intervallo per scegliere la nostra funzione h_i, il meccanismo non sarebbe più IC, poichè $sw(\theta, x^*)$ è controllabile dall'agente i-esimo, per cui egli potrebbe riportare il falso in modo da ottenere un intervallo più vantaggioso per sè stesso. □

Posto questo risultato, ovvero l'impossibilità di utilizzare un intervallo controllabile dagli agenti per scegliere una funzione h_i ottimale per ottenere tutte le proprietà desiderabili, vediamo quali proprietà possiamo effettivamente garantire con il meccanismo AvgRep.

Teorema 4.9. *Il meccanismo AvgRep in generale non garantisce nè la proprietà di IR in atteso nè quella di WBB in atteso.*

Dimostrazione. Affinchè il meccanismo sia IR in atteso è richiesto che l'utilità di ogni agente sia non negativa, potremmo avere, fissato α, un profilo di tipi θ per cui: per un giocatore vale che $h_i^{Avg} > sw(\theta, x^*)$, e quindi per lui il meccanismo non è IR; per tutti gli altri agenti $j \neq i$ vale che $h_j^{Avg} < sw_{-j}(\theta, x^*)$, per cui il meccanismo non sarebbe neanche WBB. Quindi non possiamo garantire che per qualsiasi profilo di tipi, fissato α, il meccanismo abbia una tra le proprietà di IC in atteso o WBB in atteso. □

Dunque il meccanismo AvgRep risulta più debole dei meccanismi utilizzati per comporlo, e non risulta essere in grado di combinare le proprietà positive (WBB e IC) dei meccanismi "padri", ereditandone soltanto le mancanze. Non è quindi consigliabile adottare un meccanismo di questo tipo, bensì, piuttosto, sceglierne uno tra MaxRep e MinRep. Tuttavia studiare questo meccanismo pone una domanda interessante. Infatti, se l'intervallo in cui h_i deve risiedere affinchè il meccanismo sia IC e WBB in atteso potesse essere determinato in modo contingente, rendendolo quindi non controllabile dagli agenti, otterremmo un meccanismo con tutte e quattro le proprietà desiderabili, e quindi equivalente all'EC-VCG anche quando non dovesse valere la condizione 4.5. Questo aspetto non verrà ulteriormente approfondito nel nostro lavoro, ma potrebbe essere un punto di partenza interessante per lavori futuri.

Esempio

Partendo dall'esempio già visto nelle precedenti sezioni, calcoliamo la funzione h_i^{avg} per ognuno degli agenti. Quello che otteniamo è:

- $h_1 = \alpha * 0 + (1 - \alpha)\theta_2 = (1 - \alpha)\theta_2$,
- $h_2 = \alpha * \theta_1 + (1 - \alpha)\theta_1 = \theta_1$.

Quello che mostreremo è che, a seconda di come scegliamo θ_1 e θ_2 una delle due proprietà tra WBB e IR è violata e quindi in generale, come già detto, non possiamo garantire nessuna delle due con il meccanismo AvgRep. Consideriamo infatti il profilo di tipi $\theta_1 = 0.1$ e $\theta_2 = 0.9$, allora, con $\alpha = 0.5$ i pagamenti risulteranno essere:

- $p_1 = 0.5 * 0.9 - 0.1 * 0.9 = 0.36$,
- $p_2 = 0.1 - 0.1 = 0$.

L'utilità del primo giocatore in atteso risulterà essere $u_1 = 0.1 - 0.36 = -0.26 < 0$ e quindi il meccanismo risulta non essere IR. Se invece scegliamo il seguente profilo di tipi $\theta_1 = 0.9$ e $\theta_2 = 0.1$, sempre con $\alpha = 0.5$ otteniamo i seguenti pagamenti:

- $p_1 = 0.5 * 0.1 - 0.9 * 0.1 = -0.04$,
- $p_2 = 0.9 - 0.9 = 0$.

Poichè la somma dei pagamenti è negativa, il meccanismo non risulta essere WBB in atteso.

4.3 Meccanismi stocastici Groves equivalenti

Introduciamo ora un terzo meccanismo EC che chiameremo RandRec. Tale meccanismo è in atteso sia IC, che IR, che WBB. La proprietà che quindi viene sacrificata in questo caso è l'efficienza allocativa. Infatti, mentre i meccanismi precedenti erano basati tutti sulla stessa funzione di allocazione definita come quella dei meccanismi di Groves, in questo particolare meccanismo la funzione di allocazione è non deterministica. Tale funzione di allocazione è infatti definita su un sottoinsieme degli agenti $N' \subseteq N$. Quello che il meccanismo fa è assegnare prima dell'allocazione una probabilità che chiameremo $\mu_{N'}$ ad ogni possibile sottoinsieme N' ad esclusione dell'insieme vuoto. Avremo quindi $\sum_{N' \subseteq N, N' \neq \emptyset} \mu_{N'} = 1$. Ad ogni esecuzione il meccanismo sceglie casualmente tra uno dei possibili sottoinsiemi N' con probabilità $\mu_{N'}$, e produce un'allocazione efficiente per questo sottoinsieme di agenti. Questa scelta subottimale dell'allocazione ci permette di calcolare i pagamenti in modo tale da avere le proprietà di IC, IR e WBB in atteso. Il problema, come nei casi precedenti, è quindi individuato nel calcolo dei pagamenti. Possiamo scrivere $\forall N' \subseteq N$, se $i \in N'$, allora

$$\forall i \in N', \mathbb{E}[p_i^{N'}] = sw_{N' \setminus \{i\}} - sw^*_{-i}$$

altrimenti

$$\forall j \in N \setminus N', \mathbb{E}[p_j^{N'}] = sw^*_{N'} \frac{\mu_{N' \cup \{j\}}}{\mu_{N'}},$$

dove la parte negativa dell'agente i non può essere controllata ed può essere verificata quando il meccanismo viene eseguito, ed è quindi in atteso uguale al pagamento EC. La parte positiva invece non è calcolabile, poichè non vale la condizione dell'Equazione 4.5. Quindi se andassimo a considerare il suo valore EC esso sarebbe nullo. Tuttavia quello che vogliamo noi è che le proprietà valgano in atteso.

Teorema 4.10. *L'utilità in atteso dell'agente i nel meccanismo RandRec è equivalente alla somma pesata delle utilità in atteso che egli riceverebbe con un meccanismo VCG (sotto IC), per ogni possibile N', dove i pesi sono $\mu_{N'}$*

Dimostrazione. Il pagamento in atteso dell'agente i è

$$\mathbb{E}_{N'}[\mathbb{E}[p_i^{N'}]] = -\sum_{N' \subseteq N | i \in N'} \mu_{N'} sw_{-i}^* + \sum_{N' \subseteq N | i \notin N'} \mu_{N'} \left(\frac{\mu_{N' \cup \{i\}}}{\mu_{N'}} sw_{N'} \right).$$

È subito evidente come i due termini in atteso ricalchino i due pagamenti in precedenza definiti. Inoltre, sfruttando la notazione $N' \setminus \{i\}$ possiamo unificare le sommatorie e scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{N'}[\mathbb{E}[p_i^{N'}]] = \sum_{N' \subseteq N | i \in N'} \left[-\mu_{N'} sw_{-i}^* + \mu_{N' \setminus \{i\}} \left(\frac{\mu_{N'}}{\mu_{N' \setminus \{i\}}} sw_{N' \setminus \{i\}} \right) \right] = \\ = \sum_{N' \subseteq N | i \in N'} \mu_{N'} \left(-sw_{-i}^* + sw_{N' \setminus \{i\}} \right). \end{aligned}$$

Da questo segue che per ogni sottoinsieme N' possiamo isolare il seguente termine

$$-sw_{-i}^* + h_i,$$

dove $h_i = sw_{N' \setminus \{i\}}$. Posto che per ogni sottoinsieme l'allocazione sia efficiente, sotto IC, h_i è equivalente a quello della VCG, e quindi il teorema è dimostrato. □

Essenzialmente, in atteso, il meccanismo RandRec esegue il meccanismo VCG per ogni possibile sottoinsieme N', ognuno con probabilità $\mu_{N'}$. Sotto questa prospettiva, per ogni agente $i \in N'$ la parte negativa del pagamento è calcolata sulla base dell'allocazione efficiente quando il meccanismo è eseguito sul sottoinsieme N', mentre la parte positiva del pagamento è calcolata sulla base dell'allocazione efficiente quando il meccanismo viene eseguito con $N' \setminus \{i\}$ agenti.

Teorema 4.11. *Il meccanismo RandRec è in atteso IC, IR, e WBB.*

Dimostrazione. Come detto prima, possiamo considerare il meccanismo RandRec come un meccanismo randomizzato su un insieme di VCG. È noto che il meccanismo VCG sia in atteso IC, IR e WBB. Con il meccanismo RandRec queste stesse proprietà valgono in atteso per ogni sottoinsieme N', perchè i pagamenti definiti nella precedente dimostrazione sono calcolati completamente in modo contingente. In particolare la parte negativa del pagamento è contingente agli eventi che occorrono quando l'allocazione è calcolata dato N', mentre la parte positiva è contingente agli eventi che occorrono quando l'allocazione è calcolata dato $N' \setminus \{i\}$. I pagamenti contingenti sono possibili poichè l'allocazione, dati ogni $N' \subset N$, è osservata dal meccanismo. Gli agenti non posso inoltre influenzare N' che viene scelto casualmente, e quindi il meccanismo in atteso è IC, IR e WBB. □

Concludiamo la trattazione riguardo questo meccanismo vedendo qual è la perdita di efficienza che abbiamo dovuta alla scelta non ottimale dell'allocazione e, in seguito, mostrando che anche nel caso in cui gli agenti riportino il falso, il meccanismo rimane WBB.

Teorema 4.12. *Il rapporto di efficienza del meccanismo RandRec rispetto all'allocazione ottima è uguale a* μ_N

Dimostrazione. Sappiamo che quando l'allocazione è scelta su $N' = N$ l'allocazione è efficiente, e la chiameremo EFF. Quando invece l'allocazione è calcolata su $N' \neq N$, come già detto, essa risulterà inefficiente. L'allocazione efficiente viene scelta con probabilità μ_N, e quindi accade di avere un'allocazione non efficiente con probabilità $1 - \mu_N$. Se consideriamo che nel caso peggiore l'efficienza delle allocazioni inefficienti è zero, otteniamo, come conseguenza, che in atteso rispetto alla distribuzione di probabilità su N', l'approssimazione del rapporto di efficienza è $\dfrac{\mu_N\, EFF}{EFF} = \mu$. □

Teorema 4.13. *Il meccanismo RandRec è WBB anche qualora gli agenti dovessero riportare il falso.*

Dimostrazione. Questa proprietà segue molto facilmente da quanto dimostrato nel Teorema 4.11. Infatti, poichè i pagamenti sono definiti in maniera contingente, essi non dipendono in alcun modo dal tipo riportato. Quindi il meccanismo RandRec, che sotto IC è WBB in atteso, sarà WBB in atteso anche qualora gli agenti riportino il falso, poichè, come già detto, il tipo riportato dagli agenti non compare in alcun modo all'interno del pagamento. □

4.3.1 Esempio

Rirformuliamo l'esempio proposto al termine delle sezioni riguardanti i meccanismi precedenti nei seguenti termini. Abbiamo due agenti, con valutazioni $v_1 = \theta_1$ e $v_2 = \theta_1\theta_2$. Abbiamo tre possibili allocazioni: $x_1, x_2, x_{1,2}$ e supponiamo che la probabilità su di esse sia distribuita nel seguente modo: $\mu_1 = \frac{1}{6}, \mu_2 = \frac{1}{6}, \mu_{1,2} = \frac{2}{3}$. Supponiamo che $\theta_1 = 0.6$ e $\theta_2 = 0.5$, allora i pagamenti saranno i seguenti:

- $p_1 = \frac{2}{3}(-0.3 + 0.5) + \frac{1}{6}(0 + 0) = \frac{2}{15}$,
- $p_2 = \frac{2}{3}(-0.6 + 0.6) + \frac{1}{6}(0 + 0) = 0$.

. Il meccanismo è sicuramente WBB, è IC perchè gli agenti non possono manipolare i pagamenti, ed è IR in quanto per il secondo agente il pagamento in atteso è nullo, mentre per il primo agente abbiamo che l'utilità in atteso è

$$u_1 = \frac{2}{3}0.6 + \frac{1}{6}0.6 - \frac{2}{15} = \frac{1}{2} - \frac{2}{15} = \frac{11}{30} > 0.$$

Questo conclude la nostra trattazione sull'implementazione di meccanismi Execution Contingent tramite meccanismi di Groves. Abbiamo individuato una condizione necessari affinchè sia applicabile il meccanismo VCG a scenari Execution Contingent e abbiamo proposto soluzioni alternative, talvolta uscendo dai meccanismi di Groves, come nel caso appena affrontato, per garantire alcune delle proprietà positive qualora la condizione necessaria non fosse verificata. Ci concentreremo ora sulle funzioni di valutazione a singolo parametro e cercheremo di capire se, in modo simile a quanto fatto per i meccanismi VCG, possiamo estendere i meccanismi di Myerson agli scenari Execution Contingent.

4.4 Modello SPL e Meccanismi di Myerson

Ci siamo chiesti se, nel caso di funzioni di valutazione a singolo parametro, fosse possibile implementare meccanismi di Myerson per scenari Execution Contingent. Affinchè ciò sia possibile, è neccessario verificare le ipotesi di monotonicità della funzione di allocazione e che i pagamenti possano essere definiti come pagamenti di Myerson. Consideriamo innanzitutto la funzione di valutazione degli agenti nel caso singolo parametro. Essa può essere riscritta come:

$$v_i(x, \theta) = \theta_i \, w_i(x, \theta), \tag{4.8}$$

dove θ_i è il tipo dell'agente e $w_i(x, \theta) = \sum_E (P(e|\theta, x)\rho_i^e(x))$. Notiamo che la funzione di valutazione non è lineare, come richiesto da Myerson. Tuttavia, se andiamo a considerare il termine $w_i(x, \theta)$ in Execution Contingecy, come già detto nella Sezione 3.3, esso corrisponderà ad un valore reale che dipende solo dall'allocazione. Questa considerazione ci permette di considerare la funzione di valutazione lineare in Execution COntingency per cui, sotto tale ipotesi, abbiamo $w_i(x, \theta) = w_i(x)$. Veniamo quindi alla definizione del pagamento. Esso sarà nella seguente forma:

$$p_i(\theta_i, \theta_{-i}) = \theta_i \sum_E P(e|\theta, f(\theta))\rho_i^e(f(\theta)) - \int_0^{\theta_i} \sum_E P(e|u, \theta_{-i}, f(u, \theta_{-i}))\rho_i^e(f(u, \theta_{-i}))du. \tag{4.9}$$

La parte positiva del pagamento coincide con la valutazione dell'agente come nei meccanismi di Myerson classici. Si pone invece il problema di calcolare l'integrale per determinare la parte negativa del pagamento. L'ostacolo più grande è dato dal fatto che non possiamo conoscere il valore della sommatoria all'interno dell'integrale, in quanto essa, come precedentemente osservato, non è nota a priori e dipende da θ_i, e, proprio per questo motivo nel valutare $w_i(x)$ la consideriamo in execution contingency. Tuttavia non possiamo considerarla in tal modo all'interno dell'integrale, perchè per farlo dovremmo essere in grado di osservare contemporaneamente tutte le possibili allocazioni al variare di θ_i. Abbiamo dunque pensato, inizialmente, di utilizzare l'idea dei pagamenti impliciti che troviamo in [11] per provare a stimare l'integrale. Tuttavia, come vedremo, questo metodo non risulterà adeguato agli scenari Execution Contingent poichè, sebbene in grado, a livello teorico, di fornire una stima per l'integrale, non risolve il problema di linearità della funzione $w_i(x, \theta)$ che non risulterà quindi approssimabile in modo tale da permetterci di utilizzare meccanismi di Myerson per scenari Execution Contingent.

4.5 Pagamenti Impliciti per Meccanismi SPL

L'idea di questo metodo è la seguente: dati i tipi riportati degli agenti, il meccanismo campiona un nuovo tipo minore o uguale a quello riportato con probabilità μ. Il meccanismo calcola poi su questi nuovi tipi campionati l'allocazione e i pagamenti. Prima di addentrarci nel dettaglio, riportiamo un teorema che è utile per capire come si possa stimare un integrale tramite un campionamento aleatorio.

Teorema 4.14. *Sia I un intervallo non vuoto su $\mathbb{R}$, $g(z)$ una funzione definita su I, e sia $F : I \to [0, 1]$ una qualsiasi funzione strettamente monotona crescente che sia differenziabile e soddisfi $inf_{z \in I} F(z) = 0$ e $sup_{z \in I} F(z) = 1$. Se Y è una variabile aleatoria con funzione di ripartizione F, allora*

$$\int_I g(z)dz = \mathbb{E}\left[\frac{g(Y)}{F'(Y)}\right].$$

Ora possiamo definire una procedura di campionamento che ci permetta di stimare l'integrale dei pagamenti. Riproporremo la procedura riportata da Babaioff et al., che ci mostrerà come riusciamo a stimare l'integrale utilizzando l'idea del Teorema 4.14. Iniziamo con il definire, quindi, cos'è una procedura di auto-campionamento e quali sono le sue caratteristiche.

Definizione 2. Sia I un intervallo non vuoto su $\mathbb{R}$, allora definiamo una procedura di auto-campionamento con supporto I e probabilità di campionamento $\mu \in (0,1)$ un algoritmo randomizzato con input $b_i \in I$ e output $x_i(b_i), y_i(b_i) \in I$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. x_i e y_i sono funzioni non decrescenti di b_i.
2. Con probabilità $1-\mu x_i(b_i) = y_i(b_i) = b_i$, altrimenti $x_i(b_i) \leq y_i(b_i) \leq b_i$.
3. La distribuzione di $x_i(b_i)$ dato $y(b_i) = b'_i < b_i$ è uguale alla distribuzione non condizionata di $x(b'_i)$. Più formalmente,
$$Pr[x_i(b_i) < a_i |\, y_i(b_i) = b'_i] = Pr[x_i(b'_i) < a_i], \quad \forall a_i \leq b'_i < b_i.$$
4. Consideriamo la funzione
$$F(a_i, b_i) = Pr[y_i(b_i) < a_i |\, y_i(b_i) < b_i],$$
che chiameremo funzione di distribuzione della procedura di autocampionamento. Per ogni b_i, la funzione $F(\cdot, b_i)$ deve essere differenziabile e strettamente monotona crescente sull'intervallo $I \cap (-\infty, b_i)$

Se andiamo a mappare questa definizione sulla definizione di meccanismo economico da noi data, allora $I = \Theta_i$ rappresenta il dominio in cui gli agenti scelgono i loro tipi, $b_i = \theta_i$ è il tipo riportato dall'agente al meccanismo, $y_i = \theta'_i$ e $x_i = \theta''_i$ sono i tipi campionati che ci aiuteranno a stimare l'integrale e definire i pagamenti. Vediamo ora l'implementazione di un meccanismo di Myerson con campionamento dei tipi con lo scopo di stimare la parte negativa dei pagamenti quando essa non sia calcolabile. Prima di procedere con la descrizione dei passi del meccanismo sono necessarie due premesse. La prima è che, poichè è richiesto $\theta'_i \geq \theta''_i$, è possibile che il meccanismo effettui due campionamenti diversi, entrambi con probabilità μ. Se non ci fosse un doppio campionamento, avremmo sempre $\theta'_i = \theta''_i$. La seconda è che la funzione di distribuzione per la procedura di auto-campionamento che sceglieremo è la seguente: $F_i(a_i, b_i) = \frac{a_i}{b_i}$. Infatti scegliere in questo modo la funzione F_i ci permetterà di soddisfare la quarta proprietà richiesta per le procedure di auto-campionamento. Denoteremo, inoltre, con $F'_i(a_i, b_i)$ la derivata parziale $\frac{\partial F_i(a_i,b_i)}{\partial a_i}$. Date queste premesse, per determinare l'allocazione e i pagamenti il meccanismo procederà con i seguenti passi:

1. Chi governa il meccanismo riceve il profilo di tipi $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, con $\theta_i \in \mathbb{R}^+$.

2. Scelta della probabilità di campionamento $\mu \in (0, 1)$.

3. Ad ogni agente vengono assegnati i tipi campionati θ'_i, θ''_i nel seguente modo:

   - Con probabilità $1 - \mu$ abbiamo $\theta'_i = \theta_i, \theta''_i = \theta_i$.
   - Altrimenti verrà effettuato il campionamento con la seguente procedura: campioniamo $\hat{\theta}'_i$ con distribuzione uniforme su $[0, \theta_i]$. Assegniamo $\theta'_i = \hat{\theta}'_i$ e, ancora una volta con probabilità $1-\mu$, $\theta''_i = \hat{\theta}'_i$. Con probabilità μ, invece, effettueremo un secondo campionamento $\hat{\theta}''_i$, sempre con distribuzione uniforme ma sull'intervallo $[0, \hat{\theta}'_i]$, e assegneremo $\theta''_i = \hat{\theta}''_i$.

4. Vengono quindi costruiti i vettori $\theta' = (\theta'_1, \ldots, \theta'_n)$ e $\theta'' = (\theta''_1, \ldots, \theta''_n)$.

5. Viene calcolata l'allocazione $x(\theta'')$.

6. Ad ogni agente viene assegnato il seguente pagamento:

   $$p_i(\theta, \theta', \theta'') = \theta_i \, w_i(x(\theta'')) - R_i,$$

   dove R_i è definito nel seguente modo:

   $$R_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \frac{w_i(x(\theta''))}{F'_i(\theta'_i, \theta_i)} & \text{se } \theta'_i < \theta_i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La parte negativa dei pagamenti viene quindi posta uguale a zero se non viene effettuato il campionamento o se il campionamento non cambia il tipo riportato dall'agente. Altrimenti essa viene calcolata facendo uso dei parametri campionati. Se però andiamo a considerare scenari contingenti agli eventi, tale ragionamento crolla. Infatti, al variare dell'allocazione, per determinare il valore $w_i(x(\theta''))$ non possiamo considerare i tipi campionati, ma dovremmo essere in grado di considerare le realizzazioni dell'allocazione $x(\theta'')$. Di fatto, quindi, il valore di $w_i(x(\theta''))$ continuerà a dipendere dai tipi veri degli agenti, che sono diversi di tipi presenti nel vettore θ'', nell'allocazione $x(\theta'')$ e l'unico modo che avremmo per calcolare il valore di w_i sarebbe, ancora una volta, di considerarlo contingente algi eventi. Ma, ugualmente per quanto detto rispetto all'integrale, non potendo noi osservare l'allocazione $x(\theta'')$ non possiamo utilizzare i pagamenti impliciti per applicare meccanismi di Myerson agli scenari Execution Contingent. Questo ci permette di fare due importanti considerazioni riportate di seguito.

Teorema 4.15. *Non è possibile applicare meccanismi di Myerson a scenari Execution Contingent.*

Come già detto questo è dovuto al fatto che non è possibile calcolare i pagamenti come pagamenti di Myerson, poichè nella parte negativa di tali pagamenti non stiamo richiedendo di calcolare l'integrale di una funzione $w_i(x)$ ma di una funzione $w_i(x, \theta)$ che non possiamo linearizzare in alcun modo, rendendola $w_i(x)$, poichè non possiamo osservare tutte le allocazioni.

Teorema 4.16. *I pagamenti definiti dal meccanismo RandRec, presentato nella Sezione 4.3, non sono equivalenti ai pagamenti di Babaioff per meccanismi SPL.*

Questo è un risultato importante, poichè pone una netta differenza tra il meccanismo RandRec da noi proposto e i pagamenti impliciti di Babaioff. Infatti, sebbene entrambi partano dall'idea di approssimare l'allocazione ottima con una subottima, nel meccanismo RandRec per scenari Execution Contingent i pagamenti in atteso sono ben definiti e questo ci permette di ottenere un meccanismo con le proprietà di IC, IR e WBB in atteso. Invece, con il metodo dei pagamenti impliciti, non siamo in grado di determinare una parte dei pagamenti che quindi non risultano essere definiti.

4.5.1 Esempio

Vediamo ora, tramite un esempio, perchè i pagamenti di Babaioff non possano funzionare con l'idea di contingenza agli eventi. Supponiamo di essere nel caso di valutazione a singolo parametro, per cui $v_i = \theta_i \sum_E P(e|\theta_i, \theta_{-i}, x)\rho_i^e(x)$. Supponiamo di avere due agenti il cui tipo è composto da un coppia $(valore, probabilit)$ e di avere un solo evento per agente con $\rho \neq 0$ e $\rho = 1$. La funzione $w_i(x)$ sarà quindi monotona crescente nella probabilità degli eventi per ogni giocatore. Ora supponiamo che i tipi veri degli agenti coincidano con quelli riportti al meccaismo (ipotesi di IC) e siano rispettivamente le seguenti coppie: $\theta_1 = (5, 0.9)$ e $\theta_2 = (2, 0.4)$. Se supponiamo che l'allocazione debba scegliere quali dei due agenti allocare, chiaramente l'allocazione ottima vede allocato il primo agente. Ipotizziamo di utilizzare i pagamenti impliciti di Babaioff, di avere una probabilità di ricampionamento $\mu = \frac{1}{3}$, e che effettivamente il tipo del primo agente venga ricampionato ottennedo i seguenti valori, $\theta_1' = (5, 0.6), \theta_1'' = (5, 0.5)$, mentre il tipo del secondo agente rimane invariato. In questo modo l'allocazione di Babaioff sceglierà ancora il primo agente e per esso , in teoria, dovremmo ottenere il seguente pagamento:

$$p_1 = 5 * 0.5 - \frac{1}{\frac{1}{3}} * \frac{0.5}{\frac{1}{0.9}} = 2.5 - 1.35 = 1.15.$$

Tuttavia il pagamento sarebbe tale solo se noi potessimo osservare l'allocazione quando il tipo vero del primo agente è $\theta_1 = (5, 0.5)$, cosa che noi non possiamo osservare poichè gli unici tipi che possiamo osservare sono i tipi degli agenti che sono effettivamente veri, per cui, nel nostro caso, il tipo $\theta_1 = (5, 0.9)$. Per questo motivo non possiamo utilizzare l'idea dei pagamenti impliciti di Babaioff utilizzando l'idea di contingenza agli eventi, perchè non possiamo osservare le allocazioni $w_i(\theta'')$; oltretutto, anche qualora potessimo osservarle, ciò che osserveremmo non dipenderebbe da θ'' bensì continuerebbe a dipendere dai tipi veri degli agenti. Quindi quello che osserveremmo effetivamente ci porterebbe a calcolare un pagamento del tipo:

$$p_1 = 5 * 0.9 - \frac{1}{\frac{1}{3}} * \frac{0.9}{\frac{1}{0.9}} = 4.5 - 2.43 = 2.07,$$

che è diverso dal pagamento che avevamo calcolato nell'ipotesi che potessimo osservare tutte le possibili allocazioni.

4.6 Generalizzazione di Myerson

Non potendo utilizzare l'idea di Executio Contingency per rendere possibile l'applicazione di meccanismi di Myerson a scenari con eventi, ci siamo chiesti se esistesse un modo per definire una classe di funzioni di valutazione, in scenari con eventi, rispetto alla quale poter applicare i meccanismi di Myerson classici senza ricorrere ad Execution Contingency. Abbiamo visto che se ci limitiamo a considerare una funzione di valutazione del tipo $v_i = \theta_i w_i(x)$ non siamo in grado di estendere i meccanismi di Myerson a scenari con eventi. Ci siamo chiesti come estendere quindi tale funzioni di valutazione per ottenere una nuova generalizzazione dei meccanismi di Myerson e siamo giunti ai risultati che riporteremo di seguito. Consideriamo il caso in cui $v_i = g_i(\theta_i)w_i(x)$, dove $g_i \colon \Theta_i \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione del tipo dell'agente, anche non lineare, e $w_i(x)$ è monotona crescente. Vediamo se possiamo estendere l'utilizzo di meccanismi di Myerson a tale caso.

Teorema 4.17. *Data una funzione di valutazione degli agenti definita come $v_i = g_i(\theta_i)w_i(x)$, con $w_i(x)$ monotona crescente, se $\forall i$ la funzione $g_i(\theta_i)$ è strettamente monotona crescente in θ_i allora è possibile applicare i meccanismi di Myerson.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'idea che applicare una trasformazione al tipo degli agenti che sia strettamente monotna crescente, e quindi invertibile, comporti semplicemente una dilatazione o una compressione della valutazione dell'agente rispetto al proprio tipo. Questo non incide sulle proprietà di monotonia della funzione $w_i(x)$ e quindi rimane la possibilità di applicare meccanismi di Myerson. Possiamo infatti scrivere il tipo dell'agente come $\theta'_i = g_i(\theta_i)$, e la funzione di valutazione degli agenti come

$$v_i(\theta_i, f(\theta)) = \theta'_i w_i(f(g_i^{-1}(\theta'_i), \theta_{-i})),$$

dove f è la funzione che sceglie l'allocazione. Poichè g_i è strettamente monotona crescente, lo sará anche g_i^{-1}, e quindi anche f, monotona crescente per ipotesi, continuerà ad essere monotona crescente. L'ipotesi di applicabilità di Myerson è quindi verificata. □

Esempio Supponiamo che $w_i = \alpha\,\theta_i$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, e $v_i = \theta_i^2$. Allora avremo $g_i^{-1}(\theta_i) = \sqrt{\theta_i}$ e $w_i(f(g_i^{-1}(\theta'_i), \theta_{-i})) = \alpha\sqrt{\theta_i}$ che continua ad essere monotona crescente.

Possiamo, inoltre, estendere questa generalizzazione anche al caso in cui la funzione g_i sia del tipo $g_i(\theta_i|\theta_{-i})$.

Teorema 4.18. *Data una funzione di valutazione degli agenti definita come $v_i = g_i(\theta_i|\theta_{-i})w_i(x)$, con $w_i(x)$ monotona crescente, se $\forall i$ la funzione $g_i(\theta_i|\theta_{-i})$ é strettamente monotona crescente in θ_i allora è possibile applicare i meccanismi di Myerson.*

Dimostrazione. Analogamente al caso precedente, se richiediamo che la funzione g_i sia strettamente monotona crescente in θ_i allora, definito $\theta'_i = g_i(\theta_i|\theta_{-i})$, possiamo definire la valutazione degli agenti come:

$$v_i(\theta_i, f(\theta)) = \theta'_i\, w_i(f(g_i^{-1}(\theta'_i|\theta_{-i}), \theta_{-i})).$$

Anche in questo caso la funzione f non perderà le proprie proprietà di monotonicità, e dunque anche in questo caso l'ipotesi di applicabilità di Myerson è verificata. □

Facciamo ora un'osservazione che ci aiuterà a capire meglio quali sono i casi di applicabilità della generalizzazione di Meccanismi di Myerson per scenari in cui la valutazione degli agenti dipende dagli eventi.

Osservazione 1. La funzione g_i dipende solo dal tipo dell'agente e non può dipendere dall'allocazione. Se così fosse, verrebbe introdotta un'altra dimensione nel nostro problema, per cui avremmo $g_i(\theta_i, x|\theta_i)$ e non potremmo più applicare i meccanismi di Myerson, poichè la valutazione non risulterebbe più lineare in $\theta'_i = g_i(\theta_i|\theta_i)$. In scenari con event dovremo quindi limitare l'applicazione di meccanismi di Myerson a quei casi in cui la probabilità degli eventi dipende solo dai tipi degli agenti e non dall'allocazione, cioè quei casi per cui $P(e|\theta_i, \theta_{-i}, x) = P(e|\theta_i, \theta_{-i})$.

Teorema 4.19. *In scenari con eventi possiamo applicare i meccanismi di Myerson generalizzati solo nel caso in cui la funzione di valutazione è del tipo* $v_i = \sum_E P(e|\theta_i, \theta_{-i})\rho_i^e(x)$ *ed esiste, per ogni agente, un solo evento* $\bar{e}$ *per cui* $\rho_i^{\bar{e}}(x) > 0$

Quello che stiamo chiedendo con il vincolo sulla funzione di valutazione è che tale funzione sia a singolo parametro e che le probabilità dipendano solo dal tipo degli agenti (condizioni necessarie per applicare i meccanismi generalizzati di Myerson). Il vincolo sulla funzione $w_i(x) = \rho_i^e(x)$ è invece necessario perchè, se così non fosse, dal momento che a diverse coppie $(evento, allocazione)$ possono corrispondere potenzialmente diverse funzioni g_i,non saremmo più in grado di esprimere $w_i(x)$ come $w_i(f(g_i^{-1}(\theta_i'), \theta_{-i}))$. In conclusione possiamo quindi affermare che in scenari con eventi, quando possiamo esprimere la funzione di valutazione degli agenti come definito nel Teorema 4.19 allora possiamo estendere l'applicazione dei meccanismi di Myerson a scenari con eventi, senza ricorrere ad execution contingency, cioè all'osservazione degli eventi.

Esempio Consideriamo il caso delle Federated Sponsored Auction senza esternalità (Sofia Ceppi, Nicola Gatti, Enrico H. Gerding (2011), *Mechanism Design For Federated Sponsored Search Auctions*). In questo caso abbiamo che la probabilità degli eventi, i click agli ad, dipende solo dai tipi degli agenti, poichè l'assenza di esternalità implica che la probabilità dei click non varia al variare della posizione dell'ad nella lista mostrata agli utenti. Inoltre abbiamo, per ogni agente i, che $\rho_i^e(x) > 0$ solo per l'evento $\bar{e}_i$ che corrisponde al click da parte degli utenti sull'ad dell'agent i. Allora in questo caso sono verificate le condizioni di applicabilità sono soddisfatte ed è possibile applicare un meccanismo di Myerson generalizzato. Supponiamo di avere una SSA con due agenti con tipo privato $\theta_1 = 0.8$ e $\theta_2 = 0.6$, che indica la probabilit di click dell'ad, e due possibili slot. In questo caso abbiamo due possibili eventi, $e_1 = "click\, dell'ad\, del\, primo\, agente"$ ed $e_2 = "click\, dell'ad\, del\, secondoo\, agente"$. L'allocazione x assegnerà uno slot al primo agente ed uno slot al secondo agente. Le rispettive funzioni di valutazione saranno $v_1 = \theta_1 = 0.8$ e $v_2 = \theta_2 = 0.6$, mentre i pagamenti saranno della forma:

$$p_i(\theta) = v_i - \int_0^{\theta_i} P(e|u_i, \theta_{-i})\rho_i^{\bar{e}}(x)du,$$

ottenendo quindi $p_1 = 0.8 - \int_0^{0.8} u_i\rho_i^{\bar{e}}(x)du = 0.8 - 0.32 = 0.48$ e, analogamente, $p_2 = 0.6 - 0.18 = 0.42$.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

5.1 Conclusioni

Siamo partiti dall'individuazione di applicazioni di meccanismi economici per cui era necessario considerare la presenza di eventi al fine di creare meccanismi che fossero effettivamente applicabili. Abbiamo visto che non esisteva nessuna trattazione organica di tali meccanismi in letteratura, ma solo un insieme di casi studio specifici. La prima parte del nostro lavoro si è quindi concentrata sull'individuazione di classi di funzioni di valutazione che fossero sufficientemente ricche per poter descrivere e raccogliere tutte le casistiche possibili. Il modello proposto si è rivelato sufficientemente ricco per descrivere tutti i casi studio individuati. Successivamente ci siamo dedicati a capire quali meccanismi potessero essere adatti per tali classi di funzioni di valutazione e quali proprietà fossero valide per essi. Il primo risultato è stato quello di estendere il meccanismo VCG standard per ottenere il meccanismo VGC equivalente EC-VCG, utilizzando l'idea di Execution Contingency, ovvero l'idea di calcolare i pagamenti con quanto osservato nell'esecuzione del meccanismo. Abbiamo derivato la condizione fondamentale 4.5 per cui tali meccanismi risultino expost IC in atteso, e abbiamo verificato che sotto tale ipotesi valgono anche le altre proprietà sotto le condizioni medesime della VCG standard. Abbiamo inoltre dimostrato che se l'ipotesi di IC non è verificata la proprietà WBB non è più garantita. Il secondo risultato portato è l'introduzione di meccanismi che potessero garantire alcune proprietà qual'ora la condizione 4.5 non fosse verificata. Abbiamo presentato i meccanismi MinRep (IC, IR e AE), MaxRep (IC, WBB e AE), AvgRep (IC e AE) e RandRec (IC, IR e WBB). Di questi, il meccanismo AvgRep è senza dubbio il più debole, mentre il meccanismo più interessante risulta essere il meccanismo RandRec, perchè permette di ottenere tutte le proprietà desiderabili per le diverse parti partecipi del meccanismo (agenti e banditore) a discapito di una perdita arbitraria di efficienza. L'ultimo risultato interessante raggiunto è invece legato ai meccanismi di Myerson. Abbiamo dimostrato che, a differenza di VCG, non possiamo usare in questo caso l'idea di contingenza degli eventi per calcolare i pagamenti, nemmeno quando ricorriamo ai metodi dei pagamenti impliciti di Babaioff. Questo, oltre a fornire un risultato di impossibilità di applicabilità di Myerson classico agli scenari con eventi, avvalora ulteriormente il meccanismo RandRec che, sebbene abbia dei punti in comune con l'idea dei pagamenti impliciti di Babaioff, non ne è una semplice estensione ai casi non a singolo parametro lineare. Infine abbiamo proposto un estensione dei meccanismi di Myerson affinchè essi fossero applicabili ad una classe ristretta di funzioni di valutazione con eventi.

5.2 Sviluppi futuri

Presentiamo, infine, possibili svillupi futuri a partitre da questo lavoro. Siccome diversi sviluppi riguardano diversi tipi di meccanismi, svilupperemo questa sezione in diversi paragrafi, uno per ogni tipo di meccanismo.

Pagamenti non di Groves Potrebbe essere interessante proporre un calcolo dei pagamenti che sfrutti sempre l'idea di contingenza degli eventi, ma che sia diverso dal calcolo dei pagamenti di Groves, che è stato il metodo utilizzato nel nostro lavoro per calcolare i pagamenti di tutti i modelli Groves equivalenti proposti. Proporre un altro tipo di pagameti e vedere quali proprietà valgono sotto tali condizioni potrebbe essere un modo per andare oltre i vincoli trovati in questa in tesi.

Meccanismo Avg Rep Come già detto, seppur debole, il meccanismo AvgRep presenta degli aspetti interessanti. Infatti, se si potesse determinare l'intervallo critico per la funzione h_i in modo indipendente dal tipo riportato dagli agenti, forse sfruttando le osservazioni, si potrebbero garantire anche altre proprietà, ottendo in tal modo un meccanismo in grado di garantire tutte le proprietà interessanti. Può inoltre essere studiato come cambia questo meccanismo al variare della definizione del coefficiente α.

Estensione dei meccanismi di Myerson Altri sviluppi interessanti potrebbero essere ottenuti a partire dall'estensione dei meccanismi di Myerson che abbiamo definito. Tale risultato apre, infatti, a ulteriori potenziali studi riguardo a quali altre classi di funzioni di valutazione si possano estendere i meccanismi di Myerson e se esistono altre tipologie di funzione $g_i(\theta_i)$ per cui l'estensione è valida oltre a quelle già individuate.

Meccanismi con verifica Infine, uno degli sviluppi più interessanti potrebbe essere andare oltre i meccanismi classici proposti, meccanismi di Groves e di Myerson, e, per esempio, confrontare i meccanismi contingenti agli eventi con i meccanismi con verifica, mettendo in evidenza punti di contatto e differenze tra le due tipologie di meccanismi.

Bibliografia

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Google_AdWords

[2] https://www.emarketer.com/Article/Google-Facebook-Increase-Their-Grip-on-Digital-Ad-Market/1015417

[3] Andreu Mas-Colell, Michael Dennis Whinston, Jerry R Green, *Microeconomic theory*, Oxford University Press, 1995

[4] R. Myerson, *Optimal Auction Design*, Mathematics of Operations Research, 1981

[5] Aaron Archer, Eva Tardos, *Truthful Mecganisms for One-Parameter Agents*

[6] Philippe Jehiel, Benny Maldovanu (2000), *Efficient Mechanism Design with Interdipendent Valuations*

[7] Sofia Ceppi, Nicola Gatti, Enrico H. Gerding (2011), *Mechanism Design For Federated Sponsored Search Auctions*

[8] Enrico Gerding, Sebastian Stein, Kate Larson, Alex Rogers, Nicholas R. Jennings (2011), *Scalable Mechanism Design for the Procurement of Services with Uncertain Duration*

[9] Sofia Ceppi, Enrico H. Gerding, Nicola Gatti,*Merging multiple information sources in federated sponsored search auctions*, AAMAS 2012

[10] Vincent Conitzer, Angelina Vidali (2014), *Mechanism Design for Scheduling with Uncertain Execution Time*

[11] Moshe Babaiof, Robert D. Kleinberg, Aleksandrs Slivkins (2015), *Truthful Mechansims with Implicit Payment Computation*

[12] Ryan Porter, Amir Ronen, Yoav Shoham, Moshe Tennenholtz (2008), *Fault tolerant mechanism design*

[13] Carmine Ventre (2014), *Truthful optimization using mechanism with verification*