



Politecnico di Milano

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

**Formula approssimata per la valutazione di
opzioni a Barriera singola
per modelli a Volatilità Locale**

Candidato:
Ludovica Di Santo
Matricola 834063

Relatore:
Daniele Marazzina

A chi ha sempre creduto in me

Sommario

Il seguente elaborato è incentrato sul pricing di opzioni a barriera singola sotto l'ipotesi che il sottostante sia descritto da modelli a volatilità costante e/o locale.

A tal riguardo vengono esaminati tre modelli: Black&Scholes, Constant Elasticity of Variance (CEV) e un più generico modello a volatilità non lineare.

In particolare vengono studiate opzioni barriera del tipo down-and-in, il cui prezzo è calcolato con due diversi metodi: una formula approssimata e la tecnica del Brownian Bridge Monte Carlo, utilizzata come benchmark.

Viene infatti mostrato che ogni opzione di questo genere può essere prezzata, in modo approssimato, grazie ad una combinazione di tre opzioni Europee standard, due delle quali con funzione di volatilità simmetrizzata.

L'impiego di tale approssimazione conduce a risultati con un buon livello di accuratezza e permette di avere tempi di esecuzione molto più bassi rispetto all'utilizzo delle simulazioni Monte Carlo.

Ringraziamenti

Ripenso agli anni trascorsi al Politecnico e riaffiorano alla mia mente momenti di sconforto, in cui non avrei mai creduto di poter arrivare fin qui, ma anche ricordi di soddisfazioni e di orgoglio. Perché è vero che questa università chiede tanto, forse troppo, portando a sacrifici a volte difficili da sostenere, ma regala anche qualcosa di unico: una formazione solida, che permette di spalancare serenamente le porte del proprio futuro, e l'umiltà, che fa tornare sempre coi piedi per terra.

È per questo che mi sento di ringraziare in primis il Poli, per tutto ciò che mi ha dato in questi anni, ed il professor Marazzina, che mi ha seguita in questo lavoro di tesi con disponibilità e gentilezza.

Oggi conseguo la laurea magistrale, traguardo importante che non sarebbe mai stato possibile senza la presenza di due persone fondamentali nella mia vita: i miei genitori. Grazie papà, perché mi hai dato questa grande opportunità, mi hai spronata a migliorare e hai gioito, inorgogolito, ad ogni mio piccolo successo.

Grazie mamma, perché sei la luce che mi ha indicato il cammino, la mano che mi ha aiutato a rialzarmi ad ogni caduta, la forza che mi ha spinto ad arrivare fin qui.

Grazie a mio fratello Guido, pietra d'angolo della mia vita, sostegno che so ci sarà sempre.

Grazie ai miei nonni, perché con le loro azioni mi hanno insegnato più che con mille parole.

Grazie a mia cugina Noemi, perché è sempre stata al mio fianco dandomi consigli preziosi.

Grazie ai miei amici più cari: Alsida, perché la nostra amicizia è la più vera che potessi desiderare e sono certa durerà per sempre; Alice, perché il sentimento che ci lega è un dono unico che solo noi possiamo comprendere; Paolo, per il bene ed il sostegno che ci siamo sempre dati; Giusi, perché nonostante gli anni e la distanza siamo ancora unite; Andrea, perché tra i banchi dell'università è nato un bellissimo rapporto.

Infine un grazie enorme va all'amore della mia vita, Paolo, perché è stato costantemente al mio fianco, consolandomi quando ce n'è stato bisogno e festeggiando ogni mio successo, il tutto con un amore che non pensavo potesse mai esistere.

Milano, 3 Ottobre 2017

L. D. S.

Indice

Introduzione	xxi
I Background teorico	1
1 Modello di Black&Scholes e limiti	3
1.1 Modello di Black-Scholes-Merton	3
1.1.1 Descrizione del modello	3
1.1.2 Formula di Black&Scholes	5
1.1.3 Greche	6
1.2 Limiti del modello	7
1.2.1 Dinamica dei rendimenti	7
1.2.2 Volatilità	8
2 Superamento del modello di Black&Scholes	11
2.1 Modelli a Volatilità Locale	11
2.1.1 Modello Constant Elasticity of Variance	12
2.1.2 Modello a volatilità non lineare	13
2.1.3 Limiti e vantaggi dei modelli a Volatilità Locale	13
3 Opzioni Barriera	15
3.1 Opzioni Barriera con Modello di Black&Scholes	15
3.1.1 Opzioni Knock-Out	16
3.1.2 Opzioni Knock-In	17
3.1.3 Considerazioni	18
3.2 Opzioni Barriera con Modelli a Volatilità Locale	19
II Metodi Numerici	23
4 Metodi Numerici per il Pricing di Opzioni Barriera	25
4.1 Metodo degli Alberi Binomiali e Trinomiali	26

Indice

4.1.1	Metodo degli Alberi Binomiali	26
4.1.2	Metodo degli Alberi Trinomiali	28
4.1.3	Migliorie per i due Metodi	28
4.2	Metodo delle Differenze Finite	29
5	Brownian Bridge Monte Carlo	33
5.1	Generazione delle simulazioni	33
5.2	Discretizzazione nel Pricing	34
5.2.1	Metodo probabilistico	35
5.2.2	Metodo di correzione	38
5.3	Algoritmo di Pricing	39
5.4	Metodi Monte Carlo: vantaggi e svantaggi	41
6	Formula approssimata	43
6.1	Introduzione	43
6.2	Setup	44
6.3	Formula approssimata	47
6.3.1	Chaos expansion di Wiener-Itô	48
6.3.2	Formule approssimate per le Europee	51
6.4	Modello CEV	53
6.5	Modello a volatilità non lineare	54
III	Risultati Numerici	57
7	Risultati Numerici	59
7.1	Risultati: modello di Black&Scholes	62
7.2	Risultati: modello CEV	65
7.3	Risultati: modello a Volatilità Non Lineare	70
IV	Conclusioni	73
8	Conclusioni	75
V	Appendice	77
9	Codici formula approssimata	79
10	Codici Brownian Bridge Monte Carlo	85
11	Codici Monte Carlo per Europee	89

Bibliografia

93

Elenco delle figure

1.1	Greche per un'opzione call Europea con sottostante che evolve secondo il modello di Black&Scholes.	7
1.2	Opzioni su azioni: <i>volatility smile</i>	9
1.3	Opzioni su azioni: distribuzione implicita e log-normale.	9
3.1	Confronto tra volatilità locale e volatilità implicita ad un anno.	20
3.2	Prezzo call double knock-out.	21
4.1	Albero binomiale pricing call down-and-out.	26
5.1	Principio di riflessione moto Browniano.	36
7.1	Convergenza e separazione delle funzioni $\eta(x)$ (linea rossa), $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea verde) e approssimazione di Taylor al terzo ordine di $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea blu) rispetto a $\epsilon = 1/m$, con $m = 1, \dots, 9$	61
7.2	Prezzi call donw-and-in. Modello di Black&Scholes.	64
7.3	Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata e Brownian Bridge MC. Modello BS.	64
7.4	Prezzi $DI(S; G)$ in base al parametro m utilizzato. Modello CEV.	65
7.5	Zoom sui prezzi $DI(S; G)$ in base al parametro m utilizzato. Modello CEV.	66
7.6	Convergenza di $DI(S; G)_m$ a $DI(S; G)$. Modello CEV.	66
7.7	Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata. Modello CEV.	68
7.8	Convergenza dei prezzi delle tre opzioni Europee: $E(\tilde{S}; \Gamma)$, $E(S; G)$ e $E(\tilde{S}; G)$. Modello CEV.	68
7.9	Prezzi call donw-and-in. Modello LV.	71
7.10	Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata. Modello LV.	71

Elenco delle tabelle

7.1	Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello BS. Casi (a), (b), (c). . . .	63
7.2	Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello BS. . . .	63
7.3	Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello CEV. Casi (a), (b), (c). . . .	67
7.4	Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello CEV. . . .	69
7.5	Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello LV. Casi (a) e (b). . . .	70
7.6	Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello LV. . . .	70

Elenco degli acronimi

BS Black and Scholes

CEV Constant Elasticity of Variance

EDP Equazione Differenziale Parziale

EDS Equazione Differenziale Stocastica

GBM Geometric Brownian Motion

LV Local Volatility

MC Monte Carlo

OTM Out of The Money

La mente è come un paracadute. Funziona solo se si apre.
Albert Einstein

Introduzione

Uno degli aspetti fondamentali della finanza quantitativa è il calcolo del prezzo di un *derivato*.

Questo è un contratto stipulato tra due controparti, le quali si impegnano a scambiarsi un futuro flusso di denaro, in un determinato arco temporale, secondo regole definite al momento della stipula. L'ultima data di validità è detta *scadenza* o *maturity*. Il nome «derivato» discende dal fatto che il suo valore di mercato dipende da quello di un secondo strumento finanziario, chiamato *sottostante*.

Tra i contratti derivati più noti e diffusi vi sono le *opzioni Europee plain-vanilla* che possono essere di due tipi: *call* e *put*. Queste danno il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare (call) o di vendere (put), un'unità di sottostante a scadenza ad un prezzo di esercizio, detto *strike price*, determinato al momento della stipula del contratto.

Il primo grande risultato nella modellistica finanziaria fu ottenuto da Black, Scholes e da Merton, i quali nel 1973 proposero un modello che permetteva di ricavare una formula chiusa per il calcolo del prezzo di prodotti europei, basandosi su semplici ipotesi.

Questo modello è coerente con la *teoria del Non Arbitraggio*, secondo cui vale la “*No Free Lunch Economy*”, cioè non è possibile ottenere dei guadagni certi senza avere un esborso di denaro.

Il modello di Black&Scholes-Merton si basa sull'ipotesi fondamentale che il processo sottostante evolva secondo un *moto Browniano geometrico*, il cui coefficiente di diffusione, chiamato *volatilità*, è ritenuto costante. La volatilità è da considerarsi un parametro centrale nel modello, in quanto rappresenta un indice di variazione del prezzo del sottostante. Il suo valore però non è osservabile sul mercato, e deve quindi essere stimato indirettamente. L'approccio maggiormente utilizzato nel mondo della finanza quantitativa, legato alla *teoria dell'Option Pricing*, consiste nel ricavare tale valore dai dati di mercato, cioè dai prezzi delle opzioni quotate.

Viene illustrato ora il contenuto del seguente elaborato.

Nel Capitolo 1 verrà introdotto il modello di Black&Scholes, esplicitando le ipotesi che ne sono alla base e, in breve, la teoria della misura neutrale al rischio. Verranno

Introduzione

presentati i principali risultati del modello ed analizzati i maggiori limiti.

In particolare si parlerà del problema del *volatility smile*: invertendo la formula di Black&Scholes, dato il prezzo di una call, si riscontra che il valore della volatilità implicita non è costante, come viene assunto, ma varia in base al valore dello strike e della scadenza.

Questo comporta delle difficoltà nel prezzare prodotti *esotici*, ossia il cui payoff dipende dalle traiettorie effettuate dal sottostante, poiché non risulta banale stabilire il valore di volatilità da utilizzare.

Nel Capitolo 2 verranno introdotti i modelli nati per rispondere all'esigenza di risolvere il problema sopra menzionato. Nello specifico si parlerà di *modelli a volatilità locale*, in cui la volatilità è espressa come funzione del tempo, mettendone in luce vantaggi e svantaggi.

In particolare si farà riferimento anche al modello *Constant Elasticity of Variance* (CEV), che verrà poi utilizzato nel pricing di opzioni barriera nei capitoli successivi.

Nel Capitolo 3 si parlerà delle opzioni *barriera*, cioè opzioni il cui valore dipende dall'eventualità che il sottostante tocchi una certa soglia prima della scadenza del contratto.

Verranno descritti i due diversi casi: *Knock-In*, in cui l'opzione non può essere esercitata a meno che la barriera venga raggiunta; *Knock-Out*, in cui l'opzione non può essere esercitata a meno che la barriera non venga raggiunta. Per ognuno di essi verranno illustrate le formule utilizzate per calcolarne il prezzo nel framework di Black&Scholes. Successivamente si studieranno le opzioni barriera secondo i modelli a volatilità locale, spiegando come, grazie a questi ultimi, sia possibile identificare eventuali underpricing e overpricing.

Nel Capitolo 4 verranno introdotti i principali metodi numerici utilizzati per determinare il prezzo di opzioni barriera, ponendo attenzione sui metodi degli alberi binomiali e trinomiali e sul metodo delle differenze finite, mettendone in risalto accuratezza e complessità computazionale.

Nel Capitolo 5 si parlerà della tecnica del *Brownian Bridge Monte Carlo*, in cui viene calcolata la probabilità che il sottostante raggiunga il livello di barriera in istanti che non vengono monitorati. Questa tecnica verrà utilizzata come benchmark con cui confrontare il prezzo calcolato con il metodo descritto nel capitolo successivo.

Il Capitolo 6 è il cuore di questo lavoro di tesi: in esso si introdurrà una formula approssimata, sviluppata da H. Funahashi e M. Kijima [13], utilizzata per prezzare

opzioni a barriera singola del tipo down-and-in secondo i modelli di Black&Scholes e volatilità locale (sia CEV che volatilità non lineare). In particolare verrà mostrato come ogni opzione di questo tipo possa essere prezzata grazie ad una combinazione di tre opzioni Europee standard, due delle quali con funzione di volatilità simmetrizzata. Quest'ultima sarà approssimata da una successione di funzioni lisce che convergono all'originale. Attraverso la tecnica del chaos expansion verrà sviluppata una formula approssimata per prezzare le opzioni Europee così caratterizzate. Infine si applicherà l'acceleratore di convergenza di Aitken in modo da ottenere un prezzo approssimato per l'opzione down-and-in.

Nel Capitolo 7 verranno illustrati i risultati numerici per il calcolo del prezzo delle opzioni down-and-in ottenuti con i due diversi procedimenti: tramite la formula approssimata e attraverso la tecnica del Brownian Bridge Monte Carlo. Saranno fatte alcune considerazioni circa la scelta dei parametri ed effettuati confronti tra i due metodi in base sia all'accuratezza dei risultati che ai tempi di esecuzione.

Nel Capitolo 8 saranno presentate le conclusioni.

Nell'Appendice (capitoli 9, 10 e 11) sono raccolti i codici Matlab da me implementati e su cui si basa il seguente lavoro.

Background teorico **Parte I**

1 Modello di Black&Scholes e limiti

1.1 Modello di Black-Scholes-Merton

1.1.1 Descrizione del modello

Nel 1973 Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton diedero un fondamentale contributo alla teoria di valutazione delle opzioni, sviluppando il modello di Black-Scholes-Merton ([26], [22]), per il quale Merton e Scholes ricevettero il premio Nobel per l'economia nel 1977 (Black morì prima).

Esso si basa sulle seguenti ipotesi:

Ipotesi 1.1 (Ipotesi di Black&Scholes).

- assenza di opportunità di arbitraggio (efficienza del mercato)
- il sottostante evolve secondo un moto Browniano geometrico
- la volatilità σ ed il tasso di interesse risk-free r sono costanti nel tempo
- liquidità del mercato
- assenza di costi di transazione e tasse
- possibilità di vendere allo scoperto
- perfetta divisibilità dei titoli
- assenza di dividendi
- il sottostante ed il derivato sono scambiati sul mercato in tempo continuo

Per una trattazione maggiormente dettagliata degli argomenti che seguiranno fare riferimento, oltre che a [26] e [22], anche a [27] e [10].

Supponiamo che nel mercato siano presenti due titoli, uno privo di rischio B (Bond)

Capitolo 1. Modello di Black&Scholes e limiti

ed uno rischioso S (Stock), i cui processi di prezzo evolvono secondo le dinamiche:

$$dB_t = rB_t dt \quad (1.1)$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.2)$$

in cui μ rappresenta la deriva locale, σ la volatilità e W_t un moto Browniano unidimensionale.

Sia

$$\chi = \Phi(S_T) \quad (1.3)$$

un derivato semplice (*simple contingent claim*) con scadenza T , ossia un contratto con un payoff che dipende dall'occorrenza di un evento futuro. Allora vale il seguente teorema (si veda [27]).

Teorema 1.1 (Equazione di Black&Scholes).

Assumendo che valgano le Ipotesi 1.1 e che il mercato sia descritto da (1.1) e (1.2), si vuole prezzare un derivato semplice della forma (1.3). L'unica funzione di prezzo consistente con l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio è la soluzione del seguente problema al contorno nel dominio $[0, T] \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) - r V(t, S_t) = 0 \\ V(T, S_T) = \Phi(T, S_T) \end{cases} \quad (1.4)$$

L'equazione (1.4) è della forma che può essere risolta tramite una rappresentazione stocastica a la *Feynman-Kač* (si veda [27]).

Teorema 1.2 (Teorema di Feynman-Kač).

Si assuma che F sia soluzione del problema al contorno:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - r F(t, x) = 0 \quad (1.5)$$

$$F(T, x) = \Phi(T, x) \quad (1.6)$$

Si assuma inoltre che $e^{-rs} \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \in L^2$, dove X_s soddisfa l'EDS:

$$dX_s = \mu(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dW_s, \quad s > t, \quad (1.7)$$

$$X_t = x \quad (1.8)$$

Allora F ha rappresentazione stocastica data da

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}[\Phi(X_T)] \quad (1.9)$$

1.1. Modello di Black-Scholes-Merton

dove $\mathbb{E}_{t,x}[\cdot]$ indica il valore atteso condizionato a $X_t = x$.

È possibile applicare tale teorema al problema di Black&Scholes ottenendo la seguente soluzione

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}[\Phi(X_T)] \quad (1.10)$$

dove il processo X è definito dalla dinamica

$$dX_s = rX_s ds + \sigma(s, X_s)X_s dW_s, \quad s > t, \quad (1.11)$$

$$X_t = x \quad (1.12)$$

Si noti che il drift corrisponde al tasso di interesse risk-free. È dunque necessario cambiare la misura di probabilità da quella reale \mathbb{P} a quella *risk neutral* \mathbb{Q} , secondo la quale tutti gli agenti presenti nel mercato sono neutrali al rischio. \mathbb{Q} è anche chiamata *misura di martingala* poiché, sotto di essa, il processo normalizzato $\frac{S_t}{B_t}$ è una martingala.

Da qui in avanti si supporrà di trovarsi sempre sotto la misura \mathbb{Q} . Allora vale il seguente teorema (si veda [27]).

Teorema 1.3 (Valutazione neutrale al rischio).

Il prezzo di non arbitraggio del derivato con payoff $\Phi(S_T)$ è dato da $\Pi(t; \Phi) = V(t, S_t)$, dove $V(t, x)$ è dato dalla formula

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}[\Phi(X_T)] \quad (1.13)$$

e S_t segue la \mathbb{Q} -dinamica

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.14)$$

1.1.2 Formula di Black&Scholes

Proposizione 1.4 (Formula di Black&Scholes).

Il prezzo di una call Europea $C(t, S_t)$ con strike price K e scadenza T , il cui payoff è

$$\Phi(S_T) = (S_T - K)^+, \quad (1.15)$$

è dato da

$$C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (1.16)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1.17)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (1.18)$$

e $\mathcal{N}(x)$ è la cumulata della normale standard.

Per la dimostrazione si veda [27]. Il corrispondente valore di una put Europea è

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1). \quad (1.19)$$

Il modello è *completo*, cioè qualunque derivato presente sul mercato può essere replicato tramite un portafoglio autofinanziante costituito dal titolo rischioso e da quello privo di rischio.

1.1.3 Greche

Sia $V(t, S)$ una funzione di prezzo al tempo t per un portafoglio basato su un solo asset sottostante con processo di prezzo S_t . Il portafoglio può essere composto da una posizione nel sottostante stesso, così come da posizioni in varie opzioni scritte sull'asset sottostante.

È molto importante avere una misura della sensibilità di V rispetto a: cambiamenti del prezzo del sottostante; variazioni nei parametri del modello.

Si introduca la seguente notazione standard.

Definizione 1.1 (Greche).

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial V}{\partial S}, \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \\ \rho &= \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \Theta &= \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \nu &= \frac{\partial V}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Queste misure di sensibilità sono conosciute come «le greche».

Un portafoglio che non è sensibile rispetto a piccoli cambiamenti di uno dei parametri precedenti è detto *neutrale*, e la corrispondente greca è nulla.

Seguono ora i grafici delle greche come funzioni del prezzo del sottostante nel caso di un'opzione call Europea con sottostante che evolve secondo il modello di Black&Scholes.

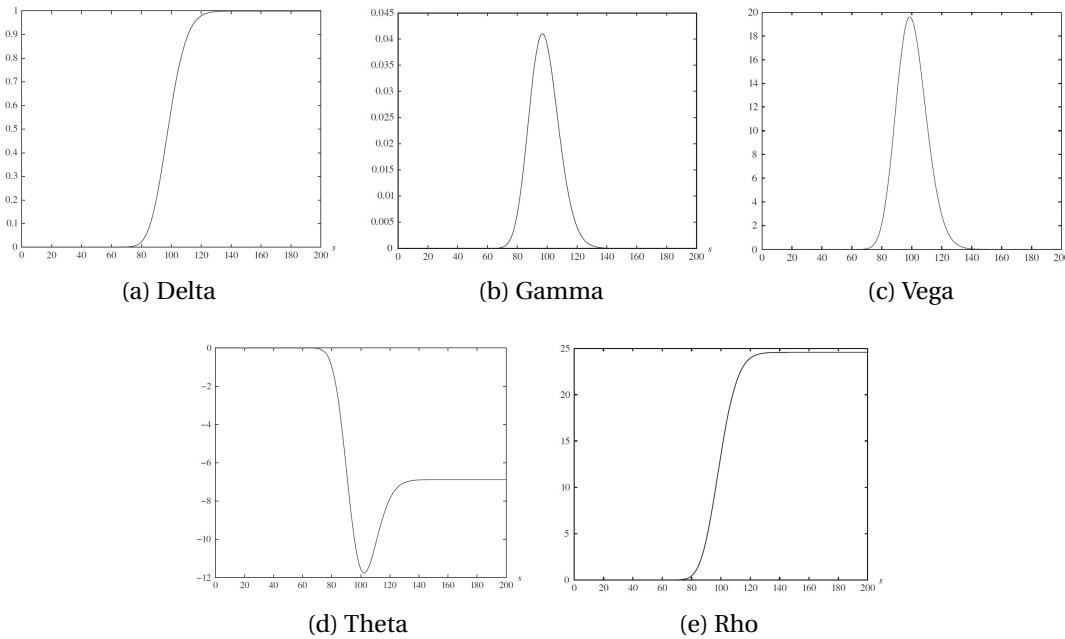


Figura 1.1: Greche per un'opzione call Europea con sottostante che evolve secondo il modello di Black&Scholes.

1.2 Limiti del modello

1.2.1 Dinamica dei rendimenti

Una delle ipotesi fondamentali del modello di Black&Scholes è che il sottostante evolva secondo un moto Browniano geometrico, e quindi che i *log returns* siano indipendenti e identicamente distribuiti secondo una normale:

$$\xi_i = \ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \sim \mathcal{N}(E[\xi_i], \sqrt{Var[\xi_i]}) \quad (1.20)$$

dove

$$E[\xi_i] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$

$$Var[\xi_i] = \sigma^2\Delta t.$$

A livello empirico, però, questa ipotesi viene confutata, come si evince dalla presenza di:

- *leptocurtosi*, anche nota come fenomeno delle *code grasse*: la probabilità che si verifichino eventi estremi è maggiore rispetto a quanto previsto dalla distribuzione normale

- *asimmetria*: in finanza si riscontra una maggiore frequenza di grandi perdite rispetto a grandi guadagni
- *effetto leva*: vi è una correlazione negativa tra il valore del sottostante e quello della volatilità
- *volatility clustering*: a periodi ad alta volatilità seguono periodi ad alta volatilità, a periodi a bassa volatilità seguono periodi a bassa volatilità.

1.2.2 Volatilità

Tra i parametri necessari per calcolare il prezzo di un'opzione tramite la formula di Black&Scholes l'unico a non essere direttamente osservabile sul mercato è la volatilità σ , che deve quindi essere stimata. Per farlo si usano due diversi approcci: *volatilità storica* e *volatilità implicita*.

Nel primo caso l'idea chiave è quella di utilizzare i dati storici dei prezzi dello stock in tempo discreto per stimare σ nel modo seguente:

$$\sigma^* = \frac{S_\xi}{\sqrt{\Delta t}} \quad (1.21)$$

dove

$$S_\xi^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2,$$
$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Nel secondo caso si vuole una stima che sia consistente con gli altri asset prezzati dal mercato e, quindi, una volatilità ben lungi dall'essere costante.

Definizione 1.2 (Volatilità implicita).

Sia $C^{mkt}(T, K)$ il prezzo di mercato di una call Europea con scadenza T e strike K e sia $C^{BS}(T, K, \sigma)$ data da (1.16). La volatilità implicita $\sigma_{impl}(T, K)$ è il valore che soddisfa:

$$C^{mkt}(T, K) = C^{BS}(T, K, \sigma_{impl}(T, K)). \quad (1.22)$$

La volatilità implicita è unica per ogni prezzo poiché $C^{BS}(T, K, \sigma)$ è una funzione strettamente monotona.

Con *superficie di volatilità implicita* si intende l'insieme di tutte le volatilità implicite quotate sul mercato.

1.2. Limiti del modello

Che la volatilità implicita non sia costante è un fatto ben documentato empiricamente. Prima del 1987 non c'erano *volatility smile* accentuati. Successivamente alla crisi, la configurazione tipica del *volatility smile* per opzioni su azioni è quella mostrata in Figura 1.2 (si veda [10]). Si tratta piuttosto di una «smorfia» (*skew*), in cui la volatilità implicita diminuisce al crescere di K (cioè per *put deep in the money* e per *call deep out of the money*).

La corrispondente distribuzione probabilistica è rappresentata dalla linea continua in Figura 1.3 (si veda [10]), nella quale si evince che la distribuzione implicita ha code più grasse rispetto alla distribuzione log-normale e che la coda sinistra è più spessa di quella destra.



Figura 1.2: Opzioni su azioni: *volatility smile*.

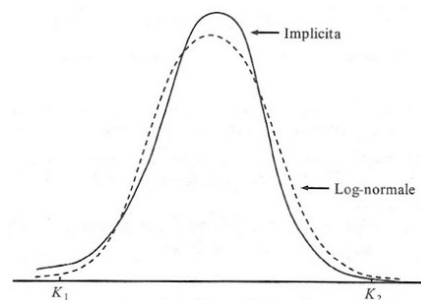


Figura 1.3: Opzioni su azioni: distribuzione implicita e log-normale.

2 Superamento del modello di Black&Scholes

Col fine di risolvere i limiti riscontrati nel modello di Black&Scholes, negli anni sono state proposte diverse soluzioni.

Una di queste prevede di mantenere l'ipotesi di continuità del prezzo del sottostante, ma di utilizzare un processo diverso dal moto Browniano geometrico. Quelli che utilizzano questo approccio vengono chiamati «modelli diffusivi» (*diffusion models*), di cui fanno parte i *modelli a volatilità locale* ed i *modelli a volatilità stocastica*.

Un'altra possibilità è quella di sovrapporre alla dinamica continua un processo a salti, dando vita ai «modelli diffusivi a salti» (*mixed jump-diffusion models*).

Infine si può pensare di rappresentare con i soli salti tutte le variazioni di prezzo. In questo caso si parla di «modelli a salti puri» (*pure jump models*).

In questa trattazione ci si concentrerà sui modelli a volatilità locale, in quanto essi risultano essere i più appropriati per prezzare le opzioni barriera. I prezzi delle opzioni esotiche predetti tramite i modelli a volatilità locale, infatti, sono molto vicini ai prezzi scambiati sul mercato. Considerazioni più approfondite verranno fornite nei capitoli successivi.

2.1 Modelli a Volatilità Locale

I *modelli a volatilità locale* hanno l'obiettivo di essere consistenti con gli *smile* di volatilità presenti sul mercato, garantendo la completezza del modello.

Essi furono introdotti da Dupire ([1], [2]) il quale ipotizzò la seguente dinamica:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t)S_t dW_t \quad (2.1)$$

dove q è il *dividend yield* e $\sigma_{LV}(t, S_t)$ è detta *volatilità locale* ed è una funzione deterministica del tempo e del sottostante.

Per poterla calcolare vi sono due diversi approcci:

- *Formula di Dupire*

Sia $C = C(T, K)$ il prezzo di un'opzione call Europea con scadenza T e strike K . Allora la funzione di volatilità locale soddisfa la seguente equazione:

$$\sigma_{LV}(T, K) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + qC + (r - q)K \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}. \quad (2.2)$$

- *Formula parametrica*

Si ipotizza la dipendenza da più parametri che andranno poi calibrati sulla superficie di mercato. Un esempio può essere trovato in [14], dove si ha:

$$\sigma_{LV}(T, K) = C_1(t) + \frac{C_2(t)}{S_t^{C_5(t)}} + C_3(t)S_t^{C_4(t)}. \quad (2.3)$$

La volatilità alla Dupire, in assenza di arbitraggio nei dati, è l'unica volatilità locale consistente con il mercato ed è esatta per costruzione. Bisogna però disporre di un metodo per interpolare ed estrapolare i dati di mercato, il quale può rischiare di introdurre arbitraggio nei dati. Se si lavora con dati privi di arbitraggio, quello di Dupire è l'approccio maggiormente utilizzato.

Per ottenere la volatilità locale tramite la (2.2) è necessario calcolare numericamente la derivata prima della superficie del prezzo rispetto a T e la derivata prima e seconda di quest'ultima rispetto a K . Questo calcolo può risultare instabile, dunque bisogna utilizzare delle funzioni di volatilità implicita di Black&Scholes sufficientemente lisce.

2.1.1 Modello Constant Elasticity of Variance

Un esempio di modello a volatilità locale non parametrica è il *Constant Elasticity of Variance* (CEV) [24]. La dinamica, rispetto alla misura risk-neutral, è definita da:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t^\beta dW_t \quad (2.4)$$

dove β è una costante positiva.

In questo modello, il prezzo dell'azione ha una volatilità pari a $\sigma S_t^{\beta-1}$:

- se $\beta = 1$, il processo sottostante segue un moto Browniano geometrico;
- se $\beta = 0$, il prezzo dello stock è distribuito normalmente;
- se $0 < \beta < 1$, la volatilità diminuisce con l'aumentare del prezzo dell'azione. Dunque la distribuzione probabilistica di S_T mostra una coda sinistra più spessa

ed una coda destra più sottile, in linea con quanto si osserva nel mercato di opzioni su azioni.

- se $\beta > 1$, la volatilità aumenta con il crescere del prezzo dell'azione. Ne segue che la distribuzione probabilistica di S_T è simile a quella che si osserva talvolta sul mercato delle opzioni sui *futures*, con una coda destra spessa ed una coda sinistra sottile. In questo caso si ha un *volatility smile* in cui le volatilità implicite crescono con il prezzo di esercizio.

Il modello CEV è particolarmente utile quando si tratta di valutare le opzioni esotiche su azioni. I parametri del modello possono essere scelti in modo da minimizzare la somma dei quadrati degli scarti tra i prezzi teorici ed i prezzi di mercato delle opzioni ordinarie.

2.1.2 Modello a volatilità non lineare

Si assuma che la funzione di volatilità sia non lineare in S , del tipo

$$\sigma_{LV}(S) = \left(\alpha + \beta \frac{S}{S_0} \right) e^{-\mu \frac{S}{S_0}} \quad (2.5)$$

con α , β e μ costanti positive. Allora l'equazione

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t)S_t dW_t \quad (2.6)$$

descrive la dinamica del prezzo del sottostante. Questo modello verrà considerato nei capitoli successivi.

2.1.3 Limiti e vantaggi dei modelli a Volatilità Locale

Pensare che l'unica fonte di incertezza sia data dall'evoluzione del sottostante è un'ipotesi troppo semplicistica per descrivere il comportamento del mercato. Una problematica molto nota [25], ad esempio, è quella riguardante la *volatilità implicita forward*, cioè quella da inserire nella formula di Black&Scholes per valutare delle opzioni il cui strike viene fissato in una data futura T_1 . La volatilità implicita forward ottenuta nei modelli a volatilità locale, infatti, risulta essere diversa rispetto a quella di mercato, poiché la concavità si appiattisce in modo irrealistico all'aumentare di T_1 . Inoltre questi modelli sono poco robusti al variare dei dati, evidenziando un grande movimento della superficie di volatilità contestualmente a piccoli spostamenti del valore dello spot.

Capitolo 2. Superamento del modello di Black&Scholes

A differenza di altri modelli, però, i modelli a volatilità locale hanno la peculiarità di rimanere vicini al modello di Black&Scholes, introducendo una maggiore flessibilità all'interno della volatilità.

I modelli a volatilità stocastica ed i modelli jump-diffusion, infatti, introducono nuove sorgenti di aleatorietà ma, poiché la volatilità stocastica ed i salti non possono essere scambiati sul mercato, essi perdono la *completezza*.

Nei modelli a volatilità locale, invece, l'unico comportamento stocastico introdotto nella volatilità deriva dal fatto che essa è funzione del prezzo dell'opzione, dunque la completezza viene conservata. Ciò è di fondamentale importanza in quanto garantisce l'unicità del prezzo. È questa la ragione per cui Dupire sviluppò tale modello a volatilità locale nel suo articolo originario [4].

I modelli a volatilità locale sono molto utilizzati per prezzare opzioni barriera, come verrà illustrato nel Paragrafo 3.2.

3 Opzioni Barriera

3.1 Opzioni Barriera con Modello di Black&Scholes

Le opzioni barriera (*barrier options*) sono opzioni il cui valore finale dipende dal fatto che il prezzo dell'attività sottostante raggiunga o meno un certo livello (*barriera*) in un qualunque istante temporale precedente alla scadenza del contratto.

Queste sono tra le opzioni esotiche più importanti nel mercato odierno e sono ampiamente utilizzate in quanto sono più economiche rispetto alle corrispondenti opzioni ordinarie, proprio perché l'opzione può scomparire o non apparire affatto.

Le opzioni barriera possono essere suddivise in due tipologie: «soggette a cancellazione» (*knock-out options*) e «in attesa di validazione» (*knock-in options*). Quando il prezzo del sottostante raggiunge un certo livello in un determinato arco temporale, le prime cessano di esistere, le seconde iniziano ad esistere. Le opzioni knock-out possono essere suddivise in opzioni *down-and-out* e opzioni *up-and-out*. Allo stesso modo, le opzioni knock-in possono essere opzioni *down-and-in* e opzioni *up-and-in*.

Si consideri il modello di Black&Scholes

$$\begin{aligned}dB_t &= rB_t dt \\dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\end{aligned}$$

con i parametri r , μ e σ fissati. Sia T la scadenza del contratto e sia \mathcal{Z} un contingent claim della forma $\mathcal{Z} = \Phi(S_T)$. Sia $F(t, s; \Phi)$ la funzione di prezzo di un'opzione Europea con istante iniziale t , prezzo spot iniziale s e payoff Φ . Ad essa ci si riferirà con C in caso di opzione call e con P in caso di opzione put.

Di seguito verranno riportati i payoff e le funzioni di prezzo delle opzioni barriera in base ai quattro differenti tipi. Per una trattazione matematica più approfondita si rimanda a [27].

3.1.1 Opzioni Knock-Out

Contratti Down-and-Out

Sia $L < S_0$ la barriera inferiore e sia \mathcal{Z}_{LO} un contratto secondo il quale, se il prezzo del sottostante rimane sopra la barriera L per tutta la durata, il payoff è equivalente a quello della corrispondente opzione Europea, se il prezzo del sottostante tocca la barriera in un qualsiasi istante precedente alla scadenza, il contratto cessa di esistere. Questo equivale a:

$$\mathcal{Z}_{LO} = \begin{cases} \Phi(S_T), & \text{se } S_t > L \forall t \in [0, T], \\ 0, & \text{se } S_t \leq L \text{ per qualche } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Definizione 3.1. Data una funzione Φ , sia Φ_L definita come

$$\Phi_L = \begin{cases} \Phi(x), & \text{se } x > L \\ 0, & \text{se } x \leq L. \end{cases} \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 (Pricing contratti down-and-out).

Dato un T -claim $\mathcal{Z} = \Phi(S_T)$, la funzione di prezzo F_{LO} del corrispondente contratto down-and-out \mathcal{Z}_{LO} è data, per $s > L$, da

$$F_{LO}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi_L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi_L\right) \quad (3.3)$$

dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Per la dimostrazione di tale teorema si faccia riferimento a [27].

Il problema di prezzare un'opzione barriera down-and-out, quindi, si traduce in quello di prezzare un'opzione Europea.

Contratti Up-and-Out

Sia $L > S_0$ la barriera superiore e sia \mathcal{Z}^{LO} un contratto secondo il quale, se il prezzo del sottostante rimane sotto la barriera L per tutta la durata, il payoff è equivalente a quello della corrispondente opzione Europea, se il prezzo del sottostante tocca la barriera in un qualsiasi istante precedente alla scadenza, il contratto cessa di esistere. Questo equivale a:

$$\mathcal{Z}^{LO} = \begin{cases} \Phi(S_T), & \text{se } S_t < L \forall t \in [0, T], \\ 0, & \text{se } S_t \geq L \text{ per qualche } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1. Opzioni Barriera con Modello di Black&Scholes

Definizione 3.2. Data una funzione Φ , sia Φ_L definita come

$$\Phi^L = \begin{cases} \Phi(x), & \text{se } x < L \\ 0, & \text{se } x \geq L. \end{cases} \quad (3.5)$$

Teorema 3.2 (Pricing contratti up-and-out).

Dato un T -claim $\mathcal{Z} = \Phi(S_T)$, la funzione di prezzo F^{LO} del corrispondente contratto up-and-out \mathcal{Z}^{LO} è data, per $s < L$, da

$$F^{LO}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi^L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right) \quad (3.6)$$

dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

La dimostrazione del suddetto teorema si può trovare in [27].

Il problema di prezzare un'opzione barriera up-and-out, quindi, si traduce in quello di prezzare un'opzione Europea.

3.1.2 Opzioni Knock-In

Contratti Down-and-In

Sia $L < S_0$ la barriera inferiore e sia \mathcal{Z}_{LI} un contratto secondo il quale, se il prezzo del sottostante rimane sopra la barriera L per tutta la durata, il contratto non ha valenza e niente viene pagato al proprietario dell'opzione, se il prezzo del sottostante tocca la barriera in un qualsiasi istante precedente alla scadenza, il contratto inizia ad esistere ed il payoff è equivalente a quello della corrispondente opzione Europea. Questo equivale a:

$$\mathcal{Z}_{LI} = \begin{cases} 0, & \text{se } S_t > L \forall t \in [0, T], \\ \Phi(S_T), & \text{se } S_t \leq L \text{ per qualche } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Teorema 3.3 (Pricing contratti down-and-in).

Dato un T -claim $\mathcal{Z} = \Phi(S_T)$, la funzione di prezzo F_{LI} del corrispondente contratto down-and-in \mathcal{Z}_{LI} è data, per $s > L$, da

$$F_{LI}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi^L) + \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right) \quad (3.8)$$

dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Questo risultato può anche essere spiegato dal seguente:

Lemma 3.4 (In-out Parity).

$$F(t, s; \Phi) = F_{LI}(t, s; \Phi) + F_{LO}(t, s; \Phi). \quad (3.9)$$

Per le dimostrazioni di tale teorema e lemma si faccia riferimento a [27].

La somma dei payoff di un'opzione barriera down-and-out e di una down-and-in equivale al payoff della corrispondente opzione Europea. Dunque, noto il prezzo di un'opzione barriera down-and-out, si conosce di default quello della corrispondente opzione down-and-in e viceversa.

Contratti Up-and-In

Sia $L > S_0$ la barriera superiore e sia \mathcal{Z}^{LI} un contratto secondo il quale, se il prezzo del sottostante rimane sotto la barriera L per tutta la durata, il contratto non ha valenza e niente viene pagato al proprietario dell'opzione, se il prezzo del sottostante tocca la barriera in un qualsiasi istante precedente alla scadenza, il contratto inizia ad esistere ed il payoff è equivalente a quello della corrispondente opzione Europea. Questo equivale a:

$$\mathcal{Z}^{LI} = \begin{cases} 0, & \text{se } S_t < L \forall t \in [0, T], \\ \Phi(S_T), & \text{se } S_t \geq L \text{ per qualche } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Teorema 3.5 (Pricing contratti up-and-in).

Dato un T-claim $\mathcal{Z} = \Phi(S_T)$, la funzione di prezzo F^{LI} del corrispondente contratto up-and-in \mathcal{Z}^{LI} è data, per $s < L$, da

$$F^{LI}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi_L) + \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right) \quad (3.11)$$

dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Infatti, corrispondentemente al Lemma 3.4, vale che

$$F(t, s; \Phi) = F^{LI}(t, s; \Phi) + F^{LO}(t, s; \Phi). \quad (3.12)$$

Per la dimostrazione del precedente teorema si faccia riferimento a [27].

3.1.3 Considerazioni

Un aspetto importante delle opzioni barriera è la frequenza con cui si osserva il prezzo del sottostante col fine di verificare se la barriera sia stata raggiunta o meno.

3.2. Opzioni Barriera con Modelli a Volatilità Locale

Le formule appena viste si basano sull'ipotesi di monitoraggio continuo. Spesso, però, le condizioni contrattuali prevedono un monitoraggio giornaliero. In tal caso, come spiegato da Broadie, Glasserman e Kou [15], è possibile modificare le formule moltiplicando il livello di barriera per: $e^{0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$ nel caso di opzioni up-and-in e up-and-out; per $e^{-0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$ nel caso di opzioni down-and-in e down-and-out. $\frac{T}{m}$ è l'intervallo di tempo che intercorre tra osservazioni successive.

A differenza delle opzioni Europee, le opzioni barriera possono avere un Vega negativo. Si consideri, ad esempio, una call up-and-out quando il prezzo del sottostante è vicino alla barriera. Se la volatilità aumenta, cresce la probabilità di raggiungere la barriera, con conseguente riduzione del valore dell'opzione e con la possibilità di un Delta discontinuo.

Un aspetto negativo delle opzioni barriera è che il prezzo del sottostante potrebbe improvvisamente attraversare la barriera e poi rientrare in breve tempo. Questo porterebbe all'attivazione (*knock-in*) o alla cancellazione (*knock-out*) dell'opzione. Un'alternativa per risolvere questo inconveniente è rappresentata dalle *opzioni parigine* che si attivano o cancellano solamente se il prezzo del sottostante rimane al di sopra o al di sotto della barriera per un determinato periodo di tempo.

Le formule introdotte nei precedenti paragrafi sono poco utilizzate nella pratica in quanto, come discusso nel Capitolo 1, il modello di Black&Scholes non è in grado di replicare perfettamente i dati reali di mercato. Prezzare un'opzione esotica quando è presente uno *skew* di volatilità non è banale, così come non lo è ottenere dei valori realistici delle greche col fine di avere una copertura accurata.

Negli anni sono stati sviluppati diversi modelli per essere consistenti con lo *skew* di volatilità e cercare di calcolare prezzi delle opzioni barriera che non fossero troppo distanti da quelli osservati nel mercato. Finora il modello maggiormente utilizzato è forse quello a volatilità locale proposto da Dupire ([1], [2]) nel 1993, descritto nel Capitolo 2. Si è anche tentato di utilizzare modelli a volatilità stocastica e modelli jump-diffusion, anche se essi risultano spesso difficili da calibrare [28].

3.2 Opzioni Barriera con Modelli a Volatilità Locale

Come già discusso nel Paragrafo 2.1, la funzione di volatilità locale introdotta da Dupire, e descritta dall'equazione (2.2), risulta difficile da calcolare. Si può pensare allora di riformularla in termini della corrispondente volatilità implicita di Black&Scholes, com'è spiegato in [7], ottenendo l'equazione:

$$\sigma_{LV}(T, K) = \sqrt{\frac{\sigma^2 + 2\sigma T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} + rK \frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)}{\left(1 - \frac{Kx}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)^2 + K\sigma T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial K} - \frac{1}{4} K\sigma T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)^2 + K \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2} \right)} \quad (3.13)$$

dove $x = x(T, K) = \log\left(\frac{K}{S_0}\right)$ rappresenta la log-moneyness.

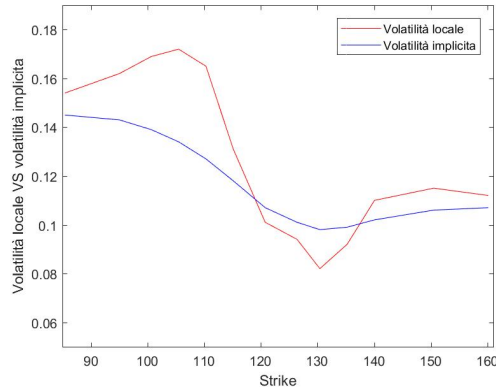


Figura 3.1: Confronto tra volatilità locale e volatilità implicita ad un anno.

Nella Figura 3.1 è mostrato l'andamento della volatilità locale, calcolata utilizzando la formula (3.13), e della corrispondente volatilità implicita ad un anno. Sono stati utilizzati i dati di mercato del 2003 del tasso di cambio JPY/EUR.

Dal grafico si evince che la volatilità implicita ha uno *skew* meno accentuato rispetto alla volatilità locale. Inoltre, per valori degli strike vicini al prezzo spot ($S_0 = 126.39$ JPY per EUR) c'è sempre un reflection point. Maggiore è la deviazione della volatilità implicita dalla volatilità locale, maggiore è il cambiamento nei prezzi delle opzioni barriera. Questo cambiamento non è facilmente prevedibile in quanto dipende dal tipo di opzione, dal livello della barriera e dalla skewness della volatilità.

Una volta calcolato il valore della volatilità locale tramite la (3.13), essa può essere utilizzata nell'equazione di Black&Scholes, con opportuno payoff, per calcolare il prezzo delle opzioni barriera.

Come mostrato in [28], quando si prezzano opzioni barriera, se la volatilità è costante ci può essere mis-pricing, con errori rispetto ai prezzi di mercato anche molto grandi. Questo è vero soprattutto se il livello di barriera è vicino alle zone dov'è maggiore la distanza tra volatilità locale e volatilità implicita.

Grazie alle superfici di volatilità locale è possibile identificare un eventuale under/over pricing delle opzioni barriera. Una linea guida, spiegata più nel dettaglio in [16], è la seguente: quando la volatilità locale è alta in una regione, lì l'effetto della barriera sul prezzo dell'opzione sarà più pronunciato, mentre in regioni a bassa volatilità locale l'influenza della barriera sul prezzo è ridotto. In altre parole, per trovare un'opzione che sia overpriced bisogna identificare opzioni le cui regioni ad alta volatilità locale coincidono con le strutture della barriera che ridurranno il prezzo dell'opzione,

3.2. Opzioni Barriera con Modelli a Volatilità Locale

invece per trovare opzioni che siano underpriced si deve guardare ad opzioni in cui c'è coincidenza tra regioni a bassa volatilità locale e struttura della barriera.

Un esempio di underpricing è mostrato in Figura 3.2, in cui è prezzata un'opzione call barriera doppia knock-out, dove la barriera superiore è 135 JPG/EUR e quella inferiore è 60 JPG/EUR, lo strike è 123,59 JPG/EUR. Si noti come, quando la regione a bassa volatilità locale coincide con una delle barriere, vi è un grande impatto sul prezzo.

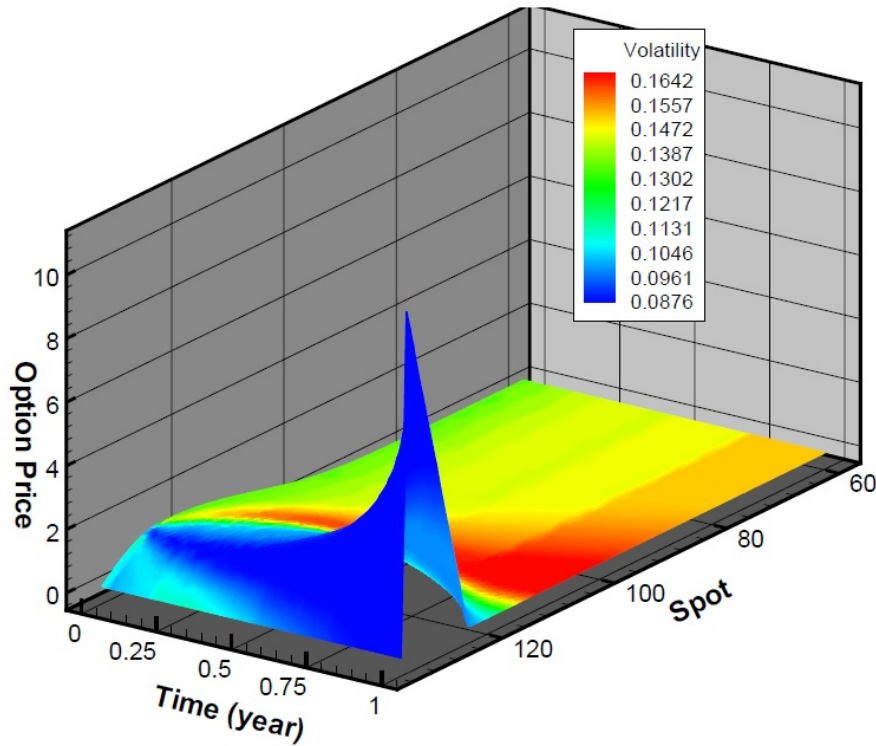


Figura 3.2: Prezzo call double knock-out.

Metodi Numerici **Parte II**

4 Metodi Numerici per il Pricing di Opzioni Barriera

Le opzioni barriera sono divenute molto popolari sia per la speculazione che per la gestione del rischio in quanto sono più economiche delle corrispondenti opzioni plain vanilla.

Come visto nel capitolo precedente, le formule analitiche per il pricing di opzioni a barriera singola sono derivate assumendo un monitoraggio continuo della barriera e un sottostante modellizzato secondo il modello di Black&Scholes. Però, poiché nel mercato reale il monitoraggio avviene in modo discreto, non esiste una soluzione in forma chiusa. Negli anni sono stati proposti diversi metodi numerici per prezzare opzioni barriera, a seconda che si calcoli il valore atteso del payoff scontato o che si risolva l'equazione differenziale parziale.

Tra questi metodi vi sono: gli alberi binomiali e trinomiali; le differenze finite; il Monte Carlo.

Seguirà ora una breve trattazione dei primi due, mentre nel capitolo successivo verrà descritto in modo più dettagliato il Monte Carlo, in particolare l'utilizzo della tecnica del Brownian Bridge. Quest'ultimo, infatti, verrà utilizzato come benchmark con cui confrontare i prezzi calcolati attraverso una formula approssimata, che verrà introdotta nel Capitolo 6, utilizzata per prezzare opzioni a barriera singola del tipo down-and-in secondo i modelli di Black&Scholes e volatilità locale. In particolare verrà mostrato come ogni opzione di questo tipo possa essere prezzata grazie ad una combinazione di tre opzioni Europee standard, due delle quali con funzione di volatilità simmetrizzata. Quest'ultima sarà approssimata da una successione di funzioni lisce che convergono all'originale. Attraverso la tecnica del chaos expansion verrà quindi sviluppata una formula approssimata per prezzare le opzioni Europee così caratterizzate. Infine si applicherà l'acceleratore di convergenza di Aitken in modo da ottenere un prezzo approssimato per l'opzione down-and-in.

4.1 Metodo degli Alberi Binomiali e Trinomiali

4.1.1 Metodo degli Alberi Binomiali

Si consideri il periodo $[0, T]$, suddiviso in sottointervalli di ampiezza Δt , ed un asset (uno stock), su cui è scritta un'opzione con prezzo corrente V e scadenza del contratto pari a T . Passando dal tempo $t = 0$ a $t = 1$ il prezzo dello stock evolve in modo stocastico, cioè in $t = 0$ è pari a S_0 , nel periodo successivo può muoversi: in alto, portandosi ad un nuovo livello $S_0 u$, con $u > 1$; in basso, raggiungendo $S_0 d$, dove $d < 1$. Nel primo caso, che avviene con probabilità p , il prezzo dell'opzione sarà V_u , nel secondo caso, con probabilità $1 - p$, il prezzo sarà V_d .

Supponiamo che esista un portafoglio che consiste in una posizione lunga in Δ share ed una corta nell'opzione. Allora questo può essere reso privo di rischio scegliendo $\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_0 u - S_0 d}$.

Sia r il tasso di interesse risk-free, allora $V = e^{-rT}(pV_u + (1 - p)V_d)$ rappresenta il valore dell'opzione come il valore atteso del payoff scontato al tasso privo di rischio. In generale si può calcolare il valore dell'opzione nell'istante t come

$$V_t = e^{-r\Delta t}(pV_{t+\Delta t}^u + (1 - p)V_{t+\Delta t}^d) \quad (4.1)$$

dove $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Nei nodi finali ($t = T$) viene utilizzata l'equazione (1.15) per il calcolo del payoff. Poi si impiega l'equazione (4.1) per muoversi indietro nel tempo lungo l'albero.

Si assuma che ci siano due time step, allora l'algoritmo per il pricing di un'opzione barriera, per esempio call down-and-out, è il seguente:

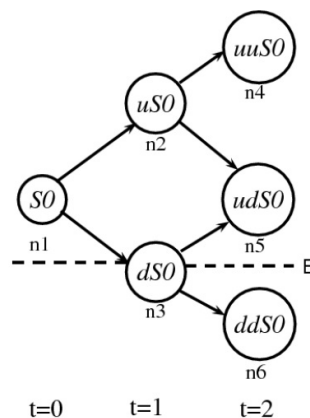


Figura 4.1: Albero binomiale pricing call down-and-out.

4.1. Metodo degli Alberi Binomiali e Trinomiali

1. Calcolare il prezzo dello stock ad ogni nodo:
in $t = 0$

$$S_{n1} = S_0,$$

in $t = 1$

$$S_{n2} = uS_0,$$

$$S_{n3} = dS_0,$$

in $t = 2$

$$S_{n4} = u^2 S_0,$$

$$S_{n5} = udS_0,$$

$$S_{n6} = d^2 S_0.$$

2. Considerare nullo il valore dell'opzione quando il sottostante si trova sotto la barriera:

$$C_{n3} = 0,$$

$$C_{n6} = 0.$$

3. Applicare la formula (1.15) ad ogni nodo terminale ($n4, n5$) per calcolare il prezzo dell'opzione:

$$C_{n4} = (S_{n4} - K)^+,$$

$$C_{n5} = (S_{n5} - K)^+.$$

4. Utilizzare la (4.1) per calcolare il valore dell'opzione nei nodi rimanenti ($n1, n2$)

$$C_{n2} = e^{-r\Delta T} (pC_{n4} + (1-p)C_{n5}),$$

$$C_{n1} = e^{-r\Delta T} (pC_{n2} + (1-p)C_{n3}).$$

Prezzare un'opzione barriera tramite un albero binomiale presenta diversi errori:

- l'albero permette al prezzo dello stock di assumere solo i valori determinati dai nodi;
- se il prezzo d'esercizio o il valore della barriera non coincide con uno dei prezzi dello stock, bisogna spostarlo affinché sia il medesimo dello stock price più vicino. In questo modo l'opzione valutata ha dei termini contrattuali differenti in confronto a quella originale;
- il prezzo dell'opzione rispetto al numero di time step N ha una convergenza non monotona. Infatti il secondo tipo di errore svanisce molto più lentamente rispetto al primo.

Nel caso di modelli a volatilità locale non si può più dire che $d = u^{-1}$, poiché il valore della volatilità cambia ad ogni step. Bisogna quindi fare in modo che i nodi dell'albero siano ricombinati, imponendo cioè che $S_i d_i = S_{i+1} u_i \quad \forall i$. Come si

riscontra in [11], però, l'impiego di un elevato numero di periodi col fine di migliorare l'accuratezza dei risultati rende il modello instabile, portando talvolta ad avere valori di u e d che oscillano. Un'idea per risolvere questa problematica potrebbe essere quella di ricombinare i nodi non dall'inizio dell'albero ma a partire circa dalla metà.

4.1.2 Metodo degli Alberi Trinomiali

Gli alberi trinomiali offrono una maggiore flessibilità rispetto a quelli binomiali in quanto il prezzo dell'asset può muoversi in tre diverse direzioni, quindi il numero di time step può essere ridotto, mantenendo però la stessa accuratezza.

I parametri sono:

$$\begin{aligned}u &= e^{\sigma \sqrt{3\Delta t}} \\d &= e^{-\sigma \sqrt{3\Delta t}} \\p_u &= \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}} \\p_d &= -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}} \\p_m &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

L'algoritmo di pricing è il medesimo di quello binomiale, con la differenza che l'equazione (4.1) diventa

$$V_t = e^{-r\Delta t} (p_u V_{t+\Delta t}^u + p_m V_{t+\Delta t}^m + p_d V_{t+\Delta t}^d). \quad (4.2)$$

Anche in questo caso la convergenza non è monotona.

4.1.3 Migliorie per i due Metodi

Lavorando con alberi binomiali e trinomiali, per ottenere dei risultati ragionevolmente accurati, c'è bisogno di utilizzare un numero elevato di time step, avendo comunque una convergenza molto lenta. La barriera, inoltre, potrebbe differire da quella reale.

Una soluzione a questo problema è l'impiego dell'**interpolazione**: si definisce come *barriera interna* quella formata dai nodi appena sotto la barriera reale, come *barriera esterna* quella appena sopra; si calcolano i prezzi delle due opzioni assumendo che le rispettive barriere siano quelle effettive; si calcola infine il prezzo dell'opzione reale interpolando i valori ottenuti con le barriere fittizie.

Un'altra possibile tecnica, la quale è applicata agli alberi trinomiali, è la **stretch technique**. In questo caso i parametri sono η e λ , dove

$$\eta = \frac{\ln(S_0/B)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Se $\eta > 2$ allora $\lambda = \eta/\eta_0$, dove η_0 è il più grande intero minore di η , altrimenti $\lambda = \eta$. λ è lo stretch parameter, cioè indica lo spazio tra i movimenti del sottostante passando da un periodo all'altro.

Inoltre

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \\ p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \\ p_m &= 1 - \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Come spiegato in [3], confrontando le due tecniche si evince che la migliore è quella stretch, poiché fornisce risultati più accurati e converge al valore esatto, anche se non monotonamente. La tecnica dell'interpolazione invece, seppur avendo risultati meno buoni, presenta una convergenza monotona.

4.2 Metodo delle Differenze Finite

Il metodo alle differenze finite permette di riscrivere le equazioni differenziali, e quindi anche quella di Black&Scholes, in modo approssimato, come un insieme di equazioni algebriche che possono essere risolte numericamente usando una tecnica appropriata.

Il valore di un'opzione barriera up-and-out $V(t, S_t)$, secondo modelli a volatilità locale, deve soddisfare

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma_{LV}^2(t, S_t)S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) - rV(t, S_t) = 0 \quad (4.3)$$

con condizioni al bordo appropriate.

Per risolvere questa equazione è necessario discretizzarla, introducendo una griglia per il tempo ed una per il prezzo del sottostante. Si consideri un'opzione call up-and-out con scadenza T , si divida $[t, T]$ in intervalli equispaziati tali che $t = T - j\Delta t$ con $j = 0, \dots, N$. Sia $S = i\Delta S$ con $\Delta S = \frac{U}{M}$ (dove U è il valore della barriera superiore) e $i = 0, \dots, M$. La notazione che verrà utilizzata è $V_i^j = V(T - j\Delta t, i\Delta S)$. Si noti che si lavora indietro nel tempo, quindi ad un aumento di j corrisponde una diminuzione

Capitolo 4. Metodi Numerici per il Pricing di Opzioni Barriera

del tempo per arrivare alla scadenza dell'opzione.

Per approssimare questa EDP viene utilizzato il metodo di Crank-Nicolson, che è la media del metodo implicito e di quello esplicito, risultando quindi più accurato e soprattutto incondizionatamente stabile.

Si definiscano, per semplicità di lettura,

$$\begin{aligned} a_i^j &= \frac{1}{2} i^2 \Delta S^2 \sigma_{LV}^2 (T - j\Delta t, i\Delta S) \\ b_i^j &= r i \Delta S \\ c_i^j &= -r. \end{aligned}$$

L'equazione (4.3) può essere quindi approssimata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & \frac{V_i^j - V_i^{j+1}}{\Delta t} + \frac{a_i^{j+1}}{2} \left(\frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{\Delta S^2} \right) + \frac{a_i^j}{2} \left(\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{\Delta S^2} \right) \\ & + \frac{b_i^{j+1}}{2} \left(\frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{2\Delta S} \right) + \frac{b_i^j}{2} \left(\frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\Delta S} \right) \\ & + \frac{1}{2} c_i^{j+1} V_i^{j+1} + \frac{1}{2} c_i^j V_i^j = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Separando i termini in j da quelli in $j + 1$ si ottiene

$$-A_i^{j+1} V_{i-1}^{j+1} + (1 - B_i^{j+1}) V_i^{j+1} - C_i^{j+1} V_{i+1}^{j+1} = A_i^j V_{i-1}^j + (1 + B_i^j) V_i^j + C_i^j V_{i+1}^j \quad (4.5)$$

dove i coefficienti sono dati da

$$\begin{aligned} A_i^j &= \frac{1}{4} \Delta t (i^2 \sigma_{LV}^2 (T - j\Delta t, i\Delta S) - ir) \\ B_i^j &= -\frac{1}{2} \Delta t (i^2 \sigma_{LV}^2 (T - j\Delta t, i\Delta S) + r) \\ C_i^j &= \frac{1}{4} \Delta t (i^2 \sigma_{LV}^2 (T - j\Delta t, i\Delta S) + ir). \end{aligned}$$

Si hanno così $M - 1$ equazioni in $M + 1$ incognite. Le due equazioni mancanti vengono fornite dalle condizioni al bordo, la cui rappresentazione alle differenze finite è data, per esempio, da $V_0^j = 0$ e $V_M^j = 0$ nel caso di una call up-and-out, in cui si è costruita la griglia in modo che il livello superiore corrisponda a quello di barriera ($\Delta S = \frac{U}{M}$). La funzione di payoff, inoltre, è data da $V_i^0 = (i\Delta S - K)^+$ nel caso in cui la barriera non venga toccata.

Dunque una volta settata la griglia, le condizioni al bordo ed i coefficienti, si risolve il sistema lineare tramite una decomposizione LU e, se il prezzo dell'asset S ottenuto non corrisponde ad uno dei valori della griglia, si usa l'interpolazione lineare.

4.2. Metodo delle Differenze Finite

Il metodo delle differenze finite di Crank-Nicolson è incondizionatamente stabile, fornendo risultati per ogni $\frac{\Delta t}{\Delta S^2} > 0$ con un'accuratezza fino a $O(\Delta t^2, \Delta S^2)$.

5 Brownian Bridge Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo è uno dei metodi più potenti e facilmente implementabili per il calcolo dei valori delle opzioni, permettendo di ottenere un prezzo anche laddove non esistano formule analitiche. Ciò però comporta un elevato costo computazionale.

Una tecnica particolarmente utile nel caso di opzioni path-dependent è quella del Brownian Bridge, nella quale si tiene conto della probabilità che il sottostante raggiunga il livello di barriera in istanti che non vengono monitorati.

Nel paragrafi che seguiranno si parlerà del Brownian Bridge Monte Carlo nell'ambito delle opzioni barriera secondo il modello di Black&Scholes (volatilità costante) e modelli a volatilità locale. Per tale descrizione si è scelto di seguire Broadie, Glasserman e Kou [15].

5.1 Generazione delle simulazioni

Si assuma di essere sotto le ipotesi di Black&Scholes e che, quindi, valga la (1.2). Applicando il lemma di Itô a $\ln(S_t)$ si ha:

$$d\ln(S_t) = \frac{d\ln(S_t)}{dt} dt + \frac{d\ln(S_t)}{dS_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2\ln(S_t)}{dS_t^2} dS_t^2$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{d\ln(S_t)}{dt} &= 0, \\ \frac{d\ln(S_t)}{dS_t} &= \frac{1}{S_t}, \\ \frac{d^2\ln(S_t)}{dS_t^2} &= -\frac{1}{S_t^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo i termini nell'equazione precedente si ottiene

$$d\ln(S_t) = 0 + \frac{1}{S_t}(rS_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{(-1)}{S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt$$

che, semplificando, diventa

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t. \quad (5.1)$$

Integrando ambo i membri da 0 a t e facendone l'esponenziale si giunge all'equazione che descrive l'andamento del sottostante:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \quad (5.2)$$

5.2 Discretizzazione nel Pricing

Sia B il livello di barriera tale che $S_0 > B$ per opzioni del tipo *down*, mentre $S_0 < B$ nel caso di opzioni *up*. Per queste ultime il prezzo dell'asset raggiunge la barriera per la prima volta in

$$\tau_B = \inf\{t > 0 : S_t > B\}. \quad (5.3)$$

Il prezzo di una call knock-in con scadenza T e strike K è dato da

$$C_{in}(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ 1\{\tau_B \leq T\}] \quad (5.4)$$

dove $1\{\tau_B \leq T\}$ è la funzione indicatrice.

È possibile prezzare le opzioni tramite il metodo Monte Carlo simulando S_T e $1\{\tau_B \leq T\}$. Infatti sia $\hat{\tau}_B = \inf\{i : S_i > B\}$ con $i = 1, \dots, m$, allora $(S_T, 1\{\tau_B \leq T\})$ può essere approssimato da $(S_m, 1\{\hat{\tau}_B \leq m\})$, dove $\Delta t = T/m$ è l'ampiezza di ognuno degli intervalli temporali.

Quando si considera $1\{\tau_B \leq T\}$, può accadere che la traiettoria simulata per S_T attraversi la barriera in qualche istante di tempo t tra due punti della griglia $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$ senza che sia mai oltre la barriera in uno dei tempi $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, m\Delta t$. Questo significa che un'opzione knock-in, per esempio, non verrebbe mai attivata, avendo così un payoff nullo ed introducendo quindi un errore nella stima.

Nei due paragrafi successivi verranno presentati due metodi per cercare di ridurre tale errore di discretizzazione.

5.2.1 Metodo probabilistico

Questo metodo permette di stimare la probabilità p_i che la funzione indicatrice $1_{\{\tau_B \leq T\}}$ assuma il valore 1 nell'intervallo di tempo $[i\Delta t, (i+1)\Delta t) = [t_i, t_{i+1})$, dove $i = 0, \dots, m-1$, cioè che il prezzo S_T attraversi la barriera durante quel periodo.

Si consideri un cammino aleatorio per il prezzo del sottostante S , che parte da un livello iniziale S_i in t_i per raggiungere un livello finale S_{i+1} in t_{i+1} , dove $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Si sta cercando la probabilità condizionata che S tocchi la barriera in $[t_i, t_{i+1})$ dati i suoi valori iniziale S_i e finale S_{i+1} rispettivamente. Questo è equivalente a calcolare la probabilità che il processo $X_t = \ln S_t$ tocchi la barriera B in $[t_i, t_{i+1})$ dati $X_i = \ln S_i$ e $X_{i+1} = \ln S_{i+1}$. Considerando un Brownian Bridge da X_i a X_{i+1} su $[t_i, t_{i+1})$, è possibile calcolare la probabilità che la barriera venga attraversata, derivando la probabilità che il massimo o il minimo del Brownian bridge sia sopra o sotto la barriera, a seconda che l'opzione sia del tipo up o down.

Si consideri il caso $B > S_i$, equivalentemente $\ln B = b > X_i$. Da (5.1) è noto che, se σ è costante (modello di Black&Scholes),

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t \quad (5.5)$$

dove $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

Per generare le traiettorie dello stock l'equazione (5.2) viene discretizzata:

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t} \quad (5.6)$$

dove $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Nel caso di modelli a volatilità locale, in cui la σ è funzione del sottostante, è possibile utilizzare la discretizzazione con lo schema di Eulero, considerando la volatilità costante nei tratti $[t_i, t_{i+1})$, cioè

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_i\sqrt{\Delta t}Z_t}, \quad (5.7)$$

dove $\sigma_i = \sigma(S_i)$.

Grazie al principio di riflessione dei moti Browniani si sa che la probabilità che X , partendo da (t_i, X_i) , attraversi la barriera in qualche tempo $t_i < \tau_b < t_{i+1}$ e finisca in (t_{i+1}, X_{i+1}) è equivalente a quella di fare la stessa cosa tra (t_i, X_i) e (t_{i+1}, X'_{i+1}) , come si evince dalla Figura 5.1.

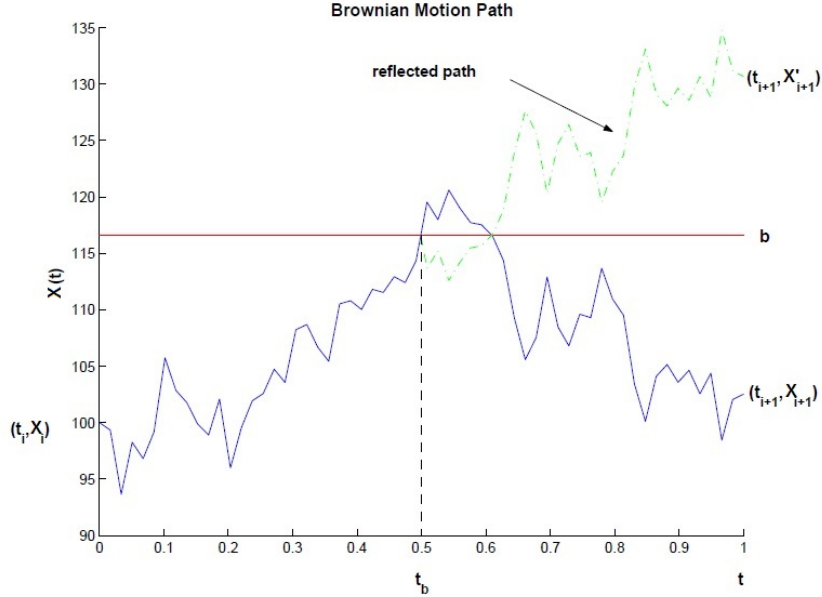


Figura 5.1: Principio di riflessione moto Browniano.

La probabilità che un cammino di X inizi in X_i al tempo t_i e finisca in X_{i+1} al tempo t_{i+1} è data dalla funzione di densità di probabilità di transizione

$$p\{X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X_{i+1}\} = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left[-\frac{(X_{i+1} - X_i - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})\Delta t)^2}{2\sigma_i^2\Delta t}\right]. \quad (5.8)$$

Inoltre, grazie al principio di riflessione,

$$\begin{aligned} p\{t_i < \tau_b < t_{i+1}, X_i, X_{i+1}\} &= \\ p\{t_i < \tau_b < t_{i+1}\} p\{X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X_{i+1} \mid t_i < \tau_b < t_{i+1}\} &= \\ p\{t_i < \tau_b < t_{i+1}\} p\{X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X'_{i+1} \mid t_i < \tau_b < t_{i+1}\} &= \\ p\{X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X'_{i+1}, t_i < \tau_b < t_{i+1}\}. & \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si può dimostrare che

$$\begin{aligned} p\{t_i < \tau_b < t_{i+1}, X_i, X_{i+1}\} &= \\ e^{\frac{2(r - \frac{\sigma_i^2}{2})(b - X_i)}{\sigma_i^2}} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{\Delta t}} \mathcal{N}\left(-\frac{2b - X_{i+1} - X_i + (r - \frac{\sigma_i^2}{2})\Delta t}{\sigma_i \sqrt{\Delta t}}\right). & \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.2. Discretizzazione nel Pricing

Per una derivazione dettagliata si fa riferimento a [21].

Dunque, la probabilità che il cammino attraversi la barriera b in un qualche istante di tempo $t_i < \tau_b < t_{i+1}$, dato il valore iniziale e finale di X , è:

$$\begin{aligned} P\{t_i < \tau_b < t_{i+1} \mid X_i, X_{i+1}\} &= \frac{p\{t_i < \tau_b < t_{i+1}, X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X_{i+1}\}}{p\{X(t_i) = X_i, X(t_{i+1}) = X_{i+1}\}} \\ &= \exp\left[-\frac{2(b - X_{i+1})(b - X_i)}{\sigma_i^2 \Delta t}\right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Riscrivendo la precedente equazione in termini del prezzo del sottostante S , se $S_i < B$, si ottiene

$$P\{t_i < \tau_B < t_{i+1} \mid S_i, S_{i+1}\} = \exp\left[-\frac{2(\ln B - \ln S_i)(\ln B - \ln S_{i+1})}{\sigma_i^2 \Delta t}\right], \quad (5.12)$$

mentre se $S_i > B$ si ha

$$P\{t_i < \tau_B < t_{i+1} \mid S_i, S_{i+1}\} = \exp\left[-\frac{2(\ln S_i - \ln B)(\ln S_{i+1} - \ln B)}{\sigma_i^2 \Delta t}\right]. \quad (5.13)$$

Queste probabilità furono derivate la prima volta da Baldi in [20] e furono estese da Baldi, Carmellino e Iovino in [9] per i casi di barriere non costanti ma dipendenti dal tempo.

Ora, è possibile utilizzare la (5.12) per calcolare la probabilità che la traiettoria del prezzo dell'asset attraversi la barriera B in un qualche tempo $\tau_B \in [0, T]$, cioè la complementare della probabilità che la barriera non venga mai raggiunta in $[0, T]$. Quest'ultima può essere calcolata come il prodotto delle probabilità $\hat{p}_i = 1 - p_i$, per $i = 0, \dots, m-1$, che S non tocchi la barriera in $[t_i, t_{i+1})$. p_i è nota ed è data da (5.12).

In conclusione si ottiene

$$\begin{aligned} P\{\tau_B \leq T \mid S(T) = S_m\} &= 1 - P\{\tau_B > T \mid S(T) = S_m\} \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{m-1} \hat{p}_i \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{m-1} (1 - p_i) \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\ln B - \ln S_i)(\ln B - \ln S_{i+1})}{\sigma_i^2 \Delta t}\right]\right)^+. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si torni ora all'obiettivo iniziale, cioè quello di prezzare un'opzione barriera, per

esempio una call knock-in. Usando le equazioni appena calcolate si ricava

$$\begin{aligned}
 C_{in}(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_m - K)^+ \prod_{i=0}^{m-1} 1_{\{t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1}\}} \mid S_0, S_1, \dots, S_m \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} (S_m - K)^+ \prod_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [1_{\{t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1}\}} \mid S_i, S_{i+1}] \\
 &= e^{-r(T-t)} (S_m - K)^+ P\{\tau_B \leq T \mid S(T) = S_m\}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Riassumendo, utilizzando il principio di riflessione dei moti Browniani, è possibile calcolare esplicitamente la probabilità che il prezzo del sottostante S attraversi la barriera B in un intervallo di tempo $[t_i, t_{i+1})$ dati i valori iniziale e finale di S . Questo metodo riduce l'errore di discretizzazione introdotto dallo schema di Eulero nella stima del pricing delle opzioni barriera con il metodo Monte Carlo.

5.2.2 Metodo di correzione

Questo metodo permette di aggiustare la formula di pricing di un'opzione barriera monitorata a tempo continuo per ottenere un'approssimazione del prezzo della corrispondente monitorata a tempo discreto, cioè per esempio un'opzione barriera che non ha valore se l'asset rimane fuori dalla barriera in un giorno prefissato e ad una certa ora.

Teorema 5.1.

Sia $V_m(B)$ il prezzo di un'opzione barriera knock-in o knock-out, del tipo up o down, con barriera H . Sia $V(B)$ il prezzo della corrispondente opzione barriera monitorata a tempo continuo. Allora

$$V_m(B) = V(Be^{\pm\beta\sigma\sqrt{\Delta t}}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{5.16}$$

dove vale $+$ se $B > S_0$ e $-$ se $B < S_0$, con $\beta = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)/\sqrt{2\pi} \approx 0.5826$ (ζ è la funzione zeta di Riemann).

Si può applicare questa correzione prezzando, tramite il Monte Carlo, un'opzione barriera monitorata a tempo continuo. In particolare prima la barriera viene shiftata di una quantità $-B\beta\sigma\sqrt{\Delta t}$ se $B > S_0$ e $+B\beta\sigma\sqrt{\Delta t}$ se $B < S_0$, poi si applica l'usuale metodo Monte Carlo per prezzare l'opzione.

Per la dimostrazione del precedente teorema si fa riferimento a [15].

5.3 Algoritmo di Pricing

Verrà ora presentato l'algoritmo, utilizzato per le implementazioni in Matlab, per prezzare opzioni barriera call down-and-in. Verrà dapprima considerato il modello di Black&Scholes ed in seguito quelli a volatilità locale (sia CEV che volatilità non lineare).

L'algoritmo qui riportato è scritto in modo tale da avere una buona leggibilità, i codici Matlab corrispondenti sono allegati nell'Appendice (Capitolo 10).

Algoritmo: modello di Black&Scholes

Creare la griglia fissando N_{step} (numero degli intervalli temporali) e N_{sim} (numero delle simulazioni).

```

S=zeros(Nsim,Nstep+1);
P=zeros(Nsim,Nstep);
Prob=1;
Z=randn(Nsim,Nstep);
Payoff Scontato=zeros(Nsim,1);
for i=1:Nsim
    S(i,1)=S0;
    for j=1:Nstep
        S(i,j+1)=S(i,j)e(r-σ2/2)Δt+σ√ΔtZ(i,j);
        P(i,j)= $\left(1-\exp\left[-\frac{2(\ln S(i,j)-\ln B)(\ln S(i,j+1)-\ln B)}{\sigma^2\Delta t}\right]\right)^+$ ;
        Prob=Prob P(i,j);
    end
end
Probabilità=1-Prob;

for i=1:Nsim
    Payoff Scontato(i)=e-rT(S(i,end)-K)+Probabilità;
end
Prezzo=normfit(Payoff Scontato);

```

Algoritmo: modello CEV

Creare la griglia fissando N_{step} (numero degli intervalli temporali) e N_{sim} (numero delle simulazioni).

```

S=zeros(Nsim,Nstep+1);
σfun=zeros(Nsim,Nstep+1);

```

Capitolo 5. Brownian Bridge Monte Carlo

```
P=zeros(Nsim,Nstep);
Prob= 1;
Z=randn(Nsim,Nstep);
Payoff Scontato=zeros(Nsim,1);
for i = 1 : Nsim
    S(i,1) = S0;
    σfun(i,1) = σSβ-1(i,1);
    for j = 1 : Nstep
        S(i,j+1) = S(i,j)e(r- $\frac{\sigma_{fun}^2(i,j)}{2}$ )Δt+σfun(i,j)√ΔtZ(i,j);
        σfun(i,j+1) = σSβ-1(i,j+1);
        P(i,j) =  $\left(1 - \exp\left[-\frac{2(\ln S(i,j) - \ln B)(\ln S(i,j+1) - \ln B)}{\sigma_{fun}^2(i,j)\Delta t}\right]\right)^+$ ;
        Prob=Prob P(i,j);
    end
end
end
Probabilità= 1-Prob;

for i = 1 : Nsim
    Payoff Scontato(i) = e-rT(S(i,end) - K)+Probabilità;
end
Prezzo=normfit(Payoff Scontato);
```

Algoritmo: modello a volatilità locale non lineare

Creare la griglia fissando N_{step} (numero degli intervalli temporali) e N_{sim} (numero delle simulazioni).

```
S=zeros(Nsim,Nstep+1);
σfun=zeros(Nsim,Nstep+1);
P=zeros(Nsim,Nstep);
Prob= 1;
Z=randn(Nsim,Nstep);
Payoff Scontato=zeros(Nsim,1);
for i = 1 : Nsim
    S(i,1) = S0;
    σfun(i,1) =  $\left(\alpha + \beta\frac{S(i,1)}{S_0}\right)e^{-\mu\frac{S(i,1)}{S_0}}$ ;
    for j = 1 : Nstep
        S(i,j+1) = S(i,j)e(r- $\frac{\sigma_{fun}^2(i,j)}{2}$ )Δt+σfun(i,j)√ΔtZ(i,j);
        σfun(i,j+1) =  $\left(\alpha + \beta\frac{S(i,j+1)}{S_0}\right)e^{-\mu\frac{S(i,j+1)}{S_0}}$ ;
    end
end
```


5.4. Metodi Monte Carlo: vantaggi e svantaggi

```
P(i, j) =  $\left(1 - \exp\left[-\frac{2(\ln S(i, j) - \ln B)(\ln S(i, j + 1) - \ln B)}{\sigma_{fun}^2(i, j)\Delta t}\right]\right)^+$  ;  
Prob=Prob P(i, j);  
end  
end  
Probabilità= 1-Prob;  
  
for i = 1 : Nsim  
    Payoff Scontato(i) = e-rT (S(i, end) - K)+ Probabilità;  
end  
Prezzo=normfit(Payoff Scontato);
```

5.4 Metodi Monte Carlo: vantaggi e svantaggi

Vantaggi

- La matematica necessaria per eseguire delle simulazioni Monte Carlo è piuttosto semplice.
- Il modello può essere aggiustato in base alle esigenze senza grossi problemi.
- Per avere un'accuratezza migliore basta eseguire un numero maggiore di simulazioni.
- La tecnica può essere utilizzata per diverse opzioni sia Europee che path-dependent.

Svantaggi

- Non è possibile avere un'accuratezza davvero alta dell'approssimazione con il metodo Monte Carlo in quanto l'ampiezza dell'intervallo di confidenza è inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero di simulazioni. Quindi per avere prezzi accurati è necessario simulare moltissime traiettorie.
- L'ampiezza dell'intervallo di confidenza è direttamente proporzionale alla radice quadrata della varianza. Nella pratica è quindi consigliato l'utilizzo di tecniche di *riduzione della varianza*, cioè considerando un problema analogo che abbia la stessa media di quello originario ma una varianza inferiore.

6 Formula approssimata

6.1 Introduzione

Il seguente capitolo è incentrato sul pricing di opzioni a barriera singola tramite una formula approssimata sviluppata da H. Funahashi e M. Kijima [13].

Rubinstein e Reiner [23] derivarono formule chiuse per il pricing di otto tipi di opzioni a barriera singola sotto l'ipotesi che il prezzo del sottostante evolvesse secondo un moto Browniano geometrico. Però, com'è già noto, il modello di Black&Scholes non è consistente con i dati di mercato in quanto le superfici di volatilità implicita presentano solitamente una forma di skew o di smile. Per queste ragioni tali formule non sono adatte ad un utilizzo pratico.

Davydov e Linetsky [17] ottennero formule per apprezzare opzioni path-dependent quando il prezzo del sottostante evolve secondo il modello CEV, modello capace di riprodurre gli smile di volatilità del mercato. D'altro canto queste formule sono estremamente complicate e richiedono un elevato sforzo computazionale.

Dunque nella pratica molti utilizzano le simulazioni. Nel metodo Monte Carlo standard sorge però un problema che deriva dalla dipendenza di tali opzioni dalle traiettorie del prezzo del sottostante. Come spiegato nel capitolo precedente, infatti, è possibile che la barriera venga attraversata tra due istanti di monitoraggio, introducendo un errore nel pricing.

Inoltre Gobet [4] notò che il tasso di convergenza dell'errore, rispetto al numero di step di discretizzazione del tempo, peggiora quando comparato a quello di opzioni path-independent: l'ordine di convergenza dell'approssimazione con lo schema di Euler-Maruyama discreto è $1/2$, mentre quello dello schema continuo è 1 . Ciò significa che bisogna costruire dei time step meno ampi e collezionare un maggior numero di simulazioni dei cammini per avere risultati più accurati.

Per tutte queste ragioni sarebbe auspicabile avere a disposizione una formula approssimata in forma chiusa.

Sono state sviluppate tecniche di hedging statico (o semi-statico) per opzioni path-

dependent. In particolare Carr e Lee [16] hanno studiato la simmetria put-call e l'hanno applicata per sviluppare una gestione semi-statica per opzioni del tipo barriera. Questa simmetria è valida quando la funzione di volatilità soddisfa determinate proprietà di simmetria, ma non vale quando è una diffusione generica, incluso il caso CEV.

In questo capitolo verrà considerato il pricing di opzioni barriera in cui il sottostante è descritto da un modello a volatilità locale (LV). Per poter apprezzare un'opzione down-and-in, prima verrà applicata la *simmetrizzazione* alla funzione di volatilità, in modo tale che valga la (6.2). L'idea della simmetrizzazione fu introdotta per la prima volta, in una serie di articoli, da Akahori e Imamura ([8], [18], [19]). Poi, utilizzando la relazione base (3.9) tra le opzioni down-and-in e down-and-out, verrà mostrato che ogni opzione down-and-in può essere apprezzata grazie alla combinazione di tre opzioni Europee standard, due delle quali con funzione di volatilità simmetrizzata. Quest'ultima è approssimata da una successione di funzioni lisce che convergono all'originale. Verrà poi utilizzata la tecnica del chaos expansion, sviluppata da Funahashi e Kijima [12], per apprezzare le opzioni Europee ottenute. Infine si applicherà l'acceleratore di convergenza di Aitken per calcolare un prezzo approssimato per l'opzione down-and-in. Altre opzioni a barriera singola possono essere apprezzate similmente.

6.2 Setup

Sia $t = 0$ l'istante attuale, $T > 0$ la scadenza, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T})$ lo spazio di probabilità filtrato. La probabilità \mathbb{Q} rappresenta la misura risk-neutral, mentre l'operatore di valore atteso rispetto a \mathbb{Q} è indicato con \mathbb{E} .

Sia $S_0 > B$ e sia $\tau = \inf\{t : S_t \leq B\}$ il primo istante in cui S_t attraversa la barriera B ($\tau = \infty$ se l'evento è vuoto).

Sia $G(S)$ la funzione payoff dell'opzione al tempo T . Una down-and-in è definita da $G(S_T)\chi_{\{\tau \leq T\}}$, mentre una down-and-out da $G(S_T)\chi_{\{\tau > T\}}$. Ne segue che

$$G(S_T) = G(S_T)\chi_{\{\tau > T\}} + G(S_T)\chi_{\{\tau \leq T\}}$$

e sussiste la seguente relazione tra le corrispondenti opzioni

$$E(S; G) = DO(S; G) + DI(S; G), \tag{6.1}$$

dove $DO(S; G)$ e $DI(S; G)$ rappresentano i prezzi delle opzioni down-and-out e down-and-in rispettivamente, mentre $E(S; G)$ è il prezzo dell'opzione Europea standard con stesso sottostante e stesso payoff.

Sotto alcune assunzioni di simmetria, Carr e Lee [16] hanno dimostrato che, per ogni

funzione Boreliana limitata $G(S)$, vale:

$$\mathbb{E}_\tau[G(S_T)] = \mathbb{E}_\tau \left[\frac{S_T}{B} G\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \right]. \quad (6.2)$$

Questa osservazione porta ad una gestione semi-statica per un'opzione down-and-in. Infatti, nell'istante $t = 0$, si acquisti e si mantenga un claim Europeo

$$\Gamma(S_T) = G(S_T)\chi_{\{S_T \leq B\}} + \frac{S_T}{B} G\left(\frac{B^2}{S_T}\right)\chi_{\{S_T > B\}}. \quad (6.3)$$

Se e quando la barriera viene toccata, si scambi $\Gamma(S_T)$ con un claim su $G(S_T)$ a costo 0 poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\tau[G(S_T)] &= \mathbb{E}_\tau[G(S_T)\chi_{\{S_T \leq B\}} + G(S_T)\chi_{\{S_T > B\}}] \\ &= \mathbb{E}_\tau \left[G(S_T)\chi_{\{S_T \leq B\}} + \frac{S_T}{B} G\left(\frac{B^2}{S_T}\right)\chi_{\{B^2/S_T > B\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_\tau \left[G(S_T)\chi_{\{S_T \leq B\}} + \frac{S_T}{B} G\left(\frac{B^2}{S_T}\right)\chi_{\{S_T < B\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_\tau[\Gamma(S_T)]. \end{aligned}$$

Se la barriera non viene mai toccata si ha che $S_T > B$ ed il claim su $\Gamma(S_T)$ non può essere esercitato. Dunque il prezzo $DI(S; G)$ di un'opzione down-and-in può essere ottenuto come il prezzo $E(S; \Gamma)$ del claim Europeo standard $\Gamma(S_T)$. In particolare, per una call down-and-in $G(S_T) = (S_T - K)^+$ con $K > B$, si ha

$$\Gamma(S_T) = \frac{S_T}{B} \left(\frac{B^2}{S_T} - K \right)^+ = \frac{K}{B} \left(\frac{B^2}{K} - S_T \right)^+ = \frac{K}{B} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+ + B - \frac{K}{B} S_T, \quad (6.4)$$

dove l'ultima uguaglianza è data dalla put-call parity.

Si supponga ora che il prezzo del sottostante S_t segua una diffusione generica, cioè si consideri

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t)S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

dove $\sigma(S_t)$ è sufficientemente liscia. Come dimostrato in [16], una condizione sufficiente per la simmetria (6.2) è che

$$f(t, x) = \sigma(e^{r(t-\tau)} e^{x+\log B}), \quad t \geq \tau,$$

sia una funzione pari in x .

Si definisca

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} \sigma(e^{r(t-\tau)} e^{x+\log B}), & x \geq 0, \\ \sigma(e^{r(t-\tau)} e^{-x+\log B}), & x < 0, \end{cases}$$

che è una funzione pari in x . Ad essa si associ la funzione di volatilità *simmetrizzata*

$$\tilde{\sigma}(t, S) = \begin{cases} \sigma(S), & S \geq B, \\ \sigma(e^{2r(t-\tau)} B^2 / S), & S < B, \end{cases} \quad (6.5)$$

con $\tau \leq t \leq T$.

Bisogna estendere la struttura di volatilità (6.5) all'intero dominio del tempo $t \in [0, T]$ per poter prezzare le opzioni down-and-in. Un modo per fare ciò è assumere che $r = 0$ (Carr *et al.* [5]). Questa assunzione è innocua per opzioni scritte sul prezzo forward o futures dell'asset sottostante, mentre implica che le opzioni scritte sul prezzo spot si comportino come se fossero scritte sul prezzo forward. Da ora in avanti verrà ritenuta valida questa ipotesi.

Si definisca

$$\tilde{\sigma}(t, S) := \tilde{\sigma}(S) = \begin{cases} \sigma(S), & S \geq B, \\ \sigma(B^2 / S), & S < B, \end{cases} \quad (6.6)$$

e si consideri l'EDS

$$dS_t = \tilde{\sigma}(S_t) S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.7)$$

rispetto alla misura di probabilità risk-neutral \mathbb{Q} . Si assume che esista sempre la soluzione forte \tilde{S}_t dell'EDS (6.7). Va notato però che la funzione di volatilità $\tilde{\sigma}(S)$ potrebbe non essere liscia perché potrebbe non essere differenziabile in $S = B$ anche se $\tilde{\sigma}(S)$ è differenziabile rispetto a S .

Quando \tilde{S}_t segue la (6.7) si può applicare l'hedging semi-statico per l'opzione down-and-in il cui prezzo, $DI(\tilde{S}; G)$, è dato dal prezzo, $E(\tilde{S}, \Gamma)$, dell'opzione Europea con claim $\Gamma(\tilde{S}_t)$ definita in (6.3). Grazie alla (6.1) si ha

$$E(\tilde{S}, G) = DO(\tilde{S}, G) + E(\tilde{S}, \Gamma), \quad (6.8)$$

in quanto $DI(\tilde{S}; G) = E(\tilde{S}, \Gamma)$. Quindi, usando la (6.1) e la (6.8), si ottiene il seguente risultato fondamentale (si veda [13]).

Teorema 6.1.

Sotto le assunzioni date, il prezzo $DI(S; G)$ di un'opzione down-and-in con sottostante S_t e payoff $G(S)$ è dato dalla combinazione di tre opzioni Europee standard, cioè

$$DI(S; G) = E(\tilde{S}, \Gamma) + [E(S; G) - E(\tilde{S}, G)], \quad (6.9)$$

dove \tilde{S}_t è il prezzo del processo simmetrizzato e $\Gamma(\tilde{S})$ è definita in (6.3).

Nel modello di Black&Scholes la volatilità è costante e, quindi, simmetrica. Dunque $S_t = \tilde{S}_t$ e, da (6.9), si ha che $DI(S; G) = E(S, \Gamma)$. Segue da (6.4) che il prezzo di una

call down-and-in è dato da

$$DI(S; G) = \frac{K}{B} \left(S_0 \Phi(d) - \frac{B^2}{K} \Phi(d - \sigma \sqrt{T}) \right) + B - \frac{K}{B} S_0 \quad (6.10)$$

dove

$$d = \frac{\log(S_0 K / B^2)}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}.$$

6.3 Formula approssimata

In questo paragrafo viene proposto un metodo di approssimazione analitica, sviluppato da [12], per valutare le tre opzioni Europee. Una delle assunzioni base di questa tecnica è che la funzione di volatilità sia sufficientemente liscia. Per superare questa limitazione si utilizza il seguente risultato (si veda [13]).

Lemma 6.2.

Sia $h(x) = x$ se $x > 1$ e $h(x) = x^{-1}$ se $0 < x < 1$. Allora

$$\exp\left(\sqrt{\epsilon^2 + (\log x)^2}\right) - h(x) = O(\epsilon).$$

Si consideri un'opzione down-and-in con payoff $G(S)$ e si definisca $x = S/B$. Sia $\eta(x) = \tilde{\sigma}(Bx)$ e si consideri l'EDS (6.7) in termini di x_t , cioè

$$dx_t = \eta(x_t) x_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.11)$$

Questa EDS ammette soluzione forte che è data da

$$x_t = x_0 \exp\left[\int_0^t \eta(x_u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \eta^2(x_u) du\right], \quad (6.12)$$

con $x_0 = S_0/B$. Si noti che la funzione di volatilità $\eta(x)$ non è liscia in $x = 1$. Ora, per un $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, la funzione di volatilità simmetrizzata $\tilde{\sigma}(S)$ è approssimata da

$$\tilde{\sigma}(S) \approx \tilde{\eta}(\epsilon, x), \quad \tilde{\eta}(\epsilon, x) = \sigma \left(B \exp\left(\sqrt{\epsilon^2 + (\log x)^2}\right) \right); \quad (6.13)$$

si consideri l'EDS (6.11) con la funzione di volatilità approssimata $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ per ogni fissato $\epsilon > 0$. Allora la soluzione forte esiste sempre ed è data da

$$x_t^\epsilon = x_0 \exp\left[\int_0^t \tilde{\eta}(\epsilon, x_u^\epsilon) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\eta}^2(\epsilon, x_u^\epsilon) du\right]$$

per ogni $\epsilon > 0$. Si noti che $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ è differenziabile rispetto a x e che $\eta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\eta}(\epsilon, x)$ per il Lemma 6.2.

In questo paragrafo, per semplificare la notazione, verrà omesso l'argomento ϵ , utilizzando $\tilde{\eta}(x)$ al posto di $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$. Dunque l'equazione precedente viene riscritta come

$$x_t = x_0 \exp \left[\int_0^t \tilde{\eta}(x_u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\eta}^2(x_u) du \right], \quad (6.14)$$

ed essa converge a (6.12) per $\epsilon \rightarrow 0$.

6.3.1 Chaos expansion di Wiener-Itô

Sia $x_t^{(0)} = 1$ e, usando la (6.14), si definisca $x_t^{(m)}$ iterativamente tramite

$$x_t^{(m+1)} = x_0 \exp \left[\int_0^t \tilde{\eta}(x_u^{(m)}) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\eta}^2(x_u^{(m)}) du \right].$$

Definendo $\|g\|_t^2 = \int_0^t g^2(u) du$ e $J_t(g) = \int_0^t g(u) dW_u$ si ha

$$x_t^{(m+1)} = x_0 \exp \left[J_t(\tilde{\eta}_m) - \frac{1}{2} \|\tilde{\eta}_m\|_t^2 \right], \quad (6.15)$$

dove $\tilde{\eta}_m(t) = \tilde{\eta}(x_t^{(m)})$. Il punto di partenza è $x_0 = 1$ (che corrisponde a $S = B$). Si supponga che $x_t^{(m)}$ converga a (6.14) per $m \rightarrow \infty$, allora

$$x_t = x_t^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \{x_t^{(m+1)} - x_t^{(m)}\}. \quad (6.16)$$

D'altro canto, applicando l'espansione del polinomio Hermitiano a (6.15), si ottiene

$$\frac{x_t^{(m+1)}}{x_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\tilde{\eta}_m\|_t^n}{n!} h_n \left(\frac{J_t(\tilde{\eta}_m)}{\|\tilde{\eta}_m\|_t} \right),$$

dove $h_n(x)$ è il polinomio Hermitiano di ordine n . Dunque, definendo

$$I_{m,n}(t) = \frac{1}{n!} \left\{ \|\tilde{\eta}_m\|_t^n h_n \left(\frac{J_t(\tilde{\eta}_m)}{\|\tilde{\eta}_m\|_t} \right) - \|\tilde{\eta}_{m-1}\|_t^n h_n \left(\frac{J_t(\tilde{\eta}_{m-1})}{\|\tilde{\eta}_{m-1}\|_t} \right) \right\}, \quad (6.17)$$

si giunge a

$$x_t = x_t^{(1)} + x_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} I_{m,n}(t), \quad (6.18)$$

che viene approssimato da

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_t^{(1)} + x_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{I}_{m,n}(t), \quad (6.19)$$

dove $\tilde{x}_t^{(1)}$ e $\tilde{I}_{m,n}(t)$ sono le approssimazioni di $x_t^{(1)}$ e $I_{m,n}(t)$ rispettivamente. Tali quantità sono date dalla somma di integrali stocastici iterati con integrandi deterministici. Il risultato seguente permette di giustificare il troncamento della sommatoria infinita in (6.19) ad un certo livello.

Proposizione 6.3.

Si consideri l'integrale iterato

$$I_n = \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \dots \sigma_n(t_n) dW_{t_1} dW_{t_2} \dots dW_{t_n},$$

se le volatilità $\sigma_k(t)$ sono funzioni deterministiche e $\hat{\sigma}(t) = \max_k \sigma_k(t) \in L^2([0, t])$ per ogni t , allora $\mathbb{E}[I_n^2] \leq \|\sigma\|_t^{2n} / n!$.

Grazie a questa proposizione (si veda [13]) è possibile ignorare i termini degli integrali iterati di ordine superiore al secondo.

Ora, dalla chaos expansion di Wiener-Itô del processo log-normale (6.15) con $m = 0$, dapprima si ha

$$\frac{x_t^{(1)}}{x_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} \tilde{\eta}_0(t_1) \tilde{\eta}_0(t_2) \dots \tilde{\eta}_0(t_n) dW_{t_1} dW_{t_2} \dots dW_{t_n},$$

dove $\tilde{\eta}_0(t) = \tilde{\eta}(x_t^{(0)})$. Poiché $x_t^{(0)} = 1$, si ottiene $\tilde{\eta}_0(t) = \tilde{\eta}(\epsilon, 1) = \sigma(Be^\epsilon)$, che è una funzione deterministica. $x_t^{(1)}$ viene approssimato troncando la somma in $n = 2$, cioè

$$\tilde{x}_t^{(1)} = x_0 \left[1 + \int_0^t \tilde{\eta}_0(t_1) dW_{t_1} + \int_0^t \int_0^{t_2} \tilde{\eta}_0(t_1) \tilde{\eta}_0(t_2) dW_{t_1} dW_{t_2} \right]. \quad (6.20)$$

Per approssimare $I_{m,n}(t)$ si applica l'espansione di Taylor attorno a $x_t^{(m-1)}$. Per N sufficientemente grande

$$J_t(\tilde{\eta}_m) \approx J_t(\tilde{\eta}_{m-1}) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \int_0^t \tilde{\eta}_{m-1}^{(n)}(u) [x_u^{(m)} - x_u^{(m-1)}]^n dW_u, \quad (6.21)$$

dove $\tilde{\eta}_m^{(n)}(t) = \partial_x^{(n)} \tilde{\eta}(x) |_{x=x_t^{(m)}}$. Inoltre, per definizione, si ha

$$x_t^{(m+1)} - x_t^{(m)} = x_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n}(t) \approx x_0 \sum_{n \leq 3-m} I_{m,n}(t). \quad (6.22)$$

Capitolo 6. Formula approssimata

Si ricordi che la strategia è quella di ignorare i termini degli integrali iterati con ordine superiore al secondo.

Ora, notando che $I_{1,1}(t) = J_t(\tilde{\eta}_1) - J_t(\tilde{\eta}_0)$, che $x_t^{(0)} = 1$, applicando (6.21) e (6.20), ignorando i termini di ordine superiore, si ottiene

$$I_{1,1}(t) \approx \tilde{I}_{1,1}(t) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x_0 - 1)^n \left[\int_0^t \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u + \frac{nx_0}{x_0 - 1} \int_0^t \tilde{\eta}_0^{(n)}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s \right]. \quad (6.23)$$

Si noti che

$$\tilde{\eta}_0^{(1)}(t) = 0, \quad (6.24)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(2)}(t) = B e^\epsilon \frac{\sigma^{(1)}(B e^\epsilon)}{\epsilon}, \quad (6.25)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(3)}(t) = -3B e^\epsilon \frac{\sigma^{(1)}(B e^\epsilon)}{\epsilon}, \quad (6.26)$$

e così via, dove $\sigma^{(1)}(x) = \partial_x \sigma(x)$ e $\tilde{\eta}_0^{(n)}(t) = \partial_x^{(n)} \tilde{\eta}_0(x) |_{x=1}$, dunque $\tilde{\eta}_0^{(n)}(t)$ sono tutte costanti.

Analogamente si ottiene

$$I_{1,2}(t) \approx \tilde{I}_{1,2}(t) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x_0 - 1)^n \left(\int_0^t \tilde{\eta}_0(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s + \int_0^t \tilde{\eta}_0^{(n)}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0(u) dW_u \right) dW_s \right) + \sum_{m,n=1}^N \frac{1}{m!n!} (x_0 - 1)^{m+n} \int_0^t \tilde{\eta}_0^{(m)}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s \quad (6.27)$$

e

$$I_{2,1}(t) \approx \tilde{I}_{2,1}(t) := \sum_{n=1}^N x_0 (x_0 - 1)^n \frac{1}{n!} \int_0^t \tilde{\eta}_0^{(1)}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s + \sum_{m,n=1}^N x_0 \frac{1}{m!n!} (x_0 - 1)^{m+n} \int_0^t \tilde{\eta}_0^{(m+1)}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s. \quad (6.28)$$

Inoltre si può dimostrare che $I_{m,n} \approx 0$ per ogni $m, n \geq 2$.

Infatti, per esempio, si ha che

$$I_{2,2}(t) = \int_0^t \tilde{\eta}_1(s) \left(\int_0^s K_u dW_u \right) dW_s + \int_0^t K_s \left(\int_0^s (\tilde{\eta}_1(u) + K_u) dW_u \right) dW_s, \quad (6.29)$$

dove

$$K_s \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\eta}_1^{(n)}(s)}{n!} \left[x_s^{(2)} - x_s^{(1)} \right]^n.$$

$I_{2,2}(t)$ può essere trascurato in quanto coinvolge solo integrali iterati di ordine superiore al secondo. Altri termini più alti possono essere trascurati per le stesse ragioni. Per le dimostrazioni di tali risultati si fa riferimento a [13].

6.3.2 Formule approssimate per le Europee

Quanto ottenuto finora può essere messo insieme per concludere il seguente teorema (si veda [13]).

Teorema 6.4.

Sia $X_t := \frac{x_t}{x_0} - 1$. Allora

$$X_t \approx \int_0^t p_1(s) dW_s + \int_0^t p_2(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0(u) dW_u \right) dW_s + \sum_{n=1}^N \int_0^t p_{3,n}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u) dW_u \right) dW_s$$

dove

$$p_1(s) = \tilde{\eta}_0(s) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x_0 - 1)^n \tilde{\eta}_0^{(n)}(s), \quad (6.30)$$

$$p_2(s) = \tilde{\eta}_0(s) + x_0 \sum_{n=1}^N \frac{(x_0 - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{\eta}_0^{(n)}(s) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x_0 - 1)^n \tilde{\eta}_0^{(n)}(s), \quad (6.31)$$

e

$$p_{3,n}(s) = \frac{1}{n!} (x_0 - 1)^n \left[\tilde{\eta}_0(s) + x_0 \tilde{\eta}_0^{(1)}(s) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} (x_0 - 1)^m \left(\tilde{\eta}_0^{(m)}(s) + x_0 \tilde{\eta}_0^{(m+1)}(s) \right) \right], \quad (6.32)$$

con $n = 1, 2, \dots$. Si noti che $p_1(s)$, $p_2(s)$ e $p_{3,n}(s)$ sono tutte funzioni deterministiche.

Per calcolare la funzione di densità di probabilità di X_t , viene derivata un'approssimazione della sua funzione caratteristica, che può essere invertita tramite la formula di Fourier per ottenere un'approssimazione della funzione di densità (si veda [13]).

Teorema 6.5.

La funzione di densità di probabilità di X_t è approssimata da

$$f_t(x) \approx \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_t) \left\{ \frac{q(t)}{(\sqrt{\Sigma_t})^3} h_3 \left(\frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + 1 \right\},$$

dove $\mathcal{N}(x; a, b)$ denota la funzione di densità normale con media a e varianza b e dove

$$\Sigma_t = \int_0^t p_1^2(s) ds, \quad (6.33)$$

$$q(t) = \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0(u)p_1(u)du \right) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t p_1(s)p_{3,n}(s) \left(\int_0^s \tilde{\eta}_0^{(n)}(u)p_1(u)du \right) ds. \quad (6.34)$$

Si ricorda che $X_t = \frac{x_t}{x_0} - 1$ e che $x_t = \tilde{S}_t/B$. Allora il prezzo di un'opzione call Europea con payoff $G(S)$, scadenza T , scritta sul processo simmetrizzato \tilde{S}_t , è dato da

$$E(\tilde{S}; G) = Bx_0 \int_{\tilde{K}}^{\infty} (x - \tilde{K})^+ f_T(x) dx,$$

dove $\tilde{K} = 1 + \frac{K}{S_0}$. Calcolando l'integrale, utilizzando la funzione di densità approssimata data dal Teorema 6.5, si conclude quanto segue (si veda [13]).

Teorema 6.6.

Il valore di un'opzione call Europea con scadenza T e strike K scritta sul processo simmetrizzato \tilde{S}_t è approssimato da

$$E(\tilde{S}; G) \approx \frac{S_0 - K}{2} + \frac{q(T)(K - S_0) \exp\left\{-\frac{(K - S_0)^2}{2S_0^2\Sigma_T}\right\}}{\sqrt{2\pi}\Sigma_T^{\frac{3}{2}}} + \frac{S_0\sqrt{\Sigma_T} \exp\left\{-\frac{(K - S_0)^2}{2S_0^2\Sigma_T}\right\}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} |K - S_0| \left(2\Phi\left(\frac{|K - S_0|}{S_0\sqrt{\Sigma_T}}\right) - 1\right), \quad (6.35)$$

dove $\Phi(x)$ è la funzione di distribuzione cumulata di una distribuzione normale standard.

Da questo teorema è possibile calcolare il valore di un'opzione Europea con payoff $\Gamma(S)$, dato da 6.4.

Corollario 6.7.

Il valore di un'opzione call down-and-in con scadenza T e strike K scritta sul processo simmetrizzato \tilde{S}_t è approssimato da

$$E(\tilde{S}; \Gamma) \approx \frac{B - Kx_0}{2} + \frac{q(T)(B - Kx_0) \exp\left\{-\frac{(B - Kx_0)^2}{2K^2x_0^2\Sigma_T}\right\}}{\sqrt{2\pi}\Sigma_T^{\frac{3}{2}}} + \frac{Kx_0\sqrt{\Sigma_T} \exp\left\{-\frac{(B - Kx_0)^2}{2K^2x_0^2\Sigma_T}\right\}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} |B - Kx_0| \left(2\Phi\left(\frac{|B - Kx_0|}{Kx_0\sqrt{\Sigma_T}}\right) - 1\right), \quad (6.36)$$

dove $x_0 = S_0/B$.

Per la dimostrazione del precedente corollario si fa riferimento a [13]. Infine, il valore di un'opzione call Europea con il sottostante originale S_t può essere valutata grazie al metodo proposto da Funahashi e Kijima [12].

Proposizione 6.8.

Il valore di un'opzione call Europea con scadenza T e strike K scritta sul processo S_t è approssimato da

$$E(S; G) \approx \frac{S_0 \mathcal{N}(\tilde{K}; 0, \Omega_T)}{\Omega_T} \left[\Omega_T^2 - \nu(T) \tilde{K} \right] + S_0 \tilde{K} \left(1 - \Phi(-\tilde{K} / \sqrt{\Omega_T}) \right), \quad (6.37)$$

dove $\tilde{K} = 1 - \frac{K}{S_0}$, $\Omega_T = \sigma^2(S_0) T$ e $\nu(T) = \sigma^4(S_0) T^2 / 2$.

Usando questi risultati è possibile calcolare i tre termini della (6.9) e, quindi, il prezzo dell'opzione down-and-in con scadenza T e strike K .

Si ricordi che la formula così ottenuta è un'approssimazione per l'opzione call down-and-in con funzione di volatilità $\tilde{\eta}(\epsilon, S/B)$. Quando $\epsilon = m^{-1}$, il prezzo verrà chiamato $DI_m(S; G)$ col fine di enfatizzare il grado di approssimazione della funzione di volatilità. La questione importante a questo punto è come determinare il valore più appropriato per m . Col fine di superare questa difficoltà viene impiegata una tecnica per accelerare la convergenza. Infatti, per ogni funzione di volatilità $\tilde{\eta}(m^{-1}, S/B)$, le opzioni in stile Europeo $E_m(\tilde{S}; G)$ e $E_m(\tilde{S}; \Gamma)$ sono valutate tramite il Teorema 6.6 ed il Corollario 6.7 rispettivamente. Segue dal Teorema 6.1 che

$$DI_m(S; G) = E_m(\tilde{S}, \Gamma) + [E(S; G) - E_m(\tilde{S}, G)] \rightarrow DI(S; G) \quad (6.38)$$

per $m \rightarrow \infty$ sotto alcune condizioni di regolarità. A livello computazionale è stato utilizzato l'acceleratore di convergenza di Aitken, cioè

$$DI(S; G) \approx DI_{m+2}(S; G) - \frac{(DI_{m+2}(S; G) - DI_{m+1}(S; G))^2}{DI_{m+2}(S; G) - 2DI_{m+1}(S; G) + DI_m(S; G)} \quad (6.39)$$

con m appropriato.

6.4 Modello CEV

Si supponga che la funzione di volatilità sia

$$\sigma(S) = \sigma S^{\beta-1}, \quad (6.40)$$

dove $\sigma > 0$ e $0 \leq \beta \leq 1$ sono costanti. Se $\beta = 1$ il prezzo del sottostante S_t segue un moto Browniano geometrico, come nel modello di Black&Scholes.

La funzione di volatilità simmetrizzata $\tilde{\sigma}(S)$, definita in (6.5), è data da

$$\tilde{\sigma}(S) = \eta(x), \quad \eta(x) = \begin{cases} \hat{\sigma} x^{\beta-1} & x \geq 1, \\ \hat{\sigma} x^{-(\beta-1)} & x < 1, \end{cases} \quad (6.41)$$

dove $x = S/B$ e $\hat{\sigma} = \sigma B^{\beta-1}$. Inoltre, per il Lemma 6.2, la funzione di volatilità approssimata (liscia) è data da

$$\tilde{\eta}(\epsilon, x) = \hat{\sigma} \exp\left((\beta-1) \sqrt{\epsilon^2 + \left(\log \frac{S}{B}\right)^2}\right) \quad (6.42)$$

per ogni $\epsilon > 0$. Si noti che

$$\tilde{\eta}_0^{(1)}(t) = 0, \quad (6.43)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(2)}(t) = \hat{\sigma}(\beta-1) \frac{e^{(\beta-1)\epsilon}}{\epsilon}, \quad (6.44)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(3)}(t) = -3\hat{\sigma}(\beta-1) \frac{e^{(\beta-1)\epsilon}}{\epsilon}. \quad (6.45)$$

La differenza maggiore tra $\eta(x)$ e $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ occorre in $S = B$ (cioè $x = 1$) e si ha che

$$\max_x \{\tilde{\eta}(\epsilon, x) - \eta(x)\} = \hat{\sigma}(e^{(\beta-1)\epsilon} - 1) = O(\epsilon).$$

6.5 Modello a volatilità non lineare

Si assuma che la funzione di volatilità sia del tipo

$$\sigma(S) = \left(\alpha + \beta \frac{S}{S_0}\right) e^{-\mu \frac{S}{S_0}} \quad (6.46)$$

con α e β costanti positive. La funzione di volatilità simmetrizzata $\tilde{\sigma}(S)$, definita in (6.5), è data da

$$\tilde{\sigma}(S) = \eta(x), \quad \eta(x) = \begin{cases} \left(\alpha + \beta \frac{B}{S_0} x\right) e^{-\mu \frac{B}{S_0} x} & x \geq 1, \\ \left(\alpha + \beta \frac{B}{S_0} \frac{1}{x}\right) e^{-\mu \frac{B}{S_0} \frac{1}{x}} & x < 1, \end{cases} \quad (6.47)$$

dove $x = S/B$. Inoltre, per il Lemma 6.2, la funzione di volatilità approssimata (liscia) è data da

$$\tilde{\eta}(\epsilon, x) = \left(\alpha + \beta \frac{B}{S_0} e^{\sqrt{\epsilon^2 + (\log x)^2}}\right) e^{-\mu \frac{B}{S_0} \sqrt{\epsilon^2 + (\log x)^2}} \quad (6.48)$$

per ogni $\epsilon > 0$. Ne segue che

$$\tilde{\eta}_0^{(1)}(t) = 0, \quad (6.49)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(2)}(t) = -\frac{Be^{\epsilon} \frac{B e^{\epsilon} \mu}{S_0}}{S_0^2 \epsilon} [Be^{\epsilon} \beta \mu + S_0 \alpha \mu - S_0 \beta], \quad (6.50)$$

$$\tilde{\eta}_0^{(3)}(t) = -3\tilde{\eta}_0^{(2)}(t). \quad (6.51)$$

Anche in questo caso la differenza maggiore tra $\eta(x)$ e $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ si verifica in $x = 1$ e si ha che

$$\max_x \{\tilde{\eta}(\epsilon, x) - \eta(x)\} = \tilde{\eta}(\epsilon, 1) - \eta(1) = \beta \frac{B}{S_0} e^{-\mu B/S_0} (e^{\epsilon} - 1) = O(\epsilon).$$

Risultati Numerici Parte III

7 Risultati Numerici

Dopo aver studiato il problema a livello teorico nei capitoli precedenti, verranno ora riportati i risultati numerici delle implementazioni eseguite tramite il software Matlab. È stato utilizzato un PC con le seguenti caratteristiche: Processore Intel(R) Core(TM) i5-5300U CPU @2.30 GHz; RAM 8.00 GB; Sistema Operativo Windows 8.1 Enterprise.

Dapprima verranno fatte alcune osservazioni circa la scelta dei parametri da utilizzare. Successivamente saranno confrontati i prezzi delle opzioni call down-and-in calcolati sia tramite la formula approssimata (6.39) che con il Brownian Bridge Monte Carlo, analizzando i diversi modelli presi in considerazione: volatilità costante (Black&Scholes), CEV e volatilità non lineare. Per essi si confronteranno anche i tempi di esecuzione. Tutti i prezzi sono da considerarsi in una qualunque valuta monetaria, le scadenze in anni ed i tempi di esecuzione in secondi.

Inoltre si verificherà la correttezza di quanto detto nel Capitolo 6 con la formula (6.38), dimostrando cioè la convergenza di $DI(S; G)_m$ a $DI(S; G)$ all'aumentare di m (grado di approssimazione della funzione di volatilità).

In seguito si studierà l'andamento dei prezzi, calcolati attraverso la formula approssimata, rispetto ai diversi valori del parametro m , col fine di identificare quale sia il più appropriato da impiegare nei calcoli.

Infine verranno espone alcune considerazioni riguardo alla scelta del metodo di pricing, tenendo presente sia la precisione dei risultati (anche grazie al confronto degli errori relativi percentuali) che i tempi di esecuzione.

Osservazione 1. (Scelta di ϵ e dell'ordine n dell'espansione di Taylor)

Il parametro ϵ e l'ordine n dell'espansione di Taylor sono strettamente legati. Infatti, il centro dell'espansione di Taylor, $x^{(0)} = 1$, coincide con il punto di non differenziabilità della volatilità simmetrizzata $\eta(x) = \tilde{\sigma}(Bx)$. Quindi nelle derivate di $\tilde{\eta}_0(x)$ appaiono termini dipendenti da ϵ^{-k} . Ciò vuol dire che, se si sceglie un $\epsilon > 0$ molto piccolo per recuperare la simmetria, non è più possibile trascurare i termini di ordine superiore della serie di Taylor, necessitando di un valore di n più elevato.

Capitolo 7. Risultati Numerici

Nella Figura 7.1 è illustrato un esempio con $\sigma(S) = \sigma/\sqrt{S}$, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$ e $B = 95$. È mostrato il plot di $\eta(x)$ (linea rossa), $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea verde) e dell'approssimazione di Taylor al terzo ordine di $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea blu) rispetto a $\epsilon = 1/m$, con $m = 1, \dots, 9$. Si può osservare esplicitamente che, al diminuire di ϵ , $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ converge a $\eta(x)$. Al tempo stesso, la discrepanza tra $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ e la sua approssimazione di Taylor al terzo ordine diventa significativa per x che si allontanano dal punto di non differenziabilità.

Nei risultati numerici si è scelto di troncare la serie di Taylor in $n = 3$ per evitare di usare valori di ϵ troppo piccoli. In questo caso, come si evince dalla Figura 7.1, viene tipicamente selezionato il parametro $\epsilon = 1/m$ tra $m = 3$ e $m = 5$. Nella pratica verrà applicato l'acceleratore di convergenza di Aitken (6.39) con $m = 3$ (si vedano anche le osservazioni fatte nel paragrafo 7.2).

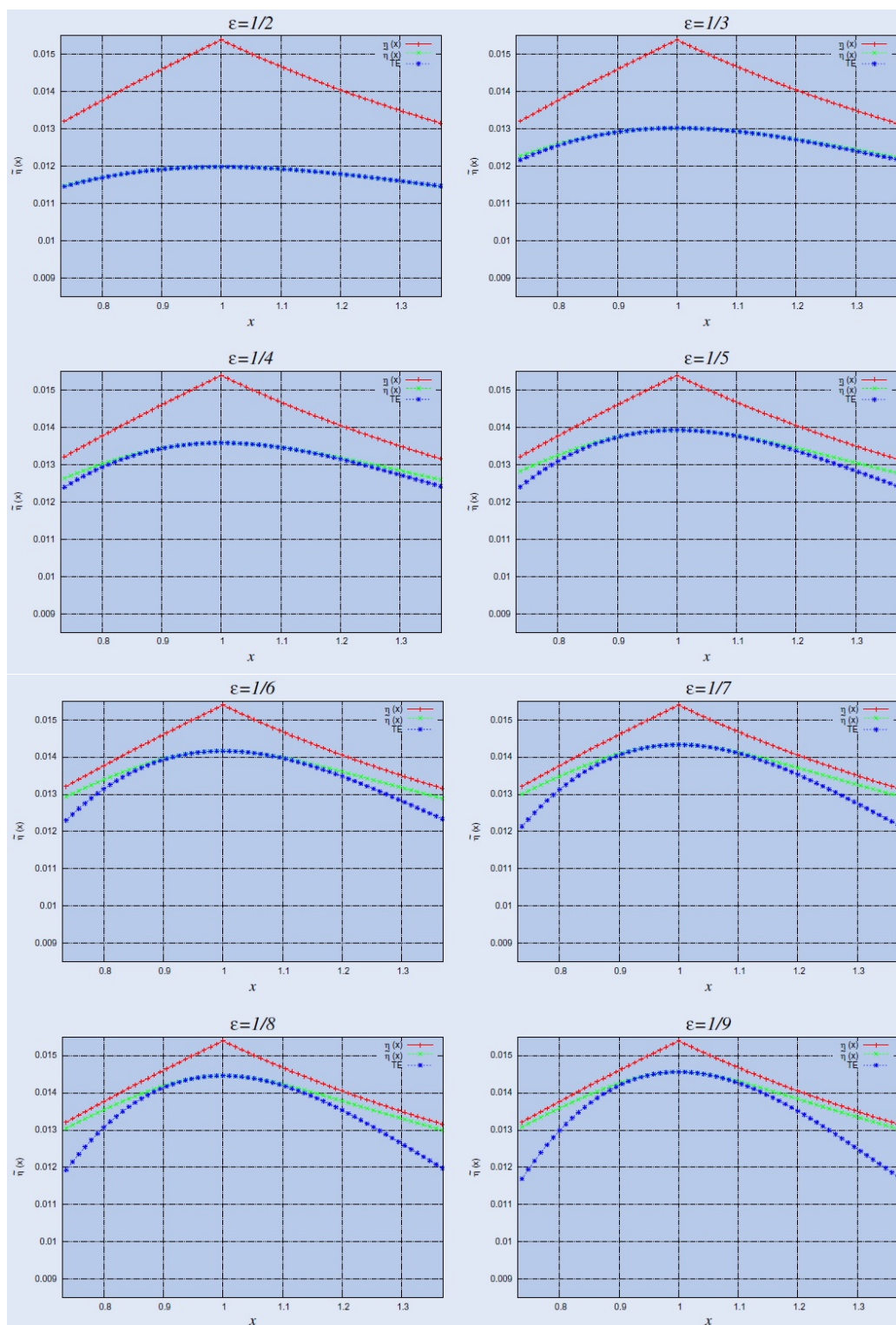


Figura 7.1: Convergenza e separazione delle funzioni $\eta(x)$ (linea rossa), $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea verde) e approssimazione di Taylor al terzo ordine di $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ (linea blu) rispetto a $\epsilon = 1/m$, con $m = 1, \dots, 9$.

7.1 Risultati: modello di Black&Scholes

Nel modello di Black&Scholes, che corrisponde al modello CEV con $\beta = 1$, la funzione di volatilità σ è costante. Non è dunque necessario simmetrizzarla, nè tanto meno applicare il Lemma 6.2 per ricavare $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$.

Per il pricing di una call down-and-in è stata quindi utilizzata la formula esatta (6.10), che è stata considerata come benchmark. Con essa sono poi stati confrontati i prezzi calcolati tramite la (6.9), che corrisponde ad applicare le formule del capitolo precedente con $\tilde{\eta}(\epsilon, x) = \sigma$ e, quindi, a considerare nulle le sue derivate valutate in $x_t^{(0)} = 1$. Nella Tabella 7.1 sono riportati i prezzi di una call down-and-in secondo il modello di Black&Scholes, il cui andamento è anche mostrato nella Figura 7.2.

'Esatto' indica che i prezzi sono calcolati tramite la soluzione esatta (6.10); 'Approx' significa che è stato utilizzato il metodo approssimato; 'MC' rappresenta i prezzi calcolati tramite il Brownian Bridge Monte Carlo (implementato con 100000 simulazioni e 1000 time step). Tra parentesi sono riportati gli errori relativi percentuali dei prezzi rispetto alla soluzione esatta. I parametri utilizzati sono: prezzo spot $S_0 = 100$, barriera $B = 95$ e strike $K = [96, 98, 100, 102]$. I casi (a), (b) e (c) considerano diversi valori di σ e T , a seconda che vi sia volatilità alta o bassa e scadenza corta o lunga.

Nella Figura 7.3, inoltre, è possibile notare l'andamento degli errori relativi percentuali (in valore assoluto) dei prezzi calcolati tramite la formula approssimata ed il Monte Carlo.

Sono stati infine riportati, nella Tabella 7.2, i tempi di esecuzione per il pricing con i due diversi metodi.

Analizzando i risultati ottenuti (si veda la Tabella 7.1), si può notare che gli errori relativi percentuali, prodotti dall'utilizzo della formula (6.39), diventano maggiori in presenza di:

- alta volatilità: nei casi (a) e (c), a parità di scadenza, si evince che una più alta volatilità porta a prezzi più distanti rispetto al benchmark;
- lunghe scadenze: nei casi (a) e (b), a parità di volatilità, si nota che una scadenza più lunga conduce a errori maggiori.

La Figura 7.3 mostra, però, che il valore assoluto degli errori relativi percentuali rimane contenuto ed è sempre ben inferiore rispetto a quello prodotto dal Brownian Bridge Monte Carlo.

Guardando ai tempi di esecuzione (Tabella 7.2), inoltre, si osserva che nel caso delle simulazioni questi possono essere anche 500 volte superiori.

È dunque ragionevole affermare che nel pricing di un'opzione call down-and-out, con sottostante che evolve secondo il modello di Black&Scholes, l'utilizzo della formula

7.1. Risultati: modello di Black&Scholes

approssimata, introdotta nel Capitolo 6, è da preferire rispetto a quello del metodo Monte Carlo in quanto permette di ottenere risultati con un grado di accuratezza maggiore, impiegando tempi di esecuzione molto più ridotti e garantendo un risparmio nell'allocazione di memoria.

Tabella 7.1: Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello BS. Casi (a), (b), (c).

Caso	K	Esatto	Approx	MC
(a): $\sigma = 0.15, T = 0.5$	96	1.8025	1.80(0.12)	1.79(-0.83)
	98	1.3137	1.31(0.13)	1.30(-0.81)
	100	0.9395	0.94(0.06)	0.93(-0.79)
	102	0.6594	0.66(-0.20)	0.65(-0.71)
(b): $\sigma = 0.15, T = 1$	96	3.3230	3.33(0.19)	3.30(-0.59)
	98	2.7139	2.72(0.24)	2.70(-0.59)
	100	2.1987	2.20(0.27)	2.19(-0.57)
	102	1.7675	1.77(0.26)	1.76(-0.55)
(c): $\sigma = 0.3, T = 0.5$	96	5.6010	5.62(0.30)	5.57(-0.51)
	98	4.9108	4.93(0.37)	4.88(-0.57)
	100	4.2921	4.31(0.43)	4.27(-0.61)
	102	3.7398	3.76(0.50)	3.71(-0.66)

Tabella 7.2: Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello BS.

Metodo	Tempo		
	(a)	(b)	(c)
Approx	0.0163	0.0313	0.0156
MC	8.7099	8.2835	7.8626

Capitolo 7. Risultati Numerici

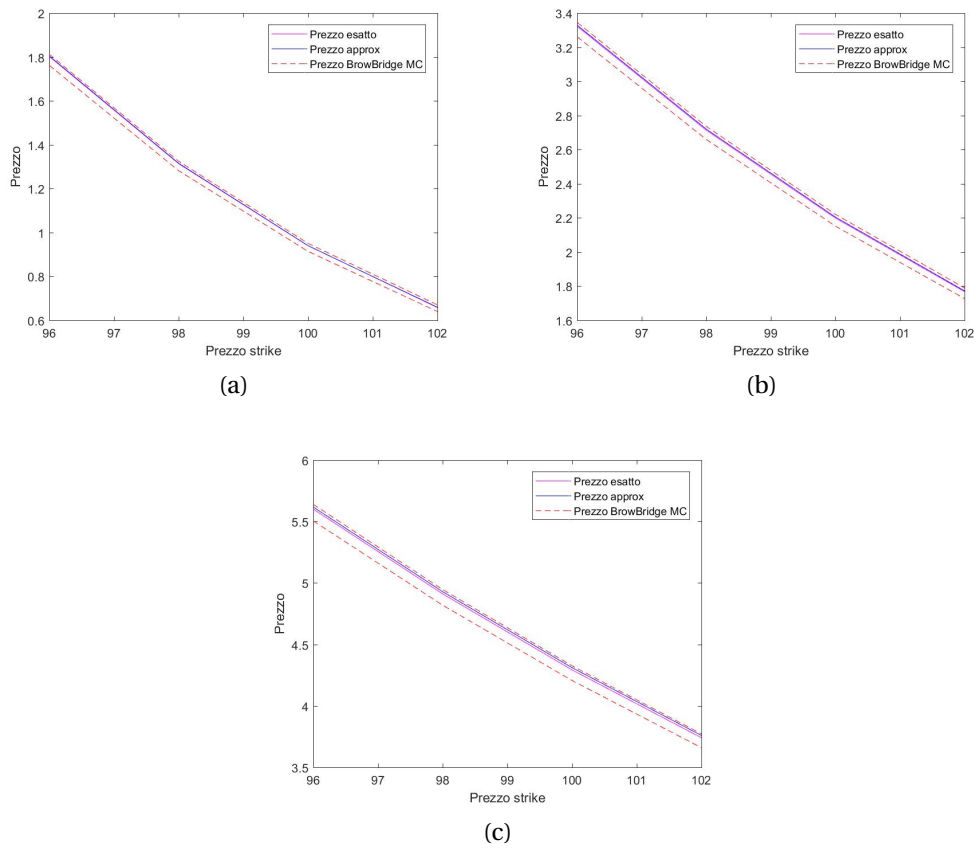


Figura 7.2: Prezzi call donw-and-in. Modello di Black&Scholes.

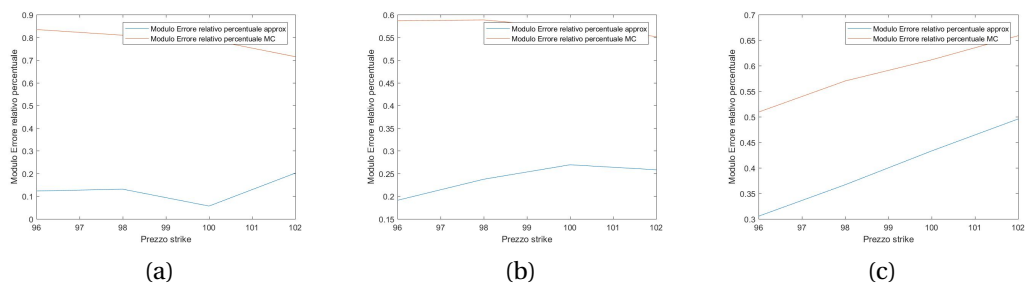


Figura 7.3: Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata e Brownian Bridge MC. Modello BS.

7.2 Risultati: modello CEV

Si consideri il modello CEV descritto nel sottoparagrafo 2.1.1.

Seguono ora alcune osservazioni circa la scelta del parametro m e la convergenza della formula approssimata.

Nella Figura 7.4 è mostrato l'andamento dei prezzi, con i parametri utilizzati nel caso (a) descritto in seguito, calcolati con la formula approssimata e con il benchmark Brownian Bridge Monte Carlo (implementato con 100000 simulazioni e 1000 time step). In particolare è stata impiegata la (6.39) con valori di m che vanno da 2 a 9.

Come si vede più chiaramente nella Figura 7.5, la quale è uno zoom della precedente, i prezzi $DI(S;G)$ si avvicinano a quelli del benchmark con quest'ordine: $m = 6$, $m = 5$, $m = 2$, $m = 4$, $m = 7$, $m = 3$, $m = 8$, $m = 9$. Ricordando però quanto detto nell'Osservazione 1, quando $m = 8$ oppure $m = 9$ la discrepanza tra $\tilde{\eta}(\epsilon, x)$ e la sua approssimazione di Taylor al terzo ordine diventa significativa e non è più possibile, quindi, trascurare i termini di ordine superiore della serie di Taylor. Per questa ragione il valore del parametro m che risulta essere più appropriato per lo scopo di questo elaborato è $m = 3$, ed è quello che è stato dunque impiegato in questo paragrafo e nel successivo.

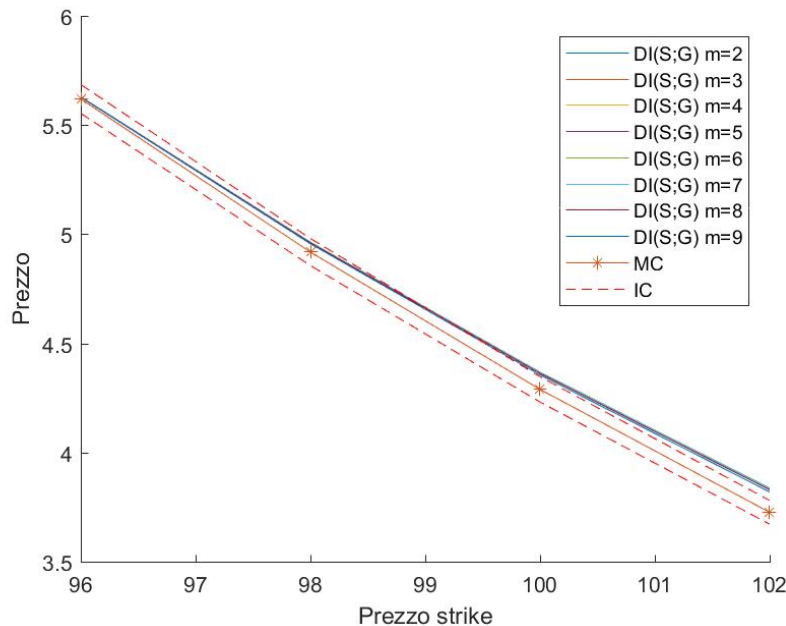


Figura 7.4: Prezzi $DI(S;G)$ in base al parametro m utilizzato. Modello CEV.

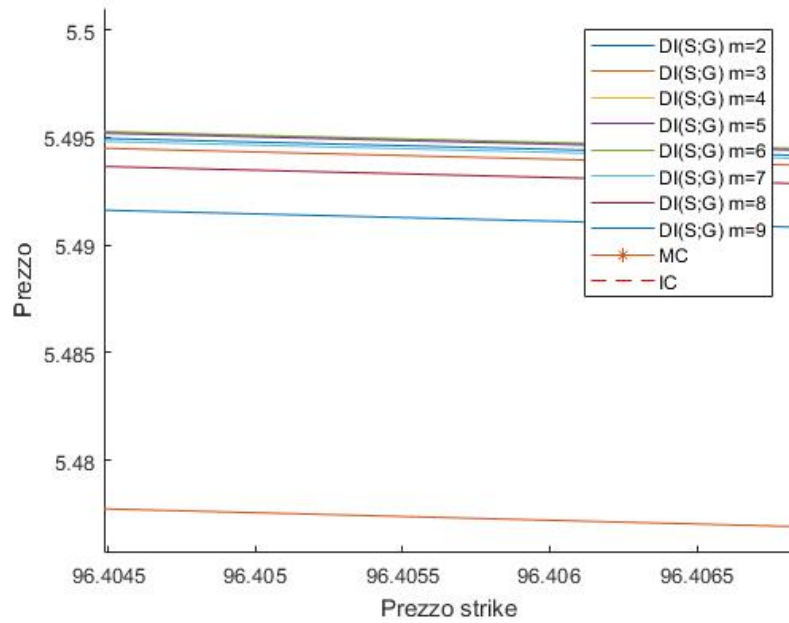


Figura 7.5: Zoom sui prezzi $DI(S;G)$ in base al parametro m utilizzato. Modello CEV.

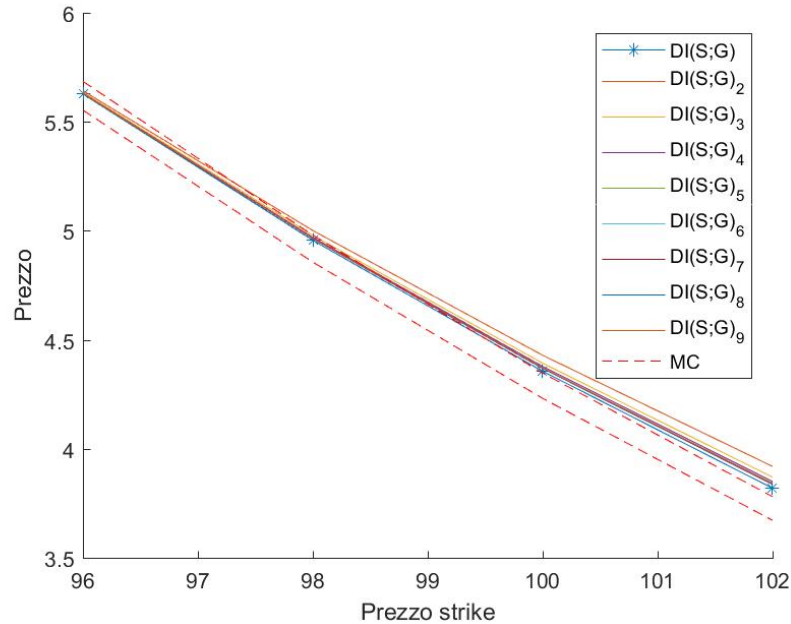


Figura 7.6: Convergenza di $DI(S;G)_m$ a $DI(S;G)$. Modello CEV.

Nella Figura 7.6 è invece mostrata la convergenza dei prezzi $DI(S;G)_m$ a $DI(S;G)$. Si evince che, con l'aumentare del valore del parametro m , i prezzi convergono a

quello accelerato tramite l'acceleratore di Aitken, cioè al prezzo ottenuto con la (6.39). Questo dimostra quanto affermato nel Capitolo 6 con la (6.38).

Nella Tabella 7.3 sono riportati i prezzi di una call down-and-in secondo il modello CEV.

'MC' indica che i prezzi sono calcolati tramite il benchmark Brownian Bridge Monte Carlo (implementato con 100000 simulazioni e 1000 time step), dove 'IC' è il corrispondente intervallo di confidenza; 'Approx' significa che è stato utilizzato il metodo approssimato. Tra parentesi sono riportati gli errori relativi percentuali dei prezzi rispetto al benchmark. I parametri utilizzati sono: prezzo spot $S_0 = 100$, barriera $B = 95$, grado di approssimazione della funzione di volatilità $m = 3$ e strike $K = [96, 98, 100, 102]$. I casi (a), (b) e (c) considerano diversi valori di β , σ e T , a seconda di come β vari nel range $[0, 1]$, che vi sia σ alta o bassa e scadenza corta o lunga.

Nella Figura 7.7, inoltre, è possibile notare l'andamento degli errori relativi percentuali (in valore assoluto) dei prezzi calcolati tramite la formula approssimata.

Sono stati infine riportati, nella Tabella 7.4, i tempi di esecuzione per il pricing con i due diversi metodi.

Tabella 7.3: Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello CEV. Casi (a), (b), (c).

Caso	K	MC	IC	Approx
(a): $\beta = 0.75, \sigma = 0.3S_0^{(1-\beta)}, T = 0.5$	96	5.6197	[5.55,5.69]	5.63(0.17)
	98	4.9180	[4.86,4.98]	4.96(0.90)
	100	4.2890	[4.23,4.35]	4.36(1.78)
	102	3.7257	[3.67,3.78]	3.83(2.89)
(b): $\beta = 0.75, \sigma = 0.15S_0^{(1-\beta)}, T = 5$	96	10.3237	[10.20,10.44]	10.32(0.01)
	98	9.5634	[9.45,9.68]	9.61(0.53)
	100	8.8500	[8.74,8.96]	8.95(1.13)
	102	8.1807	[8.07,8.29]	8.33(1.82)
(c): $\beta = 0.5, \sigma = 0.3S_0^{(1-\beta)}, T = 1$	96	8.9943	[8.89,9.09]	8.98(-0.18)
	98	8.2210	[8.12,8.32]	8.30(0.91)
	100	7.4978	[7.41,7.59]	7.66(2.23)
	102	6.8254	[6.74,6.91]	7.08(3.76)

Capitolo 7. Risultati Numerici

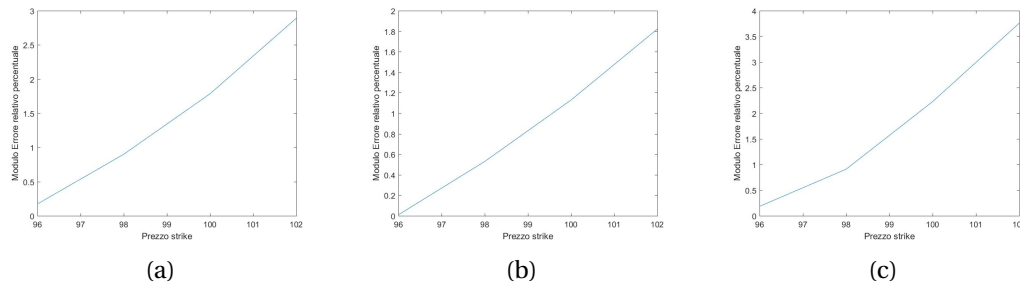


Figura 7.7: Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata. Modello CEV.

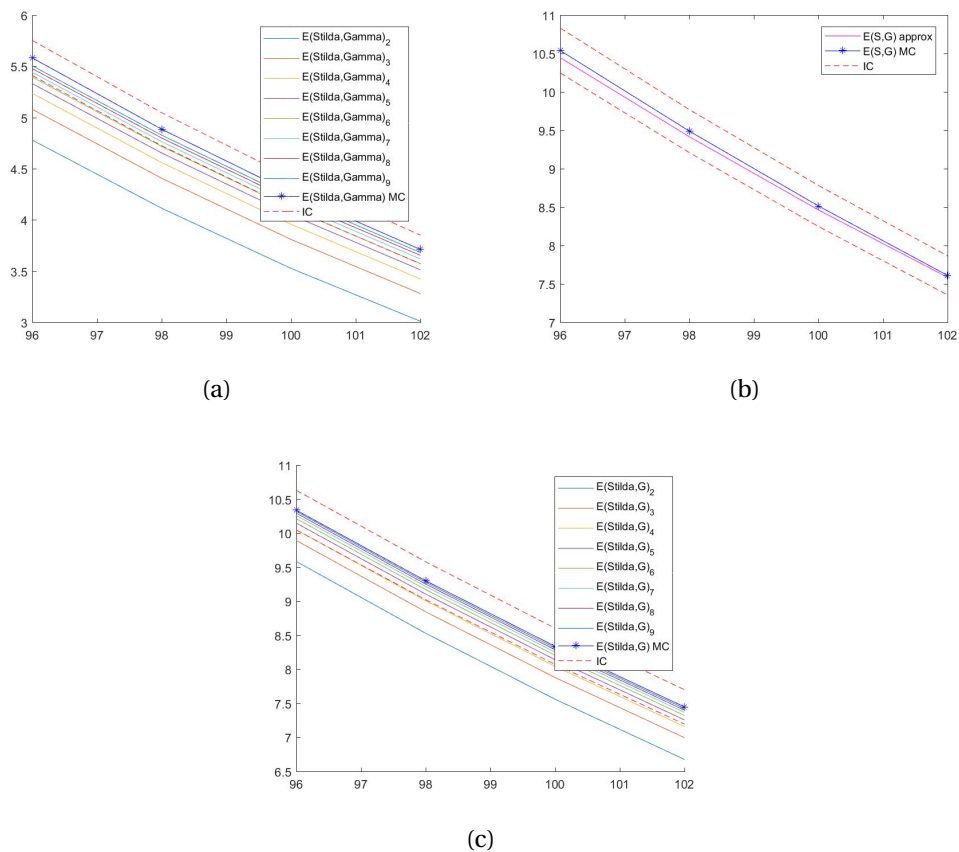


Figura 7.8: Convergenza dei prezzi delle tre opzioni Europee: $E(\tilde{S}; \Gamma)$, $E(S; G)$ e $E(\tilde{S}; G)$. Modello CEV.

Tabella 7.4: Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello CEV.

Metodo	Tempo		
	(a)	(b)	(c)
Approx	0.0534	0.0506	0.0518
MC	16.7647	16.0796	16.6459

Col fine di valutare nel dettaglio la bontà del metodo descritto nel Capitolo 6, sono stati confrontati i prezzi delle tre opzioni Europee $E(\tilde{S}; \Gamma)$, $E(S; G)$ e $E(\tilde{S}; G)$ calcolati sia con la formula approssimata, cioè con le (6.36), (6.37) e (6.35) rispettivamente, che con il metodo Monte Carlo (si noti che, poiché non si tratta di opzioni barriera, non è stata impiegata la tecnica del Brownian Bridge). Per i codici di tali implementazioni si rimanda all'Appendice (Capitolo 11).

Nella Figura 7.8 sono mostrati i risultati ottenuti con i parametri del caso (a) della Tabella 7.3. Si evince che, quando il valore del parametro m aumenta, i prezzi approssimati convergono a quelli calcolati tramite le simulazioni. L'approssimazione, quindi, garantisce prezzi con un buon livello di precisione.

Analizzando i risultati ottenuti (si veda la Tabella 7.3 e la Figura 7.7), si può notare che gli errori relativi percentuali, prodotti dall'utilizzo della formula (6.39), diventano maggiori (in modulo) in presenza di:

- opzioni *out-of-the-money* (OTM): in tutti e tre i casi considerati, quando $K > S_0$ i prezzi sono più distanti rispetto al benchmark;
- σ elevata: nei casi (a) e (c), che corrispondono ad una σ più alta, gli errori diventano più consistenti.
- β ridotto: nel caso (c), in cui β è inferiore, gli errori sono più elevati. Ciò è stato riscontrato anche in ulteriori test dove, a parità degli altri parametri, valori di β più elevati hanno portato a prezzi più precisi.

Gli errori ottenuti sono comunque sufficientemente contenuti quando non si richiede un livello di precisione eccessivamente alto.

Guardando ai tempi di esecuzione (Tabella 7.4), inoltre, si osserva che nel caso del metodo Monte Carlo questi possono essere anche 300 volte superiori rispetto a quelli derivanti dall'utilizzo della formula approssimata.

È dunque ragionevole affermare che nel pricing di un'opzione call down-and-out, con sottostante che evolve secondo il modello CEV, l'utilizzo della formula approssimata, introdotta nel Capitolo 6, è una valida alternativa al metodo Monte Carlo per un utilizzo pratico, garantendo risultati soddisfacenti, tempi di esecuzione estremamente più bassi ed un considerevole risparmio nell'allocazione di memoria.

7.3 Risultati: modello a Volatilità Non Lineare

Si consideri il modello a volatilità non lineare descritto nel sottoparagrafo 2.1.2. Nella Tabella 7.5 sono riportati i prezzi di una call down-and-in secondo il modello a volatilità non lineare, il cui andamento è anche mostrato nella Figura 7.9.

'MC' indica che i prezzi sono calcolati tramite il benchmark Brownian Bridge Monte Carlo (implementato con 100000 simulazioni e 1000 time step), dove 'IC' è il corrispondente intervallo di confidenza; 'Approx' significa che è stato utilizzato il metodo approssimato. Tra parentesi sono riportati gli errori relativi percentuali dei prezzi rispetto al benchmark. I parametri utilizzati sono: prezzo spot $S_0 = 100$, barriera $B = 95$, grado di approssimazione della funzione di volatilità $m = 3$ e strike $K = [96, 98, 100, 102]$. I casi (a) e (b) considerano diversi valori di α , β , μ e T , a seconda di come varino α , β e μ , che vi sia scadenza corta o lunga.

Nella Figura 7.10, inoltre, è possibile notare l'andamento degli errori relativi percentuali (in valore assoluto) dei prezzi calcolati tramite la formula approssimata.

Sono stati infine riportati, nella Tabella 7.6, i tempi di esecuzione per il pricing con i due diversi metodi.

Tabella 7.5: Prezzi calcolati con i diversi metodi. Modello LV. Casi (a) e (b).

Caso	K	MC	IC	Approx
(a): $\beta = 0.05, \alpha = 0.05, \mu = -0.1, T = 5$	96	2.7810	[2.74,2.82]	2.82(1.37)
	98	2.2092	[2.18,2.24]	2.22(0.64)
	100	1.7388	[1.71,1.77]	1.73(-0.57)
	102	1.3558	[1.33,1.38]	1.32(-2.37)
(b): $\beta = 0.075, \alpha = 0.05, \mu = -0.1, T = 3$	96	6.4918	[6.40,6.58]	6.60(1.74)
	98	5.8168	[5.73,5.90]	5.825(0.14)
	100	5.2082	[5.13,5.29]	5.11(-1.86)
	102	4.6619	[4.58,4.74]	4.46(-4.32)

Tabella 7.6: Tempi di esecuzione per i diversi metodi di pricing. Modello LV.

Metodo	Tempo	
	(a)	(b)
Approx	0.0512	0.0526
MC	9.1426	9.3230

7.3. Risultati: modello a Volatilità Non Lineare

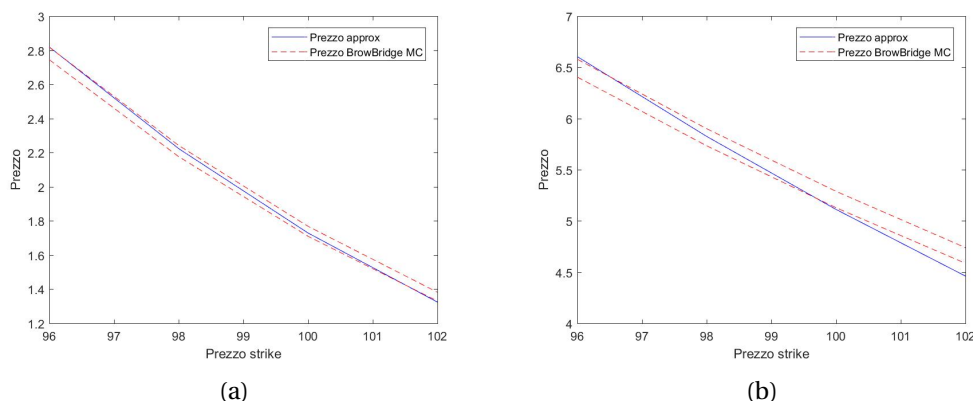


Figura 7.9: Prezzi call donw-and-in. Modello LV.

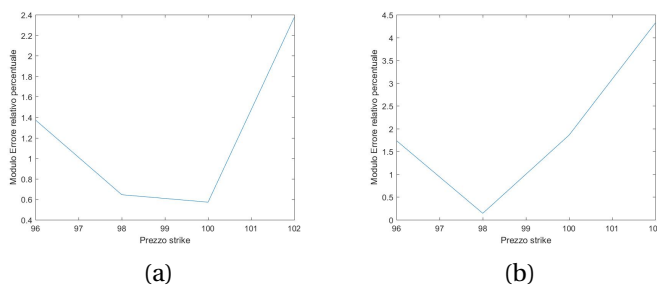


Figura 7.10: Valore assoluto degli errori relativi percentuali dei prezzi di una call donw-and-in calcolati con formula approssimata. Modello LV.

Analizzando i risultati ottenuti (si veda la Tabella 7.5 e la Figura 7.10), si può notare che gli errori relativi percentuali, prodotti dall'utilizzo della formula (6.39), diventano maggiori in presenza di:

- opzioni *out-of-the-money* (OTM): in entrambi i casi considerati, infatti, quando $K > S_0$ i prezzi sono più distanti rispetto al benchmark;
- β ridotto: è stato riscontrato in ulteriori test che, a parità degli altri parametri, valori di β più elevati hanno portato a prezzi più precisi.

Gli errori ottenuti sono comunque sufficientemente contenuti quando non si richiede un livello di precisione eccessivamente alto.

Guardando ai tempi di esecuzione (Tabella 7.6), inoltre, si osserva che nel caso del metodo Monte Carlo questi possono essere circa 200 volte superiori rispetto a quelli derivanti dall'utilizzo della formula approssimata.

È dunque ragionevole affermare che nel pricing di un'opzione call down-and-out,

Capitolo 7. Risultati Numerici

con sottostante che evolve secondo il modello a volatilità non lineare, l'utilizzo della formula approssimata, introdotta nel Capitolo 6, è una valida alternativa al metodo Monte Carlo per un utilizzo pratico, garantendo risultati soddisfacenti, tempi di esecuzione estremamente più bassi ed un considerevole risparmio nell'allocazione di memoria.

Conclusioni Parte IV

8 Conclusioni

Il presente elaborato di tesi è basato sul pricing di opzioni a barriera singola sotto l'ipotesi che il sottostante evolva secondo modelli a volatilità costante e/o locale.

Dapprima è stato descritto il modello di Black&Scholes ed i suoi limiti. Con il fine di superare questi ultimi, sono stati introdotti i modelli a volatilità locale (tra cui il CEV), modelli che risultano efficaci nel pricing delle opzioni barriera ed anche utili ad identificare eventuali mispricing.

Si è parlato di alcuni tra i vari metodi utilizzati per calcolare il prezzo di queste opzioni, focalizzandosi in particolare sulla tecnica del Brownian Bridge Monte Carlo e su una formula approssimata introdotta da H. Funahashi e M. Kijima in [13].

Con il Brownian Bridge Monte Carlo, che è stato considerato come benchmark, viene calcolato il prezzo come valore atteso del payoff scontato tramite la simulazione del sottostante ed il calcolo della probabilità che questo raggiunga il livello di barriera in istanti che non vengono monitorati.

La formula approssimata (6.39), invece, permette di prezzare un'opzione barriera down-and-in grazie ad una combinazione di tre opzioni Europee standard, due delle quali con funzione di volatilità simmetrizzata. Quest'ultima è approssimata da una successione di funzioni lisce che convergono all'originale. Attraverso la tecnica del chaos expansion è stata sviluppata una formula per prezzare le opzioni Europee così caratterizzate ed in seguito è stato applicato l'acceleratore di convergenza di Aitken in modo da ottenere un prezzo approssimato per l'opzione down-and-in.

Questi due metodi sono stati implementati in Matlab col fine di essere confrontati: sono stati effettuati calcoli con diversi valori dei parametri, anche in base al modello utilizzato (Black&Scholes, Constant Elasticity of Variance e volatilità non lineare).

In particolare è stato confermato dai test che, all'aumentare di m (grado di approssimazione della funzione di volatilità), la formula approssimata converge a quella accelerata con l'acceleratore di Aitken.

Capitolo 8. Conclusioni

Inoltre sono state fatte diverse considerazioni in seguito alle quali si è scelto di utilizzare nei calcoli il valore 3 per il parametro m .

Nei risultati numerici sono stati riportati gli errori relativi percentuali della formula approssimata rispetto al benchmark, cioè la (6.10) nel modello di Black&Scholes ed il Brownian Bridge Monte Carlo (con 1000 time step e 100000 simulazioni) nei modelli CEV e volatilità non lineare.

È emerso che nel modello di Black&Scholes la formula approssimata conduce sempre a risultati migliori rispetto al Monte Carlo, dunque il suo utilizzo è da preferire. Nei modelli a volatilità locale si riscontra che gli errori relativi percentuali sono piuttosto contenuti, garantendo prezzi validi per un utilizzo pratico.

Inoltre si nota che con le simulazioni si necessita di tempi di esecuzioni estremamente più alti rispetto a quelli derivanti dall'impiego della formula approssimata.

Considerando quanto detto finora, ed il considerevole risparmio nell'allocazione di memoria, è possibile affermare che, nell'ambito dei modelli a volatilità costante e/o locale, la formula approssimata sviluppata nel Capitolo 6 è una valida alternativa al metodo Monte Carlo quando non si richiede un livello di precisione eccessivamente alto.

Relativamente a possibili sviluppi futuri, col fine di migliorare l'accuratezza dell'approssimazione bisognerebbe considerare un ordine più elevato nella tecnica del chaos expansion, rendendo però la formula ben più complicata.

Inoltre resta aperta la questione del trade-off tra il grado di approssimazione della funzione di volatilità simmetrizzata e l'ordine della sua espansione di Taylor. La scelta di valori appropriati per questi ultimi è un problema rilevante.

Va ricordato, inoltre, che la simmetrizzazione vale solo nel caso di tasso risk-free nullo. Un tentativo di risolvere tali problematiche è quello proposto da H. Funahashi in [6], dove viene ricavato un nuovo schema approssimato per il pricing di opzioni a barriera singola con modelli a volatilità locale, stocastica e loro combinazioni. Per maggiori dettagli se ne consiglia la lettura.

Appendice **Parte V**

9 Codici formula approssimata

```
function [DI_S_G, DI_S_G_m,E_S_tilda_Gamma_m,E_S_G,...
E_S_tilda_G_m,tempo]=Call_down_in_approx(S0,K,T,B,...
epsilon,sigma,alpha,beta,mu,flagMod)
% OUTPUT:
% DI_S_G: Prezzo approssimato call down and in scritta su S con
% payoff G vista come combinazione di tre call europee standard
% DI_S_G_m: Prezzo approssimato call down and in scritta su S con
% payoff G vista come combinazione di tre call europee standard;
% il prezzo dipende dal parametro m
% E_S_tilda_Gamma_m: Prezzo approssimato opzione call Europea con
% payoff Gamma e sottostante simmetrizzato S_tilda;
% il prezzo dipende dal parametro m
% E_S_G: Prezzo approssimato opzione call Europea
% con payoff G e sottostante S
% E_S_tilda_G_m: Prezzo approssimato opzione call Europea con
% payoff G e sottostante simmetrizzato S_tilda;
% il prezzo dipende dal parametro m
% tempo: tempo di esecuzione
% INPUT:
% S0: spot price
% K: strike price
% T: maturity
% B: barriera (down)
% epsilon: livello di approssimazione della simmetrizzazione,
% epsilon=1/m
% sigma: volatilità
% alpha, beta, mu: parametri (alpha e beta positivi) che
% definiscono la funzione di volatilità sigma(x), x=S/B
```

Capitolo 9. Codici formula approssimata

```
% flagMod: 'BS' se modello di Black&Scholes, 'CEV' se
% Constant Elasticity of Variance, 'LV' se non linear Local
% Volatility
% NB: la funzione di volatilità (implicita) dev'essere del tipo:
% sigma per il modello B&S; sigma_fun=@(S) sigma*S^(beta-1) per
% il modello CEV; sigma=@(x)(alpha+beta*x*B/S0).*exp(-mu*x*B/S0)
% per il modello non lineare LV
% NB: è stato scelto N=3 come ordine di espansione di Taylor

tic
x0=S0/B;
if strcmp(flagMod,'BS')==1
%% Calcolo integrali
eta_tilde0= sigma; % NB: non c'è bisogno di simmetrizzare il
% processo (nessuna approssimazione), dunque non è necessario
% l'utilizzo dell'acceleratore di convergenza di Aitken
eta_tilde0_der1=0;
eta_tilde0_der2=0;
eta_tilde0_der3=0;

p1=eta_tilde0+(x0-1)*eta_tilde0_der1+((x0-1)^2)*...
eta_tilde0_der2/2+((x0-1)^3)*eta_tilde0_der3/6;
p2=eta_tilde0+x0*(eta_tilde0_der1+(x0-1)*eta_tilde0_der2+...
((x0-1)^2)*eta_tilde0_der3/2)+(x0-1)*eta_tilde0_der1+...
((x0-1)^2)*eta_tilde0_der2/2+((x0-1)^3)*eta_tilde0_der3/6;
p3n=@(n) ((x0-1).^n)*(eta_tilde0+x0*eta_tilde0_der1+...
(x0-1)*(eta_tilde0_der1+x0*eta_tilde0_der2)+((x0-1)^2)*...
(eta_tilde0_der2+x0*eta_tilde0_der3)/2)./factorial(n);

Sigma_T=(p1^2)*T;
q_T=(p1^2)*p2*eta_tilde0*(T^2)/2+(p1^2)*(T^2)*(p3n(1)*...
eta_tilde0_der1+p3n(2)*eta_tilde0_der2+p3n(3)*...
eta_tilde0_der3)/2;

%% Prezzi approssimati delle tre call europee per la stima
%% del prezzo della call down and in

%% Prezzo approssimato call europea scritta su S_tilda
%% (processo simmetrizzato) con payoff Gamma
```

```

E_S_tilda_Gamma=(B-K*x0)/2+(q_T*(B-K*x0).*exp(-(B-K*x0).^2./...
(2*K.^2*x0^2*Sigma_T))/(sqrt(2*pi)*Sigma_T^(3/2))+(x0*...
sqrt(Sigma_T)*K.*exp(-(B-K*x0).^2./(2*K.^2*x0^2*Sigma_T)))/...
sqrt(2*pi)+abs(B-K*x0).*(2*normcdf(abs(B-K*x0)./(K*x0*...
sqrt(Sigma_T)),0,1)-1)/2;

% Prezzo approssimato call europea scritta su S con payoff G
K_tilde=1-K/S0;
Omega_T=T*sigma^2;
v_T=((sigma^4)*T^2)/2;
E_S_G= S0*normpdf(K_tilde,0,sqrt(Omega_T)).*(Omega_T^2-v_T*...
K_tilde)/Omega_T+S0*K_tilde.*(1-normcdf(-K_tilde/...
sqrt(Omega_T),0,1));

% Prezzo approssimato call europea scritta su S_tilda (processo
% simmetrizzato) con payoff G
E_S_tilda_G=(S0-K)/2+(q_T*(K-S0).*exp(-(K-S0).^2/(2*S0^2*...
Sigma_T))/(sqrt(2*pi)*Sigma_T^(3/2))+(S0*sqrt(Sigma_T)*...
exp(-(K-S0).^2/(2*S0^2*Sigma_T))/sqrt(2*pi)+abs(K-S0).*(...
(2*normcdf(abs(K-S0)/(S0*sqrt(Sigma_T)),0,1)-1)/2;

%% Prezzo approssimato call down and in scritta su S con payoff G
DI_S_G= E_S_tilda_Gamma+E_S_G-E_S_tilda_G;

else
if strcmp(flagMod,'CEV')==1
sigma_hat=sigma*B^(beta-1);
eta_tilde=@(epsilon,S) sigma_hat*exp((beta-1)*sqrt(epsilon.^2+...
(log(S/B))^2));
eta_tilde0=@(epsilon) eta_tilde(epsilon,B);
% x_t(0)=1 per ogni t, cioè S=B
eta_tilde0_der1=@(epsilon) 0;
eta_tilde0_der2=@(epsilon) sigma_hat*(beta-1)*exp((beta-1)*...
*epsilon)./epsilon;
eta_tilde0_der3=@(epsilon) -3*eta_tilde0_der2(epsilon);
sigma_fun=@(S) sigma*S^(beta-1);
% funzione di volatilità secondo il modello CEV

elseif strcmp(flagMod,'LV')==1

```

Capitolo 9. Codici formula approssimata

```
eta_tilde=@(epsilon,x) (alpha+beta*B*exp(sqrt(epsilon.^2+...
(log(x)).^2))/S0).*exp(-mu*B*exp(sqrt(epsilon.^2+(log(x)).^2))/S0);
eta_tilde0=@(epsilon) eta_tilde(epsilon,1);
% x_t(0)=1 per ogni t, cioè S=B
eta_tilde0_der1=@(epsilon) 0;
eta_tilde0_der2=@(epsilon) -B*exp(epsilon-(B*mu*exp(epsilon)))/...
S0.*(B*beta*mu*exp(epsilon)+S0*alpha*mu-S0*beta)./(epsilon*S0^2);
eta_tilde0_der3=@(epsilon) -3*eta_tilde0_der2(epsilon);
sigma_fun=@(S) (alpha+beta*S/S0).*exp(-mu*S/S0);
% volatilità secondo il modello non lineare LV
end

p1=@(epsilon) eta_tilde0(epsilon)+(x0-1)*...
eta_tilde0_der1(epsilon)+((x0-1)^2)*eta_tilde0_der2(epsilon)...
/2+((x0-1)^3)*eta_tilde0_der3(epsilon)/6;
p2=@(epsilon) eta_tilde0(epsilon)+x0*...
(eta_tilde0_der1(epsilon)+(x0-1)*eta_tilde0_der2(epsilon)+...
((x0-1)^2)*eta_tilde0_der3(epsilon)/2)+(x0-1)*...
eta_tilde0_der1(epsilon)+((x0-1)^2)*eta_tilde0_der2(epsilon)/...
2+((x0-1)^3)*eta_tilde0_der3(epsilon)/6;
p3n=@(n,epsilon) ((x0-1).^n)*(eta_tilde0(epsilon)+x0*...
eta_tilde0_der1(epsilon)+(x0-1)*(eta_tilde0_der1(epsilon)+x0*...
eta_tilde0_der2(epsilon))+((x0-1)^2)*...
(eta_tilde0_der2(epsilon)+x0*eta_tilde0_der3(epsilon)))/...
2)./factorial(n);

Sigma_T=@(epsilon) (p1(epsilon).^2)*T;
q_T=@(epsilon) (p1(epsilon).^2)*p2(epsilon).*...
eta_tilde0(epsilon)*(T^2)/2+(p1(epsilon).^2)*(T^2)*...
(p3n(1,epsilon).*eta_tilde0_der1(epsilon)+p3n(2,epsilon).*...
eta_tilde0_der2(epsilon)+p3n(3,epsilon).*...
eta_tilde0_der3(epsilon))/2;

%% Prezzi approssimati delle tre call Europee, con livello di
%% approssimazione m della volatilità, per la stima del prezzo
%% della call down and in

% Prezzo approssimato call Europea scritta su S_tilda
% (processo simmetrizzato)
```

```

E_S_tilda_Gamma_m=@(epsilon) (B-K*x0)/2+((B-K*x0)*...
q_T(epsilon).*exp(-(B-K*x0).^2./(2*K.^2*x0^2*...
Sigma_T(epsilon)))/sqrt(2*pi)*Sigma_T(epsilon).^(3/2))+...
(K*x0*sqrt(Sigma_T(epsilon)).*exp(-(B-K*x0).^2./(2*K.^2*...
x0^2*Sigma_T(epsilon)))/sqrt(2*pi)+abs(B-K*x0).*(2*...
normcdf(abs(B-K*x0)./(K*x0*sqrt(Sigma_T(epsilon))),0,1)-1)/2;

% Prezzo approssimato call Europea scritta su S con payoff G
K_tilde=1-K/S0;
Omega_T=T*sigma_fun(S0)^2;
v_T=((sigma_fun(S0)^4)*T^2)/2;
E_S_G=S0*normpdf(K_tilde,0,sqrt(Omega_T)).*(Omega_T^2-v_T*...
K_tilde)/Omega_T+S0*K_tilde.*(1-normcdf(-K_tilde/...
sqrt(Omega_T),0,1));

% Prezzo approssimato call Europea scritta su S_tilda
% (processo simmetrizzato) con payoff G
E_S_tilda_G_m=@(epsilon) (S0-K)/2+((K-S0)*q_T(epsilon)*...
exp(-(K-S0).^2/(2*S0^2*Sigma_T(epsilon)))/sqrt(2*pi)*...
Sigma_T(epsilon).^(3/2)+(S0*sqrt(Sigma_T(epsilon))*...
exp(-(K-S0).^2/(2*S0^2*Sigma_T(epsilon)))/sqrt(2*pi)+...
abs(K-S0).*(2*normcdf(abs(K-S0)/(S0*...
sqrt(Sigma_T(epsilon))),0,1)-1)/2;

%% Prezzo approssimato call down and in scritta su S con
%% payoff G con livello di approssimazione m della volatilità
DI_S_G_m=@(epsilon) E_S_tilda_Gamma_m(epsilon)+E_S_G-...
E_S_tilda_G_m(epsilon);
% il prezzo dipende da m=1/epsilon

%% Impiego dell'acceleratore di convergenza di Aitken
%% per il calcolo del prezzo approssimato della call
%% down and in scritta su S con payoff G
m=1/epsilon;
DI_S_G=DI_S_G_m(1/(m+2))-((DI_S_G_m(1/(m+2))-...
DI_S_G_m(1/(m+1))).^2)/(DI_S_G_m(1/(m+2))-2*...
DI_S_G_m(1/(m+1))+DI_S_G_m(1/m));

% Decomentare le seguenti righe se si vuole avere in output

```

Capitolo 9. Codici formula approssimata

```
% il prezzo delle tre opzioni Europee accelerate tramite
% l'acceleratore di convergenza di Aitken. Se, invece, si
% preferisce avere la dipendenza dal parametro m lasciare
% le righe commentate.
% E_S_tilda_Gamma_m=E_S_tilda_Gamma_m(1/(m+2))-...
((E_S_tilda_Gamma_m(1/(m+2))-E_S_tilda_Gamma_m(1/(m+1)))^2)/...
(E_S_tilda_Gamma_m(1/(m+2))-2*E_S_tilda_Gamma_m(1/(m+1))+...
E_S_tilda_Gamma_m(1/m));
% E_S_tilda_G_m=E_S_tilda_G_m(1/(m+2))-...
((E_S_tilda_G_m(1/(m+2))-E_S_tilda_G_m(1/(m+1)))^2)/...
(E_S_tilda_G_m(1/(m+2))-2*E_S_tilda_G_m(1/(m+1))+...
E_S_tilda_G_m(1/m));

end
tempo=toc;
end
```

10 Codici Brownian Bridge Monte Carlo

Funzione MC Barr BrowBridge

```
function [Prezzo,IC,tempo]=MC_Barr_BrowBridge(S0,K,B,T,r,sigma,...
alpha,beta,mu,NSim,flagTime,flagMod)
% OUTPUT:
% Prezzo: prezzo opzione call barriera Down&In con Brownian
% Bridge Monte Carlo scritta su un sottostante la cui volatilità
% (implicita) evolve secondo un modello a volatilità locale
% IC: intervallo di confidenza
% tempo: tempo di esecuzione
% INPUT:
% S0: spot price
% K: strike price
% B: barriera (down)
% T: maturity
% r: tasso di interesse risk-free
% sigma: volatilità
% alpha, beta, mu: parametri (alpha e beta positivi) che
% definiscono la funzione di volatilità (locale) a seconda del
% modello selezionato
% NSim: numero di simulazioni per il sottostante
% flagTime: 1 se benchmark MC (Nstep=1000), 2 se monitoraggio
% giornaliero, 3 se settimanale, 4 se mensile
% flagMod: 'BS' se modello di Black&Scholes, 'CEV' se Constant
% Elasticity of Variance, 'LV' se non linear Local Volatility

tic
if flagTime==1
Nsteps=1000;
```

Capitolo 10. Codici Brownian Bridge Monte Carlo

```
elseif flagTime==2
Nsteps=365*T; % giorni dell'anno
elseif flagTime==3
Nsteps=52*T; % settimane dell'anno
elseif flagTime==4
Nsteps=12*T; % mesi dell'anno
end
Nsteps=fix(Nsteps);

% Simulazione sottostante
[S,Prob]=Asset_condprob(S0,B,T,r,sigma,alpha,beta,mu,NSim,...
Nsteps,flagMod);

% Payoff scontato e prezzo stimato
Prezzo=zeros(size(K));
IC=zeros(size(K,1),2);
for i=1:size(K,1)
Disc_Payoff=exp(-r*T)*max(S(:,end)-K(i),0).*Prob;
[Prezzo(i),~,IC(i,:)]=normfit(Disc_Payoff);
end
tempo=toc;

end
```

Funzione Asset condprob

```
function [S, Prob]=Asset_condprob(S0,B,T,r,sigma,alpha,beta,...
mu,NSim,Nsteps,flagMod)
% OUTPUT:
% S: sottostante secondo un modello a volatilità locale
% Prob: probabilità condizionata che S abbia toccato la barriera B
% INPUT:
% S0: spot price
% B: barriera (down)
% T: maturity
% r: tasso di interesse risk free
% sigma: volatilità
% alpha, beta, mu: parametri che definiscono la funzione di
% volatilità (locale)
```

```

% NSim: numero di simulazioni per il sottostante
% Nsteps: numero di passi temporali
% flagMod: 'BS' se modello di Black&Scholes, 'CEV' se Constant
% Elasticity of Variance, 'LV' se non linear Local Volatility

S=zeros(NSim,Nsteps+1);
S(:,1)=S0;
P=zeros(NSim,Nsteps);
dt=T/Nsteps;
if strcmp(flagMod,'CEV')==1
sigma_fun=zeros(NSim,Nsteps+1);
sigma_fun(:,1)=sigma*S(:,1).^(beta-1);
elseif strcmp(flagMod,'LV')==1
sigma_fun=zeros(NSim,Nsteps+1);
sigma_fun(:,1)=(alpha+beta*S(:,1)/S0).*exp(-mu*S(:,1)/S0);
end

% Simulazione
Z=randn(NSim,Nsteps);
Prob=1;

for j=1:Nsteps
if strcmp(flagMod,'BS')==1
S(:,j+1)=S(:,j)+r*S(:,j)*dt+sqrt(dt)*sigma*S(:,j).*Z(:,j);
% schema di Eulero
P(:,j)=1-exp(-2*log(S(:,j)/B).*log(S(:,j+1)/B)/(sigma^2*dt));

else
S(:,j+1)=S(:,j)+r*S(:,j)*dt+sqrt(dt)*sigma_fun(:,j).*...
S(:,j).*Z(:,j);
% schema di Eulero
if strcmp(flagMod,'CEV')==1
sigma_fun(:,j+1)=sigma*S(:,j+1).^(beta-1);
elseif strcmp(flagMod,'LV')==1
sigma_fun(:,j+1)=(alpha+beta*S(:,j+1)/S0).*exp(-mu*...
S(:,j+1)/S0);
end

P(:,j)=1-exp(-2*(log(S(:,j)/B).*log(S(:,j+1)/B))./...

```

Capitolo 10. Codici Brownian Bridge Monte Carlo

```
(sigma_fun(:,j).^2*dt));  
end  
Prob=Prob.*max(P(:,j),0);  
end  
  
Prob= 1-Prob; % Probabilità di aver toccato la barriera  
% in [0,T] condizionata ad S(T)  
  
end
```


11 Codici Monte Carlo per Europee

Funzione MC

```
function [Prezzo,IC,tempo]=MC(S0,K,B,T,r,sigma,alpha,beta,mu,...
NSim,flagTime,flagMod,flagSot,flagPay)
% OUTPUT:
% Prezzo: prezzo opzione call Europea con metodo Monte Carlo
% IC: intervallo di confidenza
% tempo: tempo di esecuzione
% INPUT:
% S0: spot price
% K: strike price
% B: barriera (down)
% T: maturity
% r: tasso di interesse risk free
% sigma: volatilità
% alpha, beta, mu: parametri (alpha e beta positivi) che
% definiscono la funzione di volatilità (locale)
% a seconda del modello selezionato
% NSim: numero di simulazioni per il sottostante
% flagTime: 1 se benchmark MC (Nstep=1000), 2 se monitoraggio
% giornaliero, 3 se settimanale, 4 se mensile
% flagMod: 'BS' se modello di Black&Scholes, 'CEV' se
% Constant Elasticity of Variance, 'LV' se non linear
% Local Volatility
% flagSot: 0 se sottostante S, 1 se sottostante
% simmetrizzato S_tilda
% flagPay: 'G' se il payoff è  $G(S)=\max(S(T)-K,0)$ ;
% 'Gamma' se il payoff è  $K*\max(B^2/-S(T),0)/B$ .
```

Capitolo 11. Codici Monte Carlo per Europee

```
tic
if flagTime==1
Nsteps=1000;
elseif flagTime==2
Nsteps=365*T; % giorni dell'anno
elseif flagTime==3
Nsteps=52*T; % settimane dell'anno
elseif flagTime==4
Nsteps=12*T; % mesi dell'anno
end
Nsteps=fix(Nsteps);

% Simulazione sottostante
S=Asset(S0,B,T,r,sigma,alpha,beta,mu,NSim,Nsteps,flagMod,flagSot);

% Payoff scontato e prezzo stimato
Prezzo=zeros(size(K));
IC=zeros(size(K,1),2);
for i=1:size(K,1)
if strcmp(flagPay,'Gamma')==1
Disc_Payoff=exp(-r*T)*(K(i).*max(B^2/K(i)-S(:,end),0)/B);
elseif strcmp(flagPay,'G')==1
Disc_Payoff=exp(-r*T)*max(S(:,end)-K(i),0);
end
[Prezzo(i),~,IC(i,:)]=normfit(Disc_Payoff);
end

tempo=toc;

end
```

Funzione Asset

```
function S=Asset(S0,B,T,r,sigma,alpha,beta,mu,NSim,Nsteps,...
flagMod,flagSot)
% OUTPUT: S: sottostante
% INPUT:
% S0: spot price
% B: barriera (down)
% T: maturity
```

```

% r: tasso di interesse risk free
% sigma: volatilità
% alpha, beta, mu: parametri che definiscono la funzione
% di volatilità (locale)
% NSim: numero di simulazioni per il sottostante
% Nsteps: numero di passi temporali
% flagMod: 'BS' se modello di Black&Scholes, 'CEV' se
% Constant Elasticity of Variance, 'LV' se non linear
% Local Volatility
% flagSot: 0 se sottostante S, 1 se sottostante
% simmetrizzato S_tilda
% Nb: sottostante discretizzato con schema di Eulero semplice:
%  $S(t_{(j+1)})=S(t_j)*(1+r*dt+sigma(S(t_j))*Z*sqrt(dt))$ 

S=zeros(NSim,Nsteps+1);
S(:,1)=S0;
dt=T/Nsteps;

if strcmp(flagMod,'CEV')==1
sigma_fun=zeros(NSim,Nsteps+1);
sigma_hat=sigma*B^(beta-1);
if flagSot==0
sigma_fun(:,1)=sigma*S(:,1).^(beta-1);
elseif flagSot==1
sigma_fun(:,1)=sigma_hat*(S(:,1)/B).^(beta-1);
% volatilità simmetrizzata. Nb: S0>=B per ipotesi
end

elseif strcmp(flagMod,'LV')==1
sigma_fun=zeros(NSim,Nsteps+1);
if flagSot==0
sigma_fun(:,1)=(alpha+beta*S(:,1)/S0).*exp(-mu*S(:,1)/S0);
elseif flagSot==1
sigma_fun(:,1)=(alpha+beta*(B/S0)*(S(:,1)/B)).*exp(-mu*(B/S0)...
*(S(:,1)/B));
% volatilità simmetrizzata. Nb: S0>=B per ipotesi
end
end

```

Capitolo 11. Codici Monte Carlo per Europee

```
% Simulazione
Z=randn(NSim,Nsteps);
for j=1:Nsteps
if strcmp(flagMod,'BS')==1
S(:,j+1)=S(:,j).*exp((r-sigma^2/2)*dt+sigma*sqrt(dt)*Z(:,j));
else
S(:,j+1)=S(:,j)+r*S(:,j)*dt+sqrt(dt)*sigma_fun(:,j).*S(:,j).*Z(:,j);
% schema di Eulero

if strcmp(flagMod,'CEV')==1
if flagSot==0
sigma_fun(:,j+1)=sigma*S(:,j+1).^(beta-1);
elseif flagSot==1
index1=find(S(:,j+1)/B>=1);
sigma_fun(index1,j+1)=sigma_hat*(S(index1,j+1)/B).^(beta-1);
index2=find(S(:,j+1)/B<1);
sigma_fun(index2,j+1)=sigma_hat*(S(index2,j+1)/B).^(-(beta-1));
end

elseif strcmp(flagMod,'LV')==1
if flagSot==0
sigma_fun(:,j+1)=(alpha+beta*S(:,j+1)/S0).*exp(-mu*S(:,j+1)/S0);
elseif flagSot==1
index1=find((S(:,j+1)/B)>=1);
sigma_fun(index1,j+1)=(alpha+beta*(B/S0)*(S(index1,j+1)/B)).*...
exp(-mu*(B/S0)*(S(index1,j+1)/B));
index2=find((S(:,j+1)/B)<1);
sigma_fun(index2,j+1)=(alpha+beta*(B/S0)./(S(index2,j+1)/B)).*...
exp(-mu*(B/S0)./(S(index2,j+1)/B));
end
end
end

end

end
```

Bibliografia

- [1] Dupire B. *Pricing and Hedging with Smiles*. Report. Paribas Capital Markets Swaps e Options Research Team, 1993 (cit. alle pp. 11, 19).
- [2] Dupire B. «Pricing with a Smile». In: *RISK Magazine* 7 (1994), pp. 18–20 (cit. alle pp. 11, 19).
- [3] De Ponte C.N. «Pricing barrier options with numerical methods». Science in Applied Mathematics. Potchefstroom campus of the North-West University (cit. a p. 29).
- [4] Gobet E. «Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes». In: *Stochastic Processes Appl.* 87 (2000), 167–197 (cit. a p. 43).
- [5] Carr P. Ellis K. e Gupta V. «Static hedging of exotic options». In: *Journal Finance* 53 (1998), p. 1167 (cit. a p. 46).
- [6] Funahashi H. *An Analytical Approximation for single Barrier Options under Stochastic Volatility Models*. Manuscript. Graduate School of Social Sciences, Tokyo Metropolitan University, 2016 (cit. a p. 76).
- [7] Stout M. I. «Numerical Pricing of Equity Barrier Options with Local Volatility». Delft University of Technology, 2014 (cit. a p. 19).
- [8] Akahori J. e Imamura Y. «On a symmetrization of diffusion processes». In: *Quantitative Finance* 14 (2014), 1211–1216 (cit. a p. 44).
- [9] Baldi P. Caramellino L. e Iovino M.G. «Pricing general barrier options: A numerical approach using sharp large deviations». In: *Mathematical Finance* 9.4 (1999), 293–322 (cit. a p. 37).
- [10] Hull J.C. *Opzioni, Futures e altri derivati*. 9^a ed. Pearson, 2015, pp. 331–49 (cit. alle pp. 3, 9).
- [11] Van der Kamp R. «Local Volatility Modelling». Science in Applied Mathematics (Financial Engineering). University of Twente, 2009 (cit. a p. 28).
- [12] Funahashi H. e Kijima M. «A chaos expansion approach for the pricing of contingent claims». In: *Computazionale Finance* 18 (2015), 27–58 (cit. alle pp. 44, 47, 53).

Bibliografia

- [13] Funahashi H. e Kijima M. «Analytical pricing of single barrier options under local volatility models». In: *Quantitative Finance* 16.6 (2016), pp. 867–886 (cit. alle pp. xxii, 43, 46, 47, 49, 51–53, 75).
- [14] Domingo T. e Klopfer W. «Implying Local Volatility». In: *Wilmott Magazine* (2001) (cit. a p. 12).
- [15] Broadie M. Glasserman P. e Kou S. G. «A Continuity Correction for Discrete Barrie Options». In: *Mathematical Finance* 7.4 (1997), pp. 325–49 (cit. alle pp. 19, 33, 38).
- [16] Carr P. e Lee R. «Put-call symmetry: Extensions and applications». In: *Mathematical Finance* 19 (2009), 523–560 (cit. alle pp. 44, 45).
- [17] Davydov D. e Linetsky V. «Pricing and hedging path-dependent options under the CEV process». In: *Manage. Sci.* 47 (2001), 949–965 (cit. a p. 43).
- [18] Imamura Y. Ishigaki Y. Kawagoe T. e Okumura T. «Some simulation results of the put-call symmetry method applied to stochastic volatility models». In: *Proceedings of the 43rd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Application*. A cura di Tokyo. 2012, 242–245 (cit. a p. 44).
- [19] Imamura Y. Ishigaki Y. e Okumura T. «A numerical scheme based on semi-static hedging strategy». In: *Monte Carlo Methods Appl.* 20 (2014), 223–235 (cit. a p. 44).
- [20] Baldi P. «Exact asymptotics for the probability of exit from a domain and applications to simulations». In: *The Annals of Probability* 23.4 (1995), 1644–1670 (cit. a p. 37).
- [21] Basileios P. «Enhanced Monte Carlo Methods for Pricing and Hedging Exotic Options». Applied and Computational Mathematics. Pembroke College, 2005 (cit. a p. 37).
- [22] Merton R.C. «Theory of Rational Option Pricing». In: *Bell Journal Economics and Management Science* 47.1 (1973), pp. 141–83 (cit. a p. 3).
- [23] Rubinstein M. e Reiner E. «Breaking down the barriers». In: *Risk* 4 (1991), 28–35 (cit. a p. 43).
- [24] Cox J.C. e Ross S.A. «The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes». In: *Journal of Financial Economics* 3 (1976), pp. 145–66 (cit. a p. 12).
- [25] Artur S. «Efficient Numerical PDE Methods to Solve Calibration and Pricing Problems in Local Stochastic Volatility Models». In: *Global Derivatives trading & Risk management* (2011) (cit. a p. 13).
- [26] Black F. e Scholes M. *The Pricing of Options and Coporate Liabilities*. Vol. 81. 3. The Journal of Political Economy, 1973, pp. 637–59 (cit. a p. 3).

- [27] Björk T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 3^a ed. Oxford Finance Series, 2009 (cit. alle pp. 3–6, 15–18).
- [28] Zhu Z. *Pricing Barrier Options with Local Volatility Surface for Advantage*. Report. CSIRO Mathematical e Information Sciences, 2005 (cit. alle pp. 19, 20).