

POLITECNICO DI MILANO

FACOLTA DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica



ASSET ALLOCATION CON PROCESSI JUMP-DIFFUSION

Relatore:
Prof. Daniele Marazzina

Tesi di laurea di:
Andrea Cristini
MATRICOLA:851036

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

In questo lavoro si considera il problema di ottimizzazione di portafoglio in tempo continuo di un investitore con coefficiente di avversione al rischio costante, che massimizza l'utilità attesa della sua ricchezza finale (problema di Merton). Uno dei grandi limiti del modello proposto da Merton è la dinamica che viene considerata per quanto riguarda il titolo rischioso. Una dinamica alla Black e Scholes, infatti, non tiene conto del rischio che il prezzo del titolo possa subire grandi variazioni in brevi istanti temporali. Per far fronte a questo problema, in seguito, vengono considerati processi di Lévy di tipo jump-diffusion. Queste dinamiche, sebbene descrivano più realisticamente il comportamento dei titoli finanziari, rendono la ricerca di una soluzione del problema generale, in forma chiusa, assai difficile. Alla luce di ciò verrà quindi proposta una soluzione approssimata che sostituisce ai salti un termine diffusivo di compensazione. Una volta individuata la soluzione del problema approssimato, si troveranno limiti per la strategia ottima reale e si analizzerà il RWEL (relative wealth equivalent loss) di questo metodo, per capire la bontà dello stesso. Attraverso questo indice, verranno infine fatte considerazioni sull'importanza dei salti nei problemi di asset allocation.

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni teoriche	6
1.1 Processi stocastici e processi di Lévy	6
1.1.1 Definizione di processo stocastico	6
1.1.2 I processi di Lévy	8
1.1.3 Compound Poisson process	9
1.1.4 Formula di Itô per processi jump-diffusion	11
1.2 Controllo ottimo stocastico	12
1.2.1 Un esempio	13
1.2.2 Il problema generale	14
1.2.3 Le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman	16
2 Il modello generale	20
2.1 Ottimizzazione di portafoglio	20
2.1.1 Gli asset	20
2.1.2 Ricchezza e utilità attesa	22
2.1.3 Equazione di HJB per il problema	23
2.2 Il problema approssimato	24
2.2.1 Limiti per la strategia ottima	26
2.2.2 RWEL (relative wealth equivalent loss)	29

2.2.3 Un particolare modello affine	32
2.3 Generalizzazione del modello: double-jump process	36
3 Risultati numerici	39
3.1 La parametrizzazione del modello	39
3.2 Strategia ottima e limiti	40
3.3 Relative wealth equivalent loss	43
3.4 Un'approssimazione alternativa del problema	54
3.5 Processi double-jump	56
4 Conclusioni	58
A Codici Matlab	60
Bibliografia	78

Introduzione

Si consideri il problema di ottimizzazione di portafoglio in tempo continuo di un investitore, con coefficiente di avversione al rischio costante che massimizza l'utilità attesa della sua ricchezza finale. Sebbene in *Merton* [13] venga trovata una soluzione semplice ed esplicita di tale problema, alcune ipotesi alla base del modello proposto non rappresentano al meglio la realtà. In particolare la dinamica utilizzata per descrivere il titolo rischioso (moto browniano geometrico) si è rilevata poco adatta a rappresentare i movimenti dei prezzi dei titoli finanziari. Questo particolare tipo di processo stocastico, infatti, presenta delle traiettorie continue, escludendo quindi la possibilità di salti del prezzo del titolo rischioso. Tuttavia queste variazioni istantanee dei prezzi sono osservabili nella realtà e non possono essere trascurate a priori in un problema di asset allocation. In questo elaborato viene studiato l'articolo di *Ascheberg* [1], in cui vengono considerati dei processi di tipo jump diffusion per descrivere la dinamica dei titoli rischiosi. Esso ipotizza che il mercato sia composto da un solo titolo rischioso e da un titolo privo di rischio. L'investitore ha come obiettivo il delineare una strategia di asset allocation che gli permetta di massimizzare la propria funzione di utilità attesa. Si passa quindi a descrivere una soluzione approssimata basata sullo sviluppo di Taylor, al secondo ordine del termine di salto. In questo modo si ottiene un nuovo problema, in cui il titolo rischioso segue una dinamica solamente diffusiva. Quest'ultimo problema può essere risolto esplicitamente mediante un teorema di rappresentazione stocastica, ottenendo così una soluzione in forma chiusa facilmente trattabile. A questo punto viene introdotto un indice di affidabilità chiamato RWEL. Questo indice permette non solo di

capire quanto è buona l'approssimazione introdotta, ma anche di quantificare l'apporto della componente di salto al problema considerato: più il RWEL è alto, più la componente di salto è importante per le scelte dell'investitore. Dopo essere stato introdotto, il RWEL viene calcolato per diversi valori dei parametri del modello considerato. Questo framework generale viene applicato ad un modello affine con volatilità stocastica e termine di salto; la volatilità viene trattata come nel modello di Heston, mentre i salti possono avere ampiezza stocastica: in particolare si considera il caso in cui l'ampiezza dei salti è costante, distribuita come una beta o distribuita come una log-normale. Infine, il modello di *Ascheberg* [1] verrà generalizzato anche al caso in cui la volatilità possa presentare dei salti nella sua dinamica.

Il lavoro sarà strutturato come segue: nel capitolo 1 verranno introdotte alcune notazioni teoriche necessarie per comprendere il proseguo. In particolare verranno introdotti i processi di Lévy, concentrando l'attenzione sui processi jump-diffusion generalizzati. Questi modelli, infatti, permettono di descrivere la dinamica del prezzo del titolo in maniera più realistica, risolvendo diversi problemi che sorgono quando si utilizza, come processo, il moto browniano geometrico. Inoltre saranno descritte le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman (HJB) per questo problema: prima verranno introdotte in maniera generale, presentando anche alcuni esempi, poi verranno specializzate per il problema considerato e si cercherà, qualora possibile, una loro soluzione in forma chiusa. Nel capitolo 2 verrà descritto il modello di *Ascheberg* [1] e l'approssimazione che viene utilizzata da esso per risolverlo. Inoltre saranno definiti diversi limiti per la strategia ottima ed il RWEL della stessa. L'ultimo capitolo analizzerà i risultati numerici ottenuti, con particolare attenzione alla bontà dell'approssimazione utilizzata, per riuscire a capire il peso dei salti nel problema di asset allocation considerato.

Capitolo 1

Nozioni teoriche

In questo capitolo verranno introdotte, brevemente, alcune nozioni teoriche utili a comprendere l'elaborato. In particolare verranno introdotti i processi di Lévy soffermandosi con particolare attenzione ai processi jump-diffusion e jump-diffusion generalizzati. Infine, verranno studiate le equazioni di Hamilton Jacobi Belmann che verranno specializzate per processi con componente di salto. Per ulteriori dettagli riguardanti i processi di Lévy e altri aspetti teorici si veda *Cont & Tancov* [6].

1.1 Processi stocastici e processi di Lévy

1.1.1 Definizione di processo stocastico

Definizione 1.1.1 (Processo stocastico). *Definiamo processo stocastico l'oggetto*

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P) \tag{1.1}$$

dove

- T : è l'insieme dei tempi (sottoinsieme di \mathbb{R}^+).
- \mathcal{F} : è la sigma-algebra delle parti di Ω .

- $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$: è la filtrazione.
- X_t : è una famiglia di variabili aleatorie definita su (Ω, \mathcal{F}) a valori in uno spazio misurabile (E, \mathcal{E}) e tale che, per ogni t , X_t è F_t -misurabile.
- P : è una legge di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

Un processo stocastico quindi può essere visto come una famiglia di variabili aleatorie $(X_t)_{t \in [0, T]}$, indicizzate nel tempo. In alternativa se consideriamo una realizzazione ω del processo, la traiettoria $X_\cdot(\omega) : t \rightarrow X_t(\omega)$ definisce una funzione del tempo a valori in E . Infine, se consideriamo sia t che ω come variabili, un processo stocastico può anche essere visto come una funzione $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Definizione 1.1.2 (Processo di Poisson). Sia $(\tau_i)_{i \geq 1}$ una successione di variabile aleatorie esponenziali indipendenti di parametro λ e sia $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k$ allora il processo $(N_t, t \geq 0)$ definito come

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n} \tag{1.2}$$

è chiamato processo di Poisson di intensità λ .

I processi di Poisson sono anche chiamati processi di conteggio, in quanto N_t rappresenta il numero di eventi che si verificano prima del tempo t : se, ad esempio, T_n rappresenta l'istante temporale dove il prezzo di un determinato titolo presenta un salto, N_t è semplicemente il numero di salti del prezzo fino all'istante t .

Questa procedura di conteggio definisce una misura, detta appunto misura di Radon:

Definizione 1.1.3 (Misura di Radon). Sia $A \subset \mathbb{R}^+$ un sottoinsieme misurabile, si definisce la misura

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\} \tag{1.3}$$

$M(A)$ è positiva e finita con probabilità 1 per ogni insieme limitato.

Inoltre essa dipende da ω (è quindi una misura random). Infine l'intensità λ del processo di Poisson N_t ne determina la media, cioè: $E[M(A)] = \lambda|A|$.

Sfruttando le proprietà di questa misura, è possibile riscrivere un processo di Poisson in forma integrale

$$N_t = M(\omega, [0, t]) = \int_0^t M(w) ds \quad (1.4)$$

In generale, per un processo di Poisson, non vale la proprietà di martingalità (cioè $E[N_t|N_s] \neq N_s$). Per questo motivo viene introdotto il concetto di processo di Poisson compensato, ovvero la versione "centrata" dei processi introdotti fin'ora

$$\tilde{N} = N_t - \lambda t \quad (1.5)$$

Tale processo è ancora a incrementi indipendenti e, per esso, vale anche la proprietà di martingalità. Come visto in precedenza, anche in questo caso può essere introdotta una misura aleatoria (detta misura di Radon compensata) con la quale è possibile riscrivere il nuovo processo in forma integrale

$$\tilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda dt = M(\omega, A) - \lambda|A| \quad (1.6)$$

Definizione 1.1.4 (Il processo di Cox). *Definiamo processo di Cox la generalizzazione di processo di Poisson dove l'intensità $\lambda(t)$ può essere una variabile aleatoria*

$$\lambda = \lambda(\omega, t).$$

Se si condiziona rispetto ad una realizzazione della variabile aleatoria $\lambda(w, t)$, si ottiene un processo di Poisson come definito in precedenza.

1.1.2 I processi di Lévy

Definizione 1.1.5 (Processo CADLAG). *Si definisce processo CADLAG un processo stocastico (X_t) , che ha come traiettorie funzioni continue da destra e con limite finito da sinistra.*

Definizione 1.1.6 (Processo di Lévy). *Un processo CADLAG definito, sullo spazio (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^d , è chiamato processo di Lévy se:*

- $X_0 = 0$
- *Ha incrementi indipendenti:* $(X_{t_2} - X_{t_1}) \perp (X_{t_3} - X_{t_2}) \perp \dots \perp (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.
- *Ha incrementi stazionari:* La legge di $X_{t+h} - X_t$ non dipende da t .
- *Continuità stocastica:* $\forall \epsilon \geq 0 \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$.

Si noti che la continuità stocastica non implica in alcun modo la continuità delle traiettorie del processo; essa serve per garantire che i salti avvengano in istanti temporali casuali e non decisi a priori, prima di definire il processo stesso.

Inoltre, se si sceglie $t = n\Delta$, si può vedere che $\forall t$ e per ogni $n \geq 1$, $X_t = S_n(\Delta)$ può essere rappresentato come la somma di n variabili aleatorie indipendenti; se X è un processo di Lévy, per ogni t , X_t ha una distribuzione *infinitamente divisibile*. Viceversa, data una distribuzione infinitamente divisibile F , è sempre possibile costruire un processo di Lévy X_t in modo che X_1 abbia F come distribuzione.

1.1.3 Compound Poisson process

Definizione 1.1.7 (Compound Poisson process). *Un compound Poisson process con distribuzione dei salti f e intensità λ è un processo stocastico X_t definito come*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{1.7}$$

dove le variabili aleatorie Y_i , che rappresentano l'ampiezza dei salti sono *i.i.d* con distribuzione f , mentre N_t è un processo di poisson di intensità λ ed indipendente dalle Y_i .

Le traiettorie di questa famiglia di processi sono funzioni CADLAG costanti a tratti. Inoltre si noti che lo stesso processo di Poisson, per come è stato definito prima, può essere visto come un compound Poisson process con $Y_i=1 \quad \forall i$;

Si può ora utilizzare il concetto di misura random introdotto in precedenza per studiare il comportamento dei salti di un compound poisson process. Per ogni compound Poisson process (essendo esso un processo con traiettorie CADLAG) è possibile associare una

misura aleatoria su $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$. Sia $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ un insieme misurabile, si definisce la misura

$$J_X(B) = \# \{ (t, X_t - X_{t-}) \in B \}. \quad (1.8)$$

Sia A un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R} , $J_X([t_1, t_2] \times A)$ conta il numero di salti che avvengono tra t_1 e t_2 la cui ampiezza appartiene ad A .

Definizione 1.1.8 (Misura di Lévy). *Sia $(X_t)_{t>0}$ un processo di Lévy su \mathbb{R} . La misura ν definita su \mathbb{R} come*

$$\nu(A) = E[\# \{ t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A \}] \quad (1.9)$$

è chiamata misura di Lévy di X : $\nu(A)$ è il numero atteso, per unità di tempo, di salti la cui ampiezza appartiene ad A .

Attraverso queste misure, è possibile rappresentare un compound poisson process in forma integrale

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} x J_x(ds \times dx) \quad (1.10)$$

dove J_x è una misura aleatoria di Poisson con misura di intensità $\nu(dx)dt$. Il processo è stato quindi riscritto come la somma dei suoi salti e, poichè i salti di questi processi sono quasi certamente in numero finito in un intervallo limitato $[0, t]$, l'integrale stocastico della formula è ben definito.

Definizione 1.1.9 (Processi jump-diffusion). *Si definiscono jump-diffusion tutti quei processi X_t ottenuti dalla somma di un moto browniano e un compound Poisson process*

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (1.11)$$

dove μ e σ sono dei parametri, mentre W_t è un moto browniano.

D'ora in avanti verranno considerati processi di Lévy solo di questa forma.

1.1.4 Formula di Itô per processi jump-diffusion

Si consideri un processo jump-diffusion

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + J_t = X^c(t) + J_t \quad (1.12)$$

dove $X^c(t) = \mu t + \sigma W_t$ è la parte continua del processo, mentre $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i$ è un compound poisson process. Si definisca $Y_t = f(X_t)$ dove $f \in C^2(\mathbb{R})$ e si indichi con $T_i, i = 1 \dots N_T$ i tempi dove si verificano i salti del processo X_t . Su $]T_i, T_i + 1[$ la dinamica di X_t è

$$dX_t = dX_t^c = \sigma W_t + \mu t \quad (1.13)$$

quindi applicando la formula di Itô a questo processo si ottiene

$$\begin{aligned} Y_{T_{i+1}^-} - Y_{T_i} &= \int_{Y_{T_i}}^{Y_{T_{i+1}^-}} \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t) dt + \int_{Y_{T_i}}^{Y_{T_{i+1}^-}} f'(X_t) dX_t \\ &= \int_{Y_{T_i}}^{Y_{T_{i+1}^-}} \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t) dt + \int_{Y_{T_i}}^{Y_{T_{i+1}^-}} f'(X_t) dX_t^c \end{aligned} \quad (1.14)$$

poichè $dX_t = dX_t^c$ nell'intervallo in cui X_t è continuo.

Se un salto di ampiezza ΔX_t avviene, il processo Y_t avrà una variazione esprimibile come $f(X_{t-} + \Delta X_s) - f(X_{t-})$. La variazione totale di Y_t può essere scritta come la somma di due contributi

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t) dt + \int_0^t f'(X_t) dX_t^c \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} f(X_{t-} + \Delta X_s) - f(X_{t-}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nel caso più generale in cui la funzione $f(t, X_t) : [0, T] \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ sia $C^{1,2}$ e il processo X_t definito come

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_t + \int_0^t b_s ds + \sum_{i=0}^{N_t} \Delta X_i \quad (1.16)$$

dove b_t e σ_t sono funzioni continue tali che $E[\int_0^T \sigma_t^2 dt] < \infty$, la formula di Itô è la seguente

$$\begin{aligned}
 f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) b_s \right] ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(s, X_s) \sigma_s^2 ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) \sigma_s dW_s + \sum_{i \geq 1, T_i \leq t} [f(X_{T_i-} + \Delta X_i) - f(X_{T_i-})].
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

che in notazione differenziale diventa

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) b_t dt + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(t, X_t) dt \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) \sigma_t dW_t + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Nel caso in cui le T_i siano variabili aleatorie esponenziali i.i.d e le ΔX_i siano variabili aleatorie i.i.d con distribuzione F , i salti sono descritti da un compound Poisson process a cui è associata una misura di salto J_x . Sfruttando l'eguaglianza (1.10) il termine di salto nella (1.17) può essere scritto come

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} [f(X_{s-} + y) - f(X_{s-})] J_x(dsdy)
 \tag{1.19}$$

ottenendo così la formula di Itô in forma integrale.

1.2 Controllo ottimo stocastico

In questa sezione verranno introdotte alcune notazioni di base di controllo ottimo stocastico. In particolare verrà presentato il problema di un investitore che deve scegliere la percentuale di ricchezza da investire in un titolo rischioso. Dopo una breve introduzione al problema, verranno studiate le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman (HJB) tramite le quali esso verrà risolto. Per ulteriori dettagli teorici si veda *Bjork* [5].

1.2.1 Un esempio

Si consideri il comportamento di un investitore nell'intervallo temporale $[0, T]$. Assumiamo che l'investitore abbia una ricchezza iniziale pari a x_0 e che le opportunità di investimento, in questo periodo, siano le seguenti:

- L'investitore può investire i suoi soldi in un titolo privo di rischio (si supponga che lasci i soldi in banca con un certo tasso di interesse pari a r). La dinamica del titolo privo di rischio è

$$dB_t = rB_t dt. \quad (1.20)$$

- L'investitore può investire in un titolo rischioso il cui prezzo è descritto dal processo stocastico S_t la cui dinamica è

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.21)$$

Indichiamo con u_t^0 e con u_t^1 rispettivamente i pesi del suo portafoglio, per il titolo privo di rischio e per il titolo rischioso, mentre il suo tasso di consumo (all'istante t) verrà indicato con c_t . Restringiamo la nostra analisi al caso in cui la strategia, che l'investitore può adottare, sia autofinanziante e assumiamo che sia possibile un trading continuo, durante il periodo temporale considerato. Se indichiamo con X_t la ricchezza dell'agente al tempo t la dinamica di X sarà

$$dX_t = X_t[u_t^0 r + u_t^1 \alpha] dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW_t. \quad (1.22)$$

Lo scopo dell'investitore è quello di scegliere una strategia, in modo tale da massimizzare la propria utilità totale nel periodo $[0, T]$. Assumiamo che questa utilità sia esprimibile come

$$E \left[\int_0^T F(t, c_t) dt + \Phi(X_T) \right], \quad (1.23)$$

dove F è la funzione di utilità istantanea per il consumo, mentre Φ è una funzione che misura l'utilità di avere soldi accantonati alla fine del periodo. Alcuni vincoli naturali

del problema sono

$$c_t \geq 0, \quad \forall t \quad (1.24)$$

$$u_t^0 + u_t^1 = 1, \quad \forall t. \quad (1.25)$$

La prima condizione traduce il fatto che il consumo può essere solo positivo, mentre la seconda sta ad indicare che l'investitore mette tutta la sua ricchezza iniziale nei due titoli a disposizione.

A questo punto possiamo introdurre formalmente il problema di controllo ottimo che vogliamo risolvere

$$\max_{u^0, u^1, c} E\left[\int_0^T F(t, c_t)dt + \Phi(X_T)\right], \quad \text{tale che} \quad (1.26)$$

$$dX_t = X_t[u_t^0 r + u_t^1 \alpha]dt - c_t dt + u_t^1 \sigma X_t dW_t \quad (1.27)$$

$$X_0 = x_0, \quad (1.28)$$

$$c_t \geq 0 \quad \forall t, \quad (1.29)$$

$$u_t^0 + u_t^1 = 1 \quad \forall t. \quad (1.30)$$

In questo contesto il processo X è chiamato *processo di stato* mentre u^0, u^1 e c_t sono le *variabili di controllo*.

1.2.2 Il problema generale

Generalizziamo ora il problema visto nella sezione precedente. Siano $\mu(t, x, u(t, X_t))$ e $\sigma(t, x, u(t, X_t))$ due funzione della seguente forma

$$\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.31)$$

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.32)$$

Il processo di stato n -dimensionale X che vogliamo "controllare" è descritto dalla dinamica

$$dX_t = \mu(t, x, u(t, X_t))dt + \sigma(t, x, u(t, X_t))dW_t \quad (1.33)$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$. Possiamo controllare (parzialmente) questo processo agendo sul processo di controllo k -dimensionale u che, oltre a dipendere dal tempo t , dipende anche dal processo X . W_t è un moto browniano d -dimensionale.

Definizione 1.2.1 (Legge di controllo ammissibile). *Una legge di controllo u è detta ammissibile se*

- $u(t, x) \in U$, dove U è l'insieme delle leggi ammissibili.
- Per ogni punto iniziale (x, t) la SDE

$$dX_t = \mu(t, x, u(t, X_t))dt + \sigma(t, x, u(t, X_t))dW_t \quad (1.34)$$

$$dX_s = x \quad (1.35)$$

ha un'unica soluzione.

Introduciamo ora la funzione obiettivo del problema di controllo. Consideriamo la coppia di funzioni

$$F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1.36)$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Definiamo quindi la *funzione valore* $T_0(u) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (dove U è lo spazio delle leggi di controllo ammissibili) come

$$J_0(u) = E\left[\int_0^T F(t, X_t^u, u_t)dt + \Phi(X_T^u)\right]. \quad (1.38)$$

Il nostro problema, quindi, si riduce a massimizzare la funzione $T_0(u)$ sull'insieme di tutte le leggi di controllo u ammissibili

$$V_0 = \sup_{u \in U} J_0(u). \quad (1.39)$$

Se esiste una legge di controllo \hat{u} tale per cui

$$J_0(\hat{u}) = V_0, \quad (1.40)$$

allora chiameremo \hat{u} *legge di controllo ottima* per il problema iniziale.

1.2.3 Le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman

Dato un problema di controllo ottimo, è importante rispondere a due domande fondamentali:

- Esiste una legge di controllo ottima?
- Supponendo che questa legge di controllo ottima esiste, come possiamo trovarla?

In questa sezione ci si concentrerà su queste domande e verranno introdotte delle PDE che permettano di trovare una legge di controllo ottima. Per ottenere queste equazioni dobbiamo innanzitutto fare delle assunzioni, che in seguito daremo per vere:

1. La funzione *valore ottimo* V è sufficientemente regolare, cioè $V \in C^{1,2}$.
2. Esiste una legge di controllo ottima \hat{u} .
3. I passaggi al limite che verranno utilizzati in seguito possono essere giustificati.

Passeremo ora a ricavare le equazioni di Hamilton Jacobi Bellman.

Si scelga una legge di controllo arbitraria u e si definisca un'altra legge di controllo u^* nel seguente modo

$$u^*(s, y) = \begin{cases} u(s, y) & \text{se } (s, y) \in [t, t + h] \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u} & \text{se } (s, y) \in (t + h, T] \times \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.41)$$

Si calcoli l'utilità attesa dell'investitore quando utilizza la legge di controllo ottima \hat{u} e quando invece utilizza la legge u^* .

Nel primo caso, l'utilità attesa è stata già definita nella sezione precedente ed è $J(t, x, \hat{u}) = V(t, x)$.

Per la seconda legge di controllo dividiamo l'intervallo temporale $[t, T]$ in due sottointervalli $[t, t+h]$ e $(t+h, T]$

- L'utilità attesa utilizzando u^* nell'intervallo temporale $[t, t+h]$ è

$$E_{t,x}[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds].$$

- Nell'intervallo $(t+h, T]$ invece l'investitore utilizzerà la strategia ottima, partendo da un ricchezza iniziale pari a X_{t+h}^u . L'utilità attesa in questo periodo temporale sarà

$$E_{t,x}[V(t+h, X_{t+h}^u)].$$

L'utilità attesa totale per l'investitore sarà quindi

$$E_{t,x}[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^u)].$$

Comparando le due strategie, poichè per definizione la prima è quella ottimale, si avrà che

$$V(t, x) \geq E_{t,x}[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^u)]. \quad (1.42)$$

per le assunzioni di regolarità su V fatte in precedenza, possiamo ora applicare la formula di Itô a $V(t+h, X_{t+h}^u)$ ottenendo

$$\begin{aligned} V(t+h, X_{t+h}^u) = & V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}^u V(s, X_s^u) \right\} ds \\ & + \int_t^{t+h} \nabla_x V(s, X_s^u) \sigma^u dW_s \end{aligned} \quad (1.43)$$

dove \mathcal{A}^u è l'operatore alle derivate parziali che, nel caso più generale, è definito come

$$\mathcal{A}^u = \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j}(t, x, u) \sigma_{i,j}(t, x, u)' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.44)$$

Applicando il valore atteso $E_{t,x}$ alla (1.42) l'integrale stocastico si annulla. Inseriamo quindi il risultato nella disuguaglianza (1.41) ottenendo

$$E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} [F(s, X_s^u, u_s) ds + \frac{V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}^u V(s, X_s^u)] ds \right] \leq 0. \quad (1.45)$$

Dividiamo ora per h e si faccia il limite al tendere a 0. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (si veda la terza assunzione a inizio sezione) si ottiene che

$$F(t, x, u) + \frac{V}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}^u V(t, x) \leq 0. \quad (1.46)$$

Per quanto detto all'inizio, questa disuguaglianza vale arbitrariamente per qualsiasi legge di controllo u . Inoltre, se si prende come u la legge di controllo ottima, la disuguaglianza si trasformerà in una uguaglianza

$$\frac{V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}^u V(t, x)\} = 0. \quad (1.47)$$

Teorema 1.2.1 (Equazione di Hamilton Jacobi Bellman). *Sotto le assunzioni fatte ad inizio sezione, vale che*

- V soddisfa l'equazione di Hamilton Jacobi Bellman

$$\begin{cases} \frac{V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}^u V(t, x)\} = 0 & \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ V(T, x) = \Phi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (1.48)$$

- Per ogni (t, x) iniziali il sup nell'equazione precedente viene raggiunto quando $u = \hat{u}(t, x)$

Un fatto sorprendente è che le equazioni di HJB, sotto opportune ipotesi di integrabilità, agiscono anche da condizione sufficiente. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 1.2.2 (Verification theorem). *Supponiamo di avere due funzioni $H(t, x)$ e $g(t, x)$ tali che*

- H è sufficientemente integrabile e risolve l'equazione di HJB

$$\begin{cases} \frac{H}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}^u H(t, x)\} = 0 & \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ H(T, x) = \Phi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- La funzione g è una legge di controllo ammissibile.
- Per ogni punto iniziale (x, t) fissato, il limite superiore nell'espressione

$$\sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}^u H(t, x)\}$$

è raggiunto scegliendo $u = g(t, x)$;

allora sono vere le seguenti proprietà:

1. La funzione valore ottimo V per il problema di controllo è data da

$$V(t, x) = H(t, x).$$

2. Esiste una legge di controllo ottima \hat{u} data da $\hat{u}(t, x) = g(t, x)$.

Capitolo 2

Il modello generale

In questo capitolo si entrerà nel vivo del problema. Seguendo quanto fatto in *Ascheberg* [1], verrà introdotta la dinamica dei titoli con cui si lavorerà e le equazioni di HJB per questi processi. Poi si vedrà un'approssimazione del problema che permetta di ottenere facilmente soluzioni in forma chiusa. Infine si cercheranno limiti di vario tipo per la strategia ottima e si discuterà la precisione dell'approssimazione introdotta.

2.1 Ottimizzazione di portafoglio

2.1.1 Gli asset

Si supponga che un investitore possa comprare due titoli nell'economia. Il primo è un titolo privo di rischio che paga un tasso di interesse costante r mentre, il secondo è un titolo rischioso il cui prezzo S_t è soggetto ad eventi di salto. In particolare il prezzo di questo titolo segue la dinamica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t - L dN_t) \quad (2.1)$$

dove

- W_t è un moto browniano.
- N_t è un processo di Cox con intensità stocastica λ .

- L è l'ampiezza di salto del processo jump-diffusion e, in seguito, potrà essere sia costante che una variabile aleatoria. Si noti il segno meno davanti ad L nella dinamica di S_t : questo è dovuto al fatto che L viene definita positiva e che vengono considerati salti che contribuiscono solamente a far diminuire il livello corrente dei prezzi.
- il termine di drift μ , la volatilità $\sigma \geq 0$ e l'intensità λ sono funzioni del tempo t e di un processo di stato Y la cui dinamica è data da

$$dY_t = \alpha dt + \beta d\hat{W}_t \quad (2.2)$$

dove α e β sono a loro volta funzioni del tempo t e del processo Y . \hat{W}_t è un moto browniano correlato con W_t :

$$dW_t d\hat{W}_t = \rho dt.$$

Il processo Y_t rappresenterà nel seguito la varianza del titolo rischioso, cioè $Y_t = \sigma^2$ mentre ρ sarà sempre considerato costante.

Si noti che la dinamica del titolo rischioso è descritta da un processo di tipo jump-diffusion, con volatilità stocastica. Esso è soggetto a tre fonti di incertezza: il moto browniano che compare direttamente nella sua dinamica (W_t), il moto browniano che compare nella dinamica della volatilità (\hat{W}_t) e le realizzazioni del processo N_t che, come abbiamo detto, costituisce la parte di salto del titolo.

L'introduzione di un processo di questo tipo, complica molto la risoluzione del problema iniziale ma permette una descrizione più veritiera di ciò che succede nella realtà: quando un titolo rischioso segue una dinamica puramente diffusiva, senza salti, l'investitore ha pieno controllo sulla composizione del suo portafoglio. Poichè il prezzo del titolo rischioso è una funzione continua, esso può ribilanciare il portafoglio ad ogni cambiamento infinitesimo della sua ricchezza.

La situazione è molto diversa quando viene introdotto un processo che presenta discontinuità: ogni qual volta si presenta un salto, la ricchezza dell'investitore può cambiare di molto prima che esso possa ribilanciare il suo portafoglio. Una conseguenza immediata

di questa affermazione è che i pesi del suo portafoglio non sono sotto il suo controllo ad ogni istante temporale. L'investitore quindi, non solo deve affrontare il rischio tipico dell'incertezza di un titolo puramente diffusivo, ma deve anche tener conto del cambiamento che la sua ricchezza può registrare prima che esso possa ribilanciare il proprio portafoglio.

In questo framework sono possibili situazioni in cui la ricchezza dell'investitori raggiunge livelli negativi. Sarà quindi necessario imporre delle condizioni sulla percentuale investita nel titolo rischioso in modo tale da evitare questi casi.

2.1.2 Ricchezza e utilità attesa

Si consideri un investitore con funzione di utilità potenza

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

con un *coefficiente relativo di avversione al rischio* costante $\gamma > 1$. Se gli unici titoli presenti nel mercato sono i due descritti nella sezione precedente, la dinamica della ricchezza dell'investitore sarà data da

$$dX_t = [(r + u\chi)dt + u\sigma dW_t - uLdN_t] \quad (2.4)$$

dove u denota la percentuale di ricchezza investita nel titolo rischioso e $\chi = \mu - r$.

Si noti che l'espressione (2.4) è stata ottenuta imponendo la condizione di autofinanziamento al portafoglio considerato (per ulteriori dettagli si veda Bjork [5]).

La funzione valore ottimo è data da

$$V(t, x, y) = \sup_{u \in A} E^{t,x,y}[\Phi(X_T)] \quad (2.5)$$

dove $E^{t,x,y}[\cdot]$ è una notazione breve per l'attesa condizionata $E^{t,x,y}[\cdot | X_t = x, Y_t = y]$. Si considerino strategie di investimento u_t , appartenenti alla classe A dei processi sto-

castici della forma $u_t = u(t, x, y)$. Come si è visto poc'anzi, l'utilizzo di processi di tipo jump-diffusion rende possibile l'esistenza di intervalli temporali in cui la ricchezza dell'investitore diventa negativa. Per evitare questa situazione si introduce la condizione

$$1 - uL \geq 0 \quad q.c \quad \forall u \in A. \quad (2.6)$$

Infine, non viene considerato il caso in cui siano ammissibili posizioni corte nel titolo rischioso da parte dell'investitore, cioè

$$u \geq 0 \quad \forall u \in A \quad (2.7)$$

Poichè tutte le quantità rilevanti nel modello sono proporzionali a x , applicando un elementare argomento di scaling si ottiene che

$$V(t, x, y) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} g(t, y), \quad (2.8)$$

cioè la funzione valore ottimo può essere riscritta come il prodotto di un termine che dipende solo dalla ricchezza e di una funzione $g(t, y)$ che dipende invece solo dal tempo e dalla volatilità del titolo.

Per questo motivo, d'ora in avanti, verranno considerate strategie del tipo $u(t, Y_t)$, che non dipendono dal livello corrente di ricchezza dell'investitore.

2.1.3 Equazione di HJB per il problema

Come si è visto nel capitolo precedente, la funzione valore ottimo $V(t, x, y)$ è soluzione delle equazioni di HJB per il problema di portafoglio descritto fin'ora. Tenendo conto del termine aggiuntivo di salto nella dinamica del titolo rischioso, l'equazione di HJB diventa

$$\sup_{u : 1-uL \geq 0, u \geq 0 \quad q.c} \left\{ V_t + x(r + u\chi)V_x + \frac{1}{2}x^2u^2\sigma^2V_{xx} + \alpha V_y + \frac{1}{2}\beta^2V_{yy} + xu\sigma\beta\rho V_{xy} + \lambda[E[V(t, x(1-uL), y)] - V(t, x, y)] \right\} = 0, \quad (2.9)$$

dove l'operatore $E[\cdot]$ rappresenta il valore atteso condizionato all'ampiezza del salto L e alla condizione al contorno $V(T, x, y) = \Phi(x)$.

Per fare in modo che la funzione sia di classe $C^{1,2,2}$, si devono imporre condizioni sui coefficienti che descrivono la dinamica dei titoli. Poichè non è interesse di questo lavoro discutere tali tecnicismi, d'ora in avanti verrà presa come vera la seguente affermazione:

Assunzione 2.1.1. *Esiste una funzione V di classe $C^{1,2,2}$ che risolve l'equazione (2.9) ed il sup nell'equazione è raggiunto in un punto interno $u^* \in A$.*

Sfruttando il *verification theorem* si può quindi affermare che V coincide con la funzione valore ottimo associata all'investitore, mentre u^* è la legge di controllo ottima del problema.

Si noti inoltre che l'assunzione (2.1.1) è banalmente verificata, quindi la validità di essa dipende dalla forma della funzione g nella formula (2.8). In generale, però, una forma chiusa per g non esiste, rendendo quindi complicata la verifica di essa.

Per ulteriori dettagli teorici riguardo questa assunzione si vedano *Kim & Omberg* [9] e *Liu* [10].

2.2 Il problema approssimato

Per trovare una soluzione approssimata al problema, utilizziamo la formula di Taylor arrestata al secondo ordine, per la funzione valore ottimo V

$$V(t, x(1 - uL), y) \approx V(t, x, y) - V_x(t, x, y)xuL + \frac{1}{2}V_{xx}(t, x, y)(xuL)^2. \quad (2.10)$$

Utilizzando questa approssimazione possiamo scrivere che

$$E[V(t, x(1 - uL), y)] \approx V(t, x, y) - V_x(t, x, y)xu\bar{L}_1 + \frac{1}{2}V_{xx}(t, x, y)(xu)^2\bar{L}_2 \quad (2.11)$$

dove \bar{L}_1 e \bar{L}_2 sono rispettivamente il momento primo e secondo dell'ampiezza dei salti. Sostituendo poi l'espressione appena ricavata nell'equazione di HJB (2.9) si ottiene

$$\begin{aligned} \sup_{1-uL \geq 0, u \geq 0 \text{ q.c.}} \{ & \tilde{V}_t + x \underbrace{[(r + u(\chi - \lambda \bar{L}_1))] \tilde{V}_x}_{\tilde{\chi}} + \frac{1}{2} x^2 u^2 \underbrace{(\sigma^2 + \lambda \bar{L}_2)}_{\tilde{\sigma}^2} \tilde{V}_{xx} + \alpha \tilde{V}_y \\ & + \frac{1}{2} \beta^2 \tilde{V}_{yy} + xu\sigma\beta\rho V_{xy} \} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sogetta alla condizione al contorno $V(T, x, y) = \Phi(x)$. Indichiamo con \tilde{V} la soluzione del problema approssimato e con V la soluzione del problema reale.

Si noti che, mediante questa approssimazione, otteniamo un'equazione in cui il termine di salto non è più presente: la dinamica del prezzo del titolo nel problema approssimato è puramente diffusiva con drift e volatilità aggiustati in modo tale da matchare la varianza locale σ^2 , ed il rendimento atteso con quelli del processo originale. Per $L = 0$, ovviamente, l'equazione di HJB per il problema approssimato e quella per il problema originale coincidono.

Anche in questo caso verrà presa come vera la seguente assunzione, che garantisce una soluzione del problema approssimato:

Assunzione 2.2.1. *Esiste una funzione \tilde{V} di classe $C^{1,2,2}$ che risolve l'equazione (2.12) ed il sup nell'equazione è raggiunto in un punto interno $\tilde{u}^* \in A$.*

Bisogna quindi rispondere ora a due domande fondamentali:

- Quanto bene approssima \tilde{u}^* la strategia ottima del problema iniziale u^* ?
- Si può trovare una stima dell'errore di approssimazione senza dover calcolare esplicitamente la funzione valore ottimo V e la legge di controllo ottima u^* del problema iniziale?

Per rispondere a queste domande dobbiamo innanzitutto trovare una soluzione del problema approssimato.

Teorema 2.2.2 (Rappresentazione stocastica di \tilde{V}). *Dato il problema definito dall'equazione di HJB (2.12), supponiamo che*

1. L'intensità dei salti è proporzionale al termine di diffusione del titolo, cioè

$$\lambda = K\sigma^2 \quad (2.13)$$

2. Tutti i coefficienti nel modello sono limitati con derivate di ogni ordine limitate,

allora valgono le seguenti affermazioni

- La funzione valore ottimo \tilde{V} è data da

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x, y) &= \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \tilde{f}(t, y)^k \quad \text{dove} \\ k &\equiv \frac{\gamma(1 + K\bar{L}_2)}{\gamma(1 - \rho^2 + K\bar{L}_2) + \rho^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove \tilde{f} ha come rappresentazione stocastica

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, y) &= \tilde{E}^{t,y} [e^{-\int_t^T \tilde{r}_u du}] \quad \text{con} \\ \tilde{r} &= -\frac{1-\gamma}{k} \left(r + \frac{\tilde{\chi}^2}{2\gamma\tilde{\sigma}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'attesa condizionata $\tilde{E}[\cdot]$ è calcolata usando la misura \tilde{P} sotto la quale Y ha come drift $\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\tilde{\chi}\sigma\beta\rho}{\tilde{\sigma}^2}$.

- Se $(\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\sigma}})^2$ è crescente (decrescente) rispetto a Y allora \tilde{f}_y è negativa (positiva).

La seconda tesi di questo teorema può essere utilizzata per determinare il segno della componente di hedging, per quanto riguarda la strategia ottima del problema approssimato.

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg* [1].

2.2.1 Limiti per la strategia ottima

In questa sezione si determineranno tre tipi di limiti per la strategia ottima. I primi due verranno calcolati nel caso in cui il coefficiente di correlazione ρ sia nulla, mentre il

terzo verrà definito per qualsiasi valore di ρ . Assumiamo che la variabile aleatoria L , che descrive l'ampiezza dei salti, sia positiva

$$L \geq 0. \tag{2.16}$$

I salti quindi hanno un effetto solamente negativo sul prezzo del titolo e non possono in alcun modo aumentare l'utilità dell'investitore. Si ricordi inoltre che, per quanto riguarda il modello considerato, è vietata la vendita allo scoperto del titolo rischioso e che la funzione valore ottimo per l'investitore è della forma $V(t, x, y) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} g(t, y)$. Derivando l'equazione (2.12) rispetto a u si ottiene che la strategia ottima $u^* = u$ è soluzione della condizione al primo ordine

$$\gamma\sigma^2 u = \chi + \sigma\beta\rho \frac{g_y}{g} - \lambda E[L(1-uL)^{-\gamma}]. \tag{2.17}$$

Si passa ora ad enunciare tre proposizioni che descrivono i tipi di limiti introdotti in precedenza.

Proposizione 2.2.3 (Limiti di *prima specie* per la strategia ottima). *Se valgono le ipotesi (2.13) e (2.16) e il coefficiente di correlazione $\rho = 0$ allora*

$$\frac{\tilde{\chi}}{\gamma\tilde{\sigma}^2} - \frac{(1+\gamma)\lambda}{2\tilde{\sigma}^2} (\tilde{u}^*)^2 C(\tilde{u}^*) \leq u^* \leq \tilde{u}^*, \tag{2.18}$$

dove $C(u) = E[\frac{L^3}{(1-uL)^{\gamma+2}}]$, mentre $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\chi}$ sono state definite nell'equazione (2.12).

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Nella Proposizione 2.1.4, la strategia approssimata è usata per definire i limiti superiori e inferiori di quella ottima. Questi limiti, come si vedrà in seguito, non sono molto stringenti. Occorre quindi introdurre dei limiti che si avvicinano maggiormente alla strategia ottima del problema iniziale.

Proposizione 2.2.4 (Limiti di *seconda specie* per la strategia ottima). *Se valgono le ipotesi (2.13) e (2.16) e il coefficiente di correlazione $\rho = 0$, allora $u_{low} \leq u \leq u_{up}$*

dove u_{low} e u_{up} sono definiti nel seguente modo

$$u_{up} = -\frac{1}{A_{up}} + \sqrt{\frac{1}{(2A_{up})^2} + \frac{\tilde{\chi}}{\gamma\tilde{\sigma}^2 A_{up}}} \quad (2.19)$$

dove $A_{up} = \frac{(1+\gamma)\lambda}{2\tilde{\sigma}^2}$ mentre

$$u_{low} = -\frac{1}{A_{low}} + \sqrt{\frac{1}{(2A_{low})^2} + \frac{\tilde{\chi}}{\gamma\tilde{\sigma}^2 A_{low}}} \quad (2.20)$$

dove $A_{low} = \frac{(1+\gamma)\lambda}{2\tilde{\sigma}^2} E\left[\frac{L^3}{(1-u_{up}L)^{\gamma+2}}\right]$.

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Consideriamo infine il caso generale quando $\rho \neq 0$. Per stabilire dei limiti per la soluzione ottima, facciamo la seguente assunzione

$$\rho g_y \geq 0, \quad (2.21)$$

che è soddisfatta, ad esempio, per il modello di Heston. Senza questa condizione il termine $\sigma\beta\rho\frac{g_y}{g}$ è negativo e inferiormente illimitato, in generale.

Proposizione 2.2.5 (Limiti di terza specie per la strategia ottima). *Se valgono le ipotesi (2.13), (2.16) e (2.21) la legge di controllo ottima u^* soddisfa*

$$\underline{u} \leq u^* \leq \bar{u} \quad (2.22)$$

dove \bar{u} è la soluzione ottima del problema iniziale quando $L = 0$, mentre \underline{u} è la soluzione ottima quando il coefficiente di correlazione ρ è nullo.

Le condizioni di prim'ordine corrispondenti sono

$$\begin{aligned} \gamma\sigma^2\underline{u} &= \chi - \lambda E[L(1 - \underline{u}L)^{-\gamma}], e \\ \gamma\sigma^2\bar{u} &= \chi + \sigma\beta\rho\frac{g_y}{g} \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove le funzione g e la sua derivata g_y sono le funzioni in (2.14) ottenute ponendo $\rho = 0$. Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Per vedere se l'ipotesi (2.21) è soddisfatta o no per un determinato modello, verrà utilizzata la seguente proposizione

Proposizione 2.2.6 (Segno del termine di hedging). *Assumendo l'ipotesi (2.13), la funzione g_y è positiva (negativa) se*

$$(1 - \gamma)[u_y^* \chi + u^* \chi_y - \gamma u^* u_y^* \sigma^2 - \frac{1}{2} \gamma u^* (\sigma^2)_y] - \lambda u_y^* E[L(1 - u^* L)^{-\gamma}] + \lambda_y E[(1 - u^* L)^{1-\gamma}] - 1 \quad (2.24)$$

è positiva (negativa). γ_y , σ_y e u_y^* denotano le derivate parziali rispetto a y delle funzioni γ , σ e u_y^* . Nel caso in cui u^* sia deterministica si ha che $u_y^* = 0$ e l'espressione precedente si semplifica in

$$(1 - \gamma)[u^* \chi_y - \frac{1}{2} u^* (\sigma^2)_y] + \lambda_y E[(1 - u^* L)^{1-\gamma}] - 1. \quad (2.25)$$

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

2.2.2 RWEL (relative wealth equivalent loss)

Una volta introdotta l'approssimazione (2.14) per il problema originale, si vuole calcolare la precisione di quest'ultima. Per fare ciò si introduce una misura di accuratezza chiamata RWEL. Questa quantità è la percentuale di ricchezza iniziale che l'investitore, che decide di usare la strategia ottima, può sacrificare ottenendo comunque lo stesso livello di utilità attesa di un investitore che utilizza invece la strategia approssimata. Una volta indicate con u e \tilde{u} le due leggi di controllo per il problema originale e per quello approssimato rispettivamente, si ha che le l'utilità attesa per i due problemi è

$$G(t, x, y, u) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} g(t, x, u), \quad (2.26)$$

e

$$G(t, x, y, \tilde{u}) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} g(t, x, \tilde{u}). \quad (2.27)$$

In formule quindi, il RWEL è definito come la percentuale l di ricchezza tale che

$$G(t, x(1-l), y, u^*) = G(t, x, y, \tilde{u}^*)$$

ed utilizzando la forma esplicita per la funzione G si ottiene

$$l = 1 - \left[\frac{g(t, y, \tilde{u}^*)}{g(t, y, u^*)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.28)$$

Il problema di questa formula, però, è che al denominatore compare la legge di controllo ottima u^* del problema originale che, in generale, non è nota esplicitamente. Da qui alla fine di questa sezione si cercherà quindi, in parallelo con quanto fatto nel capitolo precedente con i limiti per la strategia ottima, di trovare dei limiti che dipendano solamente da \tilde{u}^* e dalla utilità attesa approssimata \tilde{G} .

Per fare ciò si sfrutterà il seguente teorema

Teorema 2.2.7 (Errore di approssimazione). *Si supponga che u e \tilde{u} siano due leggi di controllo ammissibili che soddisfano la condizione (2.6). Si supponga inoltre nel seguito che si possano utilizzare senza restrizioni le formule di Feynman-Kac, allora si ha che*

$$G(t, x, y, u) - \tilde{G}(t, x, y, \tilde{u}) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} D(t, y, u, \tilde{u}). \quad (2.29)$$

Per $D(t, y, u, \tilde{u}) = g(t, y, u) - \tilde{g}(t, y, \tilde{u})$ vale la seguente rappresentazione stocastica

$$D(t, y, u, \tilde{u}) = \int_t^T \hat{E}^{t,y} \left[e^{-\int_t^s \hat{r}_k dk} \hat{D}_s \right] ds, \quad (2.30)$$

$$\hat{D} = \left[\lambda E[R_2(-uL)] - (1-\gamma)\Delta u [\chi - \lambda \bar{L}_1 + \sigma \rho \beta \frac{\tilde{g}_y}{\tilde{g}} - 0.5\gamma(2+\Delta)u(\sigma^2 + \lambda \bar{L}_2)] \right] \tilde{g}$$

dove $R_2(-uL) = \frac{\gamma(1-\gamma^2)}{6} \frac{1}{(1+\xi)^{\gamma+2}} (-uL)^3 \quad \text{con } \xi \in [-uL, 0].$

(2.31)

Nell'equazione (2.30) l'attesa condizionata $\hat{E}[\cdot]$ è presa sotto la misura di probabilità P tale per cui Y ha drift $\hat{\alpha} = \alpha + (1-\gamma)u\sigma\beta\rho$, Δ è definito implicitamente da $\tilde{u} = u(1+\Delta)$ e \hat{r} viene calcolato sfruttando l'equazione

$$-\hat{r} = (1-\gamma)(r + u\chi - 0.5\gamma u^2 \sigma^2) + \lambda[E[(1-uL)^{1-\gamma}] - 1].$$

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Applichiamo ora il Teorema 2.2.7 a due situazioni in particolare

$$\begin{aligned} g(t, y, u^*) &= \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*) + D(t, y, u^*, \tilde{u}^*) \\ g(t, y, \tilde{u}^*) &= \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*) + D(t, y, \tilde{u}^*, \tilde{u}^*) \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove $D(t, y, u^*, \tilde{u}^*)$ rappresenta la differenza tra il modello originale e quello approssimato quando utilizziamo rispettivamente le leggi di controllo u^* e \tilde{u}^* mentre, $D(t, y, \tilde{u}^*, \tilde{u}^*)$ rappresenta la differenza tra i due modelli quando in entrambi i casi viene utilizzata la strategia \tilde{u}^* .

Si procede ora a ricavare i limiti per D : sfruttando quelli trovati nella sezione precedenti per la strategia ottima u^* , si possono scrivere le seguenti disuguaglianze

$$\underline{D} \leq D(t, y, u^*, \tilde{u}^*) \leq \bar{D} \quad e \quad \underline{\tilde{D}} \leq D(t, y, \tilde{u}^*, \tilde{u}^*) \leq \bar{\tilde{D}}$$

dove per semplicità non abbiamo riscritto la dipendenza da (t, y) per ogni limite. Da queste disuguaglianze è possibile ricavare dei limiti anche per le funzioni $g(t, y, u^*)$ e $g(t, y, \tilde{u}^*)$

$$\underline{D} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*) \leq g(t, y, u^*) \leq \bar{D} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*),$$

$$\underline{\tilde{D}} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*) \leq \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*) \leq \bar{\tilde{D}} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*).$$

Facendo il rapporto tra le disequazioni precedenti, otteniamo infine dei limiti per il RWEL che possono essere calcolati anche senza conoscere la soluzione ottima del problema originale

$$\underbrace{\frac{\underline{\tilde{D}} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*)}{\underline{D} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*)}}_{B_1} \leq \frac{\tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*)}{g(t, y, u^*)} \leq \underbrace{\frac{\bar{\tilde{D}} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*)}{\bar{D} + \tilde{g}(t, y, \tilde{u}^*)}}_{B_2}, \quad (2.33)$$

ottenendo così i limiti desiderati

$$(B_1)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq l \leq (B_2)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.34)$$

2.2.3 Un particolare modello affine

Si consideri ora una parametrizzazione specifica del nostro modello. Definita la variabile di stato y come varianza locale del titolo rischioso, si introducono i parametri del modello $\chi, \sigma, \lambda, \beta$ e α nel seguente modo

$$\begin{aligned}\chi(t, y) &= \bar{\chi}y, & \sigma(t, y) &= \sqrt{y}, & \lambda(t, y) &= \bar{\lambda}y, \\ \alpha(t, y) &= \theta - \kappa y, & \beta(t, y) &= \bar{\beta}\sqrt{y}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Si supponga poi che il processo stocastico che descrive la dinamica del titolo rischioso presenta dei salti, la cui intensità è proporzionale a y (ipotesi (2.13)).

Il vantaggio più grande nel definire un modello del genere, sta nel fatto che è possibile trovare delle equazioni (in cui non compare y) che definiscono implicitamente la legge di controllo ottima e la funzione valore ottima del problema considerato. Il seguente risultato permette di identificare tali equazioni che, nel seguito, verranno risolte numericamente

Teorema 2.2.8 (Strategia ottima nel modello affine). *Si consideri il modello con i parametri definiti dalla (2.35). La funzione valore ottimo dell'investitore in questo contesto è*

$$V(t, x, y) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} e^{A(t) + B(t)y},\tag{2.36}$$

dove le seguenti equazioni definiscono implicitamente la forma di $A(t)$, $B(t)$ e della legge di controllo ottima $u^* = u(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi} - \gamma u(t) + \bar{\beta}\rho B(t) - \bar{\lambda}E[(1 - u(t)L)^{-\gamma}L] = 0, \\ B_t(t) + B(t)[(1 - \gamma)\bar{\beta}\rho u(t) - \kappa] + \bar{\lambda}E[(1 - u(t)L)^{1-\gamma}] \\ \quad + 0.5\bar{\beta}^2 B(t)^2 + u(t)^2 \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} + u(t)(1 - \gamma)\bar{\chi} - \bar{\lambda} = 0, \\ A_t(t) + (1 - \gamma)r + \theta B(t) = 0, \end{array} \right.\tag{2.37}$$

con condizioni al contorno $A(T) = 0$ e $B(T) = 0$.

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Queste equazioni possono essere risolte attraverso il seguente schema backward:

1. Partendo dalle condizioni finali $A(T) = 0$ e $B(T) = 0$ si trova, attraverso la prima equazione del sistema, la soluzione al tempo $T - \Delta t$.
2. Approssimando $B_t(t)$ attraverso le differenze finite si ottiene un'equazione esplicita per $B(T - \Delta t)$

$$B(T - \Delta t) = B(T) + \Delta t \{ B(T) [(1 - \gamma) \bar{\beta} \rho u(t) - \kappa] + \bar{\lambda} E[(1 - u(T)L)^{1-\gamma}] + 0.5 \bar{\beta}^2 B(T)^2 + u(T)^2 \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} + u(T)(1 - \gamma) \bar{\chi} - \bar{\lambda} \}.$$

3. Si trova $A(T - \Delta t)$ attraverso l'ultima equazione del sistema

$$A(T - \Delta t) = A(T) + \Delta t (1 - \gamma)r + \theta B(T).$$

4. Si itera la procedura fino ad arrivare al tempo $t = 0$.

Inoltre, se vogliamo calcolare l'utilità attesa che si ottiene applicando una determinata strategia $u(t)$ (non necessariamente ottima), è possibile utilizzare le ultime due equazioni del sistema appena definito per ricavare i corrispondenti parametri $A^u(t)$ e $B^u(t)$.

Si noti inoltre che, dalla prima espressione, è possibile riscrivere la legge di controllo ottima come somma di tre componenti:

- Il primo termine $\frac{\bar{\chi}}{\gamma}$ consiste nel rapporto tra il premio per il rischio $\bar{\chi} = \mu - r$ e il coefficiente di avversione al rischio γ . Questo termine quindi, è semplicemente la generalizzazione della componente miopica della domanda di portafoglio, nel problema di Merton.
- Il secondo termine $\frac{\beta \rho B(t)}{\gamma}$ è connesso indirettamente, tramite il coefficiente di correlazione ρ , ai cambiamenti della volatilità V rispetto al cambiamento del prezzo del titolo rischioso. Esso quindi può essere interpretato come il termine con cui l'investitore si hedgia nei confronti delle variazioni di volatilità del titolo rischioso.

- Il terzo ed ultimo termine $\bar{\lambda}E[(1 - u(t)L)^{-\gamma}]$ è il termine di hedging aggiuntivo, dovuto al fatto che la dinamica del titolo rischioso può presentare salti con una certa intensità λ . Si noti che quest'ultimo termine non è presente nel caso in cui la dinamica del titolo rischioso sia un processo continuo ($L = 0$).

Se il coefficiente di correlazione ρ è nullo, il problema si semplifica molto ed è possibile scrivere una soluzione esplicita per la funzione valore ottimo.

Teorema 2.2.9 (Strategia ottima nel modello affine ($\rho = 0$)). *Si consideri lo stesso modello del teorema (2.35) con $\rho = 0$ allora valgono le seguenti affermazioni*

- La legge di controllo ottima u^* è costante al variare del tempo, indipendente da y e definita implicitamente dall'equazione

$$\gamma u^* = \bar{\chi} - \bar{\lambda}E[L(1 - u^*L)^{-\gamma}]. \quad (2.38)$$

- Data una legge di controllo u , non necessariamente ottima, l'utilità attesa in corrispondenza di essa è

$$G_0(t, x, y, u) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} g_0(t, y, u), \quad \text{dove} \quad (2.39)$$

$$g_0(t, y, u) = e^{(1-\gamma)r(T-t) + A_0(t, T) + B_0(t, T)y}$$

dove A_0 e B_0 sono così definiti

$$A_0(t, T) = \frac{2\theta}{\bar{\beta}^2} \ln \left(\frac{2ae^{\frac{1}{2}(a+\kappa)(T-t)}}{2a + (a + \kappa)(e^{a(T-t)} - 1)} \right),$$

$$B_0(t, T) = \frac{2C_0(e^{a(T-t)} - 1)}{2a + (a + \kappa)(e^{a(T-t)} - 1)}, \quad \text{con} \quad (2.40)$$

$$C_0(t, T) = (1 - \gamma) \left(u\bar{\chi} - \frac{1}{2}\gamma u^2 + \frac{\bar{\lambda}}{1 - \gamma} E[(1 - uL)^{1-\gamma}] - 1 \right),$$

$$e \ a = \sqrt{(\kappa^2 - 2\bar{\beta}^2 C_0)}.$$

- La strategia approssimata \tilde{u}^* è anch'essa costante e definita come

$$\tilde{u}^* = \frac{\bar{\chi} - \bar{\lambda}\bar{L}_1}{\gamma(1 + \bar{\lambda}\bar{L}_2)} \quad (2.41)$$

- Il RWEL è dato in forma chiusa da

$$l = 1 - \left[\frac{g_0(t, y, \tilde{u}^*)}{g_0(t, y, u^*)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.42)$$

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Per calcolare il RWEL nel caso generico con $\rho \neq 0$ dobbiamo ricavare l'utilità attesa corrispondente alla legge di controllo ottima del problema approssimato $\tilde{u}^*(t)$. Per definire questa strategia, si utilizzerà il seguente teorema:

Teorema 2.2.10 (Problema approssimato per il modello affine). *Per il modello affine definito dai parametri nella (2.35), vale che*

$$\tilde{f}(t, y) = e^{-\tilde{A}(t, T) - \tilde{B}(t, T)}, \quad (2.43)$$

e le funzioni $\tilde{A}(t, T)$ e $\tilde{B}(t, T)$ sono così definite

$$\tilde{A}(t, T) = \frac{2\theta}{\bar{\beta}^2} \ln \left(\frac{1 - qe^{-a(T-t)}}{1 - q} \right) + \left(\frac{2\theta b}{\tilde{\kappa} + a} - \frac{1 - \gamma}{k} r \right) (T - t), \quad (2.44)$$

$$\tilde{B}(t, T) = 2b \frac{e^{a(T-t)} - 1}{e^{a(T-t)}(\tilde{\kappa} + a) - \tilde{\kappa} + a},$$

dove $a = \sqrt{\tilde{\kappa} + 2b\bar{\beta}^2}$, $b = 0.5 \frac{\gamma-1}{k\gamma} \tilde{\eta}^2$, $\tilde{\eta} = \tilde{\chi}/\tilde{\sigma}$, $q = (\tilde{\kappa} - a)/(\tilde{\kappa} + a)$, $\tilde{\kappa} = \kappa + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\tilde{\chi}\bar{\beta}\rho}{\tilde{\sigma}^2}$ con k dato dall'equazione (2.14) con $K = \bar{\lambda}$.

Per la dimostrazione del risultato si veda *Ascheberg [1]*.

Una volta calcolato $\tilde{u}^*(t)$ si ricaverà l'utilità attesa, associata a questa legge di controllo, attraverso le equazioni (2.37). Infine si passerà a calcolare il RWEL attraverso la formula (2.28).

2.3 Generalizzazione del modello: double-jump process

In questa sezione si studierà una possibile generalizzazione del modello. Il framework generale è lo stesso del problema descritto precedentemente, con l'unica differenza che il titolo rischioso sarà descritto da un processo di tipo double-jump, in cui, anche la volatilità può presentare dei salti. L'utilizzo di questo genere di modelli è motivato da *Bates* [3] e da numerosi altri studi. Si assuma ora che il titolo rischioso e la sua volatilità seguano le seguenti dinamiche

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t - L dN_t) \\ dy_t &= \alpha y_t + \beta d\tilde{W}_t + Z dN_t \end{aligned} \tag{2.45}$$

dove dW_t e $d\tilde{W}_t$ sono due moti browniani con correlazione ρ e N_t è un processo di cox di intensità $\lambda(t)$. L e Z rappresentano rispettivamente l'ampiezza dei salti del titolo rischioso e l'ampiezza della volatilità. Si considerano queste due variabili solamente positivi. Ogni qual volta si verifica un evento di salto quindi, il prezzo dell'asset diminuirà, mentre la sua volatilità subirà un incremento, coerentemente con quello che si osserva nella realtà. Date queste dinamiche, quindi, il prezzo del titolo sarà soggetto a tre fonti di incertezza: i moti browniani W_t e \tilde{W}_t , e la realizzazione del processo N_t . Come nel problema descritto in precedenza, si procederà studiando prima le equazioni di HJB per questo nuovo problema e, in seguito, si cercherà di risolverle. Sfruttando i risultati ottenuti nella sezione (1.2.3), la funzione valore ottimo $V(t, x, y)$ è soluzione della seguente equazione di HJB

$$\begin{aligned} \sup_{1-uL \geq 0, u \geq 0} \{ & V_t + x(r + u\chi)V_x + \frac{1}{2}x^2u^2\sigma^2V_{xx} + \alpha V_y + \frac{1}{2}\beta^2V_{yy} + xu\sigma\beta\rho V_{xy} + \\ & \lambda[E[V(t, x(1-uL), y+Z)] - V(t, x, y)] \} = 0, \end{aligned} \tag{2.46}$$

dove l'operatore $E[\cdot]$ rappresenta il valore atteso condizionato rispetto all'ampiezza dei salti L e Z , con condizione al contorno $V(T, x, y) = \phi(x)$. Si ipotizzi ora che la funzione

valore ottima abbia la seguente forma

$$V(t, x, y) = \frac{1}{1 - \gamma} x^{1-\gamma} e^{A(t,T) + B(t,T)y}, \quad (2.47)$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ sono funzioni del tempo ma non della variabile di controllo y o della ricchezza x . Attraverso la procedura numerica descritta nella sezione (1.2.3), si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali, non lineari per la strategia ottima $u^*(t)$ e per i parametri della funzione $V(t, x, y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi} - \gamma u(t) + \bar{\beta} \rho B(t) - \bar{\lambda} E[L(1 - u(t)L)^{-\gamma} e^{B(t)Z}] = 0, \\ B_t(t) + B(t)[(1 - \gamma)\bar{\beta} \rho u(t) - \kappa] + \bar{\lambda} E[(1 - u(t)L)^{1-\gamma} e^{B(t)Z}] \\ + 0.5\bar{\beta}^2 B(t)^2 + u(t)^2 \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} + u(t)(1 - \gamma)\bar{\chi} - \bar{\lambda} = 0, \\ A_t(t) + (1 - \gamma)r + \theta B(t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Risolvendo numericamente questo sistema di equazioni si ricaverà quindi la legge di controllo ottima \tilde{u}^* per il nuovo problema. Per capire meglio il contributo dei salti in questa soluzione, in analogia con quanto fatto per il caso di salti nella sola dinamica del prezzo, si definirà un problema approssimato puramente diffusivo. Si consideri lo sviluppo di Taylor del secondo ordine, nelle variabili x e y , della funzione $V(t, x(1 - uL), y + Z)$

$$\begin{aligned} V(t, x(1 - uL), y) \approx & V(t, x, y) - V_x(t, x, y)xuL + \frac{1}{2}V_{xx}(t, x, y)(xuL)^2 \\ & + V_y(t, x, y)Z + \frac{1}{2}V_{yy}(t, x, y)(Z)^2 - V_{xy}(t, x, y)(xuLZ). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sostituendo questa approssimazione nell'equazione (2.46) e ricavando la condizione al primo ordine del nuovo problema, si ottiene il seguente sistema di equazioni implicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi} - \lambda\bar{L}_1 + \gamma u(t)(\sigma^2 + \lambda\bar{L}_2) + B(t)(\beta\rho - \lambda E[LZ]) \\ \\ B_t(t) + B(t)[(1 - \gamma)(\beta\rho - \lambda E[LZ])u(t) - \kappa + \lambda\bar{Z}_1] + 0.5(\beta^2 + \lambda\bar{Z}_2)B(t)^2 \\ + u(t)^2 \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}(\sigma^2 + \lambda\bar{L}_2) + u(t)(1 - \gamma)(\chi - \lambda\bar{L}_1) = 0, \\ \\ A_t(t) + (1 - \gamma)r + \theta B(t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.50)$$

dove $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{Z}_1$ e \bar{Z}_2 sono i momenti primi e secondi delle ampiezze di salto per il prezzo del titolo rischioso e per la sua volatilità. Si noti che, in generale, la legge congiunta di queste due variabili aleatorie non è nota a priori e, quindi, potrebbe essere necessaria una procedura numerica per il calcolo di $E[LZ]$.

Una volta trovata la soluzione \tilde{u}^* di questo sistema, utilizzando le ultime due equazioni della (2.48), verrà calcolata l'utilità attesa che corrisponde a questa strategia approssimata. Infine, si cercherà di capire la precisione di questa approssimazione calcolando il RWEL corrispondente.

Risultati numerici

3.1 La parametrizzazione del modello

Si consideri il modello affine introdotto nel capitolo precedente. Per la calibrazione del modello si utilizzeranno i parametri calcolati in *Liu* [10], in cui viene utilizzata la serie dei rendimenti dei titoli americani dal 1802 al 2000. Considerando l'indice CRSP pesato per i titoli USA è possibile notare che esistono solamente otto osservazioni in cui il valore di questo indici ha un cambiamento maggiore del 20%. Tra queste sono incluse le date dell'inizio della guerra civile (maggio 1861), il black friday (ottobre 1929) ed il collasso del mercato dell'ottobre 1987. Poichè queste osservazioni sono "distanti" 5 deviazioni standard dalla media della serie storica, è ragionevole trattarle come eventi in cui si è verificato un salto. Calibrando il modello su questi dati, in *Liu* [10] si ottiene un valore del -25% per l'ampiezza dei salti (la media delle otto osservazioni) con una frequenza media di 25 anni. I parametri rimanenti sono molto simili a quelli ottenuti nel modello SV0 di *Pan* [17] usando come indice lo S&P 500 (per ulteriori dettagli si veda *Liu* [10]) In conclusione, i valori dei parametri utilizzati sono:

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= 5.363, \quad r = 0.028, \quad \theta = 0.115, \quad \kappa = 5.3, \\ \bar{\beta} &= 0.225, \quad \rho = -0.57, \quad \bar{\lambda} = 1.842. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Inoltre, verranno considerate tre differenti distribuzioni per l'ampiezza del salto L :

1. Un'ampiezza costante $L = 0.25$: in questo caso la condizione (2.6) implica che la legge di controllo $u < 4$.
2. Una distribuzione *beta* per l'ampiezza

$$L \sim K_L B(\alpha_L, \beta_L). \quad (3.2)$$

Fissiamo $\alpha_L = 18.5$, $\beta_L = 55.5$, $K_L = 1$. Questa scelta dei parametri implica una distribuzione con valore atteso $E[L] = 0.25$ e una deviazione standard $SD[L] = 0.05$. La condizione (2.6) implica che $u < \frac{1}{K_L} = 1$.

3. Una distribuzione log-normale shiftata per l'ampiezza $L = 1 - e^{\mu_L + \sigma_L W}$, dove W è una variabile aleatoria normale standard. Fissiamo $\mu_L = -0.2965$ e $\sigma_L = 0.1327$. Questa scelta dei parametri implica una distribuzione con valore atteso $E[L] = 0.25$ e una deviazione standard $SD[L] = 0.01$, inoltre il supporto della distribuzione è $(-\infty, 1]$ così che la condizione (2.6) implica $u < 1$. Si noti infine che la condizione (2.16) per questo tipo di distribuzione è violata. Nonostante questa osservazione, si riporteranno ugualmente i risultati numerici per questa distribuzione e si verificherà di volta in volta la ragionevolezza di essi.

3.2 Strategia ottima e limiti

Si consideri innanzitutto il caso più semplice in cui la correlazione è nulla. Quando $\rho = 0$, possiamo utilizzare il Teorema 2.2.9 per ottenere la legge di controllo ottima u^* . Inoltre, in questo caso, valgono i limiti di prima e seconda specie visti nelle Proposizioni 2.2.3 e 2.2.4. Nella figura 1 è illustrata la strategia ottima e i limiti corrispondenti ad essa nel caso in cui l'ampiezza dei salti sia costante e pari a $L = 0.25$. In linea con la definizione del coefficiente di avversione al rischio, la percentuale di titolo rischioso decresce all'aumentare del valore di γ . Si noti inoltre che, come detto in precedenza, i limiti di seconda specie sono più stringenti di quelli di prima specie: per $\gamma > 7$ la differenza tra il limite superiore e inferiore è minore del 10%. La strategia ottima del problema approssimato è rappresentata dal limite superiore di prima specie (la linea punteggiata che domina la strategia ottima). La differenza tra la strategia ottima del problema iniziale e di quello

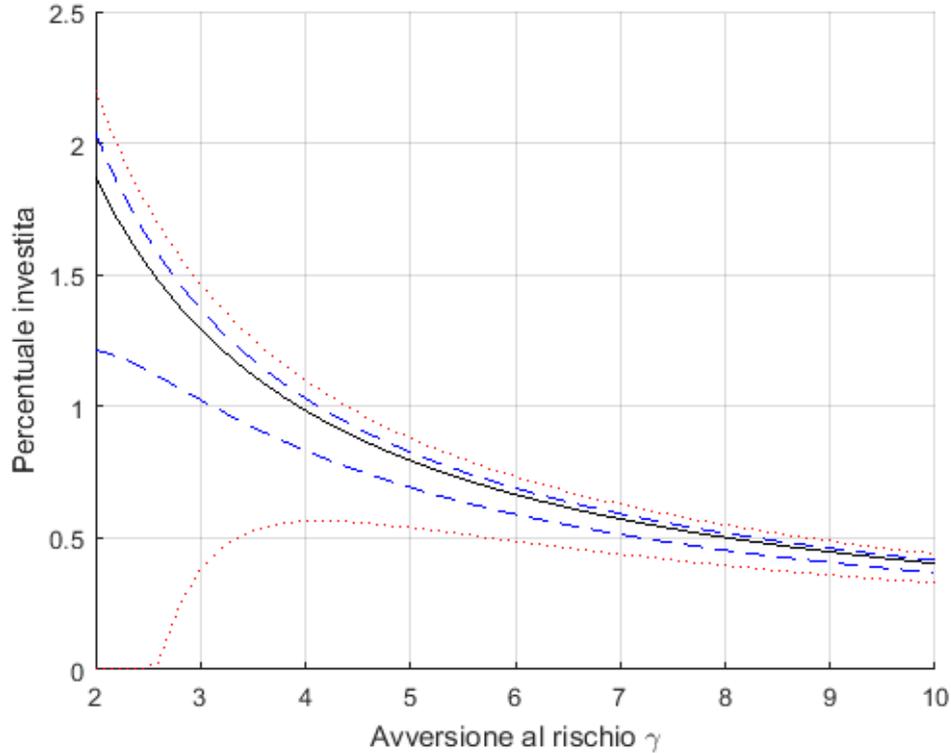


Figura 1: Percentuale investita nel titolo rischioso nel modello affine con ampiezza dei salti L deterministica e $\rho = 0$. La linea continua rappresenta la strategia ottima, quella punteggiata rappresenta i limiti di prima specie, mentre quella tratteggiata rappresenta i limiti di seconda specie.

approssimato decresce anch'essa al crescere di γ e, in particolare, se $\gamma > 7$ essa si attesta sotto il 5%. Nella figura 2 sono illustrati i risultati nel caso in cui la distribuzione dell'ampiezza dei salti sia una beta. Si noti che, come si è detto in precedenza, la strategia ottima $u < 1$. Per valore di γ piccoli (sotto 4) la strategia ottima raggiunge questo limite e rimane così vincolata a 1. A differenza del caso precedente, i limiti di seconda specie sono meno stringenti e la soluzione del problema approssimato è più lontana da quella ottima: per valori di $\gamma > 7$ infatti la differenza tra i limite superiore e inferiore di seconda specie è minore del 12%, mentre la differenza tra la strategia ottima del problema iniziale e di quello approssimato è inferiore al 6%. Infine, nella figura 3 sono illustrati i risultati nel caso in cui la distribuzione dell'ampiezza dei salti sia una log-normale. In questo caso i limiti risultano più distanti dalla strategia ottima rispetto ai casi precedenti. Per

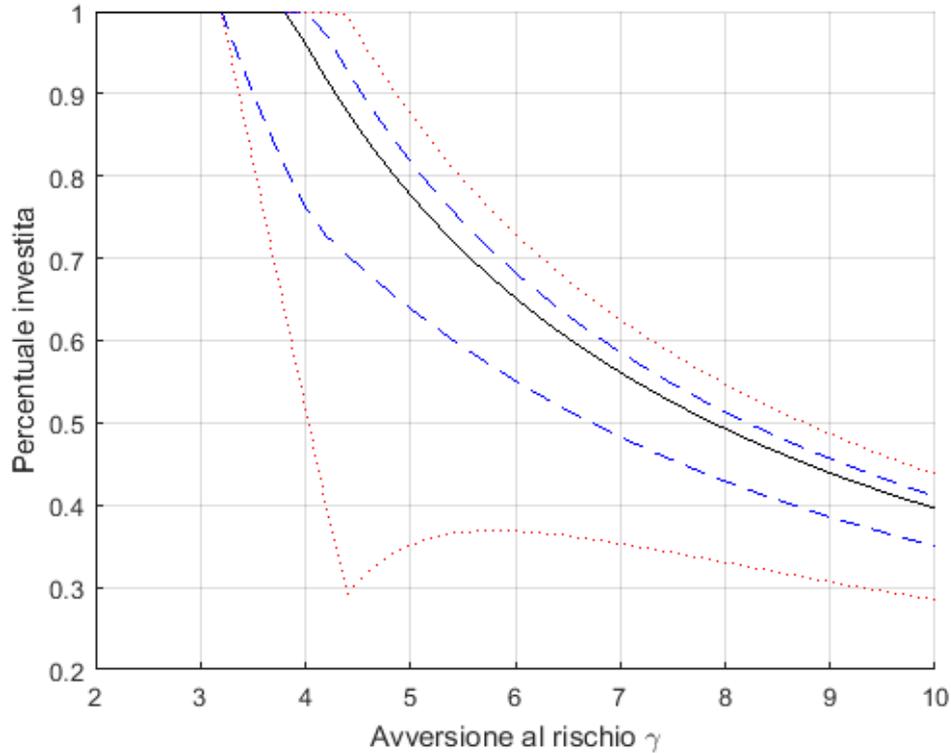


Figura 2: Percentuale investita nel titolo rischioso nel modello affine con ampiezza dei salti L distribuita come una variabile aleatoria beta e $\rho = 0$. La linea continua rappresenta la strategia ottima, quella punteggiata rappresenta i limiti di prima specie, mentre quella tratteggiata rappresenta i limiti di seconda specie.

valori di $\gamma > 7$ la differenza tra il limite inferiore e superiore di seconda specie è minore del 18%. Si noti inoltre che, per valori di γ minori di 6 il limite, inferiore di prima specie esplose. Questo è dovuto al fatto che la condizione (2.6) non è soddisfatta in caso di ampiezza dei salti log-normale. Questi limiti quindi, sono significati solamente per valori di γ superiori a 6. Infine si osservi che anche la differenza tra la strategia ottima del problema approssimato e di quello reale subisce un peggioramento rispetto ai casi precedenti: essa si attesta su dei valori vicini all' 8%.

Si consideri ora il caso in cui $\rho = -0.57$. Poichè ρ è diverso da zero, gli unici limiti che possono essere utilizzati sono quelli di terza specie. In figura 4 sono rappresentate le strategie ottime del problema iniziale al tempo $t = 0$, quando l'ampiezza dei salti è costante, distribuita come una beta o come una log-normale. Inoltre vi sono riportati an-

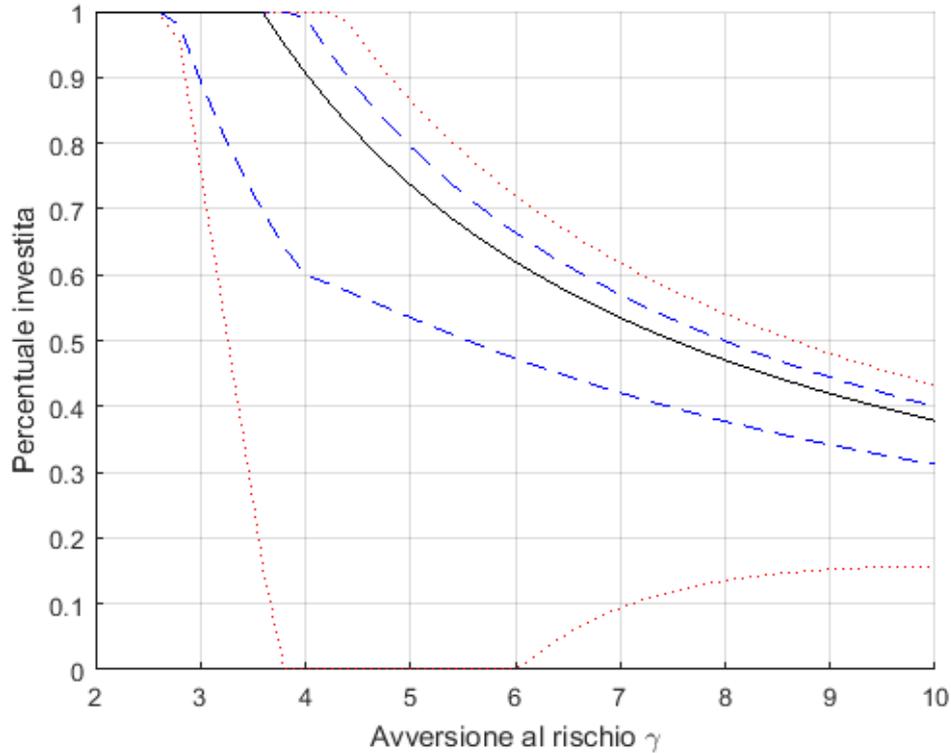


Figura 3: Percentuale investita nel titolo rischioso nel modello affine con ampiezza dei salti L distribuita come una variabile aleatoria log-normale e $\rho = 0$. La linea continua rappresenta la strategia ottima, quella punteggiata rappresenta i limiti di prima specie, mentre quella tratteggiata rappresenta i limiti di seconda specie.

che i limiti inferiori di tali strategie. Il limite superiore invece si ottiene ponendo $L = 0$: esso quindi è identico in ognuno dei tre casi ma, essendo per valori di γ compresi tra 2 e 10 molto elevato, non verrà riportato nel grafico in quanto poco significativo. Come si può vedere, la strategia ottima in ognuno dei tre casi è molto vicina al limite inferiore e per valori di $\gamma > 4$ questa differenza non supera il 5%.

3.3 Relative wealth equivalent loss

In questa sezione si cercherà di capire quanto bene performa la strategia approssimata. A tale scopo verrà calcolato il RWEL. Questa misura, come si è visto nel capitolo precedente, non dipende dal livello di ricchezza dell'investitore ma, nella formula, compare

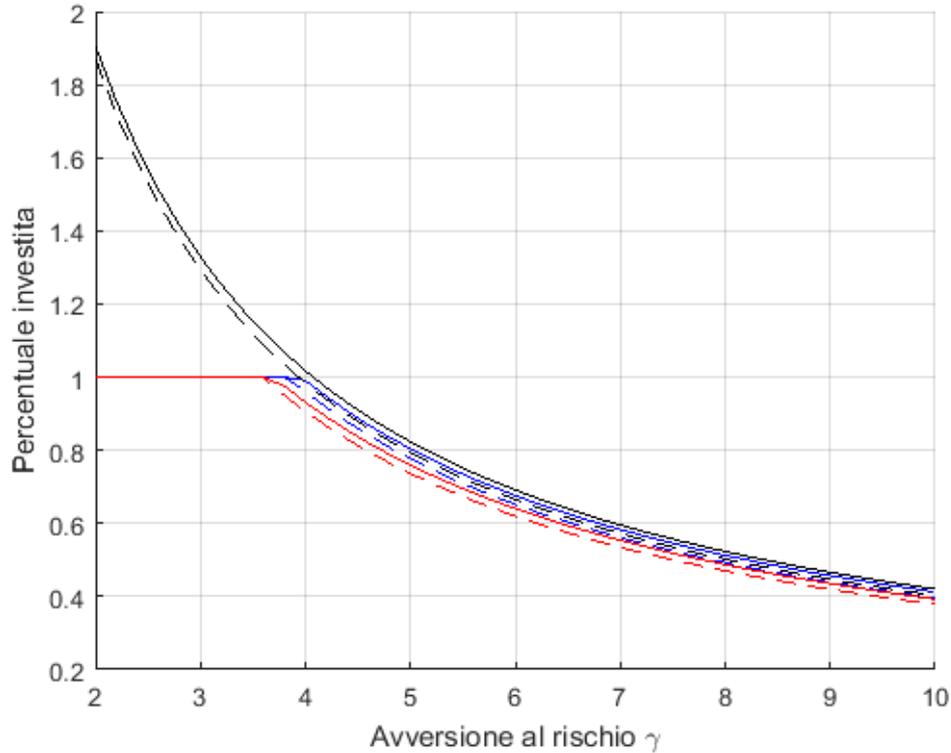


Figura 4: Limiti di terza specie quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. La linea continua rappresenta la strategia ottima del problema iniziale in $t = 0$ mentre la linea tratteggiata rappresenta il limite inferiore di terza specie. Le linee blu sono per il caso in cui l'ampiezza dei salti L è deterministica, quelle nere sono per quando L è distribuita come una beta e le linee rosse sono per quando L è distribuita come una log-normale.

direttamente la varianza locale Y . Nel seguito quindi verrà fissato il valore di Y al suo livello di "mean-reversion" cioè $Y = \frac{\theta}{\kappa}$, inoltre verrà considerato un intervallo temporale di 10 anni ($T = 10$).

Nel caso particolare in cui $\rho = 0$ il problema si semplifica molto e tutte le quantità che compaiono nella formula del RWEL possono essere calcolate esplicitamente attraverso il Teorema 2.2.9. Nella Figura 5 sono mostrati diversi valori del RWEL al variare del coefficiente di avversione al rischio γ e del tipo di distribuzione dell'ampiezza dei salti. Nel caso in cui l'ampiezza sia deterministica il RWEL decresce strettamente all'aumentare di γ e, per valori di $\gamma > 4$, esso è sempre inferiore al 1%.

Questo fatto si può spiegare riflettendo sul comportamento di un investitore: se esso è

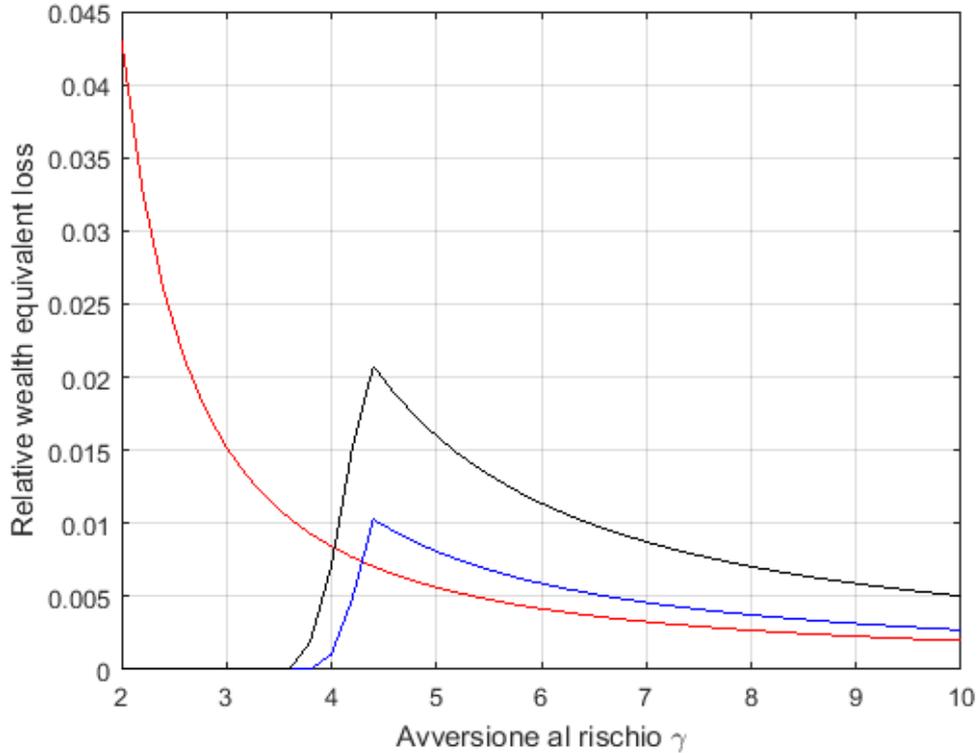


Figura 5: RWEL per il modello affine calcolato per diversi valori del coefficiente di avversione al rischio. Il coefficiente di correlazione ρ è fissato a zero. La linea rossa rappresenta un'ampiezza dei salti deterministica, quella blu un'ampiezza dei salti distribuita come una beta ed infine quella nera un'ampiezza dei salti distribuita come una log-normale.

fortemente avverso al rischio, in generale, il valore che darà all'investimento nel titolo rischioso sarà molto più basso del valore che un investitore amante del rischio darà ad esso; in questo caso quindi un investitore con un basso coefficiente di avversione che vede una diminuzione della percentuale investita nel titolo rischioso subirà una perdita più grave rispetto ad un investitore molto avverso al rischio.

Nel caso l'ampiezza dei salti sia stocastica, per bassi valori di γ la misura perde di significato in quanto il limite in (2.6) viene raggiunto sia dalla strategia approssimata che da quella ottima (entrambe quindi sono pari a 1 ed il RWEL si azzerà). Quando invece il coefficiente di avversione al rischio è maggiore di 4 il RWEL per la distribuzione beta non supera mai 1% mentre per la log-normale si attesta sempre sotto il 2%.

Si consideri ora il caso in cui $\rho = -0.57$. In questa situazione il calcolo del RWEL diventa

più complicato in quanto la funzione valore ottimo non può essere espressa esplicitamente. Si procede quindi nel seguente modo:

1. Si risolve numericamente il sistema di equazioni (2.37), trovando il valore della strategia ottima $u^*(t)$ e dell'utilità attesa ad essa associata $V(0, x, y)$.
2. Attraverso il Teorema 2.2.10 si calcolano i coefficienti $\tilde{B}(t, T)$ per ogni istante temporale t .
3. Per ogni istante temporale, si risolve la condizione al prim'ordine del problema approssimato ricavando $\tilde{u}^*(t)$

$$\gamma(1 + \bar{\lambda}u) = \bar{\chi} - \bar{\lambda}\bar{L}_1 - kB(t, T)\rho\bar{\beta} \quad (3.3)$$

dove k viene calcolato sfruttando la formula (2.14).

4. Attraverso le ultime due equazioni del sistema (2.37), si ricava l'utilità attesa in $t = 0$ che l'investitore ottiene utilizzando la strategia approssimata $\tilde{u}^*(t)$.
5. Una volta ottenute le utilità attese in corrispondenza della strategia ottima del problema iniziale e di quella del problema approssimato, si calcola il RWEL attraverso la formula (2.28).

Avversione al rischio	RWEL		
	Costante	Beta	Log-normale
2.0	5.45	0.00	0.00
2.5	3.08	0.00	0.00
3.0	2.06	0.00	0.00
3.5	1.52	0.01	0.07
4.0	1.18	0.01	0.43
4.5	0.96	0.80	1.10
5.0	0.80	1.16	2.29
5.5	0.70	0.96	1.92
6.0	0.60	0.85	1.64
6.5	0.53	0.75	1.43
7.0	0.48	0.67	1.27
7.5	0.43	0.60	1.14
8.0	0.40	0.55	1.03
8.5	0.37	0.53	0.95
9.0	0.34	0.50	0.87
9.5	0.31	0.43	0.80
10.0	0.29	0.40	0.75

Tabella 1: Valori del RWEL per le differenti distribuzioni dell'intensità di salto quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. I valori riportati sono in percentuale.

Nella Tabella 1 sono stati calcolati i valori del RWEL in corrispondenza delle tre distribuzioni dell'intensità dei salti. Facendo variare il coefficiente di avversione al rischio γ è possibile osservare che per bassi valori di γ sono presenti delle perdite ingenti solamente nel caso in cui L sia deterministica. Questo fatto è dovuto alla condizione (2.6). Per valori di γ minori di 4 infatti, questo limite viene raggiunto sia dalla strategia ottima che da quella approssimata. In questo caso quindi le utilità attese che compaiono nella formula (2.42) sono identiche ed il RWEL corrispondente è pari a 0. Infine, per $\gamma \geq 5$ i valori del RWEL si attestano sotto l'1% se l'ampiezza dei salti è deterministica mentre sono sotto il 2.29% se invece l'ampiezza dei salti è stocastica.

Si studierà ora l'accuratezza dell'approssimazione al variare delle caratteristiche dei salti considerati. In particolare verrà studiata la dipendenza del RWEL dall'intensità dei salti e dal valore atteso della loro ampiezza. Nel modello considerato, i parametri sono calcolati in modo tale che l'eccesso di rendimento del titolo rischioso $(\bar{\chi} - E[L]\bar{\lambda})$ sia calibrato coi risultati numerici in Pan [17]. Quando verrà cambiata la media dell'ampiezza dei salti

$E[L]$ lo si farà in maniera tale da ottenere il medesimo valore di eccesso di rendimento del titolo rischioso. In particolare, quindi, verrà modificato simultaneamente anche il parametro χ .

- Per i salti con ampiezza deterministica si cambierà solamente il valore di $E[L]$.
- Nel caso di salti con ampiezza distribuita come una log-normale si cambierà il valore di $E[L]$ tenendo fisso il valore della volatilità al 10%. In questo caso, però, bisognerà riadattare i parametri μ e σ della distribuzione dei salti, in maniera tale da fittare la media e la varianza desiderate. Bisognerà quindi risolvere il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} 1 - e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = E[L]_{new} \\ e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = Var[L]_{new} \end{cases} \quad (3.4)$$

dove $E[L]_{new}$ e $Var[L]_{new}$ sono i valori di media e varianza dell'ampiezza dei salti selezionati.

- Nel caso in cui i salti siano distribuiti come una beta si procederà cambiando $E[L]$ e χ . Anche in questo caso, una volta calcolate media e varianza dell'ampiezza dei salti, bisognerà riadattare il valore dei parametri α e β . In analogia con il caso precedente si dovrà quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = E[L]_{new} \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = Var[L]_{new}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Nella Tabella 2 sono riportati i valori di RWEL ottenuti, per le tre distribuzioni, facendo variare il valore atteso dei salti da 0.01 a 0.35. Si può osservare che, all'aumentare del valore atteso, l'approssimazione utilizzata diventa man mano sempre più imprecisa. Intuitivamente, se si aumenta l'ampiezza dei salti tenendo costante la loro frequenza il loro apporto alla strategia ottima sarà sempre maggiore. Utilizzando quindi una strategia approssimata, dove i salti non sono più presenti, l'errore che si commetterà tenderà ad aumentare al crescere del $E[L]$. Guardando i valori di RWEL per le varie distribuzioni

si potrebbe pensare che la strategia approssimata sia più performante nel caso di salti stocastici: i valori di RWEL più elevati si ottengono quando i salti sono costanti. Questa constatazione, però, è fuorviante in quanto, per quanto riguarda il caso di ampiezza stocastica, quando il coefficiente di avversione al rischio è molto piccolo ($\gamma < 4$), la strategia ottima e approssimata del problema raggiungono entrambe la condizione al bordo espressa dalla formula (2.6); essendo quindi le due strategie uguali, il RWEL corrispondente sarà pari a zero. D'ora in avanti quindi, per determinare le performance della strategia approssimata, si analizzeranno solamente i casi in cui $\gamma \geq 4$.

CAPITOLO 3. RISULTATI NUMERICI

Avversione al rischio	Valore atteso ampiezza salti ($E[L]$)							
	0.01	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
Ampiezza salti: costante								
2.0	0.00	0.00	0.01	0.21	1.41	5.45	14.38	28.42
3.0	0.00	0.00	0.01	0.09	0.57	2.06	5.20	10.25
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.37	1.18	5.33
5.0	0.00	0.00	0.00	0.04	0.23	0.80	1.98	3.61
6.0	0.00	0.00	0.00	0.03	0.18	0.60	1.47	2.84
7.0	0.00	0.00	0.00	0.03	0.14	0.48	1.17	2.26
8.0	0.00	0.00	0.00	0.02	0.12	0.40	0.96	1.81
9.0	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.34	0.82	1.55
10.0	0.00	0.00	0.00	0.02	0.09	0.29	0.71	1.35
Ampiezza salti: beta								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	1.14	5.51
5.0	0.00	0.00	0.01	0.10	0.40	1.16	2.55	4.51
6.0	0.00	0.00	0.01	0.07	0.30	0.85	1.88	3.33
7.0	0.00	0.00	0.01	0.06	0.23	0.67	1.48	2.63
8.0	0.00	0.00	0.01	0.05	0.19	0.55	1.21	2.14
9.0	0.00	0.00	0.01	0.04	0.16	0.47	1.02	1.80
10.0	0.00	0.00	0.01	0.04	0.14	0.40	0.88	1.51
Ampiezza salti: log-normale								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.43	2.97	8.41
5.0	0.00	0.00	0.08	0.35	1.01	2.29	4.25	6.75
6.0	0.00	0.01	0.06	0.25	0.73	1.65	3.06	4.89
7.0	0.00	0.01	0.04	0.19	0.56	1.27	2.37	3.70
8.0	0.00	0.01	0.04	0.16	0.46	1.03	1.93	3.10
9.0	0.00	0.01	0.03	0.13	0.38	0.87	1.62	2.54
10.0	0.00	0.00	0.03	0.11	0.33	0.75	1.39	2.23

Tabella 2: Valori del RWEL per le differenti distribuzioni dell'intensità di salto quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. Quando si fa variare il valore di $E[L]$ anche il valore di χ viene modificato in modo da lasciare inalterato l'eccesso di rendimento del titolo.

Successivamente verrà studiata la dipendenza del RWEL dall'intensità dei salti λ . Nella Tabella 3 sono riportati i valori di RWEL ottenuti, per le tre distribuzioni, facendo variare l'intensità dei salti da 0.05 a 5. Come è possibile notare, il RWEL cresce monotonicamente da sinistra a destre in ogni riga. Poichè all'aumentare dell'intensità aumenta anche il numero medio di salti nel periodo considerato, è lecito aspettarsi una componente di salto più influente (e quindi un RWEL più elevato) all'aumentare di λ . Il livello più alto di RWEL è raggiunto quando i salti sono deterministici ($\gamma = 2$) e l'intensità è massima ($\lambda = 5$). Nel caso di salti stocastici il picco viene raggiunto quando $\gamma = 5$ e $\lambda = 5$. Come nel caso precedente, l'approssimazione sembra funzionare meglio per un'ampiezza dei salti distribuita come una beta, anzichè come una log-normale.

Una volta dimostrato che l'approssimazione considerata peggiora progressivamente all'aumentare di λ e del $E[L]$, si cercherà di far variare entrambi i parametri. Muovendo simultaneamente l'intensità e l'ampiezza media, infatti, è possibile capire quale tipologia di salto è più influente, rispondendo quindi alla seguente domanda: la strategia ottima dell'investitore è più influenzata da salti frequenti con ampiezza media piccola oppure da salti che si presentano raramente ma con ampiezza più consistente? Nella Tabella 4 sono riportati i risultati di questa analisi. In particolare i valori di λ e \bar{L}_1 sono fatti variare in maniera tale da lasciare inalterato il loro prodotto. I dati così ottenuti suggeriscono che eventi rari ma gravi, in generale, sono quelli che influenzano maggiormente le scelte dell'investitore: se quest'ultimo crede che vi sia una, seppur remota, possibilità che il mercato in cui opera collassi, il suo comportamento potrebbe cambiare di molto rispetto a quello teorizzato nei classici modelli di asset allocation (dove non è contemplata la possibilità che la dinamica del titolo rischioso possa saltare).

CAPITOLO 3. RISULTATI NUMERICI

Avversione al rischio	Intensità ampiezza salti (λ)							
	0.05	0.1	0.5	1	2	3	4	5
Ampiezza salti: costante								
2.0	0.02	0.08	1.20	2.97	5.82	7.53	8.41	8.97
3.0	0.00	0.02	0.36	1.01	2.23	3.10	3.63	3.92
4.0	0.00	0.01	0.19	0.55	1.29	1.83	2.19	2.31
5.0	0.00	0.01	0.13	0.37	0.88	1.27	1.53	1.68
6.0	0.00	0.00	0.09	0.27	0.66	0.96	1.17	1.28
7.0	0.00	0.00	0.07	0.22	0.53	0.77	0.94	1.04
8.0	0.00	0.00	0.06	0.18	0.43	0.64	0.78	0.88
9.0	0.00	0.00	0.05	0.15	0.37	0.55	0.67	0.74
10.0	0.00	0.00	0.04	0.13	0.32	0.48	0.58	0.65
Ampiezza salti: beta								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.95	2.66	3.15
5.0	0.00	0.00	0.20	0.56	1.26	1.74	2.04	2.20
6.0	0.00	0.01	0.14	0.41	0.93	1.31	1.54	1.74
7.0	0.00	0.01	0.11	0.32	0.73	1.04	1.23	1.35
8.0	0.00	0.00	0.09	0.26	0.60	0.86	1.02	1.12
9.0	0.00	0.00	0.07	0.22	0.51	0.73	0.87	0.95
10.0	0.00	0.00	0.06	0.19	0.44	0.63	0.76	0.84
Ampiezza salti: log-normale								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.66	2.85	5.09	5.15
5.0	0.00	0.00	0.50	1.25	2.44	3.11	3.43	3.55
6.0	0.00	0.02	0.34	0.87	1.76	2.29	2.55	2.64
7.0	0.00	0.01	0.25	0.66	1.37	1.80	2.02	2.11
8.0	0.00	0.01	0.20	0.53	1.11	1.48	1.67	1.75
9.0	0.00	0.01	0.16	0.44	0.93	1.25	1.42	1.49
10.0	0.00	0.01	0.14	0.38	0.80	1.08	1.23	1.30

Tabella 3: Valori del RWEL per le differenti distribuzioni dell'intensità di salto quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. Nel caso di distribuzione costante $L=0.25$, nel caso di distribuzione beta $E[L] = 0.25$ e $Var[L] = 0.05^2$, nel caso di distribuzione log-normale $E[L] = 0.25$ e $Var[L] = 0.1^2$. Quando si fa variare il valore di λ anche il valore di χ viene modificato in modo da lasciare inalterato l'eccesso di rendimento del titolo.

CAPITOLO 3. RISULTATI NUMERICI

Avversione al rischio	Valore atteso ampiezza salti ($E[L]$)							
	0.01	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
Ampiezza salti: costante								
2.0	0.00	0.00	0.07	0.47	1.84	5.45	13.35	28.61
3.0	0.00	0.00	0.04	0.21	0.76	2.06	4.60	8.91
4.0	0.00	0.00	0.02	0.13	0.45	1.18	2.54	4.79
5.0	0.00	0.00	0.02	0.09	0.32	0.80	1.70	3.15
6.0	0.00	0.00	0.01	0.07	0.24	0.60	1.26	2.32
7.0	0.00	0.00	0.01	0.06	0.19	0.48	1.00	1.81
8.0	0.00	0.00	0.01	0.05	0.16	0.40	0.82	1.51
9.0	0.00	0.00	0.01	0.04	0.14	0.34	0.69	1.25
10.0	0.00	0.00	0.01	0.04	0.12	0.29	0.60	1.08
Ampiezza salti: beta								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.50	2.02
5.0	0.02	0.06	0.08	0.21	0.53	1.16	2.23	3.81
6.0	0.01	0.05	0.06	0.16	0.40	0.85	1.63	2.82
7.0	0.01	0.04	0.05	0.13	0.31	0.67	1.28	2.19
8.0	0.00	0.03	0.04	0.11	0.26	0.55	1.04	1.77
9.0	0.00	0.03	0.04	0.09	0.22	0.47	0.88	1.48
10.0	0.00	0.02	0.03	0.08	0.19	0.40	0.76	1.29
Ampiezza salti: log-normale								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.43	1.72	4.31
5.0	0.09	0.17	0.34	0.67	1.28	2.29	3.84	6.08
6.0	0.06	0.13	0.25	0.49	0.93	1.65	2.74	4.31
7.0	0.04	0.10	0.20	0.39	0.72	1.27	2.11	3.29
8.0	0.02	0.08	0.16	0.32	0.59	1.03	1.70	2.65
9.0	0.01	0.07	0.14	0.27	0.50	0.87	1.42	2.19
10.0	0.01	0.06	0.12	0.23	0.43	0.75	1.22	1.91

Tabella 4: Valori del RWEL per le differenti distribuzioni dell'intensità di salto quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. Si fanno variare sia il $E[L]$ che l'intensità λ dei salti, mantenendo il loro prodotto costante ($=0.4605$). Quando si modifica il valore atteso $E[L]$ si modifica anche χ , in analogia ai casi precedenti.

3.4 Un'approssimazione alternativa del problema

L'approssimazione del problema usata fin'ora, sembra performare bene per diversi valori dei parametri del modello. Tuttavia, troncando la componente di salto, si sta sostanzialmente ignorando il rischio di illiquidità intrinseco dell'asset stesso. Se si considera una dinamica di tipo jump-diffusion per il titolo rischioso, l'investitore non può più bilanciare perfettamente il suo portafoglio. Quando si verificherà un salto, infatti, la sua ricchezza potrebbe cambiare improvvisamente di molto ed esso non potrà in alcun modo cambiare questo fatto con le sue scelte di investimento. Questo tipo di rischio è essenzialmente lo stesso che un investitore deve affrontare quando acquista un asset molto illiquido. In questo caso, infatti, il prezzo del titolo potrebbe subire grandi variazioni prima che egli possa ribilanciare il suo portafoglio. Per questo motivo si cercherà ora di costruire una strategia approssimata alternativa che, in un certo qual modo, contenga al suo interno anche questa componente di rischio.

Si indichi con u_0^* e \tilde{u}_0^* le strategie ottime, considerando il problema originale e quello approssimato (descritto nella Sezione 2.2) con un coefficiente di correlazione $\rho = 0$. Entrambe le strategie non tengono quindi conto della correlazione tra il titolo rischioso e la sua varianza ma, la loro differenza, dipende fortemente dalle caratteristiche dei salti considerati. Alla luce di questa osservazione, si utilizzerà questa differenza per compensare la componente di salto nel problema approssimato. Indicata con \tilde{u}^* la generica strategia del problema approssimato (con ρ qualsiasi), definiamo la nuova strategia approssimante come

$$\tilde{u}_2 = \tilde{u} + (u_0^* - \tilde{u}_0^*). \quad (3.6)$$

Si noti che per il calcolo di \tilde{u} e \tilde{u}_0^* sono state introdotte delle formule esplicite (si veda il Teorema 2.2.9), mentre per u_0^* è definita implicitamente dalla prima equazione del sistema (2.37), ponendo $\rho = 0$. Come nel caso precedente, verrà calcolato il RWEL per questa nuova strategia: si farà variare l'intensità dei salti λ tra 0.1 e 5, per fare un confronto con la strategia approssimata introdotta in precedenza.

Avversione al rischio	Intensità ampiezza salti (λ)							
	0.1	0.5	1	2	2.5	3	4	5
Ampiezza salti: costante								
2.0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
3.0	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
4.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
5.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
6.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
7.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
8.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
9.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
10.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Ampiezza salti: beta								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
5.0	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
6.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02
7.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
8.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
9.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
10.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Ampiezza salti: log-normale								
2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.0	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
5.0	0.00	0.00	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
6.0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03
7.0	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
8.0	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
9.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01
10.0	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Tabella 5: Valori del RWEL per quanto riguarda il secondo tipo di strategia approssimata e quando il coefficiente di correlazione $\rho = -0.57$. Nel caso di distribuzione costante $L=0.25$, nel caso di distribuzione beta $E[L] = 0.25$ e $Var[L] = 0.05^2$, nel caso di distribuzione log-normale $E[L] = 0.25$ e $Var[L] = 0.1^2$. Quando si fa variare il valore di λ anche il valore di χ viene modificato in modo da lasciare inalterato l'eccesso di rendimento del titolo.

Confrontando le Tabella 3 e 5 si nota che, utilizzando la nuova strategia, si ottengono valori di RWEL più bassi rispetto alla precedente. Quest'ultima strategia quindi, approssima meglio quella ottima del problema iniziale.

3.5 Processi double-jump

In questa sezione si discuteranno i risultati ottenuti quando sia la dinamica del titolo rischioso sia quella della sua volatilità possono presentare dei salti. Per poter confrontare i risultati con il caso precedente, per il nuovo modello, verrà usata la medesima parametrizzazione di quello affine studiato Sezione 3.1. In particolare, verranno usati i valori ricavati in *Liu* [10] che, come già visto in precedenza, sono stati calibrati su una lunga serie storica dello S&P 500. L'ampiezza dei salti del prezzo del titolo rischioso sarà considerata costante, distribuita come una beta oppure come una log-normale mentre. L'ampiezza dei salti relativi alla volatilità, invece, sarà considerata solamente come una costante pari a $Z = 0.226$ (valore preso da *Liu* [10]).

Intuitivamente, quando introduciamo salti nella dinamica della volatilità, si potrebbe pensare che l'effetto sulla strategia ottima dell'investitore sia il medesimo di quello dovuto ai salti del prezzo del titolo stesso. Se questa affermazione fosse vera, quindi, si dovrebbe vedere una ulteriore diminuzione della percentuale investita nel titolo rischioso rispetto al caso precedente e, in seconda battuta, un peggioramento del RWEL. Come è possibile vedere nella Tabella 6 però, questo in realtà non accade. Il RWEL, in generale, migliora, suggerendo quindi che l'importanza della componente di salto del prezzo sia in qualche modo minore rispetto al caso in cui la volatilità segue una dinamica puramente diffusiva. Questo è dovuto al fatto che il titolo rischio può essere usato dall'investitore per fare hedging contro la volatilità in due modi diversi:

- Hedging dinamico: utilizzato contro le variazioni della componente continua della volatilità.
- Hedging statico: utilizzato contro l'effetto dei salti della volatilità.

E' proprio questa seconda componente, non presente nei modelli di scelta di portafoglio tradizionali, che induce l'investitore ad aumentare la percentuale di ricchezza investita

nel titolo rischioso. Si può quindi concludere dicendo che gli eventi di salto del prezzo, in un certo qual modo, spaventano meno l'investitore se, contemporaneamente, anche la volatilità può saltare. Se il titolo rischioso subisce delle gravi perdite, infatti, la sua volatilità aumenterà, facendo quindi aumentare il valore atteso del premio per il rischio dell'investitore.

Avversione al rischio	RWEL		
	Costante	Beta	Log-normale
2.0	4.47	0.00	0.00
2.5	2.08	0.00	0.00
3.0	1.17	0.00	0.00
3.5	0.75	0.00	0.01
4.0	0.52	0.00	0.01
4.5	0.38	0.01	0.65
5.0	0.29	0.51	1.37
5.5	0.22	0.43	1.08
6.0	0.19	0.33	0.87
6.5	0.14	0.27	0.73
7.0	0.13	0.23	0.62
7.5	0.11	0.20	0.53
8.0	0.10	0.17	0.46
8.5	0.10	0.16	0.40
9.0	0.08	0.14	0.37
9.5	0.07	0.13	0.33
10.0	0.06	0.11	0.30

Tabella 6: Valori del RWEL per le differenti distribuzioni dell'intensità di salto, quando sia il prezzo del titolo sia la volatilità presentano dei salti. I valori riportati sono in percentuale.

Conclusioni

In questo lavoro è stato studiato l'articolo di *Ascheberg* [1], in cui viene esposto un modo per superare i problemi legati al fatto di considerare il moto browniano geometrico come dinamica del titolo rischioso in un problema di asset allocation. Questo tipo di dinamica, infatti, non tiene conto degli eventi di salto che, come si è visto, influenzano notevolmente le scelte dell'investitore. Per ovviare a questo problema si utilizzano dei processi di tipo jump-diffusion i quali, però, rendono impossibile identificare una soluzione in forma chiusa del problema di ottimizzazione continua di portafoglio. Per questo motivo viene introdotta un'approssimazione di Taylor della componente di salto, per ottenere un problema approssimato in cui è possibile identificare una rappresentazione stocastica della soluzione. Per questa approssimazione e per il problema originale, sono stati introdotti tre tipi di limiti che permettono di comprendere, a grandi linee, le scelte dell'investitore. In seguito, per capire la bontà dell'approssimazione introdotta, viene calcolato il RWEL del modello che permette di misurare l'importanza dei salti nel problema considerato. Per analizzare i risultati di questa procedura, nell'elaborato sono stati considerati due particolari modelli affini: il primo è quello utilizzato da *Aschberg* [1] nel suo articolo in cui la dinamica del titolo rischioso è descritta da un processo di *Heston* [8]; il secondo è una naturale generalizzazione di questo modello in cui anche la volatilità può presentare dei salti (double jump-process). Una volta trovata una soluzione esplicita dei problemi approssimati è stata utilizzata la procedura numerica descritta in *Liu* [10] per risolvere il problema originale. Si è potuto così constatare che la perdita di utilità da parte del-

l'investitore, che non considera la componente di salto, è trascurabile se il valore atteso dell'ampiezza dei salti è minore di 0.2, in caso contrario il contributo che essa apporta alle scelte dell'investitore deve essere tenuto in considerazione. In particolare, eventi di salto molto rari ma severi influenzano maggiormente le scelte dell'investitore rispetto a salti molto frequenti ma di ampiezza più modesta. Introducendo una componente di salto anche per la volatilità, si è potuto constatare come, controintuitivamente, il contributo dei salti alle scelte di portafoglio è in qualche modo minore rispetto al caso in cui la volatilità segue una dinamica puramente diffusiva. L'investitore, infatti, utilizza il titolo rischioso per fare hedging contro l'effetto dei salti della volatilità e, quindi, le sue scelte di investimento risulteranno meno distanti dalla soluzione di *Merton* [13]. Tra i possibili sviluppi di questo lavoro vi è la possibilità di estendere queste analisi al caso in cui l'investitore possa acquistare più titoli rischiosi le cui dinamiche sono descritte da processi jump-diffusion, con diversi valori dei parametri. Inoltre, per rendere il modello ancora più realistico, si potrebbero considerare eventuali spese di commissione che potrebbero incidere sulle scelte finali dell'investitore stesso.

Appendice **A**

Codici Matlab

```
1 function [Ubound,Lbound]=limitiprimaspecie(flag,s)
2 % Calcola i limiti di prima specie per la strategia ottima
3 % con rho=0.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s             : Avversione al rischio
10 %
11 %OUTPUT:
12 % Ubound,Lbound : Limiti per la strategia ottima
13 x=5.363;
14 lambda =1.842;
15 if flag==1      %Ampiezza del salti: costante
16     %Parametri salti
17     Lm=0.25;
18     L2m=0.25^2;
19
20     %Limite superiore
21     Ubound=(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m));
22     %Limite inferiore
23     C=Lm^3/(1-Ubound*Lm)^(s+2);
24     Lbound=subplus((x-lambda*Lm)/(s+s*lambda*L2m)-(1+s)*lambda/...
25         (2*(1+lambda*L2m))*(Ubound)^2*C);
26
27 else if flag==2      %Ampiezza del salti: beta
28     %Parametri della beta
29     alpa=18.5;
30     beta=55.5;
31     Lm=0.25;
```

```

32     L2m=0.05^2+0.25^2;
33
34     %Limite superiore
35     Ubound=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
36     %Limite inferiore
37     f=@(L) L.^3./(1-Ubound.*L).^(s+2).*betapdf(L,alpha,beta);
38     C=integral(f,0,1);
39     Lbound=subplus(min(1,(x-lambda*Lm)/(s+s*lambda*L2m)-(1+s)*lambda...
40         /(2*(1+lambda*L2m))*(Ubound)^2*C));
41
42     else if flag==3 %Ampiezza del salti: log-normale
43         %Parametri lognormale
44         Lm=0.25;
45         L2m=0.1^2+0.25^2;
46         mu=-0.2965;
47         sig=0.1327;
48
49         %Limite superiore
50         Ubound=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
51         %Limite inferiore
52         f=@(L) (1-exp(mu+sig.*L)).^3./(1-Ubound.*(1-exp(mu+sig.*L)))...
53             .^(s+2).*normpdf(L,0,1);
54         C=integral(f,-10,10);
55         Lbound=subplus(min(1,(x-lambda*Lm)/(s+s*lambda*L2m)-(1+s)*lambda...
56             /(2*(1+lambda*L2m))*(Ubound)^2*C));
57     end
58 end
59 end
60 end

1 function [Ubound,Lbound]=limitisecondaspecie(flag,s)
2 % Calcola i limiti di seconda specie per la strategia ottima
3 % con rho=0.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Aversione al rischio
10 %
11 %OUTPUT:
12 % Ubound,Lbound : Limiti per la strategia ottima
13
14 x=5.363;
15 lambda =1.842;
16 if flag==1 %Ampiezza salti: costante
17     %Parametri salti
18     Lm=0.25;

```

```

19     L2m=0.25^2;
20
21     %Limite superiore
22     Au=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*Lm^3;
23     Ubound=-1/(2*Au)+sqrt(1/(2*Au)^2+(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)*Au));
24     %Limite inferiore
25     A1=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*Lm^3/(1-Ubound*Lm)^(2+s);
26     Lbound=subplus(-1/(2*A1)+sqrt(1/(2*A1)^2+(x-lambda*Lm)...
27         /(s*(1+lambda*L2m)*A1)));
28
29     else if flag==2     %Ampiezza salti: beta
30         %Parametri della beta
31         alfa=18.5;
32         beta=55.5;
33         Lm=0.25;
34         L2m=0.05^2+0.25^2;
35
36         %Limite superiore
37         Au=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*integral(@(L) L.^3.*...
38             betapdf(L, alfa, beta), 0, 1);
39         Ubound=min(1, -1/(2*Au)+sqrt(1/(2*Au)^2+(x-lambda*Lm)/...
40             (s*(1+lambda*L2m)*Au)));
41         %Limite inferiore
42         A1=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*integral(@(L) L.^3./...
43             (1-Ubound.*L).^(2+s).*betapdf(L, alfa, beta), 0, 1);
44         Lbound=subplus(min(1, -1/(2*A1)+sqrt(1/(2*A1)^2+(x-lambda*Lm)...
45             /(s*(1+lambda*L2m)*A1)));
46
47     else if flag==3     %Ampiezza salti: log-normale
48         %Parametri lognormale
49         Lm=0.25;
50         L2m=0.1^2+0.25^2;
51         mu=-0.2965;
52         sig=0.1327;
53
54
55         %Limite superiore
56         Au=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*integral(@(L)...
57             (1-exp(mu+sig.*L)).^3.*normpdf(L), -10, 10);
58         Ubound=min(1, -1/(2*Au)+sqrt(1/(2*Au)^2+(x-lambda*Lm)...
59             /(s*(1+lambda*L2m)*Au)));
60         %Limite inferiore
61         A1=(1+s)*lambda/(2*(1+lambda*L2m))*integral(@(L)...
62             (1-exp(mu+sig.*L)).^3./...
63             (1-Ubound.*(1-exp(mu+sig.*L)).^(2+s).*normpdf(L), -10, 10);
64         Lbound=subplus(min(1, -1/(2*A1)+sqrt(1/(2*A1)^2+(x-lambda*Lm)...
65             /(s*(1+lambda*L2m)*A1)));

```

```

66         end
67     end
68 end
69 end

1 function sol=optimalstrategy(flag,s,x,lambda)
2 % Calcola la strategia ottima nel caso in cui
3 % il coefficiente di correlazione rho=0.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Avversione al rischio
10 % x,lambda      : Parametri del processo stocastico
11 % OUTPUT:
12 % sol           : Strategia ottima
13
14 if flag ==1 %Ampiezza del salti: costante
15
16     L=0.25;
17     f=@(s,p) abs(1/s.*(x-lambda.*L.*(1-p.*L)^(-s))-p);
18     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
19 else if flag==2 %Ampiezza salti: beta
20
21     %Parametri della beta
22     alpa=18.5;
23     beta=55.5;
24     g=@(s,p,L) lambda.*L.*(1-p.*L).^(-s).*betapdf(L,alpa,beta);
25     f=@(s,p) abs(1/s.*(x-integral(@(L) g(s,p,L),0,1))-p)+10^10*(p>1);
26     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
27 else if flag==3 %Ampiezza salti: lognormale
28
29     %Parametri lognormale
30     mu=-0.2965;
31     sig=0.1327;
32     g=@(s,p,L) lambda.*(1-exp(mu+sig.*L)).*(1-p.*(1-exp(mu+sig.*L))).
33     .^(-s).*normpdf(L,0,1);
34     f=@(s,p) abs(1/s.*(x-integral(@(L) g(s,p,L),-10,10))-p)+10^10*(p>1);
35     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
36     end
37 end
38 end
39 end

1 function sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm,param1,param2)
2 % Calcola la strategia ottima del problema iniziale con un
3 % generico parametro di correlazione rho.

```

```

4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -s: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Avversione al rischio
10 % rho           : Coefficiente di correlazione
11 % x, lambda, b  : Parametri del processo stocastico
12 % N             : Numero step discretizzazione
13 % T             : Lunghezza intervallo temporale
14 % Lm            : Media dei salti
15 % param1, param2 : Parametri distribuzione salti
16 %
17 % OUTPUT:
18 % sol           : Strategia ottima
19
20 if flag ==1 && nargin==8 %Ampiezza del salti:costante
21     L=Lm;
22     f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*L.*(1-p.*L).^(-s))-p)+10^10*(p>4);
23     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
24
25 else if flag==2 && nargin==10 %Ampiezza salti:beta
26
27     g=@(s,p,L) lambda.*L.*(1-p.*L).^(-s).*betapdf(L,param1,param2);
28     f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-integral(@(L) g(s,p,L),0,1))-p)+10^10*(p>1);
29     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
30 else if flag==3 && nargin==10 %Ampiezza salti:lognormale
31
32     g=@(s,p,L) lambda.*(1-exp(param1+param2.*L)).*(1-p.*...
33         (1-exp(param1+param2.*L))).^(-s).*normpdf(L,0,1);
34     f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-integral(@(L) g(s,p,L),-10,10))-p)...
35         +10^10*(p>1);
36     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
37     end
38     end
39 end
40 end

1 function sol=optimalstrategy_with_correlation_approx(flag,s,rho,x,k1,lambda,b,T,N,Lm,LV)
2 % Calcola la strategia ottima del problema approssimato
3 % per un generico rho.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Avversione al rischio
10 % rho           : Coefficiente di correlazione

```

```

11 % x,k1,lambda,b      : Parametri del processo stocastico
12 % N                  : Numero step discretizzazione
13 % T                  : Lunghezza intervallo temporale
14 % Lm,LV              : Media e varianza dei salti
15 % param1,param2     : Parametri distribuzione salti
16 %
17 % OUTPUT:
18 % sol                : Strategia ottima
19 %Parametri discretizzazione
20 step=T/(N+1);
21 L2m=Lm^2+LV^2;
22 %Parametri strategia approssimata
23 j=N+2;
24 sol=zeros(1,j);
25 K=s*(1+lambda*L2m)/((s*(1-rho^2+lambda*L2m))+rho^2);
26 h=0.5*((s-1)/(K*s))*((x-lambda*Lm)^2/(1+lambda*L2m));
27 k=k1+((s-1)/s)*b*rho*((x-lambda*Lm)/(1+lambda*L2m));
28 a=sqrt(k^2+2*h*b^2);
29 for t=10:-step:0     %Procedura backward
30
31     %soluzione strategia approssimata
32     B=2*h*(exp(a*(T-t))-1)/(exp(a*(T-t))*(k+a)-k+a);
33     sol(j)=(flag>1)*subplus(min(1,(x-lambda*Lm-K*B*rho*b)/(s*(1+lambda*L2m))))+...
34         (flag==1)*subplus((x-lambda*Lm-K*B*rho*b)/(s*(1+lambda*L2m)));
35
36     j=j-1;
37 end
38 end

1 function [sol,A,B]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T,Lm,param1,param2)
2 % Calcola la strategia ottima del problema iniziale e
3 % i parametri della funzione valore ottimo.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag              : -1: Salti costanti
7 %                  : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %                  : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s                 : Avversione al rischio
10 % rho               : Coefficiente di correlazione
11 % x,lambda,k,r,b,theta : Parametri del processo stocastico
12 % N                 : Numero step discretizzazione
13 % T                 : Lunghezza intervallo temporale
14 % Lm                : Media dei salti
15 % param1,param2    : Parametri distribuzione salti
16 %
17 % OUTPUT:
18 % sol               : Strategia ottima
19 % A,B               : Coefficienti utilita attesa

```

```

20
21 %Discretizzazione
22 step=T/(N+1);
23 %Valori iniziali delle variabili
24 A=0;
25 B=0;
26
27 if flag==1 && nargin==12 %Ampiezza salti: costante
28
29     sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm); %Soluzione in t=T
30
31     for j=10-step:-step:0 %Procedura backward per le variabili
32         Bold=B;
33
34         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*(1-sol*Lm)^(1-s)+...
35             1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
36
37         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
38
39         sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm);
40     end
41
42 else if flag==2 && nargin==14 %Ampiezza salti: beta
43
44     sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm,param1,param2);
45     %Soluzione in t=T
46
47     for j=10-step:-step:0 %Procedura backward per le variabili
48         Bold=B;
49
50         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
51             (1-sol.*L).^(1-s).*betapdf(L,param1,param2),0,1)+...
52             1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
53
54         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
55
56         sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm,...
57             param1,param2);
58     end
59
60 else if flag==3 &&nargin==14 %Ampiezza salti: lognormale
61
62     sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,Lm,...
63         param1,param2); %Soluzione in t=T
64
65     for j=10-step:-step:0 %Procedura backward per le variabili
66         Bold=B;

```

APPENDICE A. CODICI MATLAB

```

66
67         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*integral(@(L) ...
68             (1-sol.*(1-exp(param1+param2.*L)).^(1-s).*normpdf(L,0,1),-10,10)+...
69             1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
70
71         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
72
73         sol=optimalstrategy_with_correlation(flag,s,B,rho,x,lambda,b,...
74             Lm,param1,param2);
75     end
76 end
77 end
78 end
79 end

1 function RWEL=rwel(flag)
2 % Calcola il RWEL nel caso in cui il coefficiente di correlazione e nullo.
3 %
4 % INPUT:
5 % flag           : -1: Salti costanti
6 %                -2: Salti distribuiti come una beta
7 %                -3: Salti distribuiti come una log-normale
8 % OUTPUT:
9 % RWEL= Relative wealth equivalent loss(rho=0).
10
11 %Parametri del modello
12 x=5.363;
13 r=0.028;
14 teta=0.115;
15 k=5.30;
16 b=0.225;
17 lambda=1.842;
18 T=10;
19 i=1;
20
21 %Strategia ottima
22 j=1;
23 for s=2:0.2:10
24     p(j)=optimalstrategy(flag,s);
25     j=j+1;
26 end
27
28 if flag==1 %Ampiezza salti:costante
29     L=0.25;
30
31     for s=2:0.2:10
32         p_star=(x-lambda*L)/(s*(1+lambda*L^2));
33

```

```

34      %Parametri per il calcolo del RWEL
35      C0=@(P) (1-s)*(P*x-1/2*s*P^2+lambda/(1-s)*((1-P*L)^(1-s)-1));
36      a=@(P) sqrt(k^2-2*b^2*C0(P));
37      A=@(P) 2*teta/b^2*log((2*a(P)*exp(1/2*(a(P)+k)*T))/(2*a(P)+(a(P)+k)...
38      *(exp(a(P)*T)-1)));
39      B=@(P) 2*C0(P)*(exp(a(P)*T)-1)/((2*a(P)+(a(P)+k)*(exp(a(P)*T)-1)));
40
41      %RWEL
42      g=@(P) exp((1-s)*r*T+A(P)+B(P)*(teta/(1+k)));
43      RWEL(i)=subplus(1-(g(p_star)/g(p(i)))^(1/(1-s)));
44      i=i+1;
45  end
46
47  else if flag==2      %Ampiezza salti:beta
48      %Parametri beta
49      alpa=18.5;
50      beta=55.5;
51      Lm=0.25;
52      L2m=0.05^2+0.25^2;
53
54      for s=2:0.2:10
55          p_star=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
56
57          %Parametri calcolo RWEL
58          C0=@(P) (1-s)*(P*x-1/2*s*P^2+lambda/(1-s)*integral(@(L) ((1-P.*L).^...
59          (1-s)-1).*betapdf(L,alpa,beta),0,1));
60          a=@(P) sqrt(k^2-2*b^2*C0(P));
61          A=@(P) 2*teta/b^2*log((2*a(P)*exp(1/2*(a(P)+k)*T))/(2*a(P)+(a(P)+k)*...
62          (exp(a(P)*T)-1)));
63          B=@(P) 2*C0(P)*(exp(a(P)*T)-1)/((2*a(P)+(a(P)+k)*(exp(a(P)*T)-1)));
64          g=@(P) exp((1-s)*r*T+A(P)+B(P)*(teta/(k)));
65
66          %RWEL
67          RWEL(i)=subplus(1-(g(p_star)/g(p(i)))^(1/(1-s)));
68          i=i+1;
69      end
70  else if flag==3      %Ampiezza salti:lognormale
71      %Parametri lognormale
72      Lm=0.25;
73      L2m=0.1^2+0.25^2;
74      mu=-0.2965;
75      sig=0.1327;
76
77      for s=2:0.2:10
78          p_star=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
79
80          %Coefficienti calcolo RWEL

```

```

81         CO=@(P) (1-s)*(P*x-1/2*s*P^2+lambda/(1-s)*integral(@(L) ...
82             ((1-P.*(1-exp(mu+sig.*L))).^(1-s)-1).*normpdf(L),-10,10));
83         a=@(P) sqrt(k^2-2*b^2*CO(P));
84         A=@(P) 2*teta/b^2*log((2*a(P)*exp(1/2*(a(P)+k)*T))/...
85             (2*a(P)+(a(P)+k)*(exp(a(P)*T)-1)));
86         B=@(P) 2*CO(P)*(exp(a(P)*T)-1)/((2*a(P)+(a(P)+k)*...
87             (exp(a(P)*T)-1)));
88         g=@(P) exp((1-s)*r*T+A(P)+B(P)*(teta/(k)));
89
90         %RWEL
91         RWEL(i)=subplus(1-(g(p_star)/g(p(i)))^(1/(1-s)));
92         i=i+1;
93     end
94 end
95 end
96 end
97 end

1 function RWEL=RWEL_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T,Lm,LV,param1,param2)
2 % Calcola il RWEL nel caso generico in cui il coefficiente di correlazione non e nullo.
3 %
4 % INPUT:
5 % flag           : -1: Salti costanti
6 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
7 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
8 % s              : Aversione al rischio
9 % rho            : Coefficiente di correlazione
10 % x,lambda,k,r,b,theta : Parametri del processo stocastico
11 % N              : Numero step discretizzazione
12 % T              : Lunghezza intervallo temporale
13 % Lm,LV          : Media e varianza dei salti
14 % param1,param2  : Parametri distribuzione salti
15 %
16 % OUTPUT:
17 % RWEL           : Relative wealth equivalent loss
18
19 %Discretizzazione
20 step=T/(N+1);
21 %Valori iniziali delle variabili
22 A=0;
23 B=0;
24 if flag==1 && nargin==13 %Ampiezza salti: costante
25     L=Lm;
26     %Strategia ottima problema approssimato
27     S=optimalstrategy_with_correlation_approx(flag,s,rho,x,k,lambda,b,T,N,Lm,LV);
28     i=length(S);
29     %Utilita attesa problema approssimato
30     for j=10-step:-step:0

```

```

31     Bold=B;
32
33     B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*(1-S(i)*L)^(1-s)+...
34         1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
35
36     A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
37     i=i-1;
38     end
39     %Funzione valore ottimo problema originale
40     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T,Lm);
41 else if flag==2 && nargin==15 %Ampiezza salti: beta
42     %Strategia ottima problema approssimato
43     S=optimalstrategy_with_correlation_approx(flag,s,rho,x,k,lambda,b,T,N,Lm,LV);
44     i=length(S);
45     %Utilita attesa problema approssimato
46     for j=10-step:-step:0
47         Bold=B;
48
49         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*integral(@(L) ...
50             (1-S(i).*L).^(1-s).*betapdf(L,param1,param2),0,1)+...
51             1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
52
53         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
54
55         i=i-1;
56     end
57     %Funzione valore ottimo problema originale
58     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T...
59         Lm,param1,param2);
60 else if flag==3 && nargin==15 %Ampiezza salti: log-normale
61     %Strategia ottima problema approssimato
62     S=optimalstrategy_with_correlation_approx(flag,s,rho,x,k,lambda,b,T,N,Lm,LV);
63     i=length(S);
64     %Utilita attesa problema approssimato
65     for j=10-step:-step:0
66         Bold=B;
67         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
68             (1-S(i).*(1-exp(param1+param2.*L))).^(1-s).*normpdf(L,0,1),-10,10)+...
69             1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
70
71         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
72
73         i=i-1;
74     end
75     %Funzione valore ottimo problema originale
76     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,...
77         N,T,Lm,param1,param2)

```

```

78         end
79     end
80 end
81
82 %Funzione valore ottimo problema originale
83 g1= exp(A1+B1*(theta/k));
84 g= exp(A+B*(theta/k));
85 %RWEL
86 RWEL=subplus(1-(g/g1)^(1/(1-s)));
87 end

1 function RWEL=optimalstrategy_second_approx(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T...
2     ,Lm,LV,param1,param2)
3 % Calcola il RWEL per l'approssimazione di secondo tipo.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %                -2: Salti distribuiti come una beta
8 %                -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Aversione al rischio
10 % rho            : Coefficiente di correlazione
11 % x,lambda,k,r,b,theta : Parametri del processo stocastico
12 % N              : Numero step discretizzazione
13 % T              : Lunghezza intervallo temporale
14 % Lm,LV          : Media e varianza dei salti
15 % param1,param2   : Parametri distribuzione salti
16 %
17 % OUTPUT:
18 % RWEL           : Relative wealth equivalent loss
19
20 %Parametri discretizzazione
21 step=T/(N+1);
22 %Strategia ottima con rho=0
23 sol_0=optimalstrategy(flag,s,x,lambda);
24 %Strategia approssimata con rho=-0.57
25 sol=optimalstrategy_with_correlation_approx(flag,s,rho,x,k,lambda,b,T,N,Lm,LV);
26
27 if flag==1 && nargin==13 %Ampiezza salti: costante
28     %Strategia approssimata con rho=0
29     L2m=LV^2+Lm^2;
30     sol_approx_0=(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m));
31
32     %Nuova strategia approssimata
33     S=sol+(sol_0-sol_approx_0);
34
35     %Calcolo dell'utilita attesa in t=0 per la nuova strategia approssimata
36     i=length(S);
37     B=0;

```

```

38     A=0;
39     for h=10-step:-step:0
40         Bold=B;
41         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*(1-S(i)*Lm)^(1-s)+...
42             1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
43         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
44         i=i-1;
45     end
46     %Utilita attesa in t=0 della strategia ottima
47     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T,Lm);
48 else if flag==2 && nargin==15 %Ampiezza salti: beta
49     L2m=Lm^2+LV^2;
50     %Strategia approssimata con rho=0
51     sol_approx_0=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
52
53     %Nuova strategia approssimata
54     S=sol+(sol_0-sol_approx_0);
55
56     %Calcolo dell'utilita attesa in t=0 per la nuova strategia approssimata
57     i=length(S);
58
59     B=0;
60     A=0;
61     for h=10-step:-step:0
62         Bold=B;
63         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
64             (1-S(i).*L).^ (1-s).*betapdf(L,param1,param2),0,1)+...
65             1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
66         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
67         i=i-1;
68     end
69     %Utilita attesa in t=0 della strategia ottima
70     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta...
71         ,N,T,Lm,param1,param2);
72 else if flag==3 && nargin==15 %Ampiezza salti: log-normale
73     L2m=LV^2+Lm^2;
74     %Strategia approssimata con rho=0
75     sol_approx_0=min(1,(x-lambda*Lm)/(s*(1+lambda*L2m)));
76
77     %Nuova strategia approssimata
78     S=sol+(sol_0-sol_approx_0);
79
80     %Calcolo dell'utilita attesa in t=0 per la nuova strategia approssimata
81     i=length(S);
82     B=0;
83     A=0;
84     for h=10-step:-step:0

```

APPENDICE A. CODICI MATLAB

```

85         Bold=B;
86         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*S(i)*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
87             (1-S(i).*(1-exp(param1+param2.*L))).^(1-s).*normpdf(L,0,1),-10,10)+...
88             1/2*b^2*Bold^2+(S(i)^2*s*(s-1)/2+S(i)*(1-s)*x-lambda));
89         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
90         i=i-1;
91     end
92     %Utilita attesa in t=0 della strategia ottima
93     [~,A1,B1]=utility_with_correlation(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,...
94         N,T,Lm,param1,param2);
95     end
96 end
97 end
98
99 g1= exp(A1+B1*(theta/k));
100 g= exp(A+B*(theta/k));
101
102 %Calcolo del RWEL
103 RWEL=subplus(1-(g/g1)^(1/(1-s)));
104 end

1 function RWEL=double_jump_RWEL(flag,s,rho,x,lambda,k,r,b,theta,N,T,Y,param1,param2)
2 % Calcola il RWEL nel caso in cui la volatilita presenta
3 %anch'essa una componente di salto.
4 %
5 % INPUT:
6 % flag           : -1: Salti costanti
7 %               : -2: Salti distribuiti come una beta
8 %               : -3: Salti distribuiti come una log-normale
9 % s              : Aversione al rischio
10 % rho            : Coefficiente di correlazione
11 % x,lambda,k,r,b,theta : Parametri del processo stocastico
12 % N              : Numero step discretizzazione
13 % T              : Lunghezza intervallo temporale
14 % Lm,LV          : Media e varianza dei salti
15 % param1,param2  : Parametri distribuzione salti
16 %
17 % OUTPUT:
18 % RWEL           : Relative wealth equivalent loss
19
20 %Step temporale
21 step=T/(N+1);
22
23 if flag==1 && nargin==12 %Ampiezza salti: costante
24     %Momento primo e secondo dei salti
25     L=0.25;
26     L2=L^2;
27     %Calcolo strategia ottima

```

```

28     B=0;
29     A=0;
30     f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*L.*(1-p.*L)^(-s).*exp(B*Y))-p)+10^10*(p>4);
31     sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
32     for j=10-step:-step:0
33         Bold=B;
34
35         B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*(1-sol*L)^(1-s)*exp(Bold*Y)+...
36             1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
37
38         A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
39
40         f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*L.*(1-p.*L)^(-s).*exp(B*Y))-p);
41         sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
42     end
43     %Calcolo strategia approssimata
44     B1=0;
45     A1=0;
46     sol_aprox(1)=(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2));
47     h=1;
48     for j=10-step:-step:0
49         Bold=B1;
50
51         B1=Bold+step*(Bold*((1-s)*sol_aprox(h)*(b*rho-lambda*L*Y)-k+lambda*Y)+...
52             +1/2*Bold^2*(lambda*Y^2+b^2)+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)/2*(1+lambda*L2)...
53             +sol_aprox(h)*(1-s)*(x-lambda*L)));
54
55         A1=A1+step*((1-s)*r+theta*Bold);
56         h=h+1;
57         sol_aprox(h)=(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2));
58     end
59
60     %Calcolo utilita attesa della strategia approssimata
61     B2=0;
62     A2=0;
63     h=1;
64     for j=10-step:-step:0
65         Bold=B2;
66
67         B2=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol_aprox(h)*rho-k)+lambda*(1-sol_aprox(h)*L)...
68             ^(-s)*exp(Bold*Y)+...
69             1/2*b^2*Bold^2+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)/2+sol_aprox(h)*(1-s)*x-lambda));
70
71         A2=A2+step*((1-s)*r+theta*Bold);
72         h=h+1;
73     end
74 else if flag==2 && nargin==14         %Ampiezza salti: beta

```

```

75      %Momento primo e secondo dei salti
76      L=0.25;
77      L2=0.05^2+0.25^2;
78
79      %Calcolo strategia ottima
80      B=0;
81      A=0;
82      f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*integral(@(L) L.*(1-p.*L).^(-s).
83      ...*exp(B*Y).*betapdf(L,param1,param2),0,1))-p)+10^10*(p>1);
84      sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
85      for j=10-step:-step:0
86          Bold=B;
87
88          B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*integral(@(L) ...
89          (1-sol*L).^(-s).*exp(Bold*Y).*betapdf(L,param1,param2),0,1)+...
90          1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
91
92          A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
93
94          f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*integral(@(L) L.*(1-p.*L).
95          ^(-s).*exp(B*Y).*betapdf(L,param1,param2),0,1))-p)+10^10*(p>1);
96          sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
97      end
98      %Calcolo della strategia approssimata
99      B1=0;
100     A1=0;
101     sol_aprox(1)=min(1,(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2)));
102     h=1;
103     for j=10-step:-step:0
104         Bold=B1;
105
106         B1=Bold+step*(Bold*((1-s)*sol_aprox(h)*(b*rho-lambda*L*Y)-k+lambda*Y)+...
107         +1/2*Bold^2*(lambda*Y^2+b^2)+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)/2*...
108         (1+lambda*L2)+sol_aprox(h)*(1-s)*(x-lambda*L));
109
110         A1=A1+step*((1-s)*r+theta*Bold);
111         h=h+1;
112         sol_aprox(h)=min(1,(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2)));
113     end
114
115     B2=0;
116     A2=0;
117     h=1;
118     %Calcolo dell'utilita attesa della strategia approssimata
119     for j=10-step:-step:0
120         Bold=B2;
121

```

```

122     B2=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol_aprox(h)*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
123         (1-sol_aprox(h)*L).^(1-s).*exp(Bold*Y).*betapdf(L,param1,param2),0,1)+....
124         1/2*b^2*Bold^2+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)/2+sol_aprox(h)*(1-s)*x-lambda));
125
126     A2=A2+step*((1-s)*r+theta*Bold);
127     h=h+1;
128     end
129     else if flag==3 && nargin==14    %Ampiezza salti: log-normale
130         %Momento primo e secondo dei salti
131         L=0.25;
132         L2=0.1^2+0.25^2;
133         %Calcolo strategia ottima
134         B=0;
135         A=0;
136         mu=-0.2965;
137         sig=0.1327;
138         f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*integral(@(L) (1-exp(mu+sig.*L))...
139             .*(1-p.*(1-exp(mu+sig.*L))).^(-s).*exp(B*Y)).*...
140             normpdf(L,0,1),-10,10))-p)+10^10*(p>1);
141         sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
142         for j=10-step:-step:0 %Procedura backward per le varibili
143             Bold=B;
144
145             B=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol*rho-k)+lambda*integral(@(L)...
146                 (1-sol*(1-exp(mu+sig.*L))).^(1-s).*exp(Bold*Y).*normpdf(L,0,1),-10,10)+....
147                 1/2*b^2*Bold^2+(sol^2*s*(s-1)/2+sol*(1-s)*x-lambda));
148
149             A=A+step*((1-s)*r+theta*Bold);
150
151             f=@(s,p) abs(1/s.*(x+b*rho*B-lambda.*integral(@(L)...
152                 (1-exp(mu+sig.*L)).*(1-p.*(1-exp(mu+sig.*L))).^(-s).*...
153                 exp(B*Y).*normpdf(L,0,1),-10,10))-p)+10^10*(p>1);
154             sol=fminsearch(@(p) f(s,p),0.5);
155         end
156         %Calcolo della strategia approssimata
157         B1=0;
158         A1=0;
159         sol_aprox(1)=min(1,(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2)));
160         h=1;
161         for j=10-step:-step:0
162             Bold=B1;
163
164             B1=Bold+step*(Bold*((1-s)*sol_aprox(h)*(b*rho-lambda*L*Y)-k+lambda*Y)+....
165                 +1/2*Bold^2*(lambda*Y^2+b^2)+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)...
166                 /2*(1+lambda*L2)+sol_aprox(h)*(1-s)*(x-lambda*L));
167
168             A1=A1+step*((1-s)*r+theta*Bold);

```

```

169             h=h+1;
170             sol_aprox(h)=min(1,(x-lambda*L+B1*(b*rho-lambda*L*Y))/(s*(1+lambda*L2)));
171         end
172
173         B2=0;
174         A2=0;
175         h=1;
176         %Calcolo dell'utilita attesa della strategia approssimata
177         for j=10-step:-step:0
178             Bold=B2;
179
180             B2=Bold+step*(Bold*((1-s)*b*sol_aprox(h)*rho-k)+lambda*...
181                 integral(@(L) (1-sol_aprox(h))*(1-exp(mu+sig.*L)).^(1-s).*...
182                     exp(Bold*Y).*normpdf(L,0,1),-10,10)+...
183                     1/2*b^2*Bold^2+(sol_aprox(h)^2*s*(s-1)/2+sol_aprox(h)...
184                         *(1-s)*x-lambda));
185
186             A2=A2+step*((1-s)*r+theta*Bold);
187             h=h+1;
188         end
189     end
190 end
191 end
192
193 %Funzione valore ottimo problema originale
194 g1= exp(A+B*(theta/k));
195 g= exp(A2+B2*(theta/k));
196 %RWEL
197 RWEL=subplus(1-(g/g1)^(1/(1-s)));
198 end

```

Bibliografia

- [1] M. Ascheberg, N. Branger, H. Kraft & F. Thomas Seifried *When do jumps matter for portfolio optimization?*, Quantitative Finance, 2016.
- [2] P. Baldi *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Pitagora Editrice, 2000.
- [3] D.S. Bates *Post-'87 crash fears in the S&P500 futures option market*, Journal of Economics, 2000.
- [4] D.S. Bates *Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options*, Journal of Economics, 1996.
- [5] T.Bjor *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Third Edition, 2009.
- [6] R. Cont, P. Tankov *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman&Hall/CRC, 2004.
- [7] B. Eraker, M. Johannes, N. Polson *The impact of jumps in volatility and returns* Journal of Finance, 2000.
- [8] S.L Heston *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, The Review of Financial Studies, 1993.
- [9] T.S Kim, E. Omberg *Dynamic nonmyopic portfolio behavior*, The Review of Financial Studies, 1996.

- [10] J. Liu *Portfolio selection in stochastic environments*, The Review of Financial Studies, 2007.
- [11] J. Liu *Dynamic asset allocation with event risk*, Journal of Finance, 2003.
- [12] A.W. Lynch *Portfolio choice and equity characteristics: Characterizing the hedging demands induced by return predictability*, Journal of Financial Economics, 2001.
- [13] R. C. Merton *Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous*, Journal of Finance, 2002.
- [14] R. C. Merton *Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case*, Review of Financial Studies, 2002.
- [15] C. Munk *Financial Asset Pricing Theory*, Oxford University Press, 2013.
- [16] B. Oksendal *Stochastic Differential Equations*, Springer, 2000.
- [17] J. Pan *The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study*, Journal of Financial Economics, 1976.
- [18] P.E. Protter *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Second Edition, 2005.