

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Aeronautica



SVILUPPO DI UN CODICE A VORTICI DISCRETI PER IL CALCOLO DELLA SCIA DEL ROTORE DELL'ELICOTTERO

Relatore :
Giuseppe Gibertini

Tesi di Laurea di
Matteo Oppizzi
Matr. 853457

Anno Accademico 2016-2017

Matteo Oppizzi: *Sviluppo di un codice a vortici discreti per il calcolo della scia del rotore dell'elicottero* | Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica, Politecnico di Milano.

© Copyright Aprile 2018.

Politecnico di Milano:
www.polimi.it

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione:
www.ingindinf.polimi.it

Sommario

I vortex lattice methods sono comunemente usati per analisi aerodinamiche tridimensionali nelle applicazioni aeronautiche e diversi software sono ormai facilmente disponibili. La scia viene rappresentata attraverso un reticolo di pannelli composti da segmenti vorticosi che costantemente viene modificato e distorto secondo il flusso locale mantenendo le connessioni tra i nodi della griglia.

In applicazioni elicotteristiche però, questo metodo rischia di incorrere in notevoli instabilità poiché è presente uno sviluppo meno regolare e contenente forti iterazioni tra le scie delle diverse pale. I pannelli possono intrecciarsi e portare il calcolo a divergenza senza le opportune accortezze. Se si analizzano situazioni particolari, come la presenza di un ostacolo sul quale la scia impatta, questo comportamento viene ulteriormente accentuato.

In questa tesi, viene presentato un codice di calcolo che riprende la teoria della superficie portante per rappresentare il flusso indotto da un rotore di elicottero. Al fine di evitare gli inconvenienti di una rappresentazione continua della vorticità attraverso dei filamenti vorticosi, il campo viene approssimato e discretizzato in vortici puntuali, traendo vantaggio dall'abbandono della connettività del reticolo.

Viene così implementato un *Vortex Blob method*, in cui la scia, inizialmente composta da pannelli di segmenti vorticosi, viene trasformata in blobs con tutte le approssimazioni e le accortezze richieste da tale passaggio. Questo metodo ibrido viene utilizzato e validato in tre diverse configurazioni interessanti per un rotore: volo a punto fisso, effetto suolo e iterazioni con ostacolo.

Dopo una derivazione e trattazione teorica iniziale dei vortex methods e delle basi dei metodi a vortici discreti, un capitolo sui dettagli pratici dell'algoritmo spiega l'impostazione della codifica. La parte centrale espone la validazione del metodo e il confronto dei risultati numerici con dati sperimentali, evidenziando così analogie, differenze e accuratezza del codice. La tesi termina con un capitolo sui possibili sviluppi futuri del codice.

Keywords: Vortex Blob Method, Rotor-obstacle interference, Ground effect, Helicopter wake

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il prof. Giuseppe Gibertini non soltanto per la fiducia dimostrata accettando il ruolo di Relatore per questo lavoro di tesi, ma soprattutto per avermi affiancato durante tutto il periodo di sviluppo e stesura della stessa. I suoi preziosi suggerimenti mi hanno fornito spunti importanti sia sul contenuto che sul metodo di lavoro e di ricerca da custodire in futuro.

Un doveroso ringraziamento va ovviamente a tutti i docenti del Polimi incontrati negli anni che hanno trasmesso conoscenza e passione nei più svariati ambiti spaziali dai corsi insegnati: mi hanno saputo confermare quanto fosse valida la scelta presa sin dal primo anno di frequenza.

Desidero ringraziare anche tutte le persone conosciute all'interno delle strutture universitarie, dai miei compagni storici del triennio, Mosquito, Vince, Mustino, Ste, Simo, Jaco, Niil, Jack, Salvo, Albi, Piet, a quelli più recenti nel percorso di magistrale Ale, Fabri, Made, Mario. Le ore infinite di lezione sono volate grazie alla compagnia e alla simpatia di tutti loro.

Desidero inoltre ringraziare esplicitamente anche tutti i miei amici più cari che nei giorni passati assieme hanno saputo rendere piacevole il tempo libero trascorso tra un esame e un altro. Da qui, ringrazio tutta la mia compagnia del Pilo, e in particolar modo i miei amici più cari, Casli e Gialla. Grazie per aver sopportato il mio carattere cupo nei momenti di studio intenso.

Con due parole (ma non ne basterebbero mille), ringrazio la mia fidanzata Diana che pazientemente e amorevolmente mi ha affiancato durante la chiusura di questa bellissima esperienza.

Un doveroso ringraziamento va ovviamente alla mia famiglia, senza la quale non avrei mai neppur cominciato questa carriera: consegno a lei virtualmente questa mia ultima fatica accademica e il mio diploma di laurea, in segno di riconoscimento per gli sforzi sostenuti, non solo finanziari.

M. O.

Indice

1	RICHIAMI TEORICI	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Vorticità	1
1.2.1	Legame con circolazione	2
1.2.2	Equazione di evoluzione	2
1.3	Metodi alle singolarità virtuali	3
1.3.1	Vortice discreto	4
1.3.2	Sorgente	4
1.4	Legge di Biot-Savart	5
1.5	Pannelli di singolarità	6
1.5.1	Sorgenti costanti	6
1.5.2	Segmenti vorticosi	7
1.6	Linea portante di Prandtl	8
1.7	Impostazione problema	10
1.7.1	Metodo di Weissinger	10
1.7.2	Superficie Portante	11
1.8	Caratteristiche vortex methods	12
2	VORTEX BLOB METHOD	13
2.1	Introduzione	13
2.2	Particelle singolari	14
2.3	Blobs regolarizzati	16
2.3.1	Tipi di smoothing	17
2.4	Schemi di risoluzione	19
2.4.1	Schema di trasporto	19
2.4.2	Equazione evolutiva non viscosa	20
2.5	Diffusione viscosa	21
2.5.1	Particle strength exchange	22
2.6	Inserimento blobs	23
3	DESCRIZIONE CODICE	25
3.1	Introduzione	25
3.2	Modello di flusso	25
3.3	Impostazione Generale	26
3.3.1	Matrici di rotazione	28
3.4	Pannellizzazione	29
3.4.1	Pale	30

3.4.2	Elementi non portanti	32
3.5	Risoluzione Sistema	32
3.5.1	Matrice di influenza	32
3.5.2	Termine noto	33
3.5.3	Calcolo incognite	35
3.6	Evoluzione temporale	35
3.7	Inserimento blobs	36
3.8	Calcolo forze e momenti	36
3.9	Avviamento calcolo	37
3.10	Algoritmo di non penetrazione	38
3.11	Sistema immagine	39
3.12	Flappeggio	40
3.13	Parametri fisici e numerici algoritmo	41
4	VALIDAZIONE METODO	43
4.1	Introduzione	43
4.2	Confronto induzione	44
4.3	Confronto sviluppo scia	46
4.4	Confronto con la teoria di Prandtl	48
4.4.1	Teoria di Prandtl estesa	50
4.5	Confronto con la teoria di superficie portante	51
4.6	Sensibilità alle dimensioni del nucleo	52
4.6.1	Analisi in corda	52
4.6.2	Analisi in apertura	54
4.6.3	Conclusioni	56
4.7	Sensibilità al numero di pannelli di scia	56
5	CONFRONTO CON DATI SPERIMENTALI	59
5.1	Volo a punto fisso	59
5.1.1	Introduzione	59
5.1.2	Modello rotore	59
5.1.3	Modello mozzo	61
5.1.4	Sensibilità metodo	62
5.1.5	Commenti	63
5.2	Effetto suolo	65
5.2.1	Introduzione	65
5.2.2	Dati sperimentali	65
5.2.3	Risultati	66
5.2.4	Commenti	68
5.3	Ostacolo	71
5.3.1	Introduzione	71
5.3.2	Dati sperimentali	71
5.3.3	Modello ostacolo	72
5.3.4	Risultati	73
5.3.5	Commenti	74
5.3.6	Tempo di calcolo	74
5.3.7	Ulteriori confronti	76

6	SVILUPPI FUTURI	79
6.1	Approssimazioni applicate	79
6.2	Velocizzazione calcolo di induzione	80
6.2.1	Possibili approcci	80
6.2.2	Espansione in multipoli	81
6.3	Rappresentazione dello spessore delle pale	84
6.4	Ordine di accuratezza superiore	85
6.5	Correzioni di strato limite	86
6.6	Accoppiamento con BET	87
6.7	Accoppiamento con CFD	89
	Bibliografia	93

Elenco delle figure

1	RICHIAMI TEORICI	
1.1	Induzione vortice puntuale	4
1.2	Induzione sorgente puntuale	4
1.3	Induzione segmento vorticoso	5
1.4	Induzione pannello di sorgenti	7
1.5	Induzione pannello di vortici	8
1.6	Illustrazione modello linea portante di Prandtl	9
1.7	Illustrazione metodo di Weissinger	10
1.8	Illustrazione modello di superficie portante	11
1.9	Illustrazione vortex lattice method	11
2	VORTEX BLOB METHOD	
2.1	Induzione con funzioni di smoothing differenti	18
3	DESCRIZIONE CODICE	
3.1	Schema algoritmo di risoluzione	27
3.2	Sistemi di riferimento e rotazioni utilizzati.	29
3.3	Esempio diagramma di Voronoi di un profilo NACA 2414	30
3.4	Schema di inserimento blobs (con $N_{wake}^{max} = 1$)	36
3.5	Esempio di sistema immagine	40
4	VALIDAZIONE METODO	
4.1	Scia 3D del metodo vortex blob ibrido.	43
4.2	Confronto asse di riferimento C_M al variare di N_c	45
4.3	Confronto andamento scia	47
4.4	Confronto con la teoria della linea portante	49
4.5	Confronto con la teoria della linea portante estesa	50
4.6	Confronto con il modello di superficie portante	51
4.7	Dipendenza risultati da $2\varepsilon/dc$	53
4.8	Dipendenza risultati da ε con $2\varepsilon/dc = 1.2$	53
4.9	Dipendenza risultati da $2\varepsilon/db$	54
4.10	Dipendenza risultati da ε con $2\varepsilon/db = 0.5$	55
4.11	Dipendenza risultati da ε con $2\varepsilon/db = 1.1$	55
4.12	Influenza di N_{wake}^{max} sul C_L	57

5 CONFRONTO CON DATI SPERIMENTALI

5.1	Modello di galleria	60
5.2	Modello rotore	60
5.3	Pannellizzazione mozzo	61
5.4	Oscillazione C_T in funzione di N_{wake}^{max}	63
5.5	Scia in volo a punto fisso : confronto effetto fontana	64
5.6	Scia in volo a punto fisso : vista obliqua	65
5.7	C_T/C_T^{IGE} sperimentale in funzione di z/R	66
5.8	Confronto C_T^{IGE} numerico con sperimentale	67
5.9	Errore C_T^{IGE} numerico	67
5.10	Influenza N_c su C_T^{IGE}	68
5.11	Influenza k_{fin} su C_T^{IGE}	69
5.12	Scia IGE : vista obliqua	70
5.13	Scia IGE : vista frontale	70
5.14	Sistema di riferimento e punti test	71
5.15	Pannellizzazione ostacolo	72
5.16	Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale.	73
5.17	Errore C_T^{OST} numerico.	74
5.18	Tempo totale simulazione in funzione delle iterazioni	74
5.19	Tempo impiegato all'aumentare del numero di blobs	75
5.20	Scia con ostacolo : vista obliqua	75
5.21	Scia con ostacolo : vista laterale	76
5.22	Punti test aggiuntivi	76
5.23	Scia con ostacolo punto 2: vista dall'alto	77
5.24	Scia con ostacolo punto 2: vista obliqua	78
5.25	Scia con ostacolo punto 3: vista obliqua	78

6 SVILUPPI FUTURI

6.1	Esempio 2D di FMM con albero a 3 livelli	84
6.2	Definizione angoli e velocità BET	88

Elenco delle tabelle

4 VALIDAZIONE METODO

4.1	Deviazione vortex blob rispetto al vortex lattice	44
4.2	Confronto scia vortex lattice e vortex blob method	46
4.3	Risultati vortex lattice con Tornado	48
4.4	Confronto vortex blob method con teoria di Prandtl	48

5 CONFRONTO CON DATI SPERIMENTALI

5.1	Analisi sensibilità ai parametri in condizione di volo a punto fisso. .	63
5.2	C_T^{IGE} sperimentale in funzione di z.	65
5.3	Confronto C_T^{IGE} numerico con sperimentale.	67
5.4	C_T^{IGE} confronto tra 400-600 iterazioni	69
5.5	C_T^{OST} sperimentale in funzione di z.	72
5.6	Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale.	73
5.7	Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale con ostacolo laterale. .	77

Elenco dei simboli

Simbolo	Descrizione	Unità
\mathbf{u}	campo di velocità	m/s
ρ	densità	kg/m^3
ν	viscosità cinematica	m^2/s
p	pressione statica	Pa
$\boldsymbol{\omega}$	campo di vorticità	$1/s$
Γ	circolazione	m^2/s
ϕ	potenziale totale	m^2/s
$d\mathbf{l}$	elemento vettoriale infinitesimo di lunghezza	m
$d\mathbf{s}$	elemento vettoriale infinitesimo di superficie	m^2
$\hat{\mathbf{n}}$	vettore normale	m
\mathbf{u}_∞	velocità asintotica	m/s
L	portanza	N
\mathbf{F}_a	vettore forza aerodinamica	N
\mathbf{V}_{tot}	Velocità totale (asintotica + indotta)	N
u_θ	velocità tangenziale	m/s
u_r	velocità radiale	m/s
(η, ξ)	coordinate nel sistema di riferimento locale	m
\mathbf{K}	Kernel di induzione	$1/m^2$
\mathcal{G}	funzione di Green	
γ	distribuzione di circolazione	$1/sm$
$c(y)$	distribuzione di corda in apertura	m
$\alpha_{\ell=0}$	angolo di incidenza a portanza nulla	rad
α	angolo di incidenza	rad
b	apertura alare	m

Simbolo	Descrizione	Unità
\mathbf{K}_ε	Kernel di induzione regolarizzato	$1/m^2$
$\boldsymbol{\alpha}^p$	vettore intensità particella vorticoso p-esimo	m^3/s
$\boldsymbol{\omega}^N$	campo di vorticità di Novikov	$1/s$
ε	nucleo vortex blob	m
$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$	campo di vorticità ricostruito dalle vortex blobs	m^2/s
ζ_ε	funzione di regolarizzazione	$1/m^3$
ε_{tw}	svergolamento lineare	$^\circ/m$
db	dimensioni pannello in apertura	m
dc	dimensioni pannello in corda	m
c_{out}	cutout pala	m
\mathbf{x}_c	punto di collocazione	m
z_{cl}	distanza linea media dalla corda	m
dt	passo temporale	s
t^k	tempo al k-esimo passo temporale	s
Ψ	angolo di azimuth	$^\circ$
β	angolo di flappeggio	$^\circ$
θ	angolo di passo	$^\circ$
T_Ψ	matrice di rotazione azimutale	
T_β	matrice di rotazione flappeggio	
T_θ	matrice di rotazione passo	
z_{ground}	coordinata z del suolo rispetto al centro del rotore	m
\mathbf{x}_{imm}^i	posizione immagine dell'elemento i-esimo	m
\mathbf{F}_A^p	forza aerodinamica del p-esimo pannello	N
\mathbf{M}_A^p	momento aerodinamico del p-esimo pannello	$N m$
\mathbf{F}_A^{instaz}	contributo instazionarietà alla forza aerodinamica	N
S_{pan}	superficie pannello	m^2
\mathbf{n}_{pan}	vettore normale del pannello	m
I_b	momento di inerzia della pala	$kg m^2$
ρ_b	densità della pala	kg/m^3
M_{cf}	momento centrifugo	$N m$

Simbolo	Descrizione	Unità
M_A^x	momento aerodinamico in direzione x pala (asse flappeggio)	$N m$
C_T	coefficiente di trazione	
C_T^{sperim}	C_T risultato dagli esperimenti	
C_T^{calc}	C_T calcolato attraverso il metodo numerico	
σ_{CT}	deviazione standard C_T	
C_T^{OGE}	C_T fuori dall'effetto suolo (OGE)	
C_T^{IGE}	C_T in presenza del suolo (IGE)	
C_T^{OST}	C_T in presenza dell'ostacolo	
\bar{C}_T^{xx}	media temporale ultime xx iterazioni del C_T	
Y_n^m	armonica sferica di grado n e ordine m	
M_n^m	momento di multipolo	m^{n+3}/s
L_n^m	momento locale	$1/m^{n-2}s$
$\Phi_{l,j}$	espansione in multipoli	$1/m^{n-2}s$
$\Psi_{l,j}$	espansione locale scatola i-esima del livello l delle blobs interne	$1/m^{n-2}s$
$\bar{\Psi}_{l,j}$	espansione locale scatola i-esima del livello l delle blobs esterne	$1/m^{n-2}s$

Capitolo 1

RICHIAMI TEORICI

1.1 Introduzione

In questa prima parte della tesi, viene richiamata l'equazione di evoluzione della vorticità, definizione utile per l'introduzione dei *Vortex Methods* e in particolare, del *Vortex Blob Method*. Partendo da un'iniziale ripresa delle equazioni di governo della fluidodinamica formulate in vorticità e di corrente a potenziale, si introducono le singolarità virtuali utilizzate per la definizione degli elementi di contorno, modellati all'interno del codice di calcolo presentato per effettuare simulazioni aerodinamiche sul rotore di un elicottero.

1.2 Vorticità

Quando i fenomeni fluidodinamici di pratico interesse possono essere considerati incomprimibili, a temperatura costante, con flussi a singola fase, le loro equazioni di governo sono semplificate rispetto alle equazioni complete di Navier-Stokes. Così è possibile passare alle equazioni di moto in termini di vorticità, campo vettoriale definito come il rotore del vettore velocità che esprime il doppio della velocità media angolare di una particella o di un elemento di fluido attorno al suo centro di massa. Due vantaggi di questa formulazione sono l'assenza del termine di pressione e il soddisfacimento automatico dell'equazione di continuità.

L'utilità di questa grandezza risiede nella sua descrizione della tipologia di flusso, in particolar modo in connessione alla teoria di corrente a potenziale. Infatti un campo di velocità rotazionale, ossia a vorticità non nulla, si distingue completamente a livello di equazioni di moto, semplificazioni e ipotesi applicabili rispetto ad un campo irrotazionale. La sua presenza è strettamente collegata alla presenza di pareti e alla viscosità nel caso di un rotore di un elicottero, ed è per questo che caratterizzata i flussi interni allo strato limite.

1.2.1 Legame con circolazione

Nel campo della fluidodinamica, la circolazione è definita come l'integrale di linea attorno ad una linea chiusa del campo di velocità :

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.1)$$

Attraverso l'applicazione del teorema di Stokes, è possibile risalire all'espressione della dipendenza della circolazione dal campo di vorticità :

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \quad (1.2)$$

Si è esplicitato quindi che la circolazione altro non è che il flusso della vorticità attraverso una superficie. Questa nozione risulterà utile nelle definizioni e nelle equivalenze dei diversi elementi computazionali utilizzati da differenti metodi, quali filamenti e blobs.

1.2.2 Equazione di evoluzione

Attraverso la manipolazione delle equazioni complete di Navier-Stokes, calcolando il rotore dell'equazione di quantità di moto e introducendo delle semplificazioni, è possibile ottenere l'equazione di governo fondamentale per i vortex methods, l'equazione di trasporto della vorticità :

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1.3)$$

Questa equazione deriva da ipotesi semplificative di densità ρ costante, fluido incomprimibile e forze di volume conservative, descrivendo il moto del fluido attraverso un punto di vista lagrangiano. I termini contenuti nella formula sono:

- $\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}$: derivata materiale che rappresenta il rateo di evoluzione della vorticità per un elemento materiale sottoposto ad un campo di velocità \mathbf{u} .
- $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$: termine di vortex stretching che rappresenta l'incremento (o diminuzione) di vorticità causata dallo stretching e dalla rotazione delle linee vorticose.
- $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$: termine viscoso che porta alla diffusione di vorticità.

Come si andrà a vedere, questa equazione è la base dei vortex methods, i quali la risolvono attraverso diverse tipologie di discretizzazione al fine di calcolare il flusso desiderato con grossi vantaggi a livello computazionale. L'equazioni dipendono così soltanto dalla vorticità e dalla velocità.

Un vortex method è quindi caratterizzato dall'uso dell'equazione di trasporto-diffusione della vorticità e da una descrizione Lagrangiana del campo di vorticità. Ciò implica che il flusso può essere rappresentato in modo più compatto rispetto ad una formulazione in velocità. Se poi si considerano flussi con minima diffusione

viscosa, il volume di fluido con intensità di vorticità significativa è tipicamente una piccola frazione del dominio.

La prima idea naturale per effettuare delle simulazioni numeriche basate sulla risoluzione dell'equazione di evoluzione della vorticità è stata di rappresentare tale campo attraverso dei segmenti, o filamenti, vorticosi. A tale scopo nascono così i metodi *Vortex Lattice*.

Lo strato limite confinato ad uno spessore infinitesimo sulla superficie portante di un'ala viene trascurato, così come i suoi effetti di resistenza viscosa, e il flusso viene descritto attraverso la definizione del suo potenziale cinetico. La vorticità creata dagli sforzi viscosi a parete viene rilasciata dal corpo nella scia aerodinamica, anch'essa di spessore infinitesimo, e modellata attraverso singolarità virtuali quali vortici discreti (blobs) o filamenti vorticosi che rispondono all'equazione evolutiva della vorticità.

1.3 Metodi alle singolarità virtuali

La teoria a potenziale descrive il campo della velocità come gradiente di una funzione scalare ϕ . Di conseguenza, una corrente potenziale è caratterizzata da un campo di velocità irrotazionale (in quanto il rotore di un gradiente è nullo per definizione), il quale è una valida approssimazione per diverse applicazioni, sia in condizioni stazionarie che non stazionarie. Nel caso di un flusso incomprimibile, il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace. Per la sua risoluzione è possibili sovrapporre soluzioni elementari data la linearità del problema che permette l'applicazione del principio di sovrapposizione.

L'utilità di tale descrizione risiede nel fatto che per la maggior parte del dominio in una simulazione aerodinamica, l'approssimazione di irrotazionalità è valida. Infatti la regione vorticoso rotazionale generata dagli sforzi viscosi viene confinata nel sottile strato limite e nella conseguente scia. Quando viene a mancare questa ipotesi, la teoria a potenziale perde di validità, e per questo motivo risulta inadeguata per descrizioni di un flusso attorno a corpi tozzi o ad alti angoli di incidenza senza opportune correzioni viscosi.

Da questa teoria scaturisce un'importante tipologia di metodi molto usati in ambito aerodinamico e non solo: i *metodi alle singolarità virtuali*. Il corpo viene rappresentato così tramite una distribuzione di singolarità, o una combinazione lineare delle stesse, di intensità incognita, funzione però delle condizioni al contorno. In questa ottica, saranno descritte le principali funzioni utili per la simulazione di corpi portanti e non che introducono delle singolarità nel metodo data la loro forma matematica. Queste singolarità sono poste agli estremi del dominio di validità dell'equazione di Laplace e quindi non ineficiano la sua risoluzione, introducendo gli effetti rotazionali dovuti a strato limite e scia.

1.3.1 Vortice discreto

La funzione che descrive analiticamente la presenza di un vortice è un'espressione singolare nel centro del vortice e irrotazionale nel resto del dominio.

La sua forma matematica nel caso 2D è :

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.4)$$

dove Γ è l'intensità del vortice puntuale, nonché la sua circolazione, r la distanza del punto di calcolo dal vortice e u_θ la velocità indotta tangenziale. Tramite questa relazione è possibile introdurre gli effetti di un corpo con circolazione non nulla, e quindi portante.

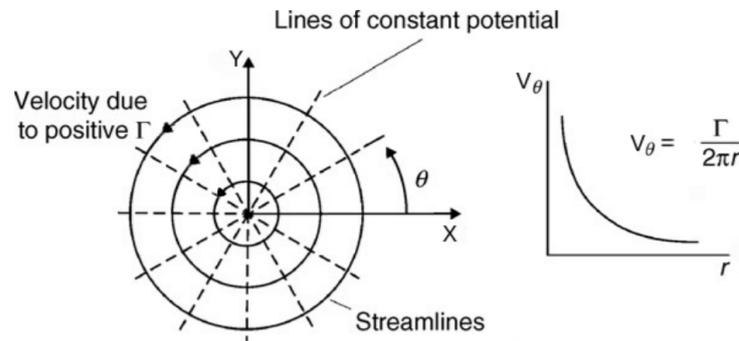


Figura 1.1: Induzione vortice puntuale

1.3.2 Sorgente

Un'altra funzione utile per la simulazione dei contorni solidi e per poter imporre la condizione di non penetrazione, è la funzione sorgente. Anche qui vi è una singolarità posta al centro, ed è sempre inserita all'interno dello strato limite senza andare ad intaccare la regolarità e l'irrotazionarietà del flusso a potenziale. La sua formulazione nel caso 2D è :

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (1.5)$$

dove Q è l'intensità della sorgente e u_r la velocità indotta in direzione radiale.

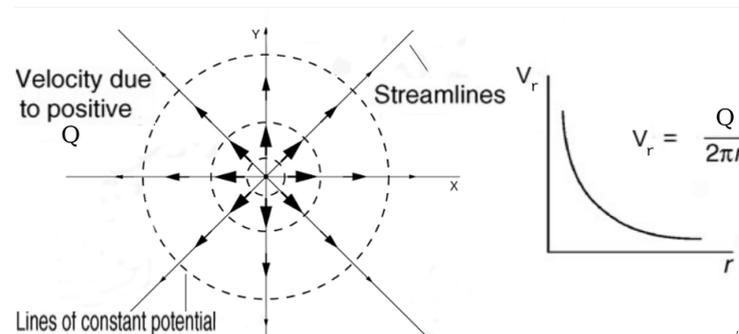


Figura 1.2: Induzione sorgente puntuale

1.4 Legge di Biot-Savart

La naturale estensione al 3D della formula di un vortice puntuale espressa nella (1.4) è la *legge di Biot-Savart* :

$$\mathbf{u}_{ind} = - \int_{\ell} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (1.6)$$

Descrive l'induzione di un filamento vorticoso come somma infinita di vortici puntuali. I termini che compaiono sono :

- $d\mathbf{s}$ variabile di integrazione lungo il filamento vorticoso che indica il senso di rotazione attraverso la regola della mano destra.
- \mathbf{r} vettore distanza che punta verso il punto di interesse dove si vuole calcolare l'induzione.
- \int l'integrale è valutato sulla lunghezza del filamento.

Nel caso di segmento rettilineo la formula può essere semplificata, sostituendo l'integrale con una formula analitica esatta [1]:

$$\mathbf{u}_{ind} = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) \right) \hat{\mathbf{n}}_{\theta} \quad (1.7)$$

dove gli angoli θ_1 e θ_2 sono calcolati come mostrato in figura 1.3 e $\hat{\mathbf{n}}_{\theta}$ rappresenta la direzione tangenziale della velocità rispetto all'asse del segmento.

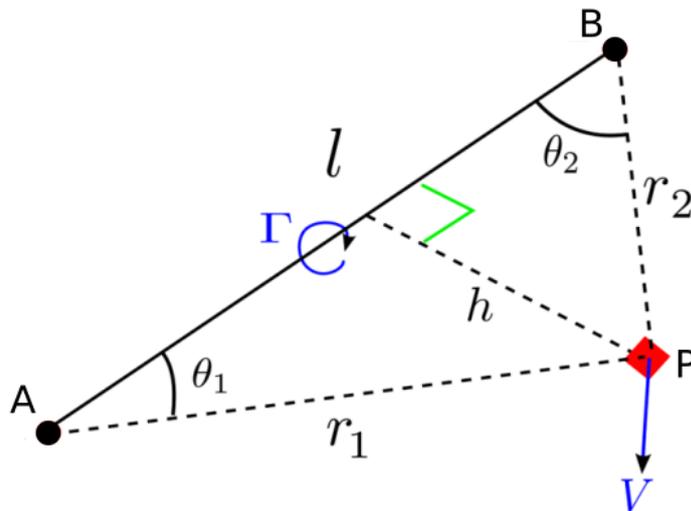


Figura 1.3: Induzione segmento vorticoso

1.5 Pannelli di singolarità

1.5.1 Sorgenti costanti

Per quanto riguarda l'estensione al 3D della funzione sorgente, viene qui riportata la formulazione di interesse implementata nell'algoritmo, ossia : un pannello quadrilatero formato da sorgenti di intensità costante σ .

Definendo la geometria di un pannello planare sul piano xy, le cui coordinate dei punti di estremità sono (η_k, ξ_k) per $k=1,2,3,4$ come in figura 1.4, è possibile esprimerne l'induzione per intensità unitaria di sorgente in qualsiasi punto (x, y, z) dello spazio attraverso le formule analitiche per componente :

$$\begin{aligned} \frac{u_{ind,x}}{\sigma} = & \frac{\eta_2 - \eta_1}{d_{12}} \log\left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}}\right) + \frac{\eta_3 - \eta_2}{d_{23}} \log\left(\frac{r_3 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}}\right) + \\ & + \frac{\eta_3 - \eta_4}{d_{34}} \log\left(\frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}}\right) + \frac{\eta_1 - \eta_4}{d_{41}} \log\left(\frac{r_1 + r_4 - d_{41}}{r_1 + r_4 + d_{41}}\right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{ind,y}}{\sigma} = & \frac{\xi_2 - \xi_1}{d_{12}} \log\left(\frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}}\right) + \frac{\xi_3 - \xi_2}{d_{23}} \log\left(\frac{r_3 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}}\right) + \\ & + \frac{\xi_3 - \xi_4}{d_{34}} \log\left(\frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}}\right) + \frac{\xi_1 - \xi_4}{d_{41}} \log\left(\frac{r_1 + r_4 - d_{41}}{r_1 + r_4 + d_{41}}\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{ind,z}}{\sigma} = & \tan^{-1}\left(\frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2}\right) + \\ & + \tan^{-1}\left(\frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3}\right) + \\ & + \tan^{-1}\left(\frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4}\right) + \\ & + \tan^{-1}\left(\frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1}\right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove i parametri che compaiono sono definiti come :

$$m_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}; \quad m_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\xi_3 - \xi_2}; \quad m_{34} = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3}; \quad m_{41} = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4}$$

$$r_k = \sqrt{(x - \xi_k)^2 + (y - \eta_k)^2 + z^2} \quad \text{per } k = 1,2,3,4$$

$$e_k = z^2 + (x - \xi_k)^2 \quad \text{per } k = 1,2,3,4$$

$$h_k = (y - \eta_k)^2 + (x - \xi_k)^2 \quad \text{per } k = 1,2,3,4$$

(1.11)

E' importante notare come ad ogni calcolo di induzione si debba ruotare sia le coordinate del pannello che quelle del punto obiettivo, per poi ritrasformare la velocità calcolata nel sistema di riferimento originario. Inoltre bisogna segnalare certe accortezze da mettere in pratica nel momento in cui si va a valutare la componente di velocità $u_{ind,z}$ nella (1.10) in quanto rischia di essere singolare. J.L.Hess e A.M.Smith (1962) [2] nel loro lavoro hanno espresso la derivazione e la formulazione matematica del metodo nonché delle espressioni che esprimono la presenza di singolarità superficiali.

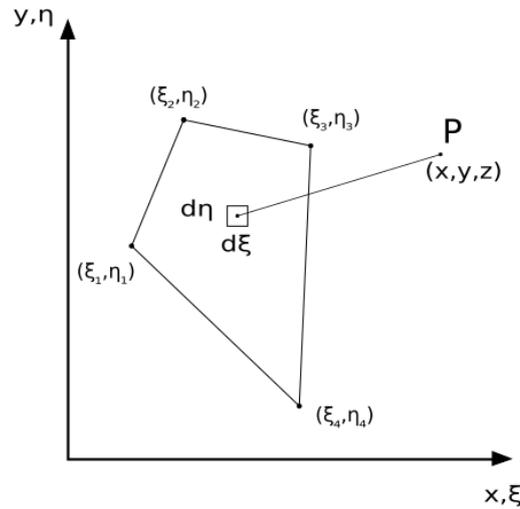


Figura 1.4: Induzione pannello di sorgenti

1.5.2 Segmenti vorticosi

La tipologia di pannello usata per rappresentare un corpo portante è quella composta da segmenti di vortici ai contorni. Concettualmente è l'unione di 4 elementi ai lati e di fatto la sua induzione è esattamente la somma dei loro 4 contributi facendo utilizzo della legge di Biot-Savart come spiegato nella (1.7). Quindi viene trattata semplicemente come :

$$\mathbf{u}_{ind} = \sum_{i=1}^4 \frac{\Gamma}{4\pi h_i} (\cos(\theta_1^i) + \cos(\theta_2^i)) \hat{\mathbf{n}}_{\theta_i} \quad (1.12)$$

In questo caso la circolazione Γ del pannello, che sarà calcolata attraverso l'imposizione del sistema lineare spiegato in seguito, è usata per calcolare la velocità indotta ed è la stessa su tutti i segmenti vorticosi che lo compongono mentre il verso deve essere coerente per ognuno dei quattro segmenti come in figura 1.5.

Come si può notare la singolarità del vortice puntuale viene mantenuta : cercando di calcolare l'induzione di un segmento rettilineo su stesso, la velocità indotta è infinita in quanto $h \rightarrow 0$. Per evitare problemi di questo tipo all'interno dei metodi numerici saranno proposte nel capitolo successivo diverse formulazioni alternative della legge di Biot-Savart. E' da notare come un'ulteriore tipologia utilizzata nei

metodi alle singolarità e a pannelli è quella rappresentata da una distribuzione di dipoli, in alternativa ai segmenti vorticosi, che corrispondono nel momento in cui l'intensità di dipolo è costante.

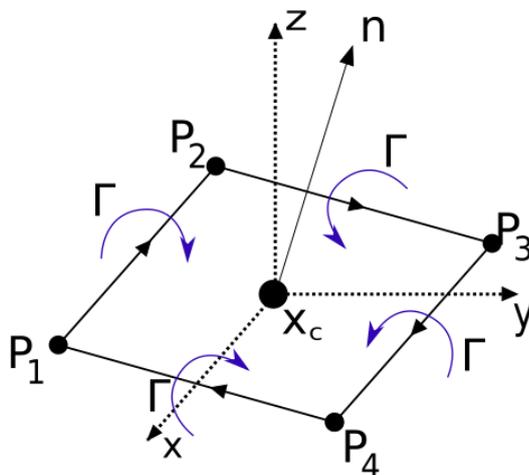


Figura 1.5: Induzione pannello di vortici

1.6 Linea portante di Prandtl

Per la modellazione di un'ala finita 3D, le implicazioni dei teoremi di Helmholtz e l'applicazione della formula di induzione di Biot-Savart portano alla formulazione della teoria della *linea portante di Prandtl*. Partendo dalle analisi della teoria dei profili sottili, l'estensione al 3D porta alla rappresentazione dell'ala come una linea composta da infiniti vortici puntiformi $\gamma d\xi$ posti ad $1/4$ dell'corda, il cui integrale sulla apertura alare rappresenta la circolazione dell'intera ala :

$$\Gamma = \int_{\ell} \gamma(\xi) d\xi \quad (1.13)$$

Secondo i teoremi di Helmholtz, la linea portante vorticoso non può terminare all'estremità dell'ala e per questo motivo si riconnette al vortice di avviamento oramai lasciato posteriormente. In condizioni stazionarie, dopo l'avviamento, il vortice posteriore oramai è lontano inducendo poco niente sull'ala andando a delineare la configurazione cosiddetta a *vortici a staffa*, come mostrato in figura 1.6. La scia quindi è composta da ciò che viene chiamato *vortex sheet*, uno strato infinitesimo composto da una distribuzione continua di vorticità proporzionale alla variazione di circolazione lungo y della linea portante : $\gamma_{wake}(y) = -d\Gamma(y)/dy$.

Maneggiando la formula di Kutta-Joukowski, si va ad esplicitare la forza aerodinamica (priva della resistenza di attrito in quanto flusso a potenziale) come $dF_a(y) = 1/2 \rho C_{L\alpha} \alpha_e(y) c(y) dy$. L'angolo di incidenza effettivo viene così scomposto nella somma algebrica di quello geometrico e quello indotto dalla presenza dei vortici a staffa esplicitabile attraverso la (1.6): $\alpha_e = (\alpha(y) - \alpha_{\ell=0}(y)) - \alpha_{ind}(y)$.

L'inserimento del termine $C_{L\alpha} \simeq 2\pi$ dalla teoria dei profili sottili porta così all'equazione integro-differenziale di Prandtl:

$$\frac{\Gamma(y)}{\pi U_\infty c(y)} + \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{y - \xi} = \alpha_{\ell=0}(y) - \alpha(y) \quad (1.14)$$

Essa consiste in un legame che deve essere soddisfatto, per ogni valore di y dentro l'intervallo $[-b/2, b/2]$ dalla funzione $\Gamma(y)$ da determinare nello stesso intervallo. Gli altri termini invece sono noti per la geometria dell'ala essendo:

- $c(y)$: distribuzione della corda in apertura
- U_∞ : velocità asintotica
- $\alpha(y) - \alpha_{\ell=0}(y)$: angolo di incidenza (variabile se presente uno svergolamento)

Una volta calcolato $\Gamma(y)$, la teoria permette di calcolare attraverso l'utilizzo del teorema di Kutta-Joukowski, due delle grandezze fondamentali per un'ala finita :

$$\mathbf{F}_a = \rho \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{V}_{tot}(\xi) \times \Gamma(\xi) d\xi = \{F_x, F_y, F_z\}$$

- **Portanza F_z** data dall'intensità della circolazione distribuita sulla linea portante.
- **Resistenza indotta F_x** proporzionale all'angolo indotto principalmente dai vortici di estremità.

L'utilizzo di questa teoria è limitata ad ali senza freccia poiché il modello è caratterizzato da una linea retta che si estende in apertura, e non è possibile recuperare il momento a picchiare in quanto non è presente alcuna distribuzione di portanza in corda.

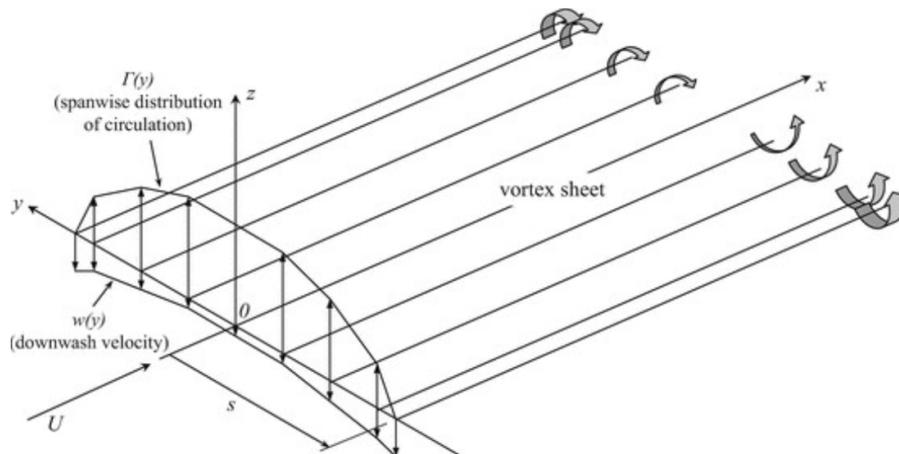


Figura 1.6: Illustrazione modello linea portante di Prandtl

1.7 Impostazione problema

Seguendo le linee guida della teoria di Prandtl, il problema viene ripreso e trattato in diversi modi in base al tipo di vortex method considerato.

1.7.1 Metodo di Weissinger

Una delle formulazioni dirette più semplici è quella del *metodo di Weissinger*. La linea portante viene discretizzata attraverso una divisione in segmenti dell'ala lungo la sua apertura e un'approssimazione della distribuzione di circolazione costante a tratti sull'ala, i cui valori incogniti vengono calcolati attraverso l'imposizione della condizione di non penetrazione nei punti di collocazione di ogni segmento, posti posteriormente a $3/4$ della corda in quanto indicato come punto di maggior precisione del metodo dall'italiano Pistolesi. A livello matematico si esprime come:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c) \cdot \left(\mathbf{V}_\infty - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{r}_i(x, \xi) \times \gamma_{wake}(\xi) dx}{|\mathbf{r}_i(x, \xi)|^3} d\xi \right) = 0 & \text{con } i = 1 : N_c \\ \gamma_{wake}(\xi) = -\frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \end{cases} \quad (1.15)$$

dove in ogni punto ξ di integrazione, la derivata della circolazione può essere stimata attraverso un metodo alle differenze finite lungo la linea che connette i punti a $1/4$ della corda di ogni profilo.

In questo modo si ottiene un sistema con cui calcolare la distribuzione di circolazione costante a tratti:

$$[\mathbf{A}]\{\Gamma_i\} = -\{\mathbf{V}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}_i\} \quad (1.16)$$

La particolarità di questo metodo risiede nella possibilità di introdurre geometrie con freccia.

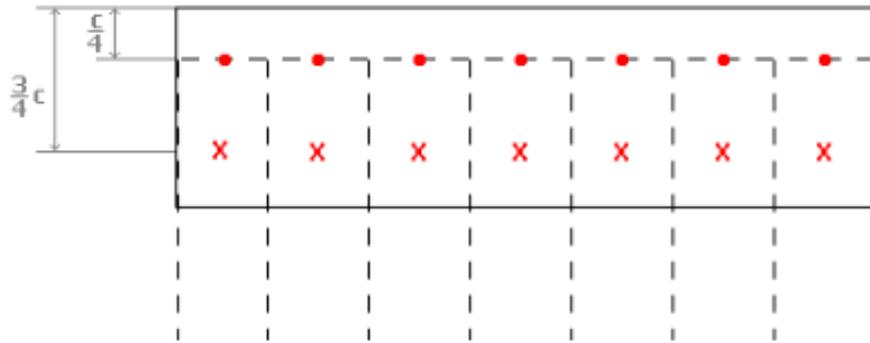


Figura 1.7: Illustrazione metodo di Weissinger

1.7.2 Superficie Portante

Un'altra tipologia di metodo più sofisticato è invece quello della *Superficie Portante*: il metodo di Weissinger viene esteso considerando l'ala come costituita da pannelli sia in apertura sia in corda, su cui sono collocati dei vortici a staffa, come rappresentato in figura 1.8, solo che questa volta i vortici ed i punti di controllo saranno rispettivamente al 25% ed al 75% del pannello stesso. Anche in questo caso il sistema risolvibile si ottiene imponendo la non penetrazione negli N punti di collocazione. Il vantaggio di questo metodo risiede nella possibilità di calcolare la distribuzione di portanza anche in corda e di poter così stimare il momento a picchiare dell'ala.

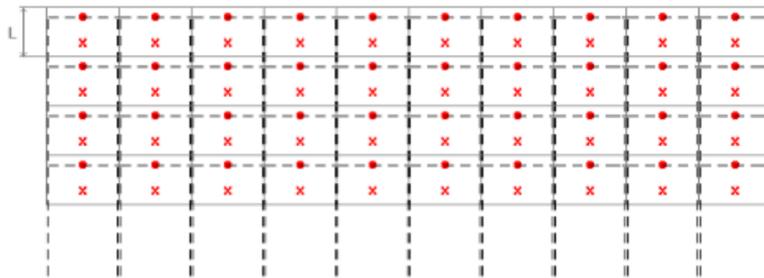


Figura 1.8: Illustrazione modello di superficie portante

Una generalizzazione di questo metodo porta a considerare la scia anch'essa composta da pannelli anziché essere prolungamenti rettilinei della linea o superficie portante, come si può notare dalla figura 1.9. Nascono così i *vortex lattice methods*. Ciò comporta un aumento in termini di tempo di calcolo ma anche un notevole vantaggio: la possibilità di rappresentare con le dovute correzioni un flusso instazionario. Infatti i vortici a staffa sono semplificazioni di ciò che i pannelli invece rappresentano: i segmenti vorticosi paralleli all'ala sono proporzionali alla differenza di circolazione del pannello stesso e del precedente (o successivo). Nel momento in cui la circolazione sull'ala è costante nel tempo, il rilascio di vorticità nella scia è costante, permettendo una semplificazione del problema cancellando proprio quei segmenti. Di conseguenza il reticolo (o *lattice*) che rappresenta il vortex sheet, sarà composto da elementi paralleli all'ala proporzionali a $d\Gamma/dt$ e da elementi invece perpendicolari ad essa (i prolungamenti dei vortici a staffa) proporzionali invece a $d\Gamma/d\xi$.

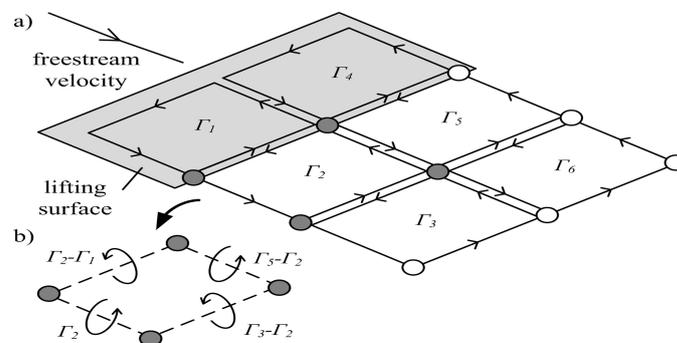


Figura 1.9: Illustrazione vortex lattice method

1.8 Caratteristiche vortex methods

Evidenti sono quindi vantaggi e svantaggi dei vortex methods :

- Le forze viscosse non possono essere calcolate in quanto lo strato limite viene trascurato.
- L'introduzione della vorticità nel flusso viene effettuata manualmente, implicando una precisa locazione di iniezione, solitamente il bordo di uscita dei profili.
- E' impossibile stimare e calcolare separazioni o transizioni, non conoscendo gli sforzi a parete.
- Il calcolo è semplificato e richiede meno sforzi a livello computazionale di una risoluzione completa delle equazioni di NS.
- Essendo Lagrangiani permettono di concentrarsi sulla sola evoluzione degli elementi singolari, senza descrivere completamente ogni elemento del dominio e avendo la possibilità però di ricostruire l'intero flusso al suo interno.
- E' possibile interfacciarli con correzioni di strato limite che introducono complicazioni e necessitano di maggior potenze di calcolo ma portano ad una risoluzione più completa e dettagliata.

Un'ulteriore considerazione da fare è che i metodi convenzionali per risolvere le equazioni di Navier-Stokes tipicamente richiedono una griglia computazionale del dominio del fluido, come prescritto da un approccio euleriano. Se la geometria da descrivere è di forme complicate, la generazione della mesh spesso diventa la maggior complicazione nel processo generale di simulazione.

I vortex methods sono invece metodi mesh-free, discretizzazioni lagrangiane che non soffrono di questi svantaggi: in questo contesto permettono una notevole semplificazione portando a simulazioni più rapide e rendendoli interfacciabili anche con software o programmi di ottimizzazione che richiedono il più delle volte numerose valutazioni con diverse configurazioni.

Capitolo 2

VORTEX BLOB METHOD

2.1 Introduzione

Come descritto in precedenza, i metodi vortex lattice sono l'applicazione del modello di superficie portante con la rappresentazione in pannelli della scia retrostante l'ala. Essi possono arrivare ad usare una descrizione dettagliata delle strutture vorticoso filamentose, potendo calcolare e ricostruire le loro curvature locali al fine di seguire al meglio l'evoluzione del campo di vorticità.

Col tempo sono stati provati e sviluppati metodi che approssimano il campo di vorticità puntualmente, ossia tramite vortici discreti, chiamati anche particelle vorticoso o vortex particles in inglese. Diversi esempi in letteratura riportano questi metodi, inizialmente per la simulazioni non viscoso 2D ad alti reynolds, nelle quali si evidenziavano tre caratteristiche fondamentali :

- le iterazioni tra particelle mimano ciò che fisicamente accade nella realtà.
- risultano essere metodi automaticamente adattivi perchè le particelle si concentrano nelle regioni fisiche di interesse.
- non ci sono errori inerenti al metodo, come la viscosità numerica evidenziata dai metodi alle differenze.

L'interesse di una formulazione del genere in un ambito 3D risiede nel riuscire ad ottenere in modo accurato gli effetti di vortex stretching e la convergenza con ordini di accuratezza arbitrari senza l'aggiunta di costi supplementari rispetto ad una rappresentazione con filamenti vorticoso, come dimostrato da J.T.Beale e A.Majda (1982) [4]. Il termine di vortex stretching è così calcolato in modo esplicito anziché essere un prodotto tra i punti in moto relativo di un unico segmento e il metodo differisce principalmente nel modo in cui questo termine è calcolato. I vantaggi di questo metodo sono :

- semplicità
- convenienza computazionale
- analisi matematica più semplice
- la libertà degli elementi di riorganizzarsi da soli in modo da cambiare la topologia delle linee vorticoso

Una delle prime obiezioni sollevate è stata che tali metodi potessero portare ad elementi computazionali a divergenza non nulla, il che è irrealistico. Se la divergenza della vorticità approssimata non è nulla, allora essa non può rappresentare in modo verosimile la vorticità reale e l'unico legame che hanno in comune è che portano con sé lo stesso rotore in quanto soluzione della stessa equazione di Poisson $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$. Ciò implica graficamente che se le linee vorticose calcolate numericamente terminano all'interno del dominio, nella realtà questo comportamento è corretto attraverso la connessione ad un altro elemento o al lato opposto dello stesso elemento in modo regolare. Di conseguenza un argomento rimasto ancora aperto ai giorni nostri è la robustezza di tali metodi nel senso di una sicura integrazione in tempi lunghi nonostante diverse analisi siano disponibili in letteratura.

Data la singolarità della formula di induzione, la legge di Biot-Savart può portare a valori enormi di velocità quando due vortici si avvicinano. Per questo motivo l'introduzione di particelle regolarizzate, chiamate in inglese *vortex blobs*, con nucleo di dimensioni ε permettono la rimozione della singolarità, in modo analogo a ciò che si può fare con i filamenti vorticosi. Prendono quindi spazio in questo contesto i cosiddetti *Vortex Blob Method*.

Una formulazione matematica completa del vortex blobs methods la si può trovare in G.Winckelmans (1989) [5], mentre in Cottet e P.D.Koumoutsakos (2000) [6] è possibile leggere un'ottima rassegna del percorso evolutivo di schemi e approcci diversi a riguardo dei vortex methods, con tanto di prove di convergenza.

Nelle prossime sezioni, saranno investigati i seguenti problemi di questi metodi :

- utilizzo di particelle come funzioni δ e soluzioni deboli all'equazione della vorticità
- l'utilizzo di particelle regolarizzate (blobs) e la scelta della funzione di regolarizzazione
- come controllare il soddisfacimento delle equazioni di conservazione
- rappresentazione degli effetti viscosi attraverso una ridistribuzione delle intensità degli elementi

2.2 Particelle singolari

Il punto di partenza del metodo è quindi una rappresentazione della vorticità attraverso una serie di vortici discreti. Questi elementi vengono denominati particelle singolari nel momento in cui non si attua alcuna modifica all'equazione di induzione per evitare la singolarità nel centro del vortice. L'equazione della vorticità viene risolta attraverso la rappresentazione del suo campo come :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_p \boldsymbol{\omega}^p(t) \text{vol}^p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) = \sum_p \boldsymbol{\alpha}^p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) \quad (2.1)$$

dove con il termine $\boldsymbol{\alpha}^p$ si intende il vettore intensità riferita alla particella p-esima. La connessione tra il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e quello di vorticità $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ avviene

attraverso la soluzione dell'equazione di Biot-Savart :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_p \nabla(\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t))) \times \boldsymbol{\alpha}^p(t) = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_p \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)|}\right) \times \boldsymbol{\alpha}^p(t) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)|^3} \times \boldsymbol{\alpha}^p(t) = \\
&= \sum_p \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) \times \boldsymbol{\alpha}^p(t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dove il termine $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x}/(4\pi|\mathbf{x}|^3))$ rappresenta il kernel di Biot-Savart per un vortice puntuale in tre dimensioni.

Nel caso non viscoso tridimensionale, l'equazioni evolutive per ciascuna particella in termini di intensità e posizione sono raggruppate in un sistema chiamato col nome di *Schema Classico*:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} = \mathbf{u}^p(\mathbf{x}^p(t), t) \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}^p(t)}{dt} = (\boldsymbol{\alpha}^p(t) \cdot \nabla)\mathbf{u}^p(\mathbf{x}^p(t), t) \end{cases} \tag{2.3}$$

E' stato dimostrato da P.G.Saffman e G.R.Meiron (1986) [7] che questo sistema di equazioni non costituisce una soluzione debole del sistema originario. Se nel 2D la rappresentazione di flussi rotazionali incomprimibili e non viscosi con vortici discreti ha un fondamento valido sia qualitativamente che quantitativamente per comprendere la struttura e l'evoluzione dei flussi, in ambiti 3D invece l'approssimazione del campo di vorticità che evolve secondo la (2.3) non rappresenta una soluzione debole della sua equazione di evoluzione (1.3). In aggiunta è stato dimostrato come il campo approssimato non sia generalmente a divergenza nulla, infatti:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)) = \sum_p \nabla(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t))) \cdot \boldsymbol{\alpha}^p(t) \tag{2.4}$$

Questo fa sì che il metodo sia inconsistente in qualche senso perché la base usata per rappresentare la soluzione dovrebbe essere a divergenza nulla tutto il tempo. Ciò può comportare una rappresentazione non accurata del campo reale in tempi lunghi. In definitiva, nel caso di flussi non confinati, importanti invarianti lineari come vorticità totale, impulso lineare ed impulso angolare non sono conservati. Allo stesso modo si comportano gli invarianti quadratici come elicità ed energia cinetica, dove addirittura è impossibile calcolare quest'ultima senza trascurare il contributo infinito dell'energia della particella stessa. La conservazione è possibile solo nel caso in cui il numero di particelle considerate tenda ad infinito.

Come notato da E.A.Novikov (1983) [8], si può ricostruire il campo di vorticità a divergenza nulla scrivendo :

$$\boldsymbol{\omega}^N(\mathbf{x}, t) = \sum_p \left[\boldsymbol{\alpha}^p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) + \left(\boldsymbol{\alpha}^p(t) \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)|} \right) \right) \right] \tag{2.5}$$

Il termine aggiuntivo corrisponde a quello necessario per chiudere le linee vorticose e decade solo con $1/r^3$. Inoltre non contribuisce al campo di velocità perchè gradiente di un campo scalare e non entra nella legge di Biot-Savart. Riordinando e sviluppando le derivate si giunge a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^N(\mathbf{x}, t) = \sum_p \left[\left(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) - \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)|^3} \right) \boldsymbol{\alpha}^p(t) + \right. \\ \left. + 3 \frac{((\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}^p(t)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t))}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)|^5} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'utilizzo di tale formula correttiva però peggiora la risoluzione delle equazioni di moto rispetto alla rappresentazione tradizionale, e quindi non risolve il problema di ottenere una soluzione debole.

2.3 Blobs regolarizzati

I vortex blobs sono quindi elementi vettoriali : un vettore posizione, un vettore intensità (calcolato come vorticità · volume) e una dimensione del nucleo. Ogni elemento può quindi essere pensato come una piccola porzione di un tubo vorticoso (rappresentato da circolazione · lunghezza). Il campo di vorticità è quindi espresso come segue:

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varsigma_\varepsilon(\mathbf{x}) * \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_p \boldsymbol{\alpha}^p(t) \varsigma_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) \quad (2.7)$$

Dove la funzione $\varsigma_\varepsilon(\mathbf{x})$ è calcolata una volta definita la funzione di regolarizzazione (o di smoothing) $\varsigma(\mathbf{x})$ presa radialmente simmetrica con raggio di smoothing ε :

$$\varsigma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varsigma\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right) \quad (2.8)$$

con l'imposizione di un andamento asintotico per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ che ricalca il comportamento della legge di Biot-savart, attraverso la seguente normalizzazione :

$$4\pi \int_0^\infty \varsigma(\rho) \rho^2 d\rho = 1 \quad (2.9)$$

La funzione ς_ε definisce la distribuzione di vorticità all'interno del nucleo della particella. In questo modo si passa da un approccio a particelle singolari (collegate col campo di vorticità attraverso la funzione δ) ad un approccio a particelle regolarizzate (funzione ς_ε), oltremodo chiamate *blobs*.

Con l'introduzione di questa nuova funzione, la velocità indotta dalle particelle in un punto può quindi essere espressa nel seguente modo :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_p \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}^p(t)) \times \boldsymbol{\alpha}^p(t) \quad (2.10)$$

dove il kernel di Biot-Savart regolarizzato è calcolato attraverso:

$$\mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x}) = -\frac{g_\varepsilon(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \quad (2.11)$$

La funzione g_ε risulta utile in quanto alleggerisce la notazione, ed è calcolabile a partire dalla funzione di smoothing :

$$g_\varepsilon(\mathbf{x}) = g\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right) = g(\rho) = \int_0^\rho \varsigma(t)t^2 dt \quad (2.12)$$

Attraverso semplici passaggi matematici è possibile ricavare la seguente espressione:

$$\frac{g'(\rho)}{\rho^2} = \varsigma(\rho) \quad (2.13)$$

Il kernel regolarizzato è stato così costruito in modo da essere equivalente al kernel di Biot-Savart a grandi distanza comparate con il nucleo ε , come se il blob fosse singolare : infatti $g(\rho) \rightarrow 1/4\pi$ se $\rho \rightarrow \infty$. La velocità indotta invece tende a zero se $r \rightarrow 0$.

2.3.1 Tipi di smoothing

La convergenza del vortex blob method è stata investigata da J.T.Beale e A.Majda [4][9],[10],[11] e continuata da altri studiosi come J.P.Choquin e G.H.Cottet (1988) [12][13] : la soluzione converge a quella dell'equazione della vorticità in 3D almeno per un tempo T finito se il numero di blobs cresce e il nucleo ε decresce soggetto alla condizione di sovrapposizione ($\varepsilon/h > 1$ dove h rappresenta la tipica distanza tra blobs). L'errore del metodo è solitamente composto da due termini, uno $\mathcal{O}(\varepsilon^r)$ e un altro $\mathcal{O}(\varepsilon(h/\varepsilon)^m)$ dove m è legato al numero di derivate esistenti della funzione di smoothing ς . Per la maggior parte delle funzioni usate di solito, m è così grande che la seconda condizione impone quindi la sovrapposizione dei nuclei.

L'esponente r invece è relazionata con le proprietà di momento della funzione di smoothing, la quale dovrà soddisfare le seguenti condizioni oltre a quella di normalizzazione imposta nella (2.9):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varsigma(\rho)\rho^{2+s}d\rho &= 0 & 2 \leq s \leq r-1 & \text{ con } s \text{ pari} \\ \int_0^\infty |\varsigma(\rho)|\rho^{2+r}d\rho &< \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove le condizioni sopracitate implicano che i blobs (ς) e le particelle singolari vorticosi (δ) condividono gli stessi momenti a partire dalla vorticità totale, impulso lineare, e così via fino all'ordine $r-1$. In letteratura sono presenti diverse opzioni per la scelta della funzione di smoothing, tra cui :

- *Smoothing gaussiano* :

$$\varsigma(\rho) = \frac{3}{4\pi} e^{-\rho^3} \quad (2.15)$$

che corrisponde a $m = \infty$ e $r = 2$

- *Smoothing algebrico di basso ordine* :

$$\varsigma(\rho) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} \quad (2.16)$$

che corrisponde a $m = \infty$ e $r=0$. Scelta non ottimale a livello di convergenza (la componente di errore $\mathcal{O}(\varepsilon^r)$ non svanisce per $\varepsilon \rightarrow 0$) seppur conveniente in quanto algebrica.

- *Smoothing algebrico di alto ordine* [5] :

$$\varsigma(\rho) = \frac{15}{8\pi} \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{7/2}} \quad (2.17)$$

che corrisponde a $m = \infty$ e $r = 2$. Smoothing con le stesse proprietà di convergenza di quello gaussiano ma più facile e leggera a livello di calcoli.

Grafico

Per riuscire a calcolare la velocità indotta per ogni diverso tipo di funzione di smoothing, è necessario sviluppare l'espressione (2.11) del kernel attraverso il calcolo di $g(\rho)$ con la (2.13). In questo paragrafo sono dati i valori delle funzioni che compongono i diversi kernel, e il grafico in figura 2.1 fa apprezzare le differenze di velocità tangenziale indotta al variare della distanza.

- Biot-Savart

$$g(\rho) = \frac{1}{4\pi} \quad (2.18)$$

- Smoothing algebrico di alto ordine

$$\varsigma(\rho) = \frac{15}{8\pi} \frac{1}{(\rho^2 + 1)^{7/2}} \quad \rightarrow \quad g(\rho) = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho^3(\rho^2 + 5/2)}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} \quad (2.19)$$

- Gaussiano

$$\varsigma(\rho) = \frac{3}{4\pi} e^{-\rho^3} \quad \rightarrow \quad g(\rho) = \frac{1}{4\pi} (1 - e^{-\rho^3}) \quad (2.20)$$

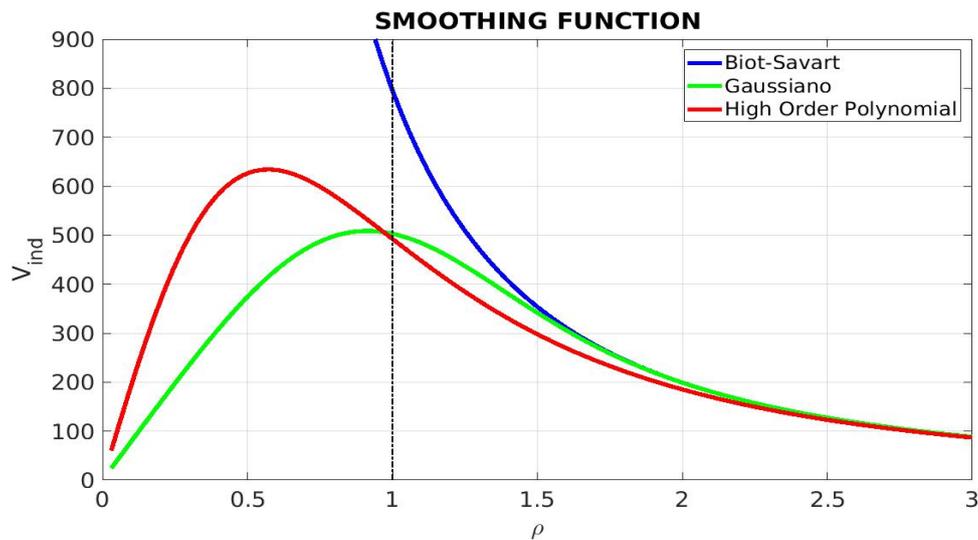


Figura 2.1: Induzione con funzioni di smoothing differenti

2.4 Schemi di risoluzione

Come ha notato C.Rehbach (1978) [14], forme alternative dell'equazione 3D della vorticità possono essere scritte come segue :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla^T) \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla + \nabla^T)) \mathbf{u} \quad (2.21)$$

Questo perchè $(\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla - \nabla^T)) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} = 0$ visto che $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$. La prima formulazione porta allo *Schema Classico* visto in precedenza.

La seconda formulazione porta allo *Schema di Trasporto* che suggerisce un'equazione evolutiva del tipo :

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}^p(t)}{dt} = (\boldsymbol{\alpha}^p(t) \cdot \nabla^T) \mathbf{u}^p(\mathbf{x}^p(t), t) \quad (2.22)$$

La terza formulazione porta invece allo *Schema Misto* :

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}^p(t)}{dt} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}^p(t) \cdot (\nabla + \nabla^T)) \mathbf{u}^p(\mathbf{x}^p(t), t) \quad (2.23)$$

favorito da Rehbach per la simmetria della matrice che porta a vantaggi computazionali.

Tutti e tre gli schemi sarebbero equivalenti se il campo di vorticità fosse uguale al rotore del campo di velocità, ma questo sfortunatamente non succede per il particle method, conseguenza del campo a divergenza non nulla, portando a risultati diversi.

2.4.1 Schema di trasporto

Lo schema di trasporto presenta una particolarità, infatti J.P.Choquin e G.H.Cottet (1988) [12] hanno dimostrato come lo schema conservi la vorticità totale. Nonostante P.G.Saffman abbia precisato come questa affermazione sia valida solo nel caso in cui non ci sia una corrente a potenziale esterna, tale caratteristica rende più interessante il metodo rispetto agli altri. Inoltre, G.Winckelmans e A.Leonard (1988) [15] hanno provato come lo schema porti ad una soluzione debole del sistema nel caso si utilizzi una regolarizzazione radialmente simmetrica della funzione δ . Queste proprietà portano a ritenere che lo schema di trasporto sia più adatto rispetto agli altri ad una rappresentazione tridimensionale di flussi vorticosi con un numero limitato di particelle. Ad ogni modo C.Greengard e E.Thomann (1988) [16] hanno sollevato le seguenti ipotesi per la dimostrazione e il soddisfacimento di quanto detto :

- L'evoluzione di particelle singolari attraverso lo schema di trasporto è fragile e dipende dal tipo di regolarizzazione della funzione δ usata. Infatti le prove di convergenza sono state svolte soltanto in caso di funzioni simmetriche radialmente.
- Il campo di vorticità associato a particelle singolari non è a divergenza nulla. Vi è un serio ostacolo alla validità dell'utilizzo di molte particelle singolari come modello di soluzione.

- Il metodo a particelle regolarizzate, ossia *regularized vortex particles*, è stato dimostrato convergente sia in 2D che in 3D almeno per un tempo finito T . In tal senso il concetto di soluzione debole degli elementi vorticosi coincide con il concetto di convergenza ad una soluzione smooth con elementi regolarizzati.

2.4.2 Equazione evolutiva non viscosa

Al fine di utilizzare i diversi schemi presentati bisogna quindi inserire la funzione di regolarizzazione e le sue derivazioni. In questa sezione verranno visualizzate le equazioni evolutive complete in modo generale, senza l'introduzione di una specifica funzione di regolarizzazione. In questo modo è possibile attraverso semplici passaggi matematici giungere alla formulazione finale voluta inserendo una qualsivoglia espressione $\zeta(\rho)$.

Ricordando la legge di Biot-Savart regolarizzata e l'equazione di evoluzione della posizione della particella p -esima, imponendo inoltre un nucleo di smoothing costante, l'equazione di evoluzione della vorticità può essere espressa come :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = - \sum_q \frac{g_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}^q)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^q|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q \\ \frac{d}{dt} \mathbf{x}^p(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}^p(t), t) \\ \frac{d \text{vol}^p}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

In base al tipo di schema si dovrà aggiungere a queste prime tre, una quarta equazione che descrive l'evoluzione dell'intensità $\boldsymbol{\alpha}^p$:

- **Schema classico**

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}^p}{dt} = - \sum_q \frac{1}{\varepsilon^3} \left[\frac{g(\rho)}{\rho^3} \boldsymbol{\alpha}^p \times \boldsymbol{\alpha}^q + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{\rho d\rho} \left(\frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q)) ((\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q) \right] \quad (2.25)$$

- **Schema di trasporto**

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}^p}{dt} = - \sum_q \frac{1}{\varepsilon^3} \left[- \frac{g(\rho)}{\rho^3} \boldsymbol{\alpha}^p \times \boldsymbol{\alpha}^q + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{\rho d\rho} \left(\frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot ((\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q)) (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \right] \quad (2.26)$$

- **Schema misto** : combinazioni delle due precedenti

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}^p}{dt} = - \sum_q \frac{1}{\varepsilon^3} \left[- \frac{g(\rho)}{\rho^3} \boldsymbol{\alpha}^p \times \boldsymbol{\alpha}^q + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{\rho d\rho} \left(\frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q)) ((\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q) + (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot ((\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q)) (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \right] \quad (2.27)$$

Dove nelle formule precedenti i termini da esplicitare sono :

$$\rho = |\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q|/\varepsilon$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(\varsigma(\rho) - 3 \frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) \quad (2.28)$$

Da notare che il caso di vortici singolari si recupera imponendo $g(\rho) = 1$ con $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{g(\rho)}{\rho^3} \right) = -\frac{3}{\rho^5}$ escludendo poi il termine $q=p$ dalla sommatoria.

Esplicitazione con smoothing gaussiano

Un caso interessante, spesso ritrovato in letteratura, è l'utilizzo della funzione gaussiana come smoothing. La formula di Biot-Savart regolarizzata per questo tipo di smoothing è la seguente:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(1 - e^{-\rho^3})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^p) \times \boldsymbol{\alpha}^p \quad (2.29)$$

Nelle seguenti formule si va ad esplicitare per tale funzione il solo schema di trasporto nel caso non viscoso, per i vantaggi descritti precedentemente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}^p}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \sum_q \frac{(1 - e^{-\rho^3})}{|\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q|^3} (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q \\ \frac{vol^p}{dt} = 0 \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}^p}{dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_q \left[\frac{1 - e^{-\rho^3}}{(|\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q|^3)} \boldsymbol{\alpha}^p \times \boldsymbol{\alpha}^q + \right. \\ \left. -3 \frac{[(\rho^3 + 1)e^{-\rho^3} - 1]}{(|\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q|^5)} (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot ((\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \times \boldsymbol{\alpha}^q)) (\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q) \right] \end{array} \right. \quad (2.30)$$

2.5 Diffusione viscosa

Nonostante le debolezze intrinseche del metodo a blobs, una caratteristica importante che differenzia il metodo dalla rappresentazione attraverso filamenti della vorticità è la facilità con cui si può rappresentare il termine viscoso di diffusione nella (1.3), $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$. Nonostante le simulazioni non viscoso abbiano la capacità di prevedere l'andamento di molti flussi di interesse, in certe applicazioni è impensabile trascurarlo. In ambito 3D, il vortex stretching provvede a trasferire l'energia alle scale più piccole producendo complessi andamenti delle linee vorticoso. La complessità aumenta col tempo e gli effetti viscosi sono gli unici attori nella limitazione di questa complessità crescente e nell'introduzione della dissipazione di energia.

Un approccio naturale per risolvere le equazioni viscoso è quello di considerare e

risolvere in tempi diversi la parte non viscosa e quella viscosa delle equazioni. Questo algoritmo è noto come *viscous splitting*. In termini matematici, per l'equazione della vorticità in tre dimensioni si esprime nel seguente modo :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{convezione} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad \text{diffusione} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Nella prima fase si risolve la convezione in presenza di vortex stretching mentre nella seconda si tratta la diffusione viscosa. In generale, i blobs sono rappresentati da posizione e intensità e, a seconda di come si modella e si concepisce il fenomeno di diffusione, la viscosità rientra in una equazione evolutiva (per \mathbf{x}^p) piuttosto che l'altra (per $\boldsymbol{\alpha}^p$). In letteratura vi sono diversi approcci possibili per il trattamento di questo termine. A.J.Chorin (1973)[17] ha formulato il famoso *Random Walk Method* nel quale le particelle rispondono ad un moto simile a quello Browniano per simulare gli effetti di viscosità, i quali sono separati in termini di risoluzione attraverso il concetto di viscous splitting. Si aggiunge così un termine :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^p(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}^p(t), t) + \mathbf{W}^p \quad (2.32)$$

dove \mathbf{W}^p è un numero casuale che rappresenta il processo di Wiener (ossia il moto Browniano) che ha come funzione di densità di probabilità una gaussiana a media nulla e varianza $\sigma = 2\nu dt$.

Un'altra tipologia è quella sviluppata da P.A.Raviart (1983)[18] con l'idea di modificare l'intensità delle particelle anzichè la loro posizione. Nascono così i *Resampling Methods*. Basato anch'esso sul viscous splitting, risolve l'equazione di diffusione attraverso il kernel di diffusione con condizioni iniziali date dalle intensità delle particelle al tempo t_n e valutando l'evoluzione nelle posizioni correnti delle particelle che non vengono così spostate.

$$\boldsymbol{\alpha}_p^{n+1} = \sum_q \text{vol}_q \boldsymbol{\alpha}_q^n \mathcal{G}[\mathbf{x}_p(t_n) - \mathbf{x}_q(t_n), \nu dt] \quad (2.33)$$

Successivamente l'idea di redistribuzione di intensità tra particelle si è evoluta in un ambito di un' approssimazione integrale dell'equazione di diffusione. Il risultato fu una classe di metodi di elevata accuratezza sia nel tempo che nella discretizzazione spaziale, che risponde al nome di *Particle Strength Exchange Methods* (PSE). In quest'ottica il viscous splitting non è un prerequisito di questi metodi in quanto la diffusione agisce in maniera continua sul campo di vorticità mentre è trasportata lungo le traiettorie degli elementi computazionali.

2.5.1 Particle strength exchange

Questo approccio fu introdotto da G.H.Cottet e Mas-Gallic (1983)[19]. L'operatore laplaciano viene così rimpiazzato da uno integrale poichè meglio adattabile ad un metodo a particelle. Infatti ciò è equivalente a scrivere una quadratura numerica dell'integrale in questione :

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \simeq 2 \int (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.34)$$

dove

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^5} \eta\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right) \quad \text{con} \quad \eta(\rho) = -\frac{\zeta'(\rho)}{\rho} \quad (2.35)$$

La funzione $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ che appare nella (2.34) è essenzialmente un'approssimazione del kernel per l'equazione del calore. Andando ad esplicitare l'integrale nel caso di particelle, si ottiene il termine:

$$2\nu \sum_q (vol^p \boldsymbol{\alpha}^q(t) - vol^q \boldsymbol{\alpha}^p(t)) \eta_\varepsilon(\mathbf{x}^p(t) - \mathbf{x}^q(t)) \quad (2.36)$$

Un'importante conseguenza della discretizzazione dell'operatore integrale è che questo termine è conservativo, quindi la vorticità totale non è intaccata dal trattamento del termine diffusivo ma solamente dal termine di vortex stretching.

Esplicitazione con smoothing gaussiano

Per ottenere l'equazioni evolutive complete nel caso viscoso con smoothing gaussiano basta sostituire la funzione $\varepsilon(\rho)$ specifica. In questo modo, alla terza equazione del sistema (2.30) che descrive la variazione del vettore intensità del blob p-esimo $\boldsymbol{\alpha}^p$ bisogna aggiungere il termine :

$$+18\nu \frac{e^{-\rho^3}}{(|\mathbf{x}^p - \mathbf{x}^q|)^4} (vol^p \boldsymbol{\alpha}^q - vol^q \boldsymbol{\alpha}^p) \quad (2.37)$$

2.6 Inserimento blobs

Una parte fondamentale del metodo è la trasformazione del reticolo di pannelli vorticosi in blobs. Utilizzare delle particelle vorticosi significa concentrare la vorticità distribuita sui segmenti vorticosi dei pannelli di scia in punti discreti. Questo passaggio comprende una decomposizione dei pannelli e redistribuzione della loro circolazione affinché i blobs conservino i momenti di ordine zero e uno di $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^p(t) &= \int_{V_p} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) dV \\ \boldsymbol{\alpha}^p(t) \times \mathbf{x}^p(t) &= \int_{V_p} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{x} dV \end{aligned} \quad (2.38)$$

La (2.38) suggerisce quindi un'integrazione di volume attorno alla posizione della particella. La scelta di \mathbf{x}^p iniziale invece è decisa in modo da conservare il momento di ordine uno come specificato dalla seconda equazione. La trasformazione riguarda quindi l'ultima striscia di pannelli vorticosi di scia : S.G.Voutsinas (2005) [20] nel suo metodo ha inserito i blobs sui nodi a valle del vortex lattice mentre H.Hu et al. (2015) [21] hanno preferito utilizzare dei volumi di integrazioni diversi, centrati nel punto medio dei segmenti longitudinali perpendicolari alla pala.

Capitolo 3

DESCRIZIONE CODICE

3.1 Introduzione

In questo capitolo viene spiegato più nel dettaglio l'algoritmo di risoluzione delle equazioni evolutive della vorticità attraverso una discretizzazione a vortex blobs regolarizzati. Per approfondimenti teorici si rimanda il lettore al primo e secondo capitolo, mentre in questo viene affrontato l'aspetto più pratico dell'implementazione. Il codice è scritto con un linguaggio Fortran 95 e durante lo sviluppo della tesi il tipo di compilatore utilizzato è il GNU gfortran.

3.2 Modello di flusso

Tutti gli argomenti trattati nel precedente capitolo riguardano il Vortex Blob method inteso come metodo di calcolo valido a livello della DNS, ossia Direct Numerical Simulation. In particolar modo basti pensare alle condizioni di convergenza della soluzione : $\varepsilon/h > 1$ e $err = \mathcal{O}(\varepsilon^r)$. Da queste condizioni nasce quindi la necessità di avere elementi computazionali fitti e ravvicinati, in modo da avere una descrizione reale del campo di velocità e di vorticità caratteristici del flusso in esame.

I metodi Vortex Filaments e Vortex Blobs possono quindi essere intesi in un'ottica di una risoluzione numerica diretta, valida al pari di un esperimento. Chiaramente questo porta con sé grandi problemi a livello di potenza e tempo calcolo.

Questa tesi non vuole andare ad esaminare l'ambito della DNS, bensì vuole trovare una modellazione del flusso e una simulazione di una scia di un rotore cercando compromessi a livello di validità e praticabilità. Infatti per la progettazione di un rotore è infattibile una simulazione numerica diretta per ogni variazione della configurazione in esame. Sono necessari risultati veloci e verosimili.

In quest'ottica, le simulazioni riportate nella sezione dei risultati non andranno a soddisfare i requisiti di sovrapposizione, perdendo quindi la possibilità di avere una soluzione numerica convergente alla soluzione dell'equazione evolutiva ma permettendo, come si andrà a vedere, un calcolo dei carichi sul rotore molto vicino alla realtà. La presentazione della teoria retrostante al metodo permette ad ogni modo di concepire capacità e limiti della sua applicabilità nonché i possibili sviluppi futuri di questo lavoro di tesi. In questo capitolo verranno spiegate le ulteriori semplificazioni apportate agli schemi di risoluzione presentati.

3.3 Impostazione Generale

Il problema è inizialmente impostato secondo il consueto sviluppo dei metodi vortex lattice. L'ala è rappresentata secondo la teoria della superficie portante : ridotta ad una superficie infinitesima, è costituita da una serie di pannelli in corda e in apertura che simulano il suo effetto portante attraverso un reticolo di segmenti rettilinei vorticosi .

La scia viene rappresentata invece con un metodo ibrido : al momento del rilascio dal bordo di uscita viene rappresentata sempre con un vortex lattice; quando viene raggiunto il numero di file prescritte dal parametro arbitrario impostato (N_{wake}^{max}), i pannelli vengono trasformati in blobs attraverso un calcolo che permette la conservazione della vorticità di volume (momento di ordine 0) e impulso lineare (momento di ordine 1) rispetto alla configurazione in pannelli vorticosi.

Per quanto riguarda gli elementi di contorno quali ostacolo e mozzo, se attivati dall'utente, essi sono rappresentati, come è consuetudine per corpi non portanti, da una serie di pannelli di sorgenti ad intensità costante posizionati sul loro contorno.

Le incognite del metodo sono quindi le intensità dei pannelli vorticosi delle pale e dei pannelli di sorgenti degli elementi non portanti, e vengono calcolati attraverso l'imposizione delle condizioni al contorno : velocità normale ad ogni singolo pannello nulla, ossia la condizione di non penetrazione. Ogni singolo contributo viene calcolato attraverso le formule di induzione espresse in precedenza (1.7),(1.8)(1.9)(1.10),(2.10).

Per la scelta del tipo di formulazione, in questa tesi è stato applicato un approccio in velocità anziché quello in potenziale per motivi di coerenza con i lavori svolti nell'ambito dei vortex blob methods. Si è deciso inoltre di utilizzare come nucleo dei blobs un valore fisso ε per tutto il tempo della simulazione (i.e. $dvol^p/dt = 0$), pari ad 1% della corda delle pale, mentre come funzione di smoothing si è scelta quella gaussiana. Così il metodo iterativo può essere rappresentato dallo schema in figura 3.1.

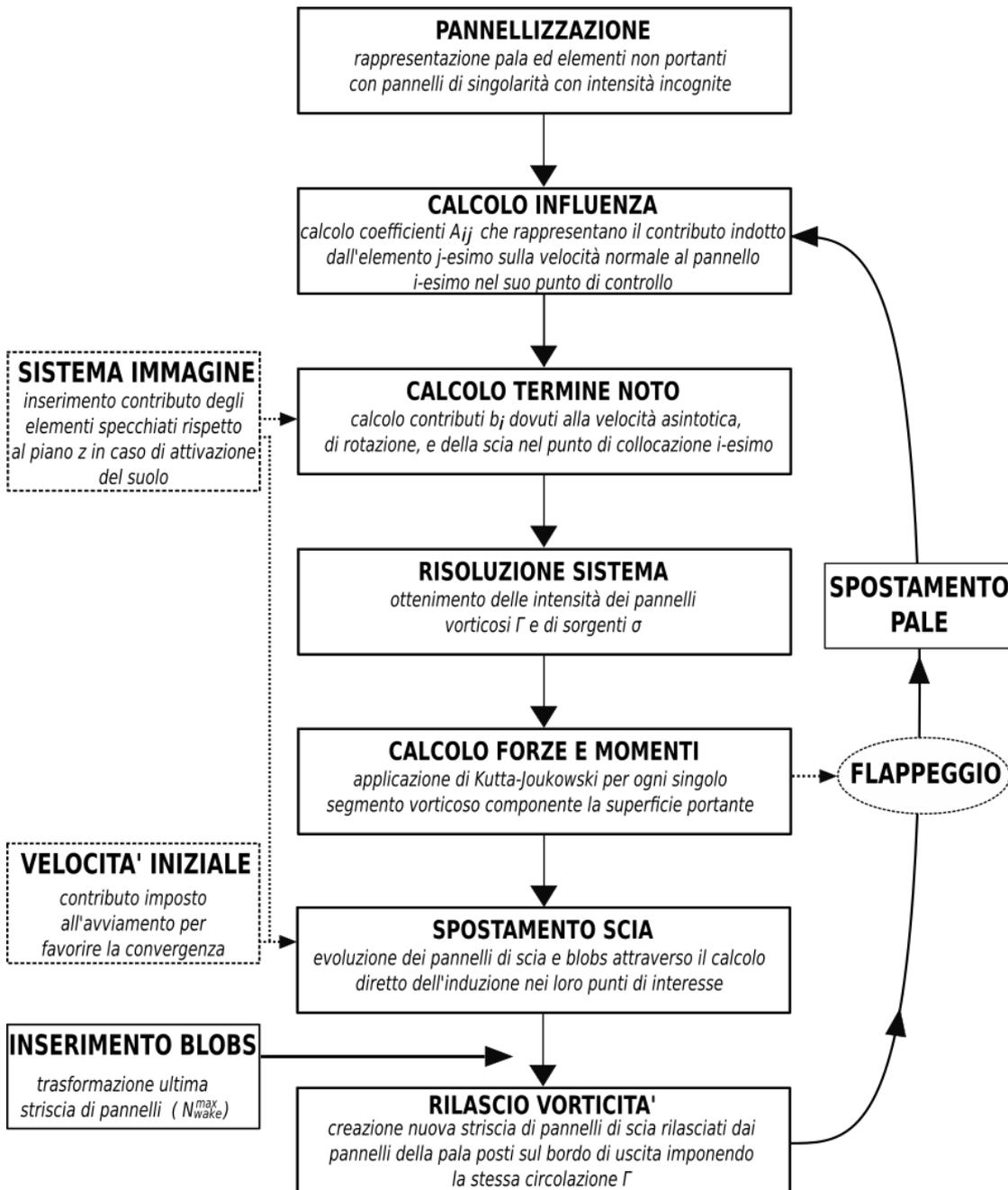


Figura 3.1: Schema algoritmo di risoluzione

L'algoritmo parte da una preliminare pannellizzazione di tutti gli elementi presenti nel dominio. Il ciclo temporale inizia con il calcolo e la risoluzione del sistema che comprende tutte le singolarità incognite inserite. E' così possibile ottenere le forze e i momenti agenti sulle pale. Ciò che chiude l'iterazione è lo spostamento della scia, l'inserimento di una nuova striscia di pannelli di scia e la trasformazione in blobs dell'ultima (N_{wake}^{max}). Le pale vengono spostate secondo la rotazione del rotore imposta e, se attivata l'opzione, ruotate secondo l'angolo di flappeggio ottenuto dal momento aerodinamico. Il ciclo temporale si ripete fino a quando il numero massimo di passi temporali impostati viene raggiunto.

3.3.1 Matrici di rotazione

Il sistema di riferimento globale \mathcal{F}_0 è definito con l'asse x diretto verso la coda, l'asse z in verticale con direzione verso l'alto e l'asse y di conseguenza essendo una terna destrorsa. Per identificare più facilmente i differenti contributi di velocità, sono stati definiti i seguenti sistemi di riferimento ausiliari osservabili in figura 3.2:

Azimuth

Una delle prime matrici di rotazione utile al calcolo è quella che porta dal sistema di riferimento globale fisso \mathcal{F}_0 , a quello mobile azimutale sulla pala \mathcal{F}_1 . L'unica variabile utile per questa trasformazione è l'angolo di rotazione Ψ rispetto la verticale.

$$\underline{\underline{T}}_{\Psi}(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \sin(\Psi) & 0 \\ -\sin(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Flappeggio

Per passare dal sistema azimutale \mathcal{F}_1 al sistema di riferimento della pala flappeggiata \mathcal{F}_2 , bisogna effettuare una trasformazione di rotazione che dipende dalla variabile β , ossia l'angolo di flappeggio.

$$\underline{\underline{T}}_{\beta}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Passo

Questa ultima matrice di rotazione è quella che passa dal sistema di riferimento di flappeggio \mathcal{F}_2 al sistema di riferimento solidale e ruotato con la pala \mathcal{F}_3 , contando l'azimuth, il flappeggio e l'angolo di passo θ della pala in quell'istante.

$$\underline{\underline{T}}_{\theta}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Di conseguenza partendo dal sistema di riferimento globale, per arrivare al sistema di riferimento solidale con la pala si passa attraverso le tre matrici nel seguente modo :

$$\mathcal{F}_3 = \underline{\underline{T}}_{\theta}(\theta) \underline{\underline{T}}_{\beta}(\beta) \underline{\underline{T}}_{\Psi}(\Psi) \mathcal{F}_0 \quad (3.4)$$

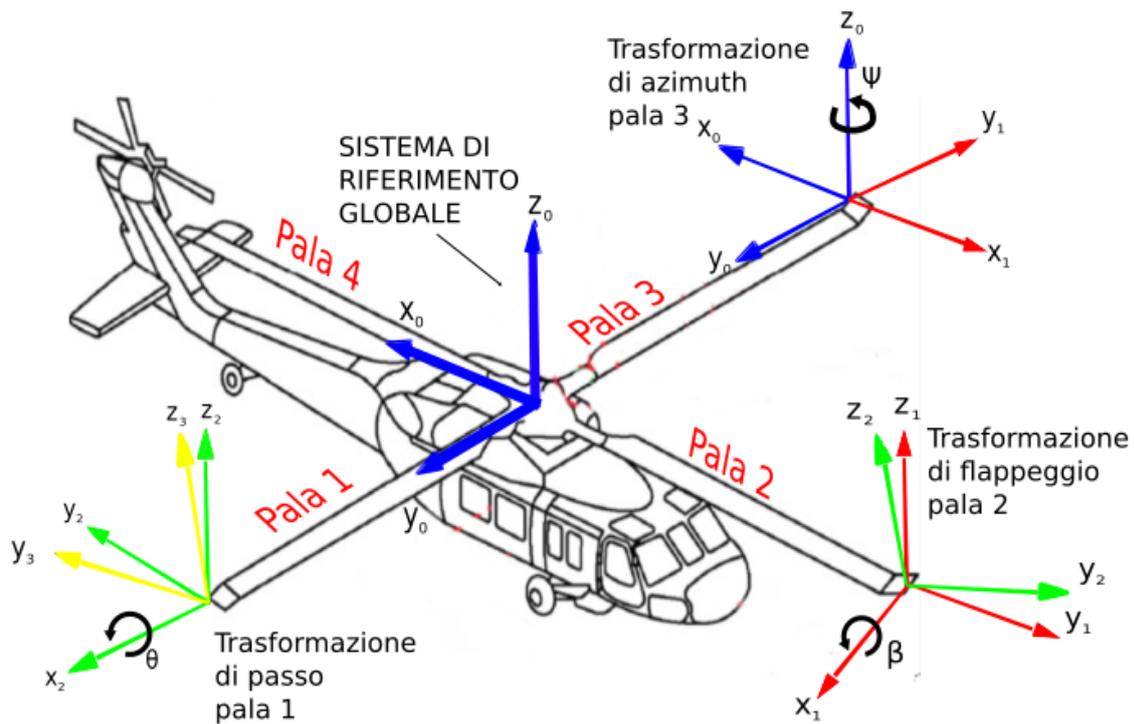


Figura 3.2: Sistemi di riferimento e rotazioni utilizzati.

Passaggio da SR globale (\mathcal{F}_0 blu) a quello azimutale (\mathcal{F}_1 rosso) a quello di flappeggio (\mathcal{F}_2 verde) a quello della pala (\mathcal{F}_3 giallo). Per comodità le origini dei SR sono state traslate alle estremità delle pale, ma coincidono con quello globale al centro del rotore.

3.4 Pannellizzazione

La pannellizzazione è uno step preliminare che serve a discretizzare gli elementi di contorno del dominio quali pale, mozzo, ostacolo. Questo aspetto influenza fortemente l'intera simulazione poichè il numero di pannelli usati per rappresentare un corpo influenza l'accuratezza del calcolo: basti pensare che per imporre la non penetrazione in modo pressoché continuo in ogni punto di una superficie, il numero di pannelli dovrebbe crescere.

Un fattore che chiaramente limita il numero di pannelli utilizzati è la potenza di calcolo : le dimensioni della matrice di influenza infatti crescono. Sebbene il sistema rischi di ingrandirsi eccessivamente, in questi metodi quello che comporta l'allungamento dei tempi è il calcolo dell'induzione in ogni punto richiesto che sarà sempre più corposo all'aumentare del numero di elementi di scia ad ogni passo temporale che passa. Quindi come si vedrà, il principale parametro che comporta un grosso incremento del tempo di simulazione, a parità di numero di passi temporali, sarà il numero di pannelli in apertura (N_b) in quanto comporta un aumento proporzionale degli elementi di scia ad ogni istante temporale.

Nelle seguenti sottosezioni si andrà nel dettaglio della pannellizzazione di ogni singolo elemento.

3.4.1 Pale

Sistema di riferimento

Prima di entrare nello specifico, è necessario illustrare il sistema di riferimento usato per la pannellizzazione della pala : sistema cartesiano \mathcal{F}_1 destrorso con origine coincidente con il centro del rotore. Gli assi sono disposti nel seguente modo: asse z verticale verso l'alto, asse y in direzione parallela alla pala, asse x come prodotto vettoriale $y \times z$. Il sistema di riferimento usato per la pannellizzazione coincide semplicemente alla trasformazione di quello globale secondo la matrice di rotazione di azimuth $\underline{T}_\Psi(\Psi)$.

Linea media

Per quanto riguarda la singola pala, siccome vi è una rappresentazione a superficie portante, la prima cosa da fare è recuperare la linea media relativa al profilo utilizzato per la simulazione. Nel caso di lastra piana o di profilo simmetrico chiaramente non è presente questo passaggio in quanto la linea media è rappresentata da un semplice segmento rettilineo.

La linea media di un profilo, o mean camber line in inglese, è semplicemente il luogo dei punti equidistante dai punti superiori e inferiori del profilo. Avendo un profilo rappresentato da un serie discreta di dati x - z , il metodo inserito nell'algoritmo per il calcolo della mean camber line fa utilizzo dei *poligoni di Voronoi*: la tassellazione di Voronoi è un particolare tipo di decomposizione dello spazio determinata dalle distanze rispetto ad un determinato insieme discreto di punti che nel nostro caso coincidono con quelli del profilo. I nodi di ogni poligono sono quindi calcolati in modo da essere equidistanti dall'insieme di due o più punti del profilo. Come si può notare dall'esempio in figura 3.3, i vertici dei poligoni di Voronoi interni al profilo rappresentano il luogo dei punti equidistanti da due o più punti superiori e inferiori del profilo. Interpolando le loro coordinate è così possibile ottenere la linea media richiesta.

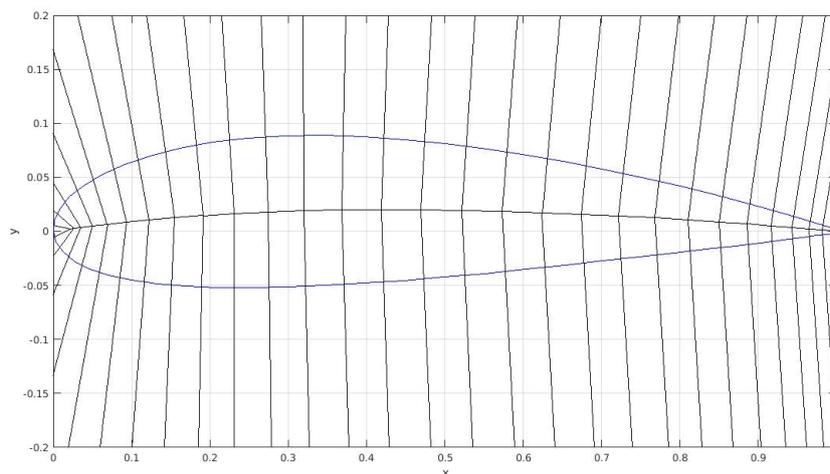


Figura 3.3: Esempio diagramma di Voronoi di un profilo NACA 2414

Coordinate pannelli

Una volta calcolata la linea media del profilo $z_{cl} = c \cdot f(x/c)$, e nota la forma della pala, è possibile incominciare la definizione della pannellizzazione : ogni pannello sarà rappresentato da un quadrilatero e quindi identificato in modo univoco dalle coordinate dei suoi quattro punti estremi.

Il processo inizia attraverso la definizione delle dimensioni costanti dei pannelli :

$$db = \frac{R - c_{out}}{N_b}; \quad dc = \frac{c}{N_c} \quad (3.5)$$

dove il termine c_{out} rappresenta la blade cutout, ossia la distanza dal centro del rotore da cui effettivamente la pala inizia.

Per la definizione delle coordinate dei punti è necessario inoltre considerare un possibile svergolamento ε , oltre all'angolo di attacco imposto α . Così i punti del pannello ij -esimo per ognuna delle 4 pale, \mathbf{x}_{ij} , con $i = [1 : N_b]$ e $j = [1 : N_c]$, sono definiti come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ij}^1 &= \left[(i-1)dc \cdot \cos \theta_i + z_{cl} \cdot \sin \theta_i \quad ; (j-1)db + c_{out}; \quad z_{cl} \cdot \cos \theta_i - (i-1)dc \cdot \sin \theta_i \right] \\ \mathbf{x}_{ij}^2 &= \left[idc \cdot \cos \theta_{i+1} + z_{cl} \cdot \sin \theta_{i+1}; \quad jdb + c_{out} \quad ; \quad z_{cl} \cdot \cos \theta_{i+1} - (i-1)dc \cdot \sin \theta_{i+1} \right] \\ \mathbf{x}_{ij}^3 &= \left[idc \cdot \cos \theta_{i+1} + z_{cl} \cdot \sin \theta_{i+1}; \quad jdb + c_{out} \quad ; \quad z_{cl} \cdot \cos \theta_{i+1} - (i-1)dc \cdot \sin \theta_{i+1} \right] \\ \mathbf{x}_{ij}^4 &= \left[(i-1)dc \cdot \cos \theta_i + z_{cl} \cdot \sin \theta_i \quad ; (j-1)db + c_{out}; \quad z_{cl} \cdot \cos \theta_i - (i-1)dc \cdot \sin \theta_i \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove gli angoli sono definiti da :

$$\theta_i = \alpha + \varepsilon_{tw} \frac{(j-1)db}{R} \quad \theta_{i+1} = \alpha + \varepsilon_{tw} \frac{jdb}{R} \quad (3.7)$$

Il punto di controllo sarà quindi definito come punto centrale del pannello :

$$\mathbf{x}_{ij}^c = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_{ij}^1 + \mathbf{x}_{ij}^2 + \mathbf{x}_{ij}^3 + \mathbf{x}_{ij}^4) \quad (3.8)$$

Il vettore normale sarà recuperato invece attraverso il prodotto vettoriale di due dei suoi lati :

$$\hat{\mathbf{n}}_{ij} = \frac{(\mathbf{x}_{ij}^1 - \mathbf{x}_{ij}^4) \times (\mathbf{x}_{ij}^2 - \mathbf{x}_{ij}^1)}{|(\mathbf{x}_{ij}^1 - \mathbf{x}_{ij}^4) \times (\mathbf{x}_{ij}^2 - \mathbf{x}_{ij}^1)|} \quad (3.9)$$

Ogni pala k -esima viene quindi inserita nella sua posizione in azimuth iniziale trasformando ogni punto secondo $\underline{T}_{\Psi}^T(\Psi_k)$ con $\Psi_k = (k-1)2\pi/N_b$ dove N_b indica il numero di pale del rotore.

3.4.2 Elementi non portanti

Per quanto riguarda la pannellizzazione di elementi non portanti da inserire all'interno del problema, è possibile caricare file esterni con i punti di griglia necessari per descriverlo. Il codice necessita di una descrizione attraverso pannelli quadrilateri o triangolari, quindi determinati attraverso i punti di contorno. Il punto di controllo e il vettore normale vengono calcolati con le stesse formule espresse da (3.8) e (3.9), con opportune correzioni in caso di pannelli triangolari. Le intensità di sorgente vengono inserite come incognite dentro il sistema, e, una volta risolto, vengono usate per il successivo calcolo dell'induzione per poter spostare la scia.

3.5 Risoluzione Sistema

Ad ogni istante temporale bisogna andare a costruire e risolvere il sistema di equazioni lineari utili per determinare le intensità dei vari pannelli e per poi descrivere il campo di velocità all'interno del dominio. Nei prossimi due paragrafi sarà spiegato come determinare quindi la matrice di influenza e il termine noto.

3.5.1 Matrice di influenza

La matrice di influenza avrà una dimensione che dipende dal numero di elementi inseriti e dal numero di pannelli utilizzati per la loro discretizzazione. Nello specifico quindi avrà dimensioni $a \times a$, dove il valore minimo di a sarà $(4N_bN_c)$ e quello massimo di $(4N_bN_c + N_{mozzo} + N_{ost})$ prendendo come esempio un problema in cui si vuole modellare la presenza del mozzo e di un ostacolo.

La costruzione della matrice quindi sarà fatta attraverso la determinazione dei singoli coefficienti A_{ij} nel seguente modo :

$$A_{ij}^k = \mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k) \quad (3.10)$$

dove il termine $\mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k)$ indica la velocità indotta dal pannello j -esimo sul punto di controllo i -esimo al k -esimo passo temporale, mentre $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$ rappresenta il vettore normale alla superficie del pannello i -esimo. Si è esplicitata la dipendenza dei coefficienti dal passo temporale in quanto le posizioni relative degli elementi cambia col tempo (le pale infatti ruotano e possono flappingare).

In questo modo è possibile assemblare la matrice totale che sarà divisa in base agli elementi :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{bb} & \underline{\underline{A}}_{bm} & \underline{\underline{A}}_{bo} \\ \underline{\underline{A}}_{mb} & \underline{\underline{A}}_{mm} & \underline{\underline{A}}_{mo} \\ \underline{\underline{A}}_{ob} & \underline{\underline{A}}_{om} & \underline{\underline{A}}_{oo} \end{bmatrix}$$

I pedici nella matrice indicano b (blade) pala, m mozzo, o ostacolo.

Purtroppo la matrice non è simmetrica in quanto la reciproca influenza varia nel caso in cui le tipologie di pannelli (sorgenti o vortici) e il loro orientamento siano diversi. Questa matrice cambia ad ogni passo temporale, ma soltanto una parte di essa, ossia quella che comprende le pale poichè sempre in rotazione. Quindi

per ridurre il costo computazionale, le componenti da rivalutare ogni volta sono soltanto quelli di : $\underline{\underline{A}}_{bo}, \underline{\underline{A}}_{ob}, \underline{\underline{A}}_{mb}, \underline{\underline{A}}_{bm}$. Inoltre nel caso in cui vi sia inserito il flappeggio e un passo ciclico, essendo indipendente per ogni pale, è necessario rivalutare allora la parte di matrice di induzione delle pale $\underline{\underline{A}}_{bb}$, poichè possono cambiare la propria posizione relativa.

3.5.2 Termine noto

Il termine noto rappresenta i contributi conosciuti delle velocità indotte all'istante di valutazione. Esso è formato quindi dalla presenza di una velocità asintotica, dall'influenza della velocità di rotazione sulle pale, in quanto contribuisce alla velocità relativa vista da esse, e dall'induzione dei pannelli e blobs di scia rilasciati negli istanti precedenti. Nel caso di flappeggio inserito inoltre, vanno aggiunti ulteriori contributi dovuti al cambio di passo e alla velocità di flappeggio mentre nel caso della presenza del suolo, il sistema immagine fornirà anch'esso un'induzione nei punti di controllo.

Il termine noto sarà composto da :

$$\mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{b}_{\infty} + \mathbf{b}_{wake} + \mathbf{b}_{blobs} + \mathbf{b}_{ground}}_{\text{su } \mathbf{x}^c \text{ di pale, ostacolo e mozzo}} + \underbrace{\mathbf{b}_{rot} + \mathbf{b}_{flap} + \mathbf{b}_{passo}}_{\text{solo su } \mathbf{x}^c \text{ delle pale}} \quad (3.11)$$

I vari contributi nel punto i-esimo vengono ora esaminati più in dettaglio:

Velocità asintotica : $b_{i,\infty} = -\mathbf{V}_{\infty} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

Semplice da calcolare in quanto il vettore velocità \mathbf{V}_{∞} è costante e fisso.

Pannelli di scia : $b_{i,wake} = - \sum_{j=1}^{\min(k,N)} \mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

I pannelli di scia sono composti da 4 segmenti ciascuno. Ogni pannello j-esimo avrà quindi un contributo formato dalla somma delle induzioni dei 4 lati, ognuna delle quali saranno calcolate secondo la (1.7). L'apice del simbolo di sommatoria risulta essere $\min(k, N)$ in cui k rappresenta il numero del passo temporale in esame mentre N corrisponde al parametro N_{wake}^{max} qui ridotto nella notazione per motivi di spazio. Esso sta ad indicare che per i primi k passi temporali, dove $k < N_{wake}^{max}$, esistono quindi soltanto k strisce di pannelli di scia, mentre se $k > N_{wake}^{max}$ si ha un numero N_{wake}^{max} fisso di strisce, in quanto le restanti vengono trasformate in blobs.

Blobs : $b_{i,blobs} = - \sum_{j=1}^{\max(0, k-N)} \mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

In questo contributo la velocità indotta $\mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k)$ viene calcolata grazie al kernel di Biot-Savart regolarizzato nella (2.29). In questo caso l'apice della sommatoria sta ad indicare che soltanto quando si raggiunge il k-esimo passo temporale per cui $k > N_{wake}^{max}$ i blobs iniziano ad essere create e quindi ad indurre una velocità nel punto di collocazione i-esimo.

Velocità di rotazione : $b_{i,rot} = -\left(T_{\Psi}^T(\Psi) \left[\omega|\mathbf{x}_i^c|, 0, 0\right]^T\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

Il contributo della velocità di rotazione chiaramente partecipa solo per i punti di collocazione i -esimi che appartengono alle pale, per i restanti è nullo. Nel sistema di riferimento azimutale della pala la velocità di rotazione ha soltanto non nulla la componente in x proporzionale alla distanza del punto dal centro del rotore. Per rappresentarlo secondo il riferimento globale poi, il vettore deve essere trasformato attraverso la matrice di rotazione che esprime la posizione in azimuth della pala, $T_{\Psi}(\Psi)$.

Suolo : $b_{i,ground} = -\sum_{j=1}^{j_{fin}} \mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

Questo è il singolo contributo che racchiude l'effetto suolo. Dentro alla velocità $\mathbf{u}_{ind}^j(\mathbf{x}_i^c, t_k)$ vi è quindi nascosto tutto l'effetto del sistema immagine nel punto i -esimo. Tale effetto racchiude l'induzione dovuta a tutti gli elementi presenti nel dominio (pale, mozzo, ostacolo, pannelli di scia, blobs) però specchiati rispetto alla coordinata z_{ground} . Le induzioni quindi sono identiche a quelle espresse in precedenza, dove però posizione e intensità degli elementi vengono cambiate secondo i criteri espressi nella sezione 3.11 di questo capitolo relativa al sistema immagine. Questo procedimento esplicito per descrivere il sistema immagine è stato applicato in modo da semplificare il problema e ridurre i tempi di calcolo. Un suo trattamento implicito implicherebbe l'inserimento all'interno della matrice di induzione del contributo dell'immagine per ognuno degli elementi presenti. L'errore in questo trattamento esplicito risiede nel fatto che l'induzione dell'intero sistema immagine in questo modo viene calcolata con le intensità delle singolarità del passo temporale precedente.

Flappeggio : $b_{i,flap} = -\left(\left[T_{\beta}(\beta) T_{\Psi}(\Psi)\right]^T \left[0; 0; \dot{\beta}y_i^c\right]^T\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

Il flappeggio ha un contributo solamente verticale nel sistema di riferimento pala non ruotato rispetto al passo \mathcal{F}_2 , proporzionale a $\dot{\beta}y_i^c$. Tale vettore deve essere riportato nel sistema di riferimento globale attraverso le matrici di rotazioni $T_{\beta}(\beta)$ e $T_{\Psi}(\Psi)$.

Passo : $b_{i,passo} = -\left(\left[T_{\theta}(\theta) T_{\beta}(\beta) T_{\Psi}(\Psi)\right]^T \left[0; 0; \dot{\theta}x_i^c\right]^T\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_i^c, t_k)$

Questo termine tratta il contributo dovuto alla variazione di passo delle pale. La componente x_i^c è riferita al punto di collocazione i -esimo sull'asse x del sistema di riferimento \mathcal{F}_3 . Valido solo nel momento in cui il flappeggio e una legge temporale per il passo vengono inseriti, il suo valore è sicuramente inferiore e trascurabile rispetto agli altri ma qui inserito per completezza.

3.5.3 Calcolo incognite

Una volta definiti matrice e termine noto, non rimane altro che risolvere il sistema. La risoluzione, come qualsiasi altro sistema lineare inserito dentro all'algoritmo, avviene attraverso un metodo di decomposizione LU con pivoting parziale e interscambio di righe in modo da rappresentare la matrice tramite l'espressione:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}}$$

dove P è la matrice di permutazione, L è la matrice unitaria triangolare inferiore e U la matrice triangolare superiore. Questa formulazione facilita poi la risoluzione del sistema $\underline{\underline{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{L}}\mathbf{y} = \underline{\underline{P}}\mathbf{b} \\ \underline{\underline{U}}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases} \quad (3.12)$$

Per recuperare il valore delle incognite relative ad i diversi elementi, il sistema è così decomposto :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{bb} & \underline{\underline{A}}_{bm} & \underline{\underline{A}}_{bo} \\ \underline{\underline{A}}_{mb} & \underline{\underline{A}}_{mm} & \underline{\underline{A}}_{mo} \\ \underline{\underline{A}}_{ob} & \underline{\underline{A}}_{om} & \underline{\underline{A}}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Gamma}}_{pale} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{mozzo} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{ostacolo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{b}}}_{pale} \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}}_{mozzo} \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}}_{ostacolo} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.6 Evoluzione temporale

L'evoluzione temporale di vorticità e scia è implementata attraverso le formule spiegate nel capitolo precedente, nel sistema (2.30) con l'aggiunta del termine viscoso nella (2.36) calcolato secondo il Particle Strength Exchange method.

Per quanto riguarda l'aggiornamento della posizione dei pannelli di scia e dei blobs, lo schema scelto è lo *schema di Adams–Bashforth*: metodo a 2 passi lineare del 2° ordine che permette di risolvere sistemi di equazione differenziali ordinarie :

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + dt \cdot \left[\mathbf{V}_\infty + \frac{3}{2}\mathbf{u}_{ind}(\mathbf{x}_p^k, t^k) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{ind}^{old}(\mathbf{x}_p^{k-1}, t^{k-1}) \right] \quad (3.14)$$

Lo stesso schema è stato implementato per l'evoluzione dell'intensità dei blobs, dove nella (3.14) al posto di \mathbf{x}_p e \mathbf{u}_{ind} vanno inseriti α_p e la sommatoria a secondo membro dell'equazione. Ad ogni modo, nei calcoli di validazione si è deciso di trascurare quest'ultimo effetto, comportando una conservazione della vorticità di ogni singola blobs. Infatti gli schemi visti nella parte teorica sono validi per una risoluzione numerica diretta, e nel momento in cui la condizione di sovrapposizione non viene soddisfatta non è garantita comunque la convergenza. Per ragioni di potenza di calcolo si è quindi preferita questa approssimazione e semplificazione.

3.7 Inserimento blobs

Come già spiegato nel capitolo precedente, sono disponibili diverse scelte per l'inserimento dei blobs. Lo scopo principale è quello di conservare momento di ordine zero e uno della vorticità. All'interno del codice i blobs sono stati inseriti nei nodi della fila calcolata in seguito all'ultima scia rappresentata (N_{wake}^{max}) come in figura 3.4, in quanto è stato comprovato che così anche il momento di ordine uno è lo stesso. In questo modo, per ogni blob si devono considerare i contributi dei segmenti vorticosi entranti e uscenti dalla particella mentre rimane escluso il segmento più a monte parallelo alla pala della fila trasformata, che però partecipa ai calcoli di induzione del passo temporale successivo dopo il quale verrà trasformato anch'esso in blobs. Così facendo, la conservazione del momento di ordine zero viene espressa nel seguente modo :

$$\boldsymbol{\alpha}^p(t) = \sum_i \Gamma_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i \quad (3.15)$$

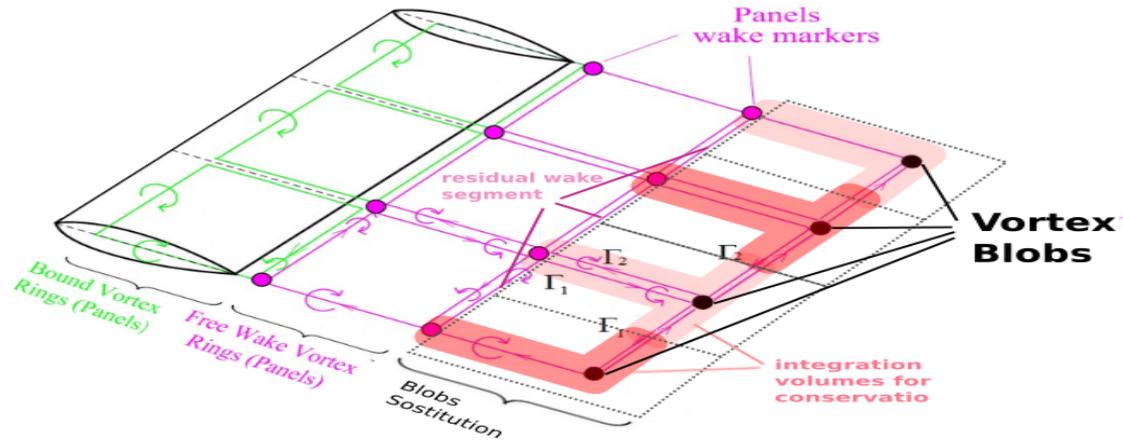


Figura 3.4: Schema di inserimento blobs (con $N_{wake}^{max} = 1$)

3.8 Calcolo forze e momenti

La sensibilità rispetto ai parametri numerici può essere più facilmente compresa una volta compreso il metodo per il calcolo delle forze e momenti sulle pale. Concentrandosi esclusivamente sulla trazione, l'applicazione del teorema di Kutta-Joukowski permette di conoscere modulo e direzione della forza aerodinamica generata per ogni segmento vorticoso componente la pala. È importante ricordare come un calcolo a potenziale sia affetto dal cosiddetto *Paradosso di D'Alembert*, per il quale non è possibile alcuna stima della resistenza di profilo o forma. Per ogni pannello della pala, si hanno 4 calcoli di forze e di momenti da fare, essendo 4 i lati, con le formule qui sotto riportate :

$$\mathbf{F}_A^p = \rho \cdot \mathbf{V}_{tot}(\mathbf{x}_p) \times \Gamma^p \Delta \mathbf{l} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}_A^p = \rho \cdot (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_A^p \quad (3.17)$$

La (3.16) è l'applicazione del teorema vero e proprio nel 3D per il calcolo della forza aerodinamica sul segmento vorticoso di un pannello identificato dalla lettera p , in cui direzione e lunghezza del segmento vorticoso sono rappresentati da $\Delta \mathbf{l}$. E' utile specificare che col termine $\mathbf{V}_{tot}(\mathbf{x}_p)$ si intende non solo il contributo della velocità asintotica e di rotazione ma bensì anche quello indotto (dai segmenti di pala vicini, pannelli di scia, mozzo , etc . . .) . Il calcolo di questa velocità viene effettuato nel punto medio \mathbf{x}_p del segmento vorticoso p -esimo.

La (3.17) invece rappresenta il calcolo del momento aerodinamico una volta nota la forza. In questa espressione rientrano in gioco la posizione del segmento vorticoso identificata dal suo punto medio (\mathbf{x}_p) e la posizione del riferimento rispetto al quale si vuole calcolare il momento (\mathbf{x}_0).

Un ulteriore contributo alla forza aerodinamica proviene dall'instazionarietà della circolazione del pannello, che aggiunge un termine proporzionale alla variazione temporale dell'intensità :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A},p}^{instaz} = \rho \cdot S_p \cdot \frac{D\Gamma}{Dt} \hat{\mathbf{n}}_p \cong \rho \cdot S_{pan} \cdot \frac{1.5\Gamma_k^p - 2\Gamma_{k-1}^p + 0.5\Gamma_{k-2}^p}{dt} \hat{\mathbf{n}}_{pan} \quad (3.18)$$

dove si è utilizzata un'approssimazione alle differenze finite all'indietro della derivata di secondo ordine. Le $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}^{instaz}$ sono calcolate per ognuno dei pannelli, posizionate nel loro punto di collocazione e poi sommate.

In ogni calcolo delle forze e dei momenti, all'interno del codice si è utilizzato un valore di densità costante, e come punto di riferimento :

$$\mathbf{x}_0 = [1/4(c - dc) \cos(\theta), 0, -1/4(c - dc) \sin(\theta)] \quad (3.19)$$

espresso secondo il sistema di riferimento \mathcal{F}_3 della pala, in modo da ottenere il momento a picchiare rispetto ad $1/4$ della corda.

3.9 Avviamento calcolo

Il metodo vortex lattice come il vortex blob, soffrono all'inizio del calcolo dell'influenza della condizione di avviamento che impedisce una rapida convergenza. Infatti il vortice di avviamento si arrotola su se stesso in direzione verticale, provocando così un'interferenza con le pale e con i successivi pannelli di scia creati. Questa situazione crea grosse oscillazioni nei risultati e problemi nei calcoli e per questo motivo il codice ha implementato al suo interno un criterio di avviamento che impone alla scia una velocità indotta verso il basso di intensità pari alla formula analitica ricavata tramite la *teoria del disco attuatore*.

Ad ogni passo temporale, per un totale del tempo di una rivoluzione completa del rotore, la velocità imposta ai blobs e ai pannelli di scia, da sommarsi a quella asintotica e quella indotta, è quindi proporzionale al C_T calcolato al passo precedente come riportato dalla formula seguente:

$$V_{z,iniz}^k = -\Omega \cdot R \cdot \lambda_i = -\Omega \cdot R \cdot \sqrt{\frac{C_T^{k-1}}{2}} \quad se \quad t^k \leq \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.20)$$

3.10 Algoritmo di non penetrazione

Siccome la discretizzazione, grossolana o fine che sia, non garantisce la non penetrazione effettiva degli elementi di contorno, si è reso necessario l'introduzione di un algoritmo di non penetrazione che garantisca questa condizione.

Ad ogni istante temporale, dopo la risoluzione del sistema lineare, è necessario calcolare le velocità indotte sulla scia. Si ha a disposizione quindi la velocità di convezione dei blobs. L'algoritmo pratica un controllo di questa velocità in modo tale per cui non vada a penetrare pala, ostacolo o suolo. Attivandosi solamente nel caso in lo spostamento massimo del blob b-esimo superi in modulo la sua distanza rispetto all'elemento i-esimo. Quindi viene applicato un controllo sulla velocità di ogni blob, per ogni pannello presente (pala, mozzo, ostacolo). In formule la condizione di attivazione diventa:

$$se \quad |\mathbf{V}_{tot}^b| \cdot dt \geq r_i \quad dove \quad r_i = |(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^b) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i| \quad (3.21)$$

Per quanto riguarda il trattamento della superficie, l'algoritmo differenzia 2 diversi tipi di superficie: una parallela ad uno degli assi globali (utile in quanto mozzo e ostacolo hanno facce allineate agli assi) e una generale obliqua. Per superfici parallele agli assi il controllo viene effettuato in modo banale sulla sola componente di interesse della velocità.

Per quanto riguarda una superficie generica, essa viene ricostruita attraverso un'interpolazione bilineare del pannello nel seguente modo :

$$z = f(x, y) = Axy + Bx + Cy + D \quad (3.22)$$

I coefficienti A, B, C, D vengono calcolati imponendo il passaggio del modello di superficie per i quattro punti del pannello :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1y_1 & Bx_1 & Cx_1 \\ Ax_2y_2 & Bx_2 & Cx_2 \\ Ax_3y_3 & Bx_3 & Cx_4 \\ Ax_4y_4 & Bx_4 & Cx_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D \\ D \\ D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Dopodichè non resta altro che imporre la condizione di intersezione retta-piano per andare a verificare se sia possibile o impossibile:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{old}^b + \mathbf{V}_{tot} \cdot t \\ z = f(x, y) = Axy + Bx + Cy + D \end{cases} \\ \downarrow \\ (z_{old} + V_z t) = A(x_{old} + V_x t)(y_{old} + V_y t) + B(x_{old} + V_x t) + C(y_{old} + V_y t) + D \\ \downarrow \\ \left[AV_x V_y \right] t^2 + \left[A(V_x y_{old} + V_y x_{old}) + BV_x + CV_y - V_z \right] t + \\ + \left[Ax_{old} y_{old} + Bx_{old} + Cy_{old} + D - z_{old} \right] = 0 \quad (3.24)$$

La risoluzione della (3.24) porta ad un valore di t_{int} che può essere quindi comparato con il dt numerico. Se è maggiore di zero e minore del dt , vi è l'intersezione piano-retta.

L'ultima cosa che rimane da fare per sapere se il blob penetra il pannello è controllare che tale intersezione avvenga nel dominio del piano che rappresenta il pannello analizzato. In caso di risposta affermativa, la velocità viene così corretta affinché la componente normale al pannello venga annullata nel momento in cui la particella giace sul pannello stesso.

$$\text{se } dt > t_{int} > 0 \text{ e } \mathbf{x}_{int} \in \mathcal{D}_{pann}, \text{ allora } \mathbf{V}_{new} = \mathbf{V}_{tot} - \mathbf{V}_{tot} \cdot \hat{\mathbf{n}}(1 - t_{int}/dt) \quad (3.25)$$

dove \mathcal{D}_{pann} è il dominio del pannello considerato.

3.11 Sistema immagine

Per simulare la presenza del suolo all'interno del calcolo, è stato utilizzato il consueto *metodo ad immagini* : esso consiste nello specchiare ogni singolarità presente nello schema oltre un piano che definisce il suolo.

Specchiare gli elementi prevede innanzitutto traslare ogni elemento i -esimo in direzione verticale z di una quantità pari alla sua distanza dal suolo:

$$\mathbf{x}_{imm}^i = [0, 0, z_{ground}]^T - \mathbf{x}^i = [x^i, y^i, z_{ground} - z^i]^T$$

Dopodiché susseguono ulteriori passaggi in base alla tipologia di elemento coinvolto:

- **Pannelli vorticosi :** $\Gamma_{imm}^i = -\Gamma^i$
la circolazione di ogni pannello viene cambiata di segno.
- **Pannelli di sorgenti :** $\sigma_{imm}^i = \sigma^i$
l'intensità di sorgente viene mantenuta inalterata.
- **Vortex blobs :** $\boldsymbol{\alpha}_{imm}^i = [-\alpha_x^i, -\alpha_y^i, \alpha_z^i]^T$
il vettore di vorticità viene invertito, ossia preso l'opposto dell'originale mantenendo inalterata la sua componente perpendicolare al piano rappresentante il suolo.

La fase successiva allo specchiamento è l'introduzione all'interno del codice dell'induzione del sistema immagine ogni qualvolta una valutazione della velocità in un punto venga introdotta (spostamento scia, calcolo termine noto sistema, calcolo forze e momenti, etc. . .).

Una dimostrazione grafica del procedimento è mostrata in figura 3.5, in particolare per un ala (3.5a) e un profilo (3.5b).

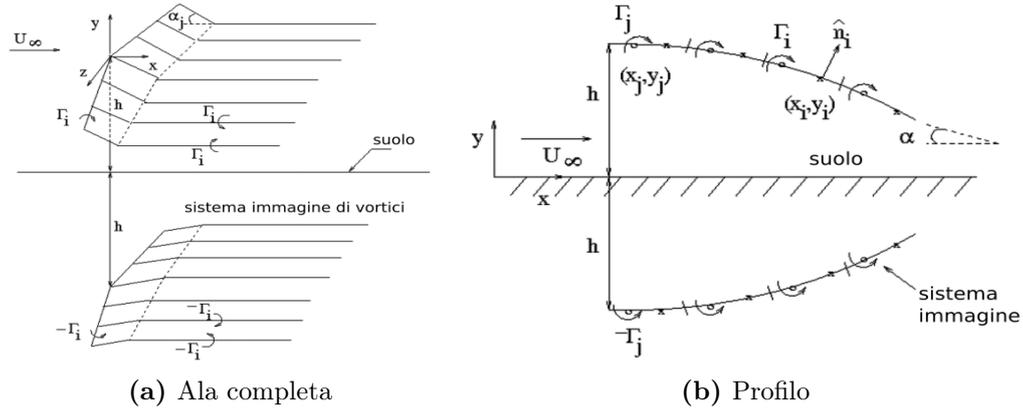


Figura 3.5: Esempio di sistema immagine

3.12 Flappeggio

All'interno del codice vi è la possibilità di abilitare il flappeggio delle pale. In volo a punto fisso, trattandosi di piccoli angoli di cono, il flappeggio può essere trascurato senza alterare i risultati. Nel momento in cui si inserisce una velocità asintotica, e in particolar modo nel caso di volo avanzato, il passo ciclico e l'angolo di flappeggio variano ad ogni istante temporale per ogni pala.

Avendo a disposizione i momenti sulla pala, la componente di interesse per la dinamica del flappeggio è quella in direzione x nel sistema di riferimento \mathcal{F}_1 . L'equazione della dinamica del flappeggio, considerando la pala come corpo rigido senza possibilità di flessione, si può ricavare partendo da un bilancio di momenti:

$$I_b \ddot{\beta} = M_A^x + M_{cf} \quad (3.26)$$

rappresentando un'accelerazione angolare causata dalla somma algebrica dei momenti prodotti dalle forze aerodinamiche (M_A^x) e dalla forza centrifuga (M_{cf}) in direzione x della pala.

Il momento centrifugo può essere espresso come :

$$M_{cf} = - \int_0^R \left(\int_A \rho_b dA \right) \omega^2 y^2 \beta dy = -\omega^2 \beta \int_0^R \left(\int_A \rho_b dA \right) y^2 dy = -\omega^2 I_b \beta \quad (3.27)$$

Per quanto riguarda il momento aerodinamico, esso è già noto dal calcolo numerico delle forze e i momenti.

L'equazione risulta essere analoga ad un'oscillatore smorzato forzato dall'aerodinamica in quanto M_A^x dipende anche dal termine $\dot{\beta}$:

$$\ddot{\beta} - \omega^2 \beta = \frac{M_A^x}{I_b} \quad (3.28)$$

Per la risoluzione si è utilizzato ancora il metodo di Adams–Bashforth del secondo ordine dopo aver trasformato l'equazione differenziale ordinaria di secondo grado in un sistema ODE del primo :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_A^x/I_b \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Così facendo, trasformando il sistema in $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$, lo schema di risoluzione è il seguente :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + dt \left[\frac{3}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{f}_n) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{f}_{n-1}) \right] \quad (3.30)$$

3.13 Parametri fisici e numerici algoritmo

I parametri settabili prima dell'inizio di ogni simulazione sono divisi per categorie e sono definiti nel seguente modo:

Geometrici

c = corda della pala	ε_{tw} = svergolamento [$^{\circ}/m$]
R = raggio del rotore	θ_0 = valor medio passo
c_{out} = raggio di cut-out	$\Delta\theta$ = ampiezza oscillazioni passo
α = angolo di incidenza	airfoil_file = punti linea media profilo

Condizioni di volo

V_{∞} = velocità asintotica	I_b = momento di inerzia pala
ρ = densità	ω = velocità di rotazione
ρ_p = densità pala	dt = passo temporale

Numerici

k_{fin} = numero di passi temporali
N_b^{pan} = numero pannelli in apertura
N_c^{pan} = numero pannelli in corda
N_{wake}^{max} = numero massimo di pannelli di scia

Attivazione

HUB = attivazione mozzo	i_{vin} = attivazione V_{iniz} avviamento
STRETCH = attivazione stretching	OSTACOLO = attivazione ostacolo
VISC = attivazione viscosità	SUOLO = attivazione suolo
FLAP = attivazione flappeggio	

Mozzo

R_m = raggio mozzo
dh = semi altezza mozzo
N_{mozzo} = numero pannelli mozzo per singola superficie

Suolo

z_{ground} = posizione suolo rispetto centro rotore

Ostacolo

\mathbf{x}_{obst} = posizione centro ostacolo	H_{obst} = altezza ostacolo
L_{obst} = lunghezza ostacolo	N_x^{obst} = discretizz. direzione 1 ostacolo
W_{obst} = larghezza ostacolo	N_z^{obst} = discretizz. direzione 2 ostacolo

Capitolo 4

VALIDAZIONE METODO

4.1 Introduzione

Questa sezione è il primo della serie di capitoli inerenti ai risultati e rappresenta uno studio sugli effetti e sulle conseguenze dell'approssimazione di un vortex lattice con i vortex blobs.

Dalla teoria, si intuisce come tale approssimazione discreta sia tanto più precisa quanto più sono vicini i blobs, che in questo caso rappresenterebbero in modo discreto l'insieme infinito di punti del reticolo del vortex lattice.

I parametri che vanno ad influenzare la soluzione saranno quindi :

- dt = passo temporale : influenza su discretizzazione in lunghezza
- N_b = pannelli in apertura : discretizzazione in larghezza

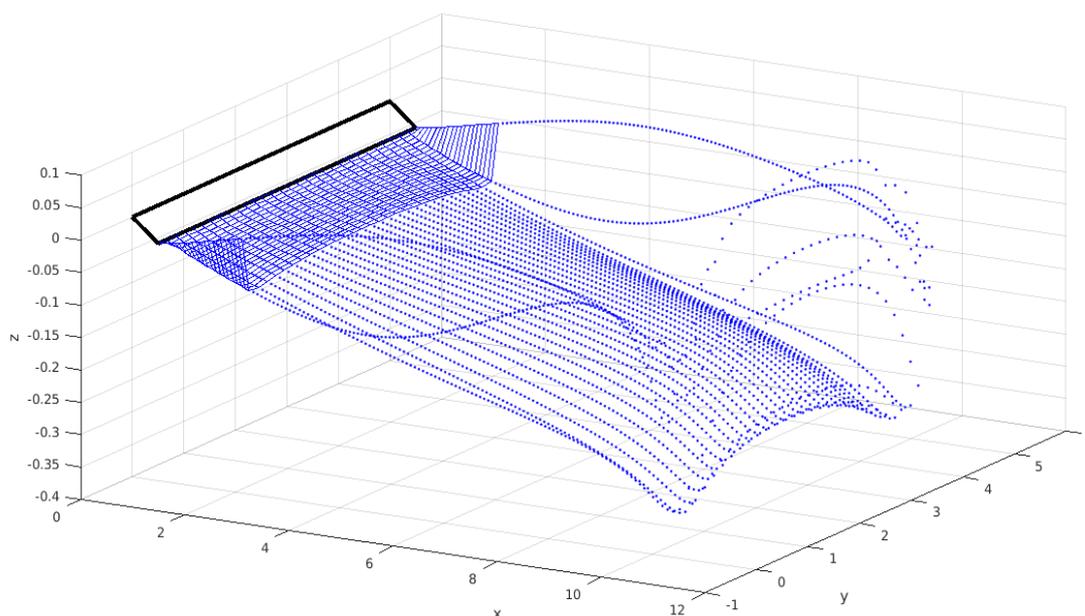


Figura 4.1: Scia 3D del metodo vortex blob ibrido.

Come si può notare i primi $N_{wake}^{max} = 20$ pannelli sono rappresentati attraverso un vortex lattice che poi si trasforma in una scia di blobs.

4.2 Confronto induzione

Una tra le prime cose da osservare è quanto il metodo a vortici discreti possa deviare dai risultati del vortex lattice. A questo scopo, sono stati eseguiti diversi confronti su un'ala semplice per comprendere l'influenza dei due parametri numerici citati in precedenza. In aggiunta è stata analizzata anche la sensibilità al numero di pannelli in corda (N_c) utilizzati per approssimare la superficie portante.

Per il calcolo sono stati utilizzati i seguenti valori geometrici ed iniziali :

$$\begin{aligned}
 b &= 5 \text{ m} & \alpha &= 4^\circ \\
 c &= 0.5 \text{ m} & \rho &= 1.125 \text{ kg/m}^3 \\
 V_\infty &= 80 \text{ m/s} & k_{fin} &= 250 \\
 \text{AR} &= 10
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Un parametro essenziale, la cui influenza sarà mostrata in seguito nella sezione 4.6, è la dimensione del nucleo vorticoso utilizzato per il reticolo vorticoso rappresentante la superficie portante. In queste simulazioni il core è stato fissato a $\varepsilon = 0.01c$, ossia 1% della corda.

Il confronto è stato effettuato attraverso lo sviluppo della scia composta da un vortex lattice e andando a sostituire nei nodi dei pannelli di scia i blobs per osservare differenze nel calcolo delle forze e momenti. La seguente tabella 4.1 mostra i risultati in termini di coefficiente di portanza, resistenza indotta e momento rispetto ad $1/4$ della corda:

INFLUENZA	PASSO TEMPORALE			N° IN APERTURA		N° IN CORDA		
N_b	10	10	10	20	30	10	10	10
N_c	1	1	1	1	1	4	8	10
dt	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
C_L^{lat}	0.3533	0.3535	0.3535	0.3453	0.3422	0.3541	0.3542	0.3542
C_L^{blob}	0.3533	0.3535	0.3535	0.3453	0.3422	0.3541	0.3542	0.3542
$\Delta_{\%}^{cL}$	0.0070	0.0009	0.0046	0.0014	0.0033	0.0080	0.00007	0.0003
$C_D^{lat} [10^{-3}]$	3.759	3.747	3.747	3.773	3.766	3.780	3.783	3.783
$C_D^{blob} [10^{-3}]$	3.693	3.210	2.143	3.708	3.703	3.690	3.686	3.686
$\Delta_{\%}^{cD}$	1.75	14.33	42.8	1.71	1.67	2.39	2.56	2.58
$C_M^{latt} [10^{-3}]$	-0.0110	-0.0047	-0.0040	-0.0258	-0.0271	1.490	1.563	1.572
$C_M^{blob} [10^{-3}]$	-0.0245	-0.0036	-0.00003	-0.0230	-0.0237	1.492	1.563	1.572
$\Delta_{\%}^{cM}$	123	22.37	99.25	10.67	12.2	0.0011	0.0026	0.0088

Tabella 4.1: Deviazione vortex blob rispetto al vortex lattice

4.3 Confronto sviluppo scia

Un altro aspetto importante qui analizzato è in che modo la scia si sviluppa col vortex blob method. A tal fine nelle seguenti figure 4.3a e 4.3b è possibile notare in modo qualitativo l'affinità della sua evoluzione. Per quanto riguarda differenze nei risultati numerici dei due metodi è sufficiente guardare la tabella 4.2 sottostante:

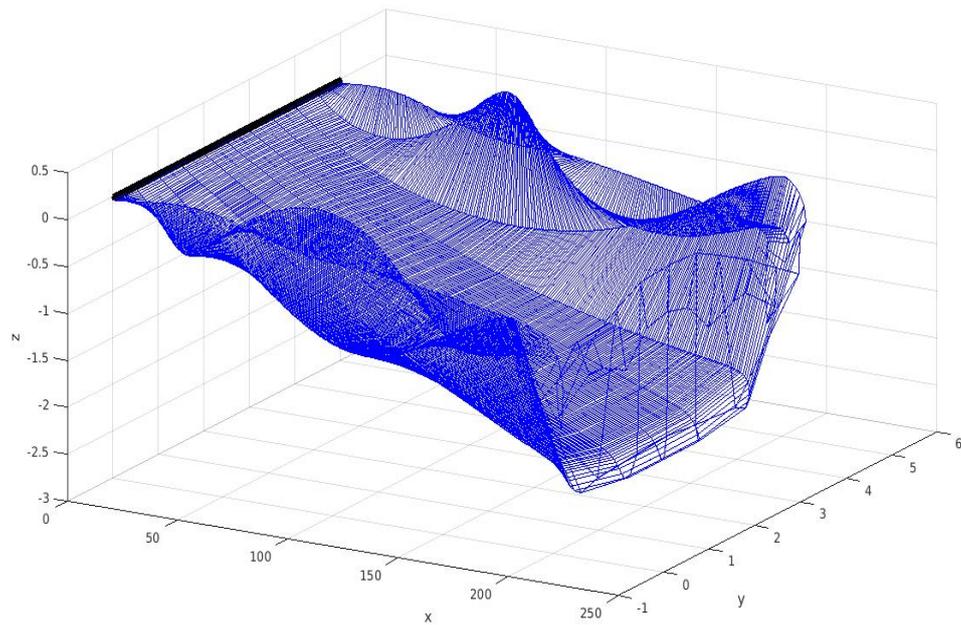
INFLUENZA	PASSO TEMPORALE			N° IN APERTURA		N° IN CORDA	
	N_b	10	10	10	20	30	10
N_c	1	1	1	1	1	4	8
dt	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
C_L^{lat}	0.3533	0.3535	0.3535	0.3453	0.3422	0.3541	0.3541
C_L^{blob}	0.3547	0.3574	0.3542	0.3465	0.3434	0.3564	0.3565
$\Delta_{\%}^{cL}$	0.39	1.10	0.20	0.35	0.35	0.65	0.68
$C_D^{lat} [10^{-3}]$	3.759	3.747	3.747	3.772	3.766	3.780	3.783
$C_D^{blob} [10^{-3}]$	3.740	3.609	3.717	3.750	3.746	3.763	3.768
$\Delta_{\%}^{cD}$	-0.50	-3.68	-0.80	-0.58	-0.53	-0.45	-0.40

Tabella 4.2: Confronto scia vortex lattice e vortex blob method

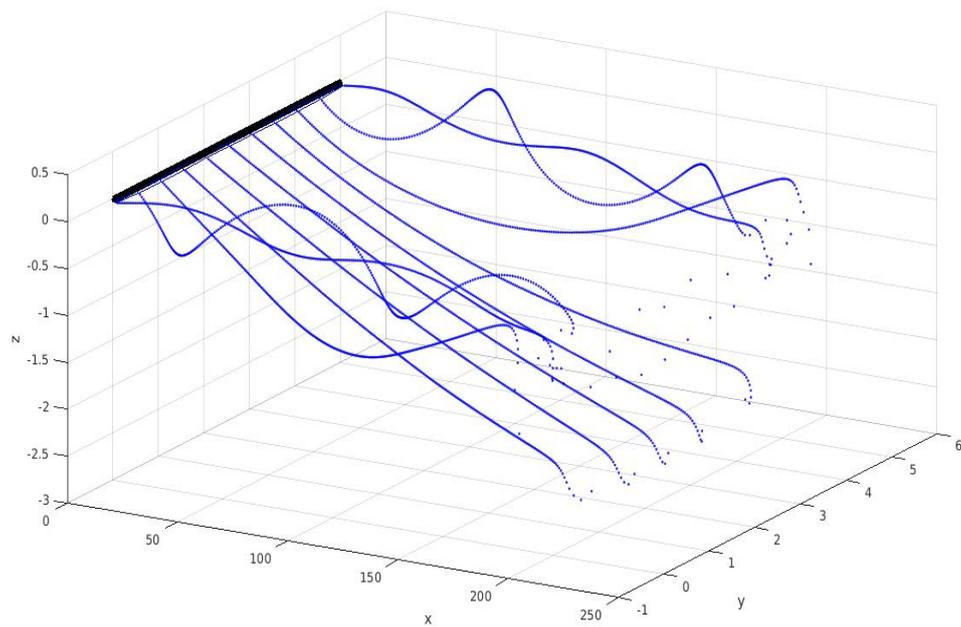
Commenti

Anche in questo caso le differenze tra vortex lattice e vortex blob sono minime. La differenza tra questa e la precedente analisi risiede nel fatto che la prima, esposta in tabella 4.1, è stata effettuata facendo sviluppare la scia attraverso dei pannelli composti da segmenti vorticosi, come predisposto dal metodo vortex lattice, e poi sostituendo i blobs sono state calcolate le differenze dei coefficienti dovute all'influenza delle bolle.

In questo secondo caso invece la scia è stata sviluppata interamente attraverso i blobs, come verrà effettuato successivamente nelle simulazioni del rotore di elicottero. Senza ripetere le stesse osservazioni fatte nella sezione precedente, quello che si può notare è come lo sviluppo dei blobs e quindi della scia sia alterato leggermente dalla differenza di induzione provocata dall'approssimazione a vortici discreti. Questo fenomeno provoca una leggera divergenza dei coefficienti di portanza e resistenza indotta, maggiore di quella del confronto attraverso la semplice sostituzione dei blobs ma comunque ridotta.



(a) Vortex Lattice



(b) Vortex Blob

Figura 4.3: Confronto andamento scia

I grafici sono stati prodotti utilizzando $N_b = 10$ ed $N_c = 1$. Le dimensioni sono state scalate al fine di poter apprezzare al meglio gli andamenti delle scie.

4.4 Confronto con la teoria di Prandtl

La teoria di Prandtl è riassunta nella formula (1.14). Impostando il sistema e risolvendolo con gli stessi valori utilizzati in (4.1) e con $N = 30$ termini della serie con cui è possibile rappresentare la distribuzione di circolazione in apertura, i coefficienti risultanti sono :

$$C_L = 0.3523324 \quad C_{Di} = 0.004290896 \quad e = 0.92088919 \quad (4.2)$$

Un'ulteriore metro di giudizio e confronto è possibile attraverso i coefficienti calcolati con il codice vortex lattice Tornado per il caso in esame di ala rettangolare ad un incidenza di 4° :

N_c	N_b	C_L	C_{Di}	C_M
1	10	0.3535	0.003737	0
1	30	0.3424	0.003744	0
4	10	0.3534	0.003757	0.001517

Tabella 4.3: Risultati vortex lattice con Tornado

Nella seguente tabella sono riportati i diversi risultati del metodo vortex blob implementato al variare di diversi parametri numerici di calcolo e confrontato con i valori della linea portante :

INFLUENZA	PASSO TEMPORALE		N° IN APERTURA		N° IN CORDA		
N_b	10	10	10	20	30	10	10
N_c	1	1	1	1	1	4	8
dt	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
C_L^{blob}	0.3547	0.3574	0.3542	0.3465	0.3434	0.3564	0.3565
$Err_{\%}^{C_L}$	0.67	1.44	0.53	-1.65	-2.53	1.15	1.18
$C_D^{blob} [10^{-3}]$	3.740	3.609	3.717	3.750	3.746	3.763	3.768
$Err_{\%}^{C_{Di}}$	-12.84	-15.89	-13.37	-12.60	-12.70	-12.30	-12.18

Tabella 4.4: Confronto vortex blob method con teoria di Prandtl

dove come valori di riferimento si sono presi quelli calcolati nella (4.2).

I risultati della teoria di Prandtl comparati al caso dell'ala con $N_c \times N_b = 1 \times 30$ pannelli sviluppato attraverso $N_{wake}^{max} = 2$, sono riportati nelle seguenti figure 4.4a e 4.4b. Come si può notare il codice produce una distribuzione di portanza minore sull'ala e di conseguenza anche la velocità indotta. Si può intuire allora perché sono presenti risultati così diversi nel calcolo della resistenza indotta evidenziati dalla tabella 4.4, in particolare sempre inferiori. Questo discorso non riguarda l'utilizzo dei blobs, ma bensì l'andamento inerente all'utilizzo del modello a superficie portante. La teoria della linea portante di Prandtl è ottima per una prima approssimazione veloce del C_L e C_D di un'ala, senza poter però recuperare il C_M in quanto non predispone alcuna distribuzione di carichi lungo la corda. Per ottenere risultati più accurati di portanza e di resistenza da confrontare con i valori dell'algoritmo bisogna passare a teorie più elaborate.

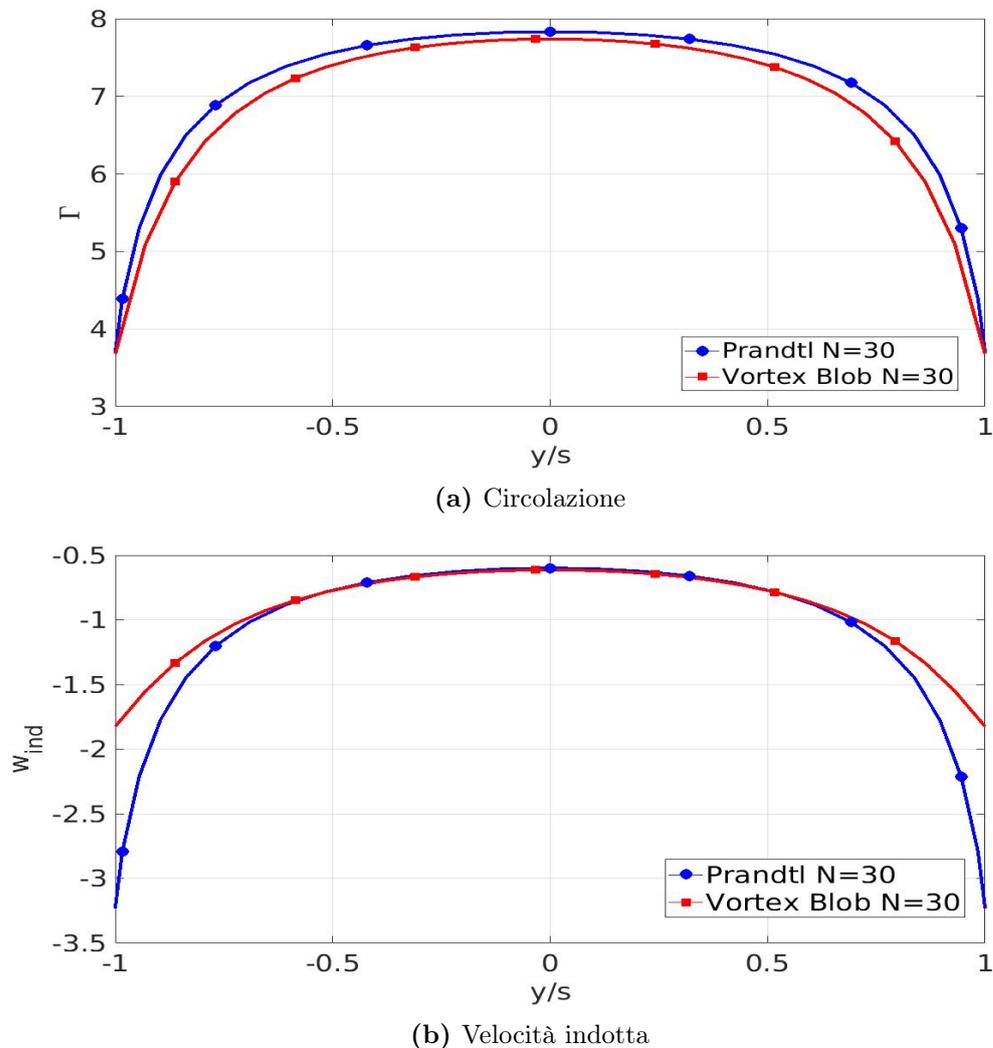
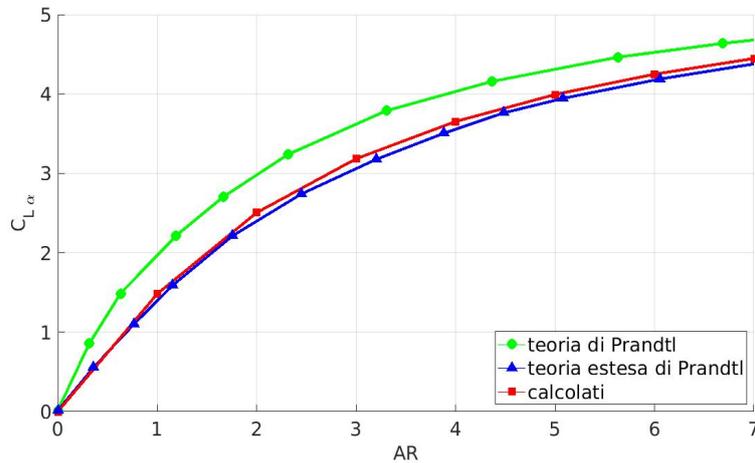


Figura 4.4: Confronto con la teoria della linea portante

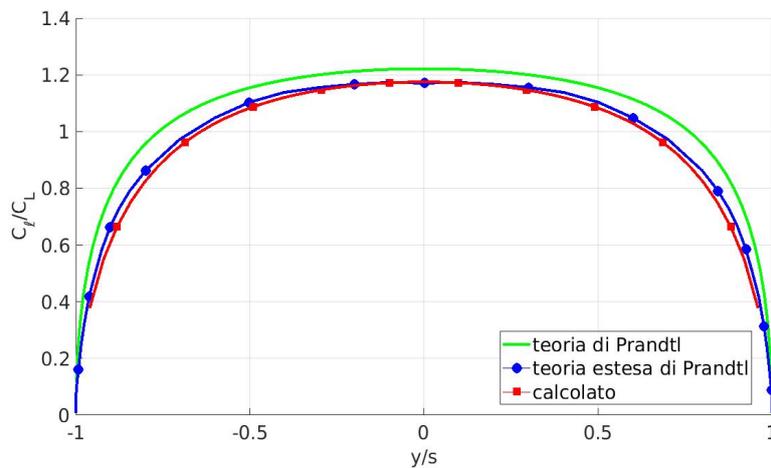
4.4.1 Teoria di Prandtl estesa

La teoria di Prandtl può essere estesa per ottenere risultati più accurati e per poter rappresentare anche ali con freccia. Sviluppata da Weissinger, concettualmente è la versione integrale e continua del suo metodo discretizzato spiegato nella sezione 1.7.1. Rispetto alla semplice teoria di Prandtl, la circolazione è calcolata attraverso l'imposizione della non penetrazione ad $3/4$ della corda anziché la risoluzione dell'equazione integro-differenziale di Prandtl.

Come presentato da H.Schlichting e E.Truckenbradt (1979) [22], la linea portante estesa produce minor portanza e curve di distribuzione rispetto alla linea portante semplice. Tali risultati sono più vicini al metodo di calcolo con la superficie portante, quindi all'algoritmo in esame, come si può notare dalle figure 4.5a e 4.5b. Quella che poteva sembrare una sottostima del C_L all'aumentare del numero di pannelli in corda nella tabella 4.4 risulta essere invece una sovrastima da parte della teoria di Prandtl.



(a) Variazione $C_{L\alpha}$ in funzione dell'AR



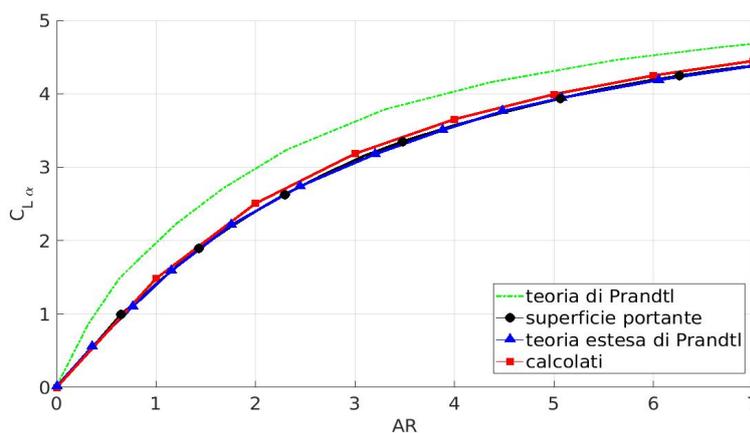
(b) Distribuzione di portanza ad $\alpha = 1^\circ$

Figura 4.5: Confronto con la teoria della linea portante estesa

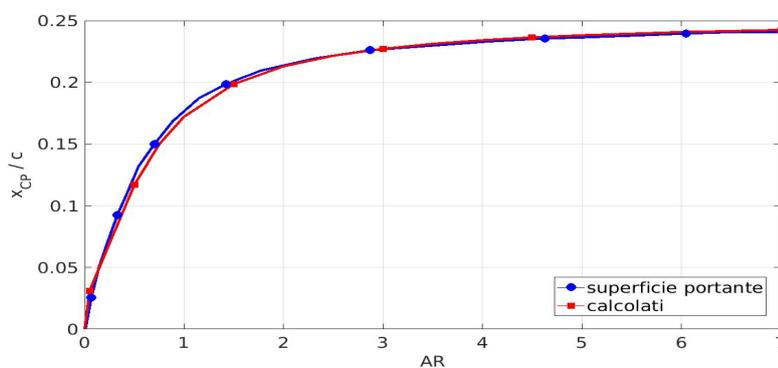
4.5 Confronto con la teoria di superficie portante

In questa sezione si va ad analizzare invece il comportamento rispetto alla teoria della superficie portante, ossia quella implementata nel codice. Essenzialmente i valori di C_L e C_D non differiscono molto dai valori calcolati con la linea portante estesa, ma sfruttando i valori di circolazione dei pannelli distribuiti in corda è possibile anche una stima del C_M , coefficiente che non viene calcolato dalla teoria della linea portante. I calcoli sono ancora una volta comparati con i risultati ottenuti da H.Schlichting e E.Truckenbradt (1979) [22] per un'ala rettangolare rappresentata da una distribuzione di vorticità in apertura e corda $k(x, y)$ attraverso $N \times 2$ funzioni di forma, mantenendo soltanto due punti di controllo in corda per riuscire a sviluppare i calcoli analiticamente. In figura 4.6a si può osservare come vi sia una leggera differenza dei valori teorici rispetto la teoria estesa. Le differenze con i valori calcolati si assottigliano ancora di più.

Per quanto riguarda il coefficiente di momento, è possibile analizzare il suo andamento attraverso la posizione del centro di pressione : infatti il suo valore è ottenibile dividendo il momento per la portanza totale dell'ala. in figura 4.6b si può notare come i risultati numerici rispecchino il modello, per il quale diminuendo l'allungamento alare il centro di pressione si sposta in avanti verso il bordo di attacco.



(a) Variazione $C_{L\alpha}$ in funzione dell'AR



(b) Variazione della posizione del centro di pressione in funzione dell'AR

Figura 4.6: Confronto con il modello di superficie portante

4.6 Sensibilità alle dimensioni del nucleo

Un aspetto importante da andare a sottolineare è la dipendenza del calcolo dalle dimensioni del nucleo della smoothing function, sia dei blobs che dei segmenti vorticosi. Concettualmente esso rappresenta la distanza entro la quale l'induzione di un vortice viene smussata e diminuisce. In letteratura generalmente, per il vortex lattice si sono utilizzati valori che spaziano dal 10% della corda al 1% del diametro del rotore [1].

Dalla teoria si sa che, nell'ambito di una simulazione numerica diretta, l'errore del metodo vortex blob e lattice rispetto al campo di vorticità reale sia proporzionale all'overlap dei segmenti o dei blobs ($h/\varepsilon < 1$), e alle dimensioni del nucleo(ε).

Per quanto riguarda la superficie portante invece, siccome i test che si sono effettuati sono valutati sui coefficienti di un'ala, la teoria di Prandtl ci suggerisce che l'errore dipenderà fortemente dal numero di pannelli utilizzati per rappresentare il corpo portante, in particolar modo N_b ossia i pannelli in apertura, in quanto discretizzano un problema continuo.

Nei prossimi paragrafi la dipendenza dell'errore rispetto a N_b , N_c , $h_b/\varepsilon, h_c/\varepsilon$ viene analizzata, dove coi termini h_b e h_c si esprime la distanza media dei segmenti vorticosi rappresentanti la superficie portante dell'ala in direzione dell'apertura (b) e della corda (c).

4.6.1 Analisi in corda

Dopo aver effettuato diverse simulazioni, si è notato come la distanza media dei segmenti vorticosi non sia il parametro che influenza il calcolo dei carichi sull'ala. Ciò che porta delle variazioni è la loro semidistanza nel reticolo rappresentate la superficie portante, ossia $dc/2$ e $db/2$. Nelle prossime due sezioni si andranno quindi ad analizzare queste dipendenze.

Per quanto riguarda l'influenza di $dc/2$, sono state effettuate tre tipologie di analisi:

- (1) $N_b \times N_c$ fisso = 10 x 4 con ε variabile
- (2) $2\varepsilon/dc$ fisso = 1.2 con ε e N_c variabili
- (3) $2\varepsilon/dc$ fisso < 1 con ε e N_c variabili

1. ε variabile

In questo modo si va ad analizzare la dipendenza diretta rispetto alle dimensioni del nucleo, lasciando inalterata la pannellizzazione in corda e in apertura. Facendo così, si ottiene anche una variazione del rapporto $2\varepsilon/dc$ che risulta essere cruciale. Per tutti i test il numero di pannelli è rimasto fisso a $N_b \times N_c = 10 \times 4$.

Come si può notare dalla figura 4.7 finché il nucleo utilizzato per rappresentare la superficie portante è minore della semi lunghezza in corda del pannello, il risultato è inalterato. Non appena si sorpassa la soglia $2\varepsilon/dc = 1$ l'errore sul C_L calcolato aumenta in modo proporzionale a tale rapporto.

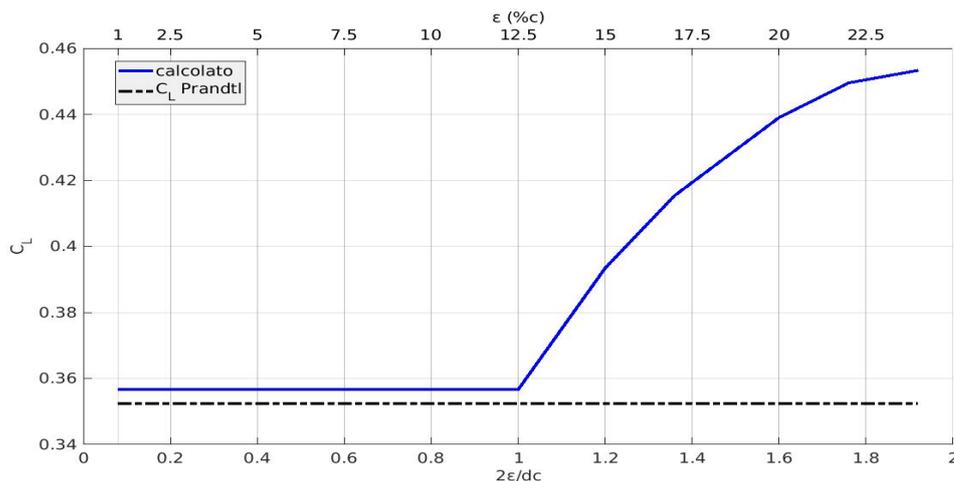


Figura 4.7: Dipendenza risultati da $2\epsilon/dc$

2. N_c variabile con $2\epsilon/dc > 1$

Il rapporto $2\epsilon/dc$ è fissato a 1.2. Al crescere di N_c con N_b fisso=10, varia quindi ϵ . Come si può notare in figura 4.8, al diminuire di ϵ , l'errore va a diminuire andando a stabilizzare il valore del C_L che in maniera asintotica tende a convergenza. Nel caso in cui si raggiungono valori di $2\epsilon/dc > 1$ per evitare una sovrastima delle forze, il nucleo deve essere diminuito oppure bisogna variare il numero di pannelli in corda.

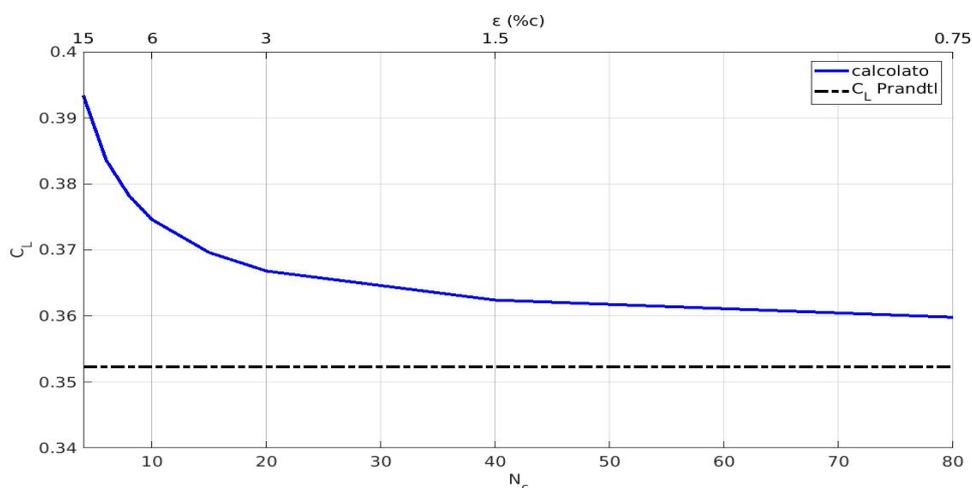


Figura 4.8: Dipendenza risultati da ϵ con $2\epsilon/dc = 1.2$

3. N_c variabile con $2\epsilon/dc < 1$

Sono state effettuate ulteriori prove con lo scopo di analizzare l'influenza del rapporto $2\epsilon/dc$ quando è inferiore a 1. Andando a mantenere fisso il nucleo al 2% della corda, e aumentando N_c in modo tale da soddisfare la condizione $N_c < 1 \cdot c/(2\epsilon)$ i risultati non hanno evidenziato alcuna influenza. Allo stesso modo un'analisi a $2\epsilon/dc = 0.5$ fisso ha evidenziato come le dimensioni del nucleo non modifichino in alcun modo gli andamenti.

4.6.2 Analisi in apertura

Per quanto riguarda l'influenza della pannellizzazione in apertura e le dimensioni del nucleo, sono stati svolti i seguenti calcoli:

- (1) $N_b \times N_c$ fisso = 40 x 2 con ε variabile
- (2) $2\varepsilon/db$ fisso = 1.5 con ε e N_b variabili
- (3) $2\varepsilon/db$ fisso = 0.5 con ε e N_b variabili

1. ε variabile

Per tutti i test il numero di pannelli è rimasto fisso a $N_b \times N_c = 40 \times 2$ con il fine di andare ad analizzare l'influenza di $2\varepsilon/db$ sui risultati.

Allo stesso modo di quanto notato nel caso dell'analisi in corda in figura 4.7, il C_L risente delle dimensioni del nucleo nel momento in cui il rapporto $2\varepsilon/db > 1$. L'unica differenza che si può notare a tal proposito dalla figura 4.9, è che l'influenza è molto meno marcata.

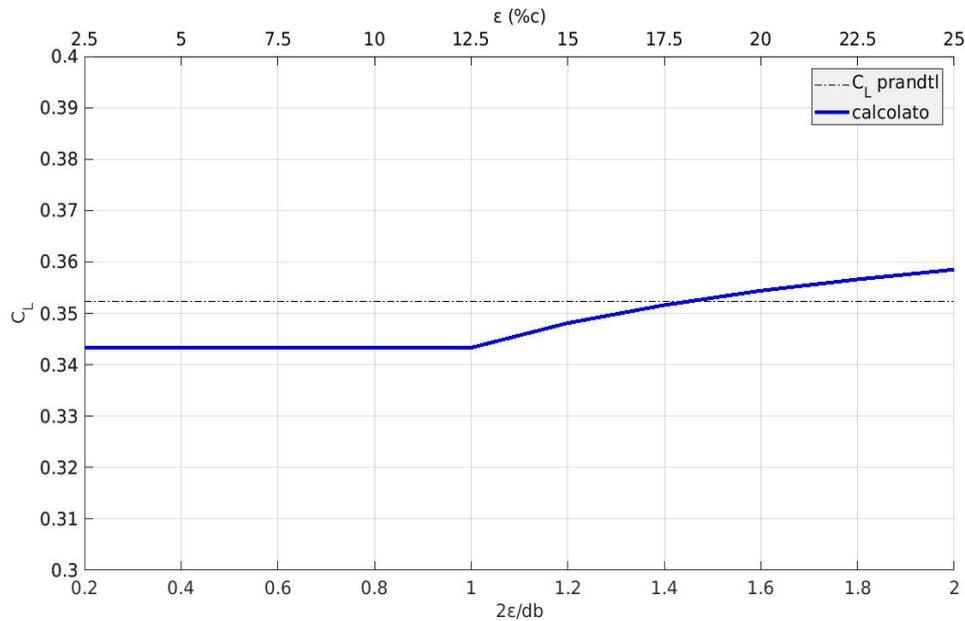


Figura 4.9: Dipendenza risultati da $2\varepsilon/db$

2. $2\varepsilon/db$ fisso a 0.5

Analizzando l'influenza delle dimensioni del nucleo quando il rapporto $2\varepsilon/db$ è fisso e minore di 1, sembra sia evidenziata una certa sensibilità in quanto il C_L varia al variare di ε , come mostrato in figura 4.10. In realtà tale comportamento è da attribuire ad una scarsa rappresentazione della superficie portante causata da una povera discretizzazione in apertura. Infatti se ε cresce, allora $N_b \rightarrow 1$, ossia diminuiscono i pannelli in apertura in quanto necessario per mantenerne fisso il rapporto a 0.5.

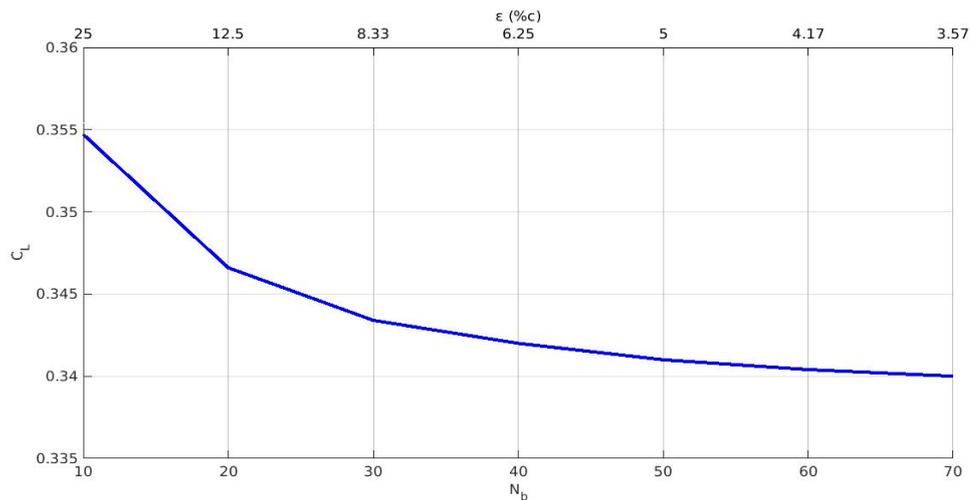


Figura 4.10: Dipendenza risultati da ϵ con $2\epsilon/db = 0.5$

3. $2\epsilon/db$ fisso a 1.1

Viene confermata la tendenza evidenziata anche nel caso precedente. In figura 4.11 si può notare come al diminuire dei pannelli in apertura, il C_L calcolato aumenta perchè il numero di pannelli diminuisce. In questo calcolo però, a parità di N_b la variazione rispetto al valore asintotico del coefficiente di portanza è maggiore rispetto alla figura 4.10 in quanto vi è un contributo dovuto alla sovrapposizione del nucleo con i punti di controllo, come mostrato dal secondo ramo in figura 4.9.

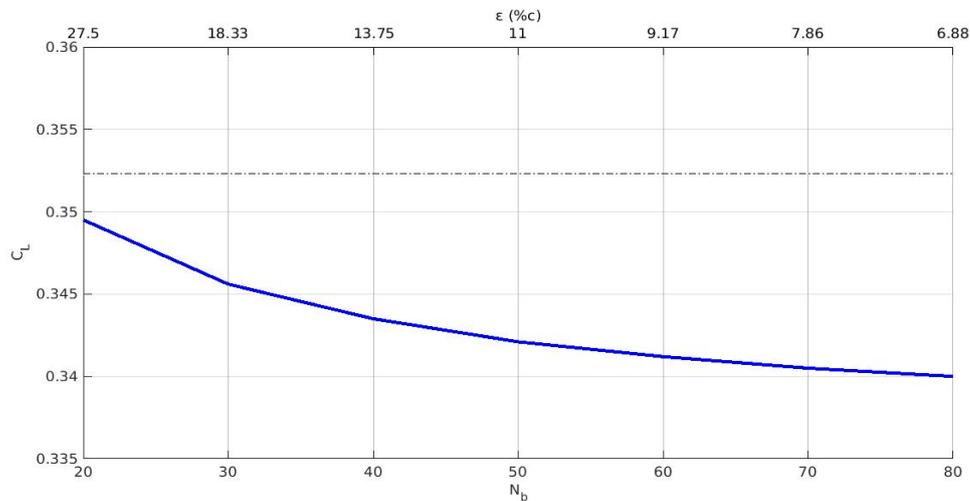


Figura 4.11: Dipendenza risultati da ϵ con $2\epsilon/db = 1.1$

4.6.3 Conclusioni

Questa analisi è stata svolta al fine di comprendere certi comportamenti evidenziati durante le prove di calcolo. In generale, per evitare questa sensibilità e variazione dei risultati è sufficiente scegliere un nucleo di smoothing abbastanza piccolo in modo da soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon}{dc} < 1 & \quad \rightarrow \quad \varepsilon < \frac{c}{2N_c} \\ \frac{2\varepsilon}{db} < 1 & \quad \rightarrow \quad \varepsilon < \frac{b}{2N_b} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Va notato che le dimensioni del nucleo diventano importanti nel momento in cui si vuole andare ad ottenere una buona approssimazione dell'evoluzione del campo di vorticità e velocità all'interno di tutto il dominio. Come espresso in precedenza però, una tale richiesta implica anche l'utilizzo di un numero di blobs $N_b \rightarrow \infty$ per assicurare le condizioni di convergenza espresse nella sezione 2.3.1 nonché la conservazione degli invarianti principali del flusso. I calcoli espressi in questa tesi però vogliono essere approssimazioni del flusso in esame al fine di ottenere stime veloci senza perdere affidabilità.

4.7 Sensibilità al numero di pannelli di scia

Un altro parametro da analizzare è il numero di pannelli di scia dopo i quali vi è una trasformazione in blobs, ossia il valore N_{wake}^{max} . Vengono quindi effettuati ulteriori calcoli di prova, in cui si varia unicamente questo parametro :

$$\begin{array}{ll} b = 5 \text{ m} & \alpha = 4^\circ \\ c = 0.5 \text{ m} & \rho = 1.125 \text{ kg/m}^3 \\ V_\infty = 80 \text{ m/s} & k_{fin} = 250 \\ AR = 10 & dt = 10^{-3} \end{array}$$

$$N_b \times N_c = 10 \times 4$$

Dalla figura 4.12 si può osservare come la variazione più significativa dei risultati rispetto al vortex lattice si ottiene con pochi pannelli di scia : da una differenza percentuale di 0.65% con $N_{wake}^{max} = 1$ si arriva a 0.028% a 20-30 pannelli di scia, valore asintotico dopo il quale l'andamento del metodo ibrido coincide con quello di un vortex lattice.

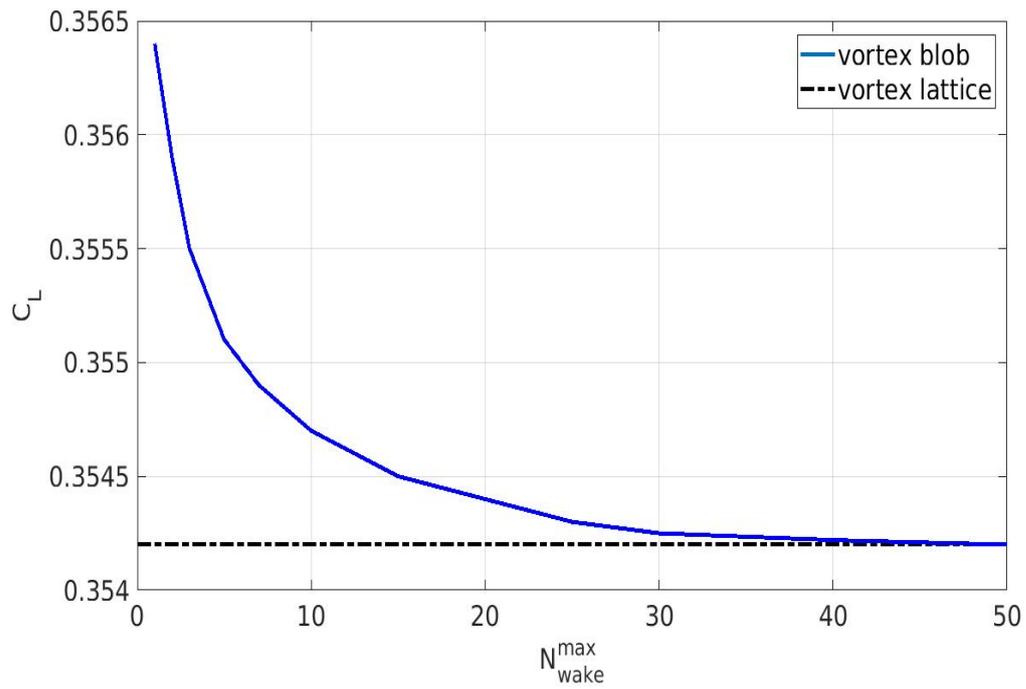


Figura 4.12: Influenza di N_{wake}^{max} sul C_L

Capitolo 5

CONFRONTO CON DATI SPERIMENTALI

5.1 Volò a punto fisso

5.1.1 Introduzione

Il volo a punto fisso, in inglese *hovering*, è il punto di partenza per la progettazione di un rotore. Esso consiste nello stazionamento in volo a velocità nulla e quota costante. In questa condizione di volo non ci sono particolari criticità della scia in quanto viene spinta forzatamente verso il basso dall'azione inducente del rotore, senza creare complicazioni né fluttuazioni di velocità o carichi sulle pale.

In questa prima sezione vengono effettuate delle prove numeriche in volo a punto fisso variando i parametri iniziali per comprenderne l'influenza e comparandoli con risultati sperimentali ottenuti dal dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali (DAER) del Politecnico di Milano [23].

Dopo una breve introduzione degli elementi modellati come le pale e il mozzo, viene esposta una breve analisi di sensibilità del calcolo ai parametri numerici principali. Una parte di commenti dei risultati e di illustrazione della scia chiude la sezione.

5.1.2 Modello rotore

Per le prove in galleria è stato utilizzato un rotore con 4 pale rettangolari non svergolate e senza rastremazione con profilo simmetrico NACA 0012. Il modello non è dotato di un piatto oscillante, quindi l'angolo di passo delle pale è fisso. La velocità di rotazione di circa 2580 rpm è stata mantenuta per tutte le durate dei test attraverso un motore elettrico a basso voltaggio brush-less con controllo elettronico. Le caratteristiche e dimensioni del rotore sono:

$$\begin{aligned} R &= 0.375 \text{ mm} & w &\cong 270 \text{ rad/s} \\ c &= 0.032 \text{ mm} & \alpha &= 10^\circ \end{aligned}$$

Nel calcolo numerico non è stata rappresentata la fusoliera, seppure presente nel modello di galleria.

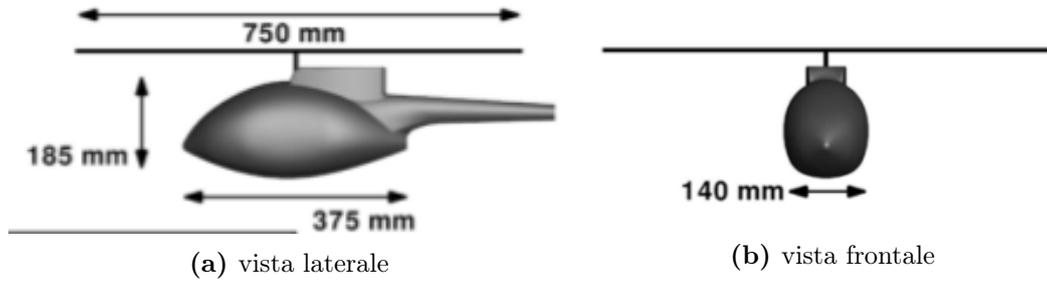


Figura 5.1: Modello di galleria

Per la rappresentazione del rotore sono stati scelti i seguenti parametri numerici utili per il calcolo :

$N_{pan}^b = 10$	N° pannelli in apertura
$N_{pan}^c = 1$	N° pannelli in corda
$dt = (2\pi/\omega)/30$	passo temporale [s]
$N_{mozzo} = 20$	N° pannelli per faccia
$R_{mozzo} = 0.9 \cdot c_{out}$	raggio mozzo [m]
$h_{mozzo} = 0.3 \cdot c_{out}$	altezza mozzo [m]

Ogni calcolo è stato effettuato per la durata di 400 iterazioni, circa 13 rivoluzioni, e approssimativamente ha impiegato un tempo di minimo 3 ore e mezzo per $N_b = 10$ fino ad un massimo di 20 ore per $N_b = 30$ su un PC da 5.8Gb di RAM con 8 CPU i7-3610QM da 2.30GHz. Il tempo di calcolo risente molto del numero di pannelli in apertura, oltre che, in modo naturale, al numero totale di passi temporali.

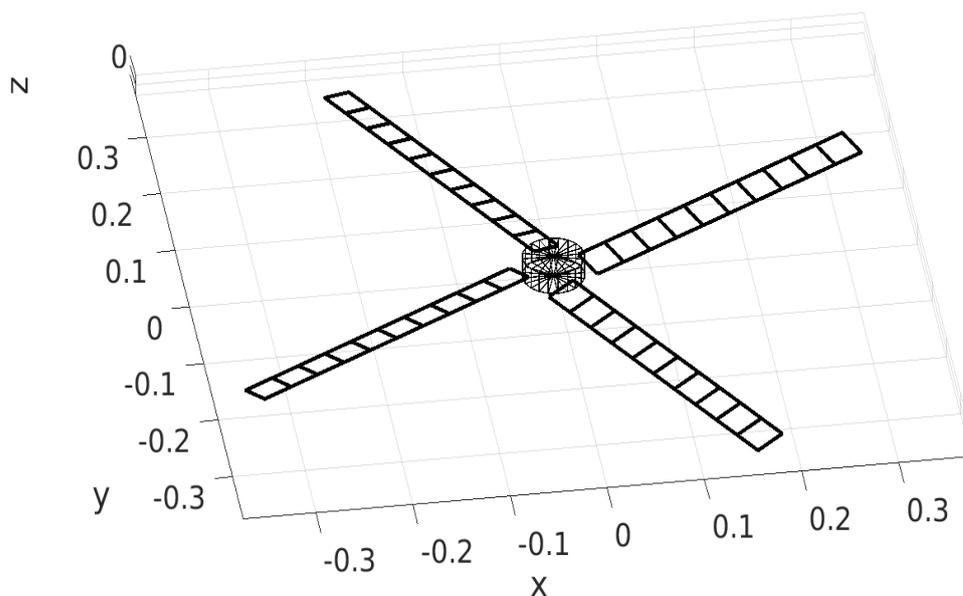


Figura 5.2: Modello rotore

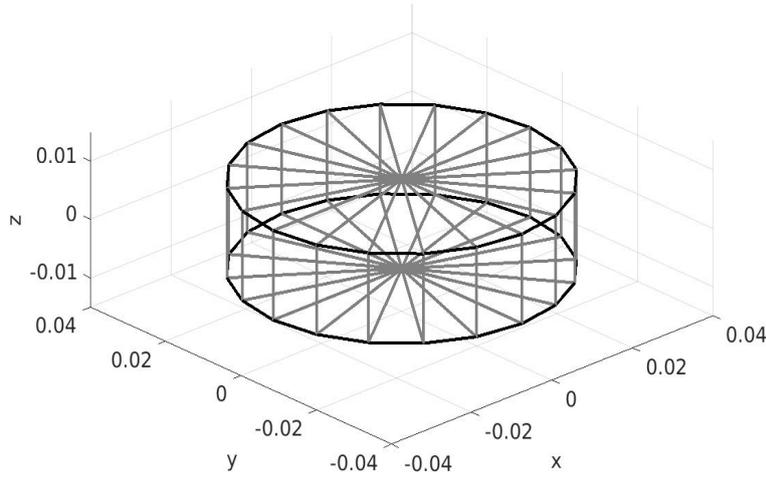


Figura 5.3: Pannellizzazione mozzo

5.1.3 Modello mozzo

Il passaggio tra ala finita e rotore porta intrinsecamente una serie di complicazioni dovuti in prevalenza dallo sviluppo particolare della scia attorno alle pale. In particolar modo i metodi vortex lattice che simulano rotori soffrono di un problema numerico e di modello simile ad un "effetto fontana".

All'interno del codice di calcolo è stato quindi introdotto un elemento a pannelli che modella la presenza di un mozzo al centro del rotore. Lo scopo di tale modellazione è di evitare l'insorgere di questo fenomeno o comunque limitarne l'effetto, che consiste in una corrente indotta ascensionale che risale la scia del rotore centralmente, evolvendosi in modo simile a una fontana. Infatti questa risalita e discesa dei blobs provoca disturbi sul calcolo del C_T sulle pale, in particolar modo all'avviamento.

Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento del mozzo coincide con quello globale \mathcal{F}_0 , ossia con origine al centro del rotore e asse z verticale verso l'alto. Il mozzo è rappresentato in modo semplificato da un disco di raggio R_m e altezza dh . Siccome occupa la posizione centrale del rotore, il centro del mozzo coincide con l'origine stessa degli assi.

Coordinate pannelli

La pannellizzazione del disco è ottenuta attraverso pannelli quadrilateri per la superficie laterale e triangolari per le superfici superiore e inferiore come mostrato in figura 5.3. Va notato che per adattare la formula di induzione espressa dalle (1.8),(1.9) ,(1.10) al caso di pannelli triangolari di sorgenti basta far tendere uno dei quattro punti in un altro. Per quanto riguarda l'algoritmo di non penetrazione invece, non si pone il problema della singolarità della matrice risolvibile nella (3.23) poichè le superfici a pannelli triangolari sono parallele agli assi.

Partendo dall'asse x in senso antiorario la numerazione è indicata semplicemente da un solo indice $i = [1 : N_{mozzo}]$ per ognuna delle 3 superfici. Il punto di controllo sarà calcolato ancora come punto centrale del pannello.

In questo modo quindi si hanno due tipologie di pannelli :

Superficie laterale :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^1 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot (i-1)); & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot (i-1)); & -dh \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_i^2 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot i) & ; & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot i) & ; & -dh \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_i^3 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot i) & ; & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot i) & ; & dh \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_i^4 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot (i-1)); & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot (i-1)); & dh \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Superficie superiore/inferiore :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^1 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot (i-1)); & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot (i-1)); & \pm dh \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_i^2 &= \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos(\Delta\psi \cdot i) & ; & R_m \cdot \sin(\Delta\psi \cdot i) & ; & \pm dh \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_i^3 &= \begin{bmatrix} 0; & 0 & ; & \pm dh \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove l'incremento finito in azimuth, $\Delta\psi$, è definito da : $\Delta\psi = \frac{2\pi}{N_{mozzo}}$

5.1.4 Sensibilità metodo

Sono stati effettuati diversi calcoli in volo a punto fisso con lo scopo di analizzare la sensibilità dei risultati in base ai parametri numerici scelti, in particolare :

- N_b^{pan} : numero di pannelli in apertura
- N_c^{pan} : numero di pannelli in corda
- N_{wake}^{max} : numero massimo di pannelli di scia

I risultati sono stati poi comparati con il valore del coefficiente di trazione ottenuto dalle prove in galleria del vento, pari $C_T = 0.007268$.

Le forze calcolate sul rotore sono molto spesso affette da disturbi, in particolar modo influenzate dal numero massimo di pannelli di scia imposti e dal movimento dei blobs come si può notare dalla figura 5.4. Nel caso in cui il metodo ibrido sia impostato con un crescente N_{wake}^{max} , l'iterazione blobs-pannelli può provocare addirittura alla divergenza del calcolo. In mancanza di un valore di convergenza, si può notare molto spesso che i dati oscillano su un valor medio. Per questo motivo, i C_T riportati come risultati dei calcoli sono le medie temporali effettuate sulle ultime 200 iterazioni delle 400 totali, evitando in questo modo di inserire anche valori alterati dall'avviamento dei blobs.

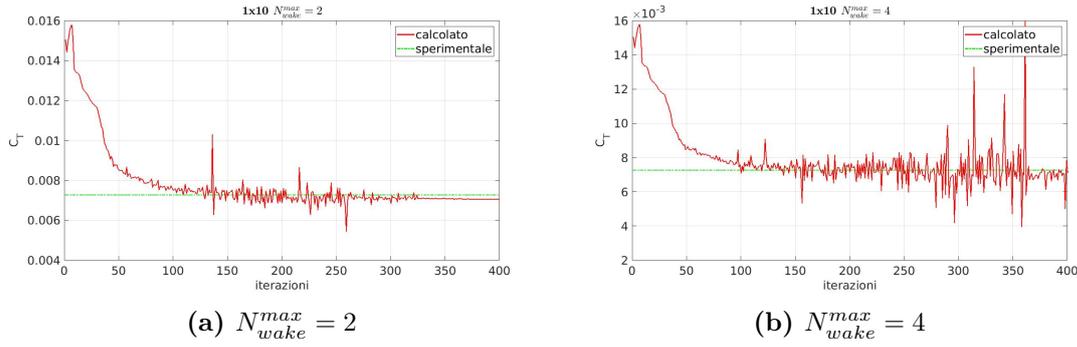


Figura 5.4: Oscillazione C_T in funzione di N_{wake}^{max}

(a) INFLUENZA NUMERO PANNELLI : senza mozzo

$N_{pan}^b \times N_{pan}^c$	10x1	20x1	30x1	10x1	10x1	10x4	10x8	30x8
N_{wake}^{max}	4	4	4	2	8	2	2	2
$\bar{C}_T^{200} [10^{-3}]$	7.270	6.869	6.810	7.109	/	7.138	7.208	6.948
$\sigma_{CT} [10^{-4}]$	11.4	1.09	1.01	2.37	/	0.17	0.35	0.49
$err\%$	0.03	-5.48	-6.30	-2.18	/	-1.78	-0.82	-4.40

(b) INFLUENZA MOZZO

$N_{pan}^b \times N_{pan}^c$	10x1	20x1	30x1	10x1	10x1	10x4	10x8	30x8
N_{wake}^{max}	4	4	4	2	8	2	2	2
$\bar{C}_T^{200} [10^{-3}]$	7.295	7.089	6.963	7.118	/	7.198	7.204	6.938
$\sigma_{CT} [10^{-4}]$	1.15	1.03	1.01	0.44	/	0.38	0.31	0.49
$err\%$	0.38	-2.46	-4.18	-2.05	/	-0.96	-0.88	-4.54

Tabella 5.1: Analisi sensibilità ai parametri in condizione di volo a punto fisso. Confronto con il dato sperimentale ottenuto dalle prove: $C_T^{sperim} = 0.007268$

5.1.5 Commenti

I risultati ottenuti sono riassunti nelle tabelle 5.1a e 5.1b. E' possibile fare diverse osservazioni sulle sensibilità del codice di calcolo andando a consultare i dati al variare dei diversi parametri numerici in esame.

Influenza pannelli in apertura. All'aumentare del numero di pannelli in apertura diminuisce il C_T ma anche le oscillazioni. Questo vale sia con la presenza del mozzo sia senza ed evidenzia lo stesso comportamento osservato nel caso di ala semplice.

Influenza pannelli in corda. All'aumentare del numero di pannelli in corda aumenta il C_T e la precisione mentre i disturbi migliorano.

Influenza pannelli di scia. L'aumento del numero di pannelli di scia porta ad un aumento delle oscillazioni e dei disturbi, dovuto principalmente all'instabilità dei pannelli di scia con l'aggiunta dei blobs. Come si può notare per il caso di $N_b \times N_c = 10 \times 1$ che con diversi pannelli di scia aumenta la deviazione standard, fino a portare il metodo a divergenza con $N_{wake}^{max} = 8$.

Influenza passo temporale. Il calcolo in volo a punto fisso non presenta grosse difficoltà alla convergenza. Nelle 400 iterazioni utilizzate, il C_T arriva sempre a stabilizzarsi (a parte nel caso in cui cresca N_{wake}). Nel momento in cui le oscillazioni diventano importanti, la media temporale per essere più precisa necessita però di un maggior numero di passi temporali. Questa eventualità deve essere valutata caso per caso e un indicatore utile è la deviazione standard.

Influenza mozzo. L'inserimento del mozzo incrementa la stabilità del metodo in quanto blocca la risalita dei blobs sul rotore che creano grossi disturbi sui primi pannelli di scia e quindi sui carichi. Esempio è il test 10×1 con $N_{wake} = 4$ che da una deviazione standard elevata di $11.4 \cdot 10^{-4}$ passa a $1.15 \cdot 10^{-4}$ con l'inserimento del mozzo. E' possibile osservare la scia in figura 5.5 per comprendere meglio le differenze.

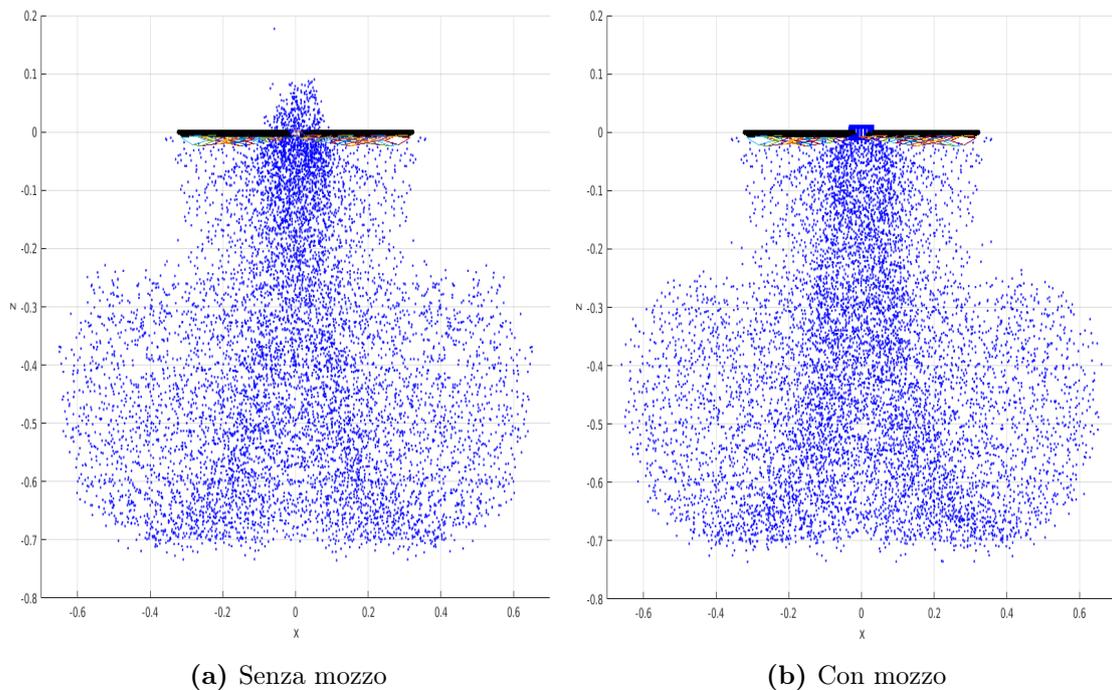


Figura 5.5: Scia in volo a punto fisso : confronto effetto fontana

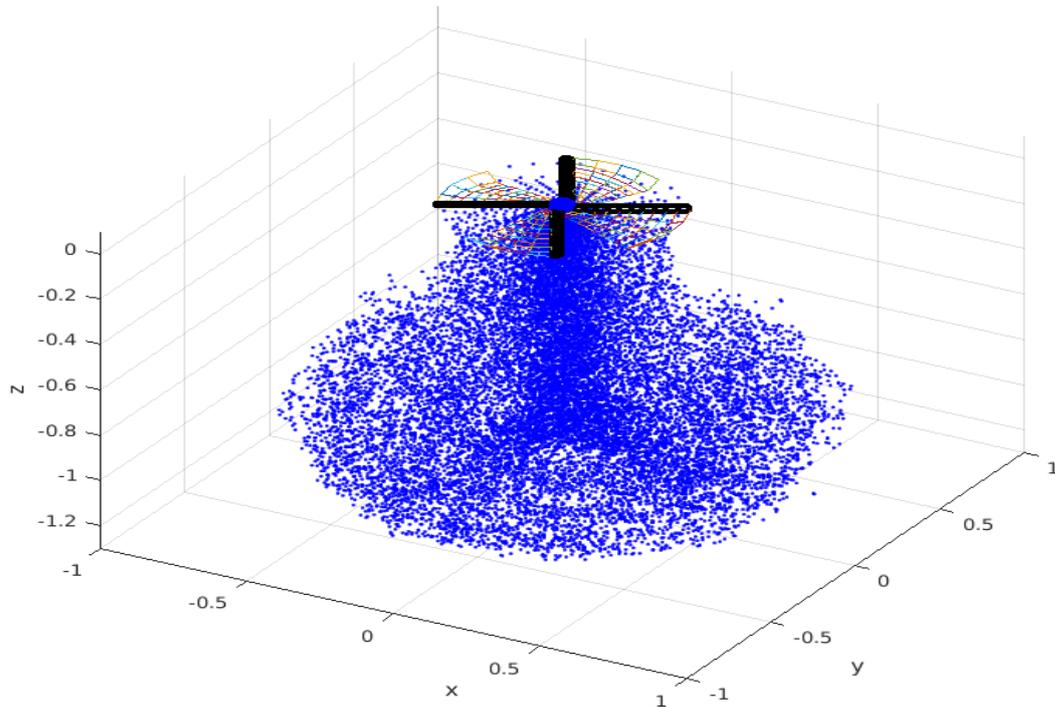


Figura 5.6: Scia in volo a punto fisso : vista obliqua

5.2 Effetto suolo

5.2.1 Introduzione

Il codice sviluppato permette il calcolo dei carichi che si sviluppano sul rotore in diverse situazioni. In questo capitolo andiamo ad analizzare le prestazioni in **IGE** (acronimo inglese : 'Inside Ground Effect'), ossia in *effetto suolo*. La particolarità e l'interesse di questa circostanza sono dovuti ad un cambiamento delle forze esercitate sul rotore in funzione della distanza dal suolo. Lo scopo del codice sarà quindi di riuscire a catturare queste variazioni, e verrà analizzato con quanta accuratezza l'algoritmo le simula attraverso un confronto con i dati sperimentali.

5.2.2 Dati sperimentali

I dati sperimentali forniti dalla galleria del vento riguardano 10 punti del centro del rotore a distanza crescente rispetto al suolo. Il modello di galleria utilizzato è lo stesso presentato nella sezione 5.1.2.

Nella seguente tabella vengono riportati i risultati sperimentali :

Z_{rotor} [m]	0.375	0.450	0.525	0.600	0.675	0.750	0.938	1.125	1.312	1.500
C_T [10^{-3}]	8.318	7.997	7.791	7.646	7.539	7.519	7.379	7.299	7.239	7.268

Tabella 5.2: C_T^{IGE} sperimentale in funzione di z .

Come si può notare l'effetto suolo si manifesta in una maggior trazione sulle pale del rotore. Un modo utile e intuitivo per rappresentare questi dati è tramite il loro rapporto con il valore del coefficiente di trazione in assenza del suolo, C_T^{OGE} , in funzione della distanza normalizzata attraverso il raggio. In questo caso si è deciso di prendere come valore di riferimento per la condizione OGE il dato più distante dal suolo: $C_T^{OGE} = C_T|_{z=1.5mm} = 0.007268068$ che corrisponde ad una distanza di 4 raggi del rotore. Così facendo si ottiene il grafico osservabile in figura 5.7.

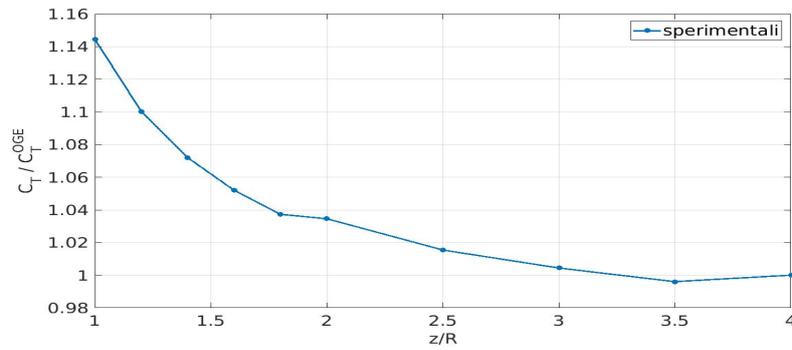


Figura 5.7: C_T/C_T^{OGE} sperimentale in funzione di z/R .

Modello mozzo

In tutte le simulazioni è stato modellato e inserito il mozzo al fine di limitare i disturbi dovuti all' "effetto fontana". Pannellizzazione e parametri sono gli stessi utilizzati nel caso di volo a punto fisso (sezione 5.1.3):

$$\begin{aligned} N_{mozzo} &= 20 \\ R_{mozzo} &= 0.9 c_{out} \\ dh_{mozzo} &= 0.3 c_{out} \end{aligned}$$

5.2.3 Risultati

Andando a calcolare con il codice implementato i carichi sul rotore al variare della distanza dal suolo, si può comparare il risultato numerico con quello sperimentale per comprendere come si comporta il metodo.

E' da tener presente ancora una volta che i risultati presentano delle forte oscillazioni attorno ad un valor medio, e quindi il valore preso da riferimento è la media delle ultime 200 iterazioni (in modo da escludere completamente un transitorio iniziale) che verrà presentato con la sua deviazione standard per far comprendere l'ampiezza e l'entità dei disturbi che lo riguardano.

Nella tabella 5.3 sono stati inseriti i dati ottenuti, utilizzando come parametri numerici :

- $N_{pan}^b = 10$
- $N_{pan}^c = 1$
- $N_{wake}^{max} = 2$
- $dt = \text{Period}/30$
- $k_{fin} = 400$

Quello che si nota immediatamente è come vi sia una divergenza dai dati sperimentali del coefficiente di trazione avvicinandosi al suolo.

<i>TEST IGE</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_{rotor} [m]	0.375	0.450	0.525	0.600	0.675	0.750	0.938	1.125	1.312	1.500
C_T^{sperim} [10^{-3}]	8.318	7.997	7.791	7.646	7.539	7.519	7.379	7.299	7.239	7.268
C_T^{calc} [10^{-3}]	8.871	8.472	8.146	7.874	7.591	7.438	7.269	7.220	7.205	7.196
σ_{CT} [10^{-4}]	6.8	6.2	0.57	3.09	0.44	0.13	0.33	0.42	0.41	0.42
<i>err%</i>	6.65	5.94	4.55	2.99	0.70	-1.07	-1.49	-1.08	-0.47	-0.99

Tabella 5.3: Confronto C_T^{IGE} numerico con sperimentale.

A tal proposito le figure 5.8 e 5.9 mostrano in modo quantitativo l'errore mostrato in tabella, dove per normalizzare la curva dei dati numerici si è usato il C_T^{IGE} ottenuto numericamente, ossia 0.00719607, mentre per i dati sperimentali quello sperimentale. Si può osservare una discrepanza crescente dei risultati al diminuire della distanza dal suolo.

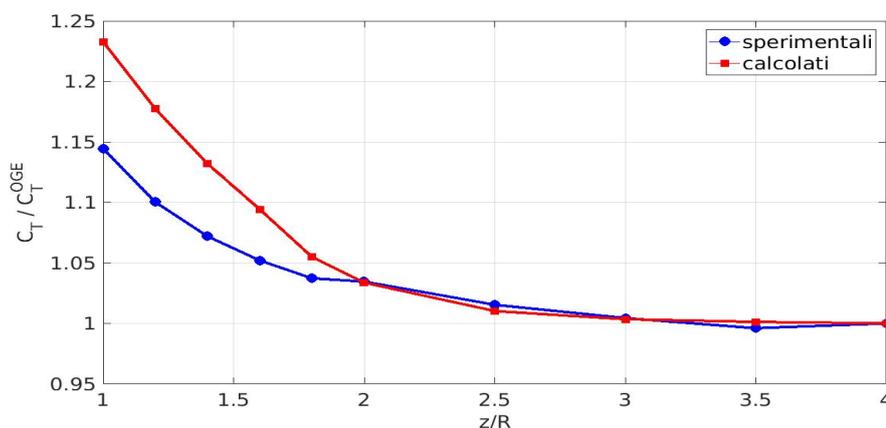


Figura 5.8: Confronto C_T^{IGE} numerico con sperimentale

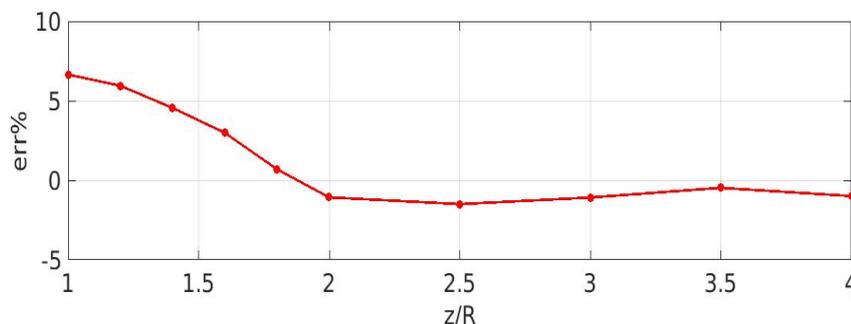


Figura 5.9: Errore C_T^{IGE} numerico

5.2.4 Commenti

Il metodo quindi sembra sovrastimare la trazione del rotore avvicinandosi al terreno. E' probabile pensare che l'effetto della viscosità e la presenza di uno strato limite sul terreno possano influenzare il comportamento del fluido in prossimità del suolo delineando una differenza col comportamento calcolato tramite singolarità del metodo, ma resta comunque da valutare l'intensità di questo fenomeno. Può essere ragionevole pensare inoltre che la presenza della fusoliera, alta circa 18.5 cm in aggiunta allo strato limite, compromettano completamente uno sviluppo regolare del flusso a basse altezze. Infatti gli errori maggiori sono compresi dentro $Z_{rotor} < 60cm$. Un'altra possibile fonte di errore possono essere i disturbi che si è scoperto essere attutiti dall'aumento del numero di pannelli in corda come si può osservare nella figura 5.10:

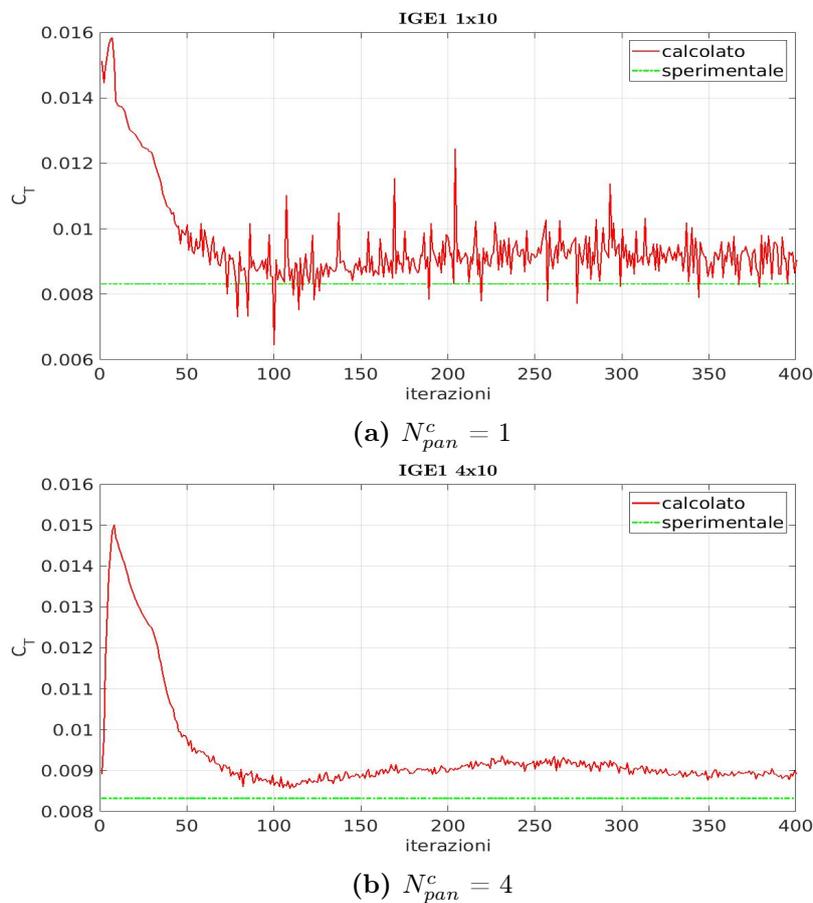


Figura 5.10: Influenza N_c su C_T^{IGE}

Inoltre si può notare come la vicinanza del terreno, e quindi il sistema immagine che lo rappresenta, porta a notevoli oscillazioni sull'andamento dei carichi. E' importante osservare che anche in questo caso il calcolo del C_T è influenzato dal numero di passi temporali considerato per la media temporale. I disturbi crescono all'avvicinarsi del suolo, ma una maggior attenzione va rivolta all'andamento della curva nelle ultime iterazioni. Un valore asintotico per i primi 4 test IGE non è stato raggiunto nelle 400 iterazioni fatte come mostrato dalla figura 5.11.

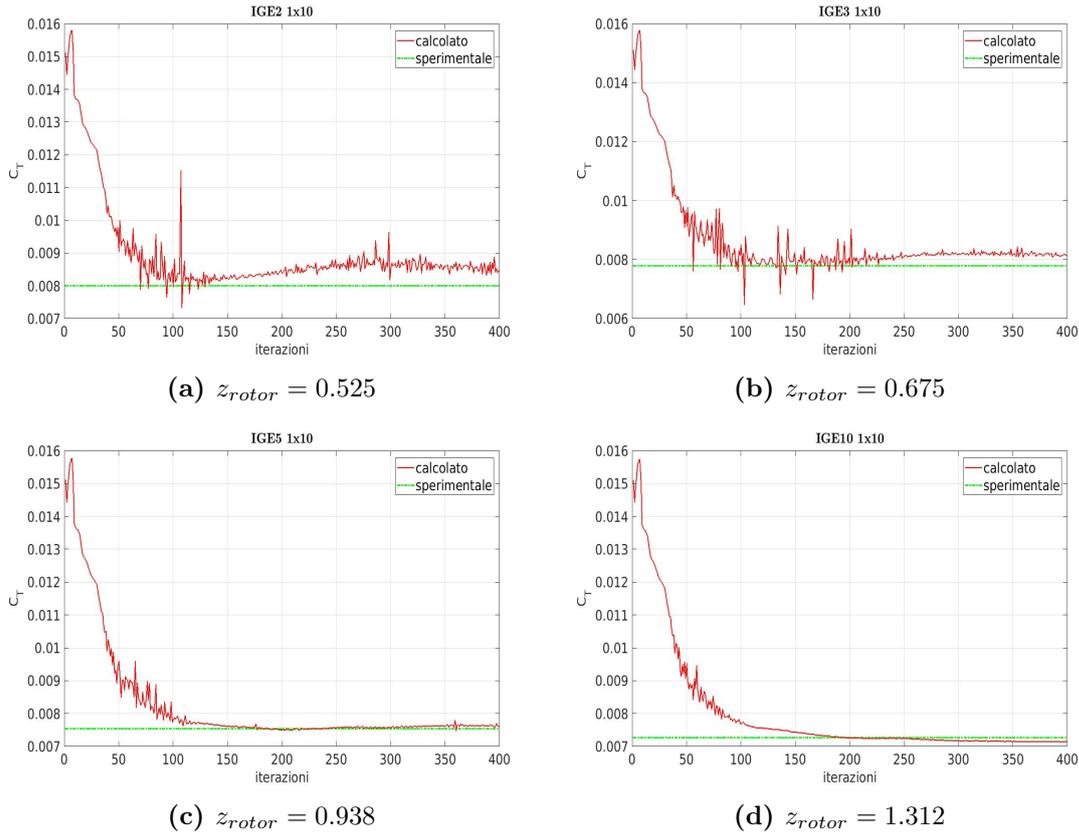


Figura 5.11: Influenza k_{fin} su C_T^{IGE}

I primi quattro test sono stati quindi ripetuti, con un aumento del numero dei passi temporali da 400 a 600 in modo da avere un media temporale su un tempo maggiore che attutisca quindi le oscillazioni e permetta al risultato di stabilizzarsi. I primi valori in tabella 5.3 sono stati valutati attraverso un'operatore di media che utilizza le ultime 200 iterazioni su un totale di 600. Per dare un'idea di quanto migliorino in questo modo i risultati è possibile osservare la tabella 5.4. Sono osservabili variazioni importanti soprattutto nei primi due punti di calcolo, ossia quelli più vicini al suolo.

TEST IGE	$C_T^{sperim} [10^{-3}]$	\tilde{C}_T^{400}	$e_{\%}^{400}$	\tilde{C}_T^{600}	$e_{\%}^{600}$
1 ($z=0.375m$)	8.318	9.203	10.63%	8.871	6.64%
2 ($z=0.450m$)	7.997	8.630	7.91%	8.472	5.93%
3 ($z=0.525m$)	7.791	8.158	4.71%	8.146	4.55%
4 ($z=0.600m$)	7.646	7.810	2.14%	7.874	2.98%

Tabella 5.4: C_T^{IGE} confronto tra 400-600 iterazioni .

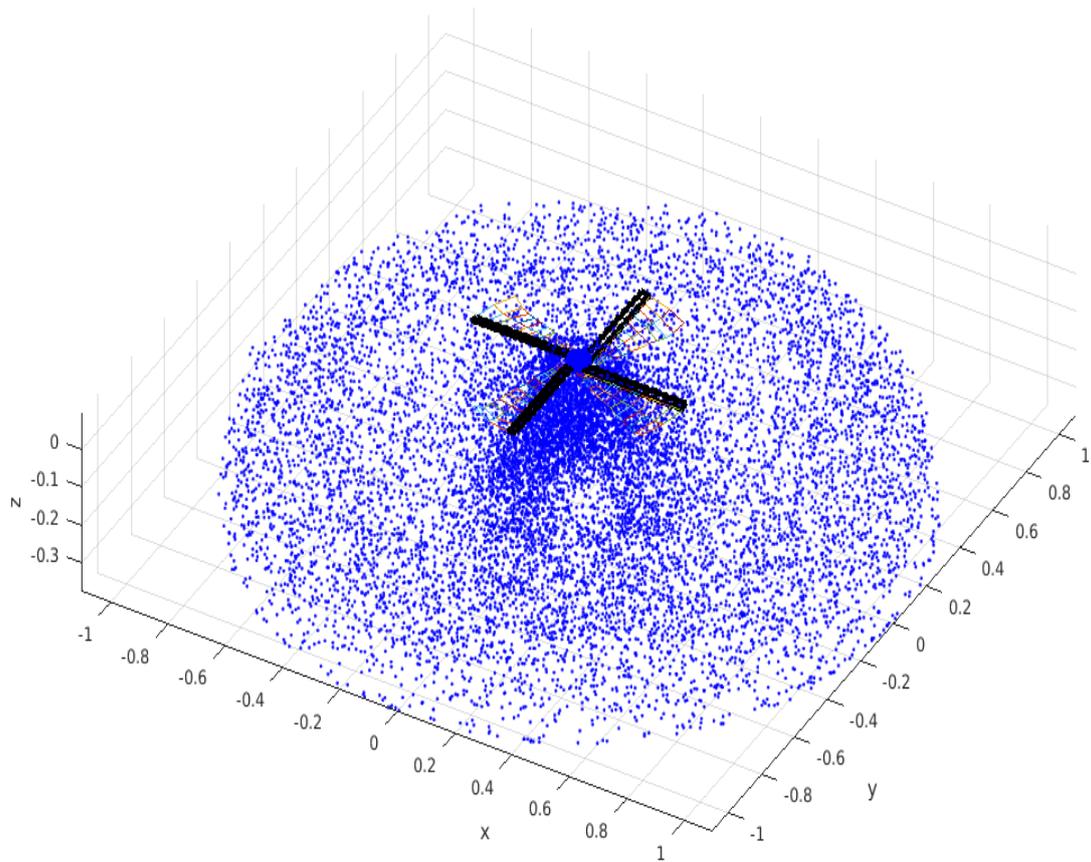


Figura 5.12: Scia IGE : vista obliqua

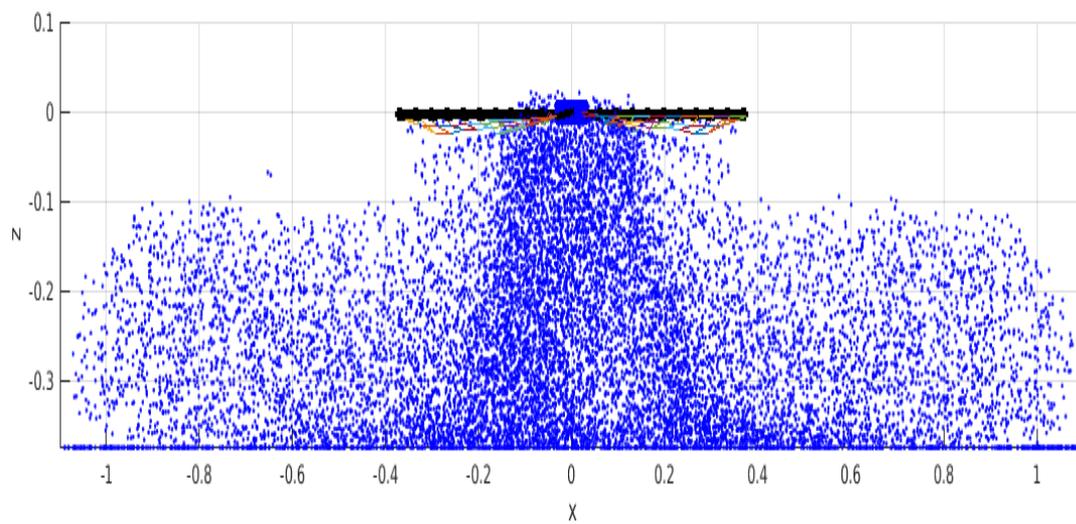


Figura 5.13: Scia IGE : vista frontale

5.3 Ostacolo

5.3.1 Introduzione

Sono state effettuate ulteriori prove in galleria con il modello in prossimità di un ostacolo collocato in posizioni e altezze differenti rispetto al centro del rotore. Lo scopo di tale esperimento è lo studio dello sviluppo della scia attorno ad un ostacolo, e la comprensione dell'interferenza sui carichi del rotore. Come in effetto suolo, ogni qualvolta che il rotore si avvicina verticalmente ad una superficie, il coefficiente di trazione subisce un incremento proporzionale alla distanza.

5.3.2 Dati sperimentali

Il sistema di riferimento assoluto utilizzato per gli esperimenti è rappresentato in figura 5.14. Nonostante sia differente da quello adottato dal codice, per non creare ambiguità, i risultati sia numerici sia sperimentali, saranno presentati secondo questa convenzione. L'ostacolo utilizzato è di forma parallelepipedica di dimensioni 750x1000x450 mm.

Per i calcoli numerici si è scelto di utilizzare i dati relativi alla configurazione col centro del rotore allineato col centro dell'ostacolo. La velocità asintotica è nulla, e si simula semplicemente uno stazionamento in posizioni relative differenti rispetto all'ostacolo e al suolo.

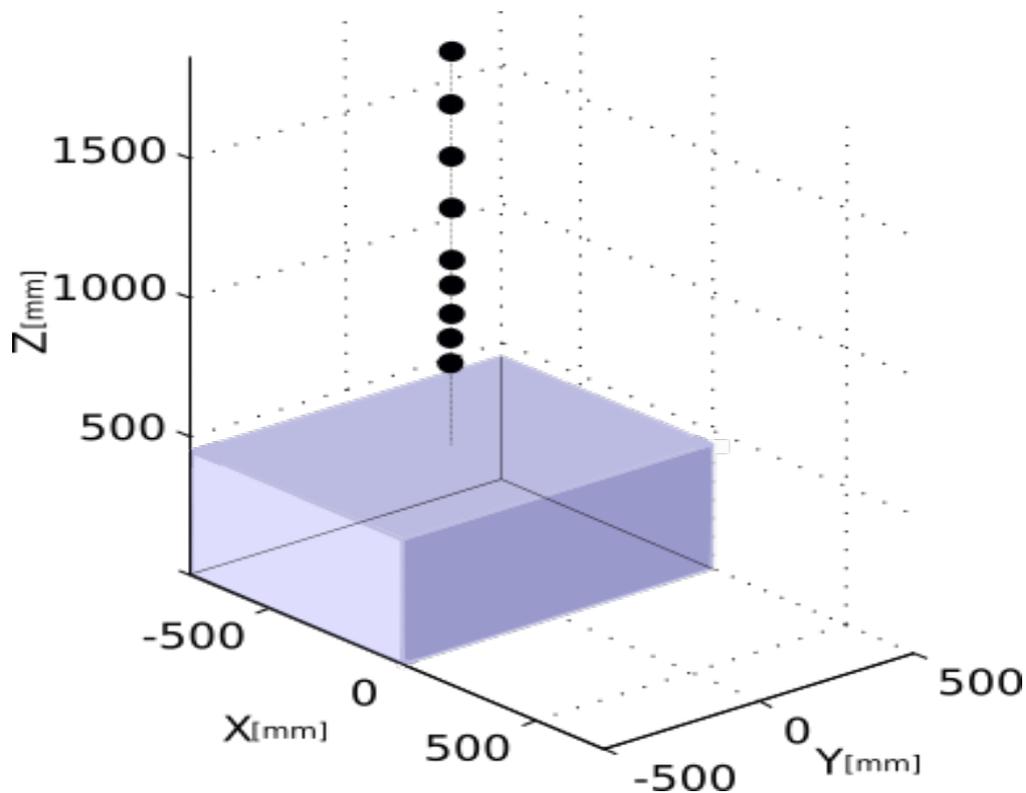


Figura 5.14: Sistema di riferimento e punti test

I dati sperimentali ottenuti sono riassunti nella seguente tabella e confermano un incremento del C_T al diminuire dell'altezza del rotore rispetto all'ostacolo, esattamente come nel caso di effetto suolo :

Z_{rotor} [m]	0.750	0.844	0.938	1.031	1.125	1.312	1.500
C_T [10^{-3}]	8.754	8.217	7.926	7.720	7.592	7.457	7.370

Tabella 5.5: C_T^{OST} sperimentale in funzione di z .

5.3.3 Modello ostacolo

Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento dell'ostacolo coincide con quello globale \mathcal{F}_0 , ossia con origine al centro del rotore e asse z verticale verso l'alto. L'ostacolo è rappresentato così attraverso un parallelepipedo come in figura 5.15. Per definirne la posizione, si sono utilizzate le coordinate del suo centro e per comodità le sue facce sono state costruite in modo arbitrario da essere parallele agli assi globali.

Coordinate pannelli

I pannelli sono tutti quadrilateri e sono divisi per le 5 facce presenti dell'ostacolo. La sesta faccia del parallelepipedo sarebbe quella inferiore ma non viene rappresentata in quanto le simulazioni con ostacolo comportano la presenza del suolo che inefficia quindi la sua utilità.

Come scritto in precedenza le facce risultano costruite parallele agli assi globali, e ognuna di esse è divisa in un reticolo di N_x^{obst} \times N_z^{obst} pannelli. Le formule non sono riportate in quanto banali, mentre si può visualizzarne il modello attraverso la figura sottostante.

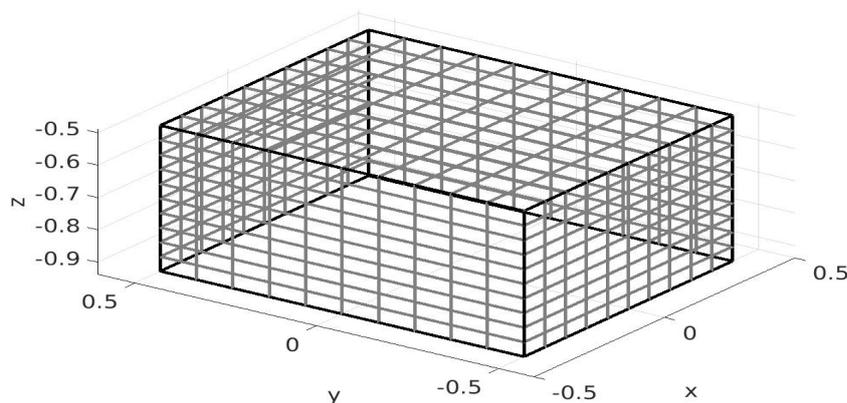


Figura 5.15: Pannellizzazione ostacolo

5.3.4 Risultati

Per le simulazioni sono stati utilizzati i seguenti parametri numerici, dove si è scelto un maggior numero di pannelli in corda per migliorare la qualità dei risultati :

$$\begin{array}{lll}
 N_b & = & 10 \\
 N_c & = & 4 \\
 N_{wake}^{max} & = & 2 \\
 N_x^{obs} & = & 10 \\
 N_z^{obs} & = & 10 \\
 N_{mozzo} & = & 20 \\
 k_{fin} & = & 600 \\
 dt & = & 10^{-3} \\
 R_m - dh & = & (0.9-0.3)c_{out}
 \end{array}$$

Come sempre una media temporale è stata applicata per il calcolo del C_T^{calc} , e la tabella sottostante mostra i risultati confrontati con quelli sperimentali:

Z_{rotor} [m]	0.750	0.844	0.938	1.031	1.125	1.312	1.500
C_T^{calc} [10^{-3}]	8.997	8.393	8.082	7.753	7.459	7.250	7.203
C_T^{sperim} [10^{-3}]	8.754	8.217	7.926	7.720	7.592	7.457	7.370
σ_{CT} [10^{-4}]	4.8	39.5	0.86	1.5	1.3	0.59	0.22
$err\%$	2.78	2.13	1.96	0.41	-1.76	-2.77	-2.26

Tabella 5.6: Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale.

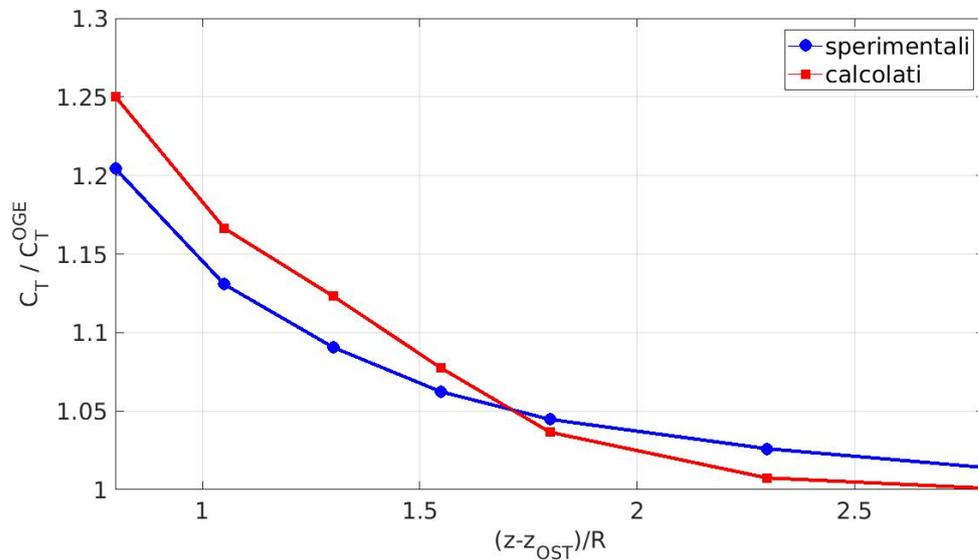


Figura 5.16: Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale.

5.3.5 Commenti

Anche in questo caso i coefficienti calcolati col metodo sovrastimano le forze sul rotore nelle posizioni più ravvicinate all'ostacolo. Allo stesso modo dei test con suolo in figura 5.8 sottostimano invece il C_T quando ci si allontana.

Gli errori però risultano essere più contenuti notando però che per queste simulazioni si è utilizzata una pannellizzazione della pala di $N_c \times N_b = 4 \times 10$. Il tutto è illustrato graficamente nelle seguenti figure 5.16 e 5.17 .

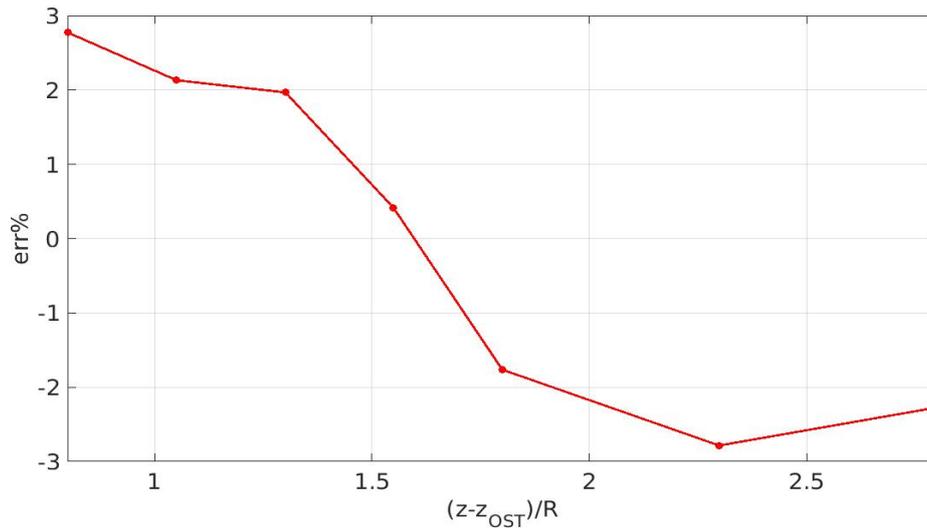


Figura 5.17: Errore C_T^{OST} numerico.

5.3.6 Tempo di calcolo

Questo tipo di simulazioni prevedono una modellizzazione del mozzo, dell'ostacolo e del suolo. Bisogna inoltre contare un ricalcolo della matrice di influenza che nel contempo è aumentata notevolmente di dimensioni. Per questo motivo il tempo di calcolo cresce enormemente sfiorando le 40 ore per la singola simulazione su un PC da 5.8Gb di RAM con 8 CPU i7-3610QM da 2.30GHz. Essendo l'induzione dei blobs calcolata attraverso un metodo diretto, il tempo di calcolo è chiaramente $\mathcal{O}(N^2)$, e le seguenti figure lo confermano :

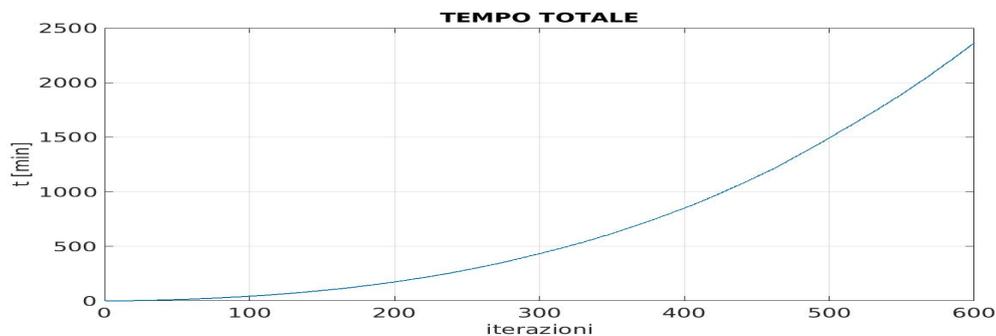


Figura 5.18: Tempo totale simulazione in funzione delle iterazioni

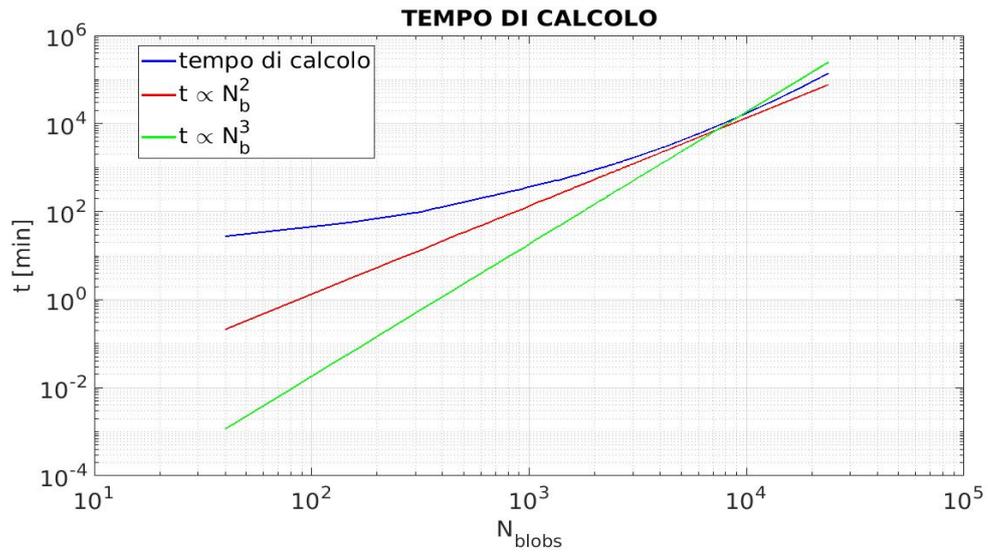


Figura 5.19: Tempo impiegato all'aumentare del numero di blobs

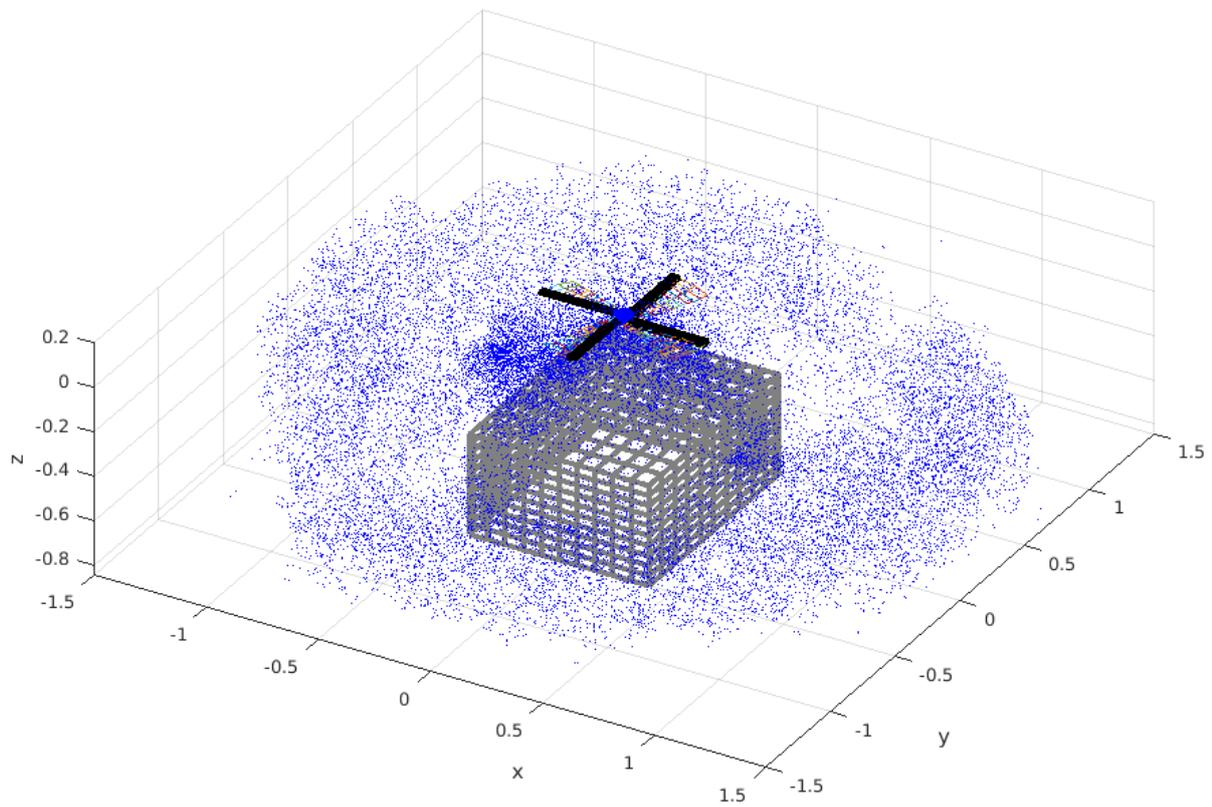


Figura 5.20: Scia con ostacolo : vista obliqua

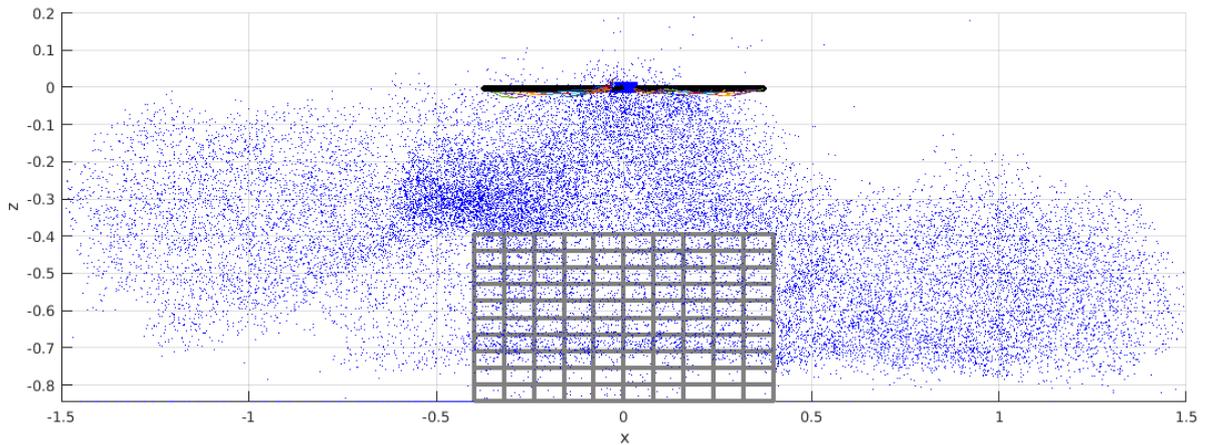


Figura 5.21: Scia con ostacolo : vista laterale

5.3.7 Ulteriori confronti

In questa sezione vengono presentate ulteriori prove con ostacolo dove il rotore non è allineato col centro dell'ostacolo. In particolar modo, facendo ancora riferimento alle stesse convenzioni precedenti, le posizioni utilizzate sono quelle rappresentate in figura 5.22. I parametri utilizzati sono gli stessi esposti all'inizio della sezione 5.3.4.

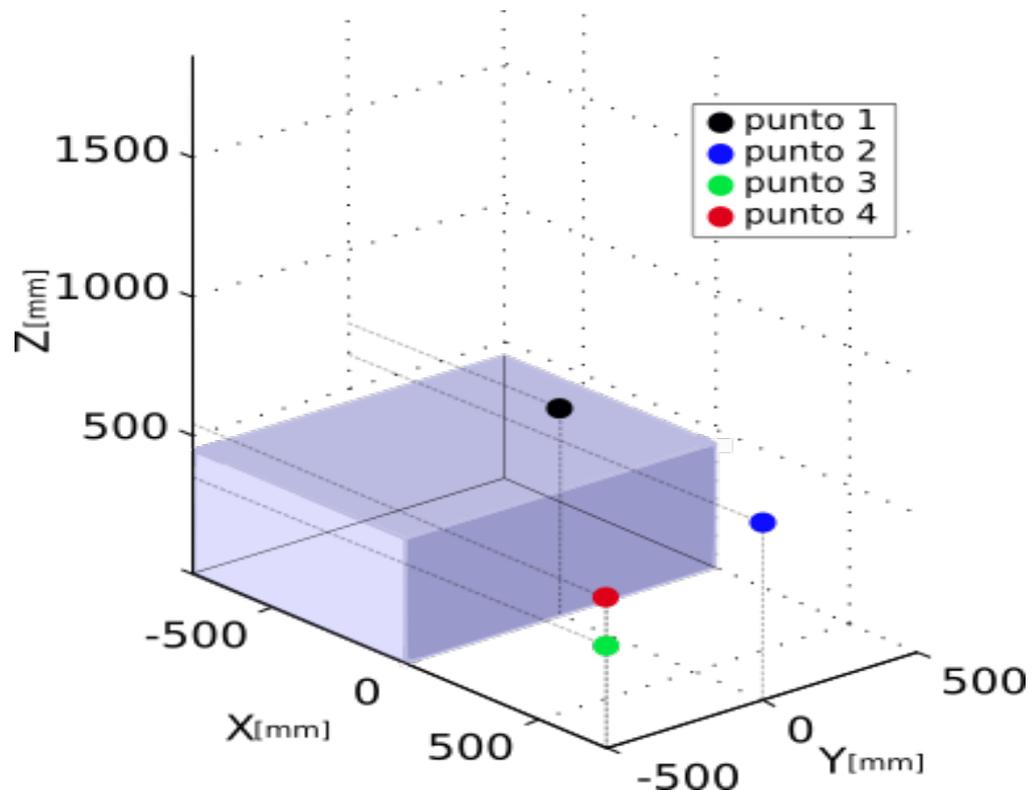


Figura 5.22: Punti test aggiuntivi

Come si può osservare dalla tabella 5.7 gli errori crescono in modo considerevole nel momento in cui la distanza dal suolo è ravvicinata e l'ostacolo è posto lateralmente, andando a confermare quanto presupposto nella sezione di effetto suolo.

<i>PUNTO</i>	1	2	3	4
Z_{rotor} [m]	0.750	0.638	0.375	0.544
C_T^{calc} [10^{-3}]	8.181	7.794	8.795	7.929
C_T^{sperim} [10^{-3}]	7.829	7.119	8.082	7.546
σ_{CT} [10^{-4}]	1.41	21.5	4.21	1.70
$err\%$	4.50	9.48	8.83	5.07

Tabella 5.7: Confronto C_T^{OST} numerico con sperimentale con ostacolo laterale.

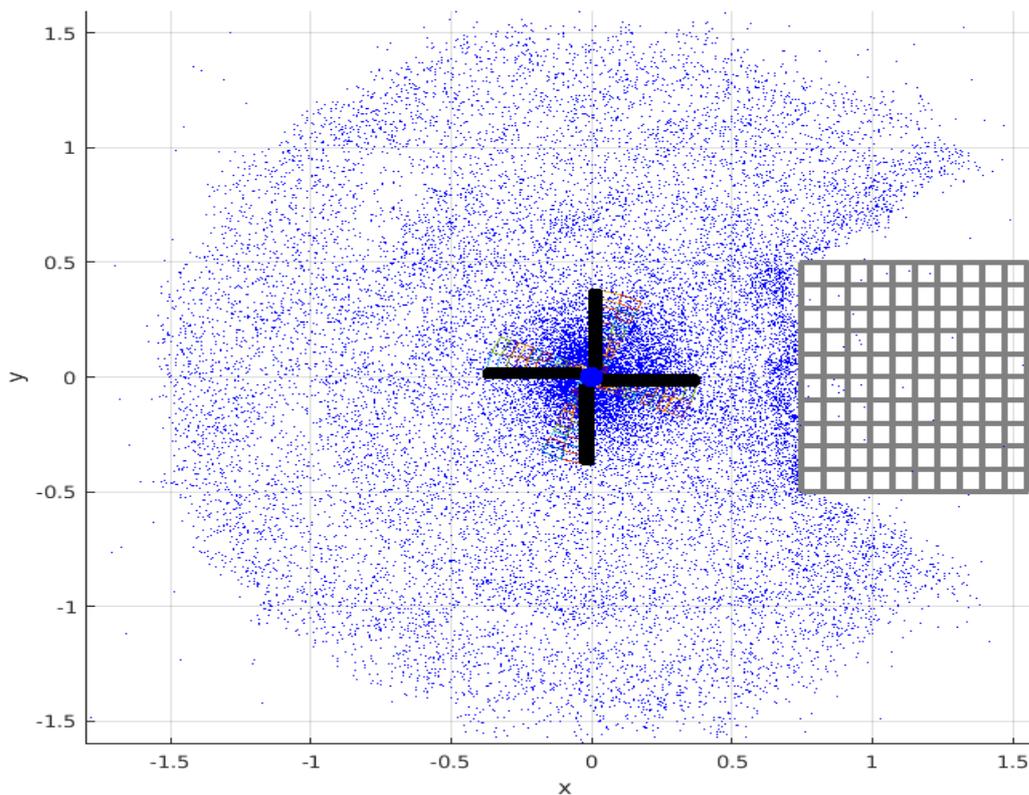


Figura 5.23: Scia con ostacolo punto 2: vista dall'alto

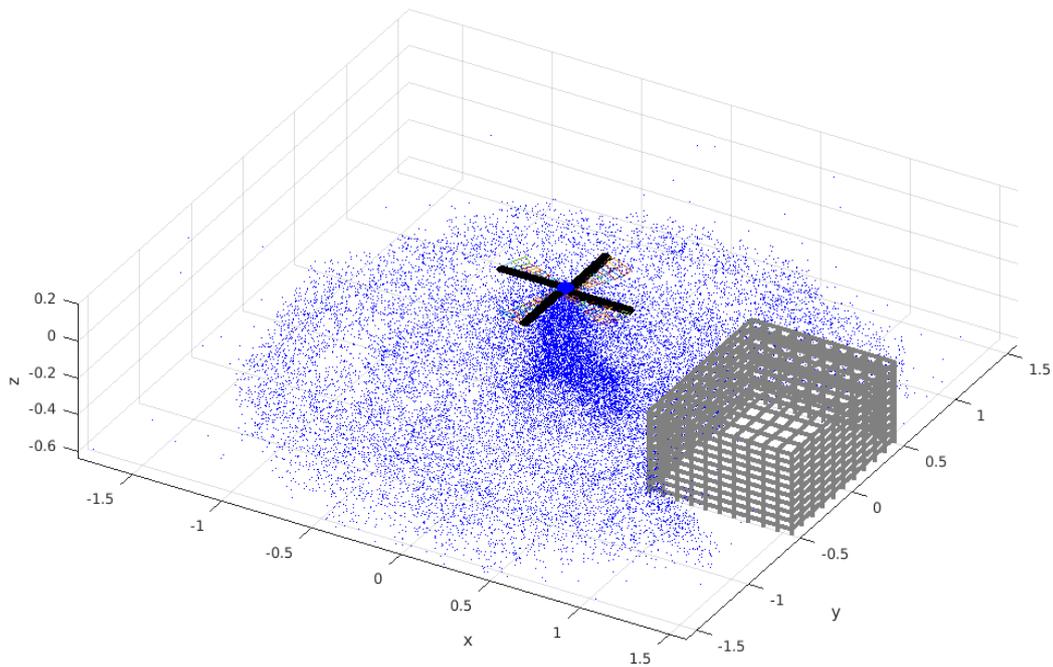


Figura 5.24: Scia con ostacolo punto 2: vista obliqua

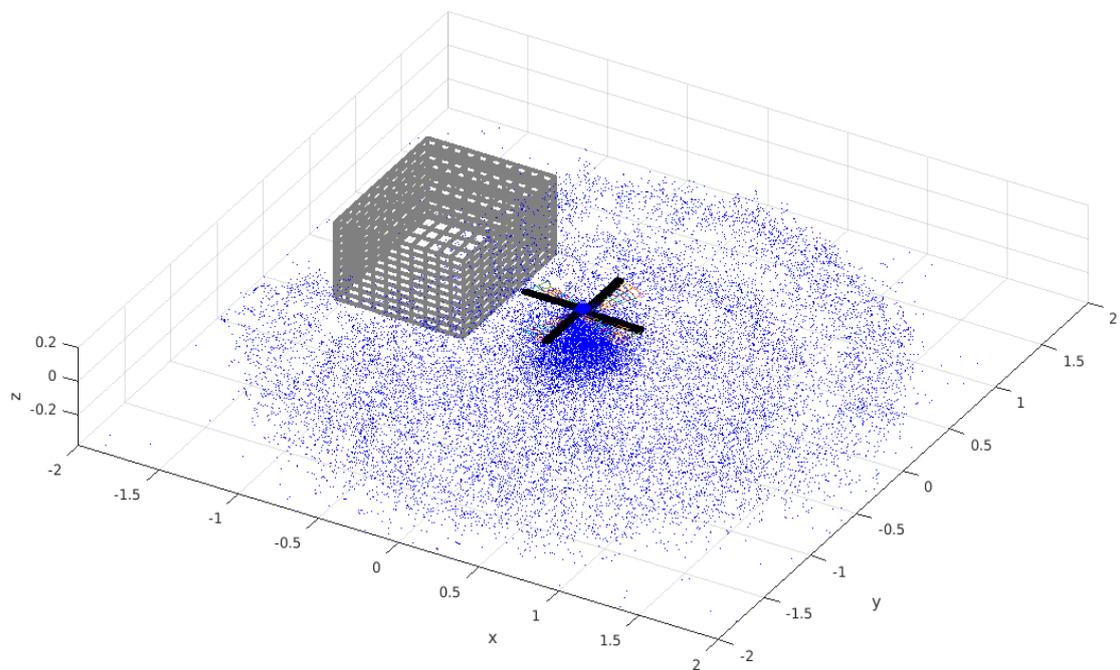


Figura 5.25: Scia con ostacolo punto 3: vista obliqua

Capitolo 6

SVILUPPI FUTURI

6.1 Approssimazioni applicate

Il codice di calcolo presentato può essere integrato con diverse aggiunte in modo da incrementare qualità e quantità di risultati ottenibili nonché le prestazioni. Nonostante il modello aerodinamico implementato per il confronto con le prove sperimentali sia solamente un'approssimazione della scia, i risultati ottenuti mantengono una buona corrispondenza. L'approssimazione applicata risiede in diversi aspetti come :

- la vorticità rappresentata dai blobs non è soggetta al meccanismo di vortex stretching e quindi non vi è una sua redistribuzione all'interno del dominio.
- la diffusione non viene trattata.
- non vi è la presenza dello strato limite quindi si ottiene una rappresentazione poco accurata del comportamento reale del flusso nel dominio, in particolar modo, vicino a pareti e suolo.
- il passo temporale e il numero di pannelli sono limitati da tempi e potenza di calcolo utilizzati in quanto si è utilizzata una computazione diretta delle iterazioni tra i vari elementi presenti.
- l'utilizzo del modello a superficie portante insieme a distribuzioni di singolarità del primo ordine rende il metodo complessivamente di basso ordine.

In questa ottica, risulta utile elencare i possibili miglioramenti applicabili per poter ottenere un codice che permetta il trattamento più generale possibile dei flussi che interessano un rotore di elicottero.

L'obiettivo delle prossime sezioni sarà quindi di fornire possibili spunti per tale scopo.

6.2 Velocizzazione calcolo di induzione

I calcoli presentati nel capitolo 5 di confronto con i dati sperimentali hanno evidenziato un comportamento asintotico dei tempi di calcolo dell'ordine $\mathcal{O}(N^2)$. Si può facilmente comprendere quanto sia impraticabile ottenere dei risultati in tempi ragionevoli quando $N_{blobs} \rightarrow 10^5 \div 10^6$.

In letteratura, diverse strategie sono state sviluppate al fine di ridurre i tempi e siccome questo problema non riguarda solamente l'ambito dei vortex method, le loro origini possono derivare dai più svariati campi scientifici (elettromagnetismo, dinamica molecolare, meccanica celeste, etc...).

6.2.1 Possibili approcci

Un modello che ha destato inizialmente interesse è stato il *Particle-in-cell method*. Gli elementi computazionali da un sistema lagrangiano vengono tracciati nello spazio nel quale le proprietà di interesse vengono ridistribuite su una griglia euleriana di punti. Assumendo che il potenziale soddisfi l'equazione di Poisson, una mesh regolare è posizionata su tutto il dominio computazionale e il metodo prevede i seguenti passaggi :

- interpolazione della densità dei corpi sui punti di griglia
- utilizzo di un "fast Poisson solver" per ottenere i valori di potenziale sulla griglia
- calcolo della forza (gravitazionale o elettrostatica) dal potenziale e sua interpolazione nelle posizioni di interesse

La complessità asintotica del metodo viene ridotta a $\mathcal{O}(N \log N)$. Sfortunatamente questo approccio, seppur perfezionato nel tempo nei suoi punti più deboli come la degradazione delle prestazioni in caso di fonti distribuite in modo altamente disomogeneo, risoluzione dipendente dalla griglia e differenziazione numerica per ottenere la forza nel terzo punto, non permette una scelta arbitraria dell'accuratezza ottenibile (senza rendere eccessivo il tempo di calcolo, ma ciò implica la perdita dei vantaggi per cui è stato scritto). Nell'ambito dei vortex methods, questa tipologia di approccio è chiamata *Vortex-in-cell method* ([24],[25],[26]).

Un altro approccio presentato in ambito della meccanica celeste è quello di A.W.Appeal (1985) [27]. La griglia viene sostituita da una divisione fittizia del dominio in una struttura ad albero che implica la suddivisione gerarchica e ricorsiva in sottocelle sempre più piccole alle quali appartengono i corpi contenuti all'interno. Base di ciò che vengono chiamati anche *treecodes*, ad ogni foglia dell'albero vengono poi associate la massa totale e la posizione del centro di massa (per questo motivo chiamata anche approssimazione in monopolo) a partire dai corpi contenuti in essa e la forza esercitata da questo sistema viene calcolata con la formula di attrazione gravitazionale tra due punti. L'approssimazione di raggruppamento viene applicata finché la distanza dal punto di calcolo è tale per cui $D/\mathcal{L} > \theta$ dove \mathcal{L} è la dimensione della foglia, D la distanza tra punto e centro di massa della foglia e θ un parametro di accuratezza fisso. Per certi tipi di problema si ottiene una grossa velocizzazione

dei calcoli rispetto a $\mathcal{O}(N^2)$, ma perde molta della sua efficienza quando i corpi sono equidistribuiti e l'ordine di accuratezza richiesto è alto.

Uno sviluppo successivo di questo approccio è stato quello di approssimare l'induzione a grandi distanze di gruppi di fonti puntiformi attraverso un'espansione matematica in funzioni armoniche sferiche, ossia tramite la cosiddetta *espansione in multipoli*. L'introduzione del *fast multipole expansion method* (FMM) è dovuta a L.Greenard e V.Rokhlin (1987) [28] nel campo dell'elettromagnetismo per problemi con N-particelle di carica ed è stato considerato come uno dei migliori dieci algoritmi del XX secolo. La quantità di lavoro necessaria viene ridotta a $\mathcal{O}(N)$ quando N è elevato, con errore controllabile attraverso la scelta dell'ordine di espansione utilizzato.

6.2.2 Espansione in multipoli

Uno degli algoritmi più promettenti è il sopracitato fast multipole method. La sua applicazione al problema delle equazioni di Laplace in 3D, formulata in termini di velocità, è leggermente più complicata in quanto richiede la trattazione del prodotto vettoriale in aggiunta all'operatore di differenziazione ∇ . Ricordando la legge di Biot-Savart regolarizzata che esprime l'induzione di N blobs in un punto \mathbf{x}_i può essere riscritta in termini di funzione di Green:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \varsigma(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/\varepsilon) \boldsymbol{\alpha}^j \times \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} = \sum_{j=1}^N \varsigma(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/\varepsilon) \boldsymbol{\alpha}^j \times \nabla \mathcal{G} \quad (6.1)$$

La funzione di Green 3D può essere espressa correttamente in termini di funzioni armoniche sferiche nella sua espansione in multipoli attraverso l'utilizzo di coordinate sferiche r_i, θ_i, ψ_i e $\rho_j, \alpha_j, \beta_j$ per definire rispettivamente le posizioni del punto obiettivo \mathbf{x}_i e dei blobs \mathbf{x}_j :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_j) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \underbrace{\frac{Y_n^m(\theta_i, \psi_i)}{\rho_i^{n+1}}}_{S} \underbrace{r_j^n Y_n^{-m}(\alpha_j, \beta_j)}_{M_j^{n,m}} \quad (6.2)$$

e nella sua espansione locale quando $\rho_i \ll r_j$:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_j) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \underbrace{\rho_i^n Y_n^{-m}(\theta_i, \psi_i)}_R \underbrace{\frac{Y_n^m(\alpha_j, \beta_j)}{r_j^{n+1}}}_{L_j^{n,m}} \quad (6.3)$$

dove con il termine Y_n^m viene indicata l'armonica sferica di grado n e ordine m, calcolabile attraverso i polinomi di Legendre.

In questo modo è possibile riscrivere la formula di induzione in modo più compatto per l'espansione in multipoli:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \simeq -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \left(\sum_{j=1}^N M_j^{n,m} \boldsymbol{\alpha}^j \right) \times \nabla S = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \mathbf{M}_n^m \times \nabla S \quad (6.4)$$

e per l'espansione locale :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \simeq -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \left(\sum_{j=1}^N L_j^{n,m} \boldsymbol{\alpha}_j \right) \times \nabla R = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \mathbf{L}_n^m \times \nabla R \quad (6.5)$$

I termini \mathbf{M}_n^m e \mathbf{L}_n^m sono detti rispettivamente momento di multipolo e momento locale. La sostituzione dell'estremo di sommatoria con p , ordine dell'espansione, è decisa dall'approssimazione e precisione desiderata mentre la derivazione richiesta da ∇ è effettuata secondo le coordinate \mathbf{x}_i in modo da compattare i termini e richiedere meno tempo di calcolo. Si può inoltre notare come la funzione di smoothing ς non sia presente in quanto sono valutazioni del campo lontano, quindi il suo effetto di nucleo viscoso è nullo.

La formulazione matematica del metodo va completata attraverso l'utilizzo di teoremi che permettono la traslazione del centro di queste espansioni ovunque si voglia, in modo da poter trasferire le proprietà di un insieme di blobs da un livello all'altro dell'albero utilizzato per dividere il dominio. Ulteriori aspetti teorici è possibile recuperarli in [29] [30] [31].

Impostazione Problema

Come anticipato, al fine di utilizzare in modo sistematico le espansioni in multipoli, è necessario introdurre una gerarchia di ciò che vengono chiamate scatole (o meglio, boxes) che suddividono il dominio computazionale in regioni sempre più piccole, al pari dei treecode. Al livello 0, si ha l'intero dominio mentre il livello $l+1$ è ottenuto in modo ricorsivo dalla suddivisione del livello l in 8 scatole uguali, considerate come *figli* della scatola al livello successivo. Quello appena esposto è il cosiddetto *oct-tree*.

Prima di esporre l'impostazione del metodo è necessario introdurre diverse definizioni:

- Due scatole sono dette *vicine* se appartengono allo stesso livello e condividono un punto di contorno (una scatola fa parte del suo stesso vicinato).
- Due scatole si dicono *ben separate* se appartengono allo stesso livello e non sono vicine.
- Ad ogni scatola i -esima viene associata una *lista di iterazione* che consiste nei figli delle scatole vicine al parente i -esimo e che sono ben separate dalla scatola i -esima.
- Ad ogni scatola i -esima del livello l si associa un'*espansione in multipoli* $\Phi_{l,i}$ attorno al suo centro e che descrive il campo lontano indotto dai blobs contenute in essa.
- Ad ogni scatola i -esima del livello l si associa un'*espansione locale* $\Psi_{l,i}$ attorno al suo centro e che descrive il campo indotto dai blobs al di fuori dei vicini della scatola i -esima.

- Ad ogni scatola i -esima del livello l si associa un'espansione locale $\tilde{\Psi}_{l,i}$ attorno al suo centro e che descrive il campo indotto dai blobs al di fuori dei vicini del parente di i .

Per capire al meglio la divisione del tipo di celle intorno ad una di riferimento è possibile osservare la figura 6.1 che mostra un esempio semplificato 2D del problema. Il problema del calcolo della velocità indotta in un punto è impostato nel seguente modo :

Passo ascendente

Inizializzazione

Scelta del livello massimo dell'albero come $n \approx \log_8 N$ e l'ordine desiderato di espansione come $p = \log_{\sqrt{3}}(1/\epsilon)$ dove ϵ è una data precisione. Il numero totale di scatole all'ultimo livello sarà di 8^n .

Passo 1

Costruzione dell'espansione in multipoli $\Phi_{n,i}$ dovute alle particelle contenute in ogni scatola attorno al centro della scatola stessa al livello massimo di griglia attraverso il calcolo diretto.

Passo 2

Per i livelli $l = n - 1, \dots, 2$:

Costruzione dell'espansione in multipoli $\Phi_{l,i}$ attorno al centro di ogni scatola al livello considerato attraverso la fusione delle espansioni dei figli, dopo averle traslate.

Passo discendente

Inizializzazione

Imporre $\Psi_{1,1} = \Psi_{1,2} = \dots = \Psi_{1,8} = 0$

Passo 3

Per i livelli $l = 2, \dots, n$:

Costruzione dell'espansione locale $\tilde{\Psi}_{l,j}$ per ogni scatola al livello l attraverso la traslazione dell'espansione locale Ψ del parente di j a se stesso. Costruzione $\Psi_{l,j}$ attraverso la conversione dell'espansione in multipoli $\Phi_{l,k}$ di ogni scatola k nella lista di iterazione di j per ottenere l'espansione locale attorno al suo centro, sommarle e aggiungerle a $\tilde{\Psi}_{l,j}$.

Passo 4

Per ogni blob in ogni scatola j all'ultimo livello n :

Valutazione di $\Psi_{n,j}$ nella posizione della blob.

Passo 5

Per ogni blob in ogni scatola j all'ultimo livello n :

Calcolo delle iterazioni con le particelle dentro le scatole vicine in modo diretto.

Essendo s il numero medio di particelle per scatola all'ultimo livello, ci sono approssimativamente N/s scatole nell'albero gerarchico. In questo modo, il Passo 1 richiede un lavoro proporzionale a Np^2 , il Passo 2 a $(N/s)p^4$, il Passo 3 $189(N/s)p^4$,

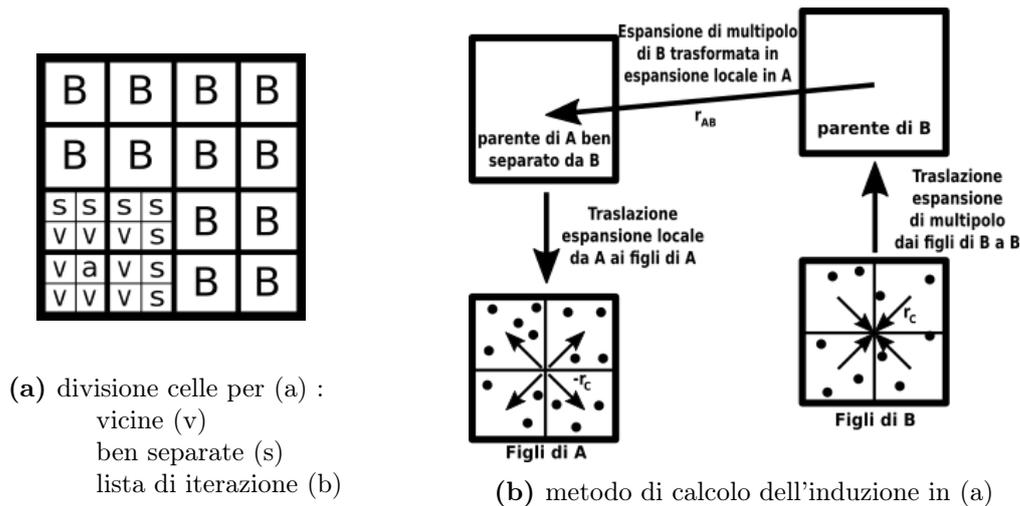


Figura 6.1: Esempio 2D di FMM con albero a 3 livelli

il Passo 4 Np^2 e il Passo 5 $27Ns$. Una ragionevole stima delle operazioni totali è quindi :

$$191 \left(\frac{N}{s} \right) p^4 + 2Np^2 + 27Ns$$

Si può notare come il costo maggiore derivi dal Passo 3, ossia dal passaggio dall'espansione in multipoli a quella locale. A tal proposito, numerosi lavori a riguardo sono stati effettuati per ottimizzare gli operatori di traslazione seguendo strategie diverse [30]. L'algoritmo appena descritto è noto come FMM originale [28]. E' possibile inoltre trovare diverse varianti, una delle quali deriva dal trascurare completamente le espansioni locali e valutare l'induzione calcolando di volta in volta l'espansione in multipoli di ogni scatola. Ciò comporta un algoritmo $\mathcal{O}(N \log N)$, precedente a quello qui riportato, che approssima l'induzione di ogni scatola per ogni blob nella lista di iterazione delle stesse. Il costo totale risulta essere $189Np^2 \log_8 N + 27N$, richiedendo però meno termini p dell'espansione per ottenere la stessa accuratezza dell'algoritmo FMM originale.

6.3 Rappresentazione dello spessore delle pale

Il codice implementa un metodo chiamato anche *mean-surface panel method*, dove i pannelli sono piazzati interiormente al corpo in questione, sulla sua superficie media e nella sua variante con intensità di dipoli costante, ridotti quindi a pannelli di segmenti vorticosi ai lati. Questa tipologia di metodo è spesso usata per un progetto preliminare in quanto approssimato.

Una sua estensione interessante può essere l'introduzione degli spessori sulle pale in modo da permettere calcoli più dettagliati. A tal punto, per la rappresentazione dei corpi portanti, un'introduzione di una pannellizzazione di sorgenti sui contorni è utile per imporre la non penetrazione sui bordi della pala. Questa modifica può portare al completo cambiamento del metodo che dalle singolarità virtuali, potrebbe tendere ad un vero e proprio metodo a pannelli. Infatti una volta pannellizzati i contorni della pala con sorgenti, sarebbe possibile aggiungere senza ulteriori com-

plicazioni anche una distribuzione di dipoli sugli stessi in modo da trasferire la capacità portante dal reticolo vorticoso bidimensionale, ossia il modello di superficie portante, alla struttura di pannelli tridimensionale.

In generale lo schema di risoluzione del metodo non varia, pannelli di sorgenti di intensità costante implicano un aumento ulteriore di incognite che dovranno essere calcolate imponendo ancora una volta la non penetrazione in specifici punti di collocazione, con l'aggiunta di condizioni ausiliarie come quella di Kutta sul bordo di uscita dell'ala per il calcolo delle intensità di dipoli o vortici. Il metodo a pannelli di base sviluppato da J.L.Hess (1972) [32] [2] utilizza intensità di sorgenti costante e variazione di dipoli quadratica.

6.4 Ordine di accuratezza superiore

Come già detto in precedenza, il codice segue la teoria della superficie portante nella sua variante di basso ordine. Infatti ogni pannello della superficie è rappresentato da un vortice ad $1/4$ della sua corda e da un punto di collocazione a $3/4$ della corda, prendendo in prestito tali concetti dalla teoria bidimensionale dei profili sottili e della linea portante di Prandtl. Tuttavia è possibile riformulare il problema, posizionando sull'intera superficie portante una distribuzione di ordine maggiore di singolarità, siano esse vortici oppure dipoli e ottenere i risultati attraverso un'integrazione su di essa. In questo modo è possibile ottenere un metodo di ordine superiore.

Come notato da J.L.Hess (1980) [33], un metodo di alto ordine consistente deve considerare non soltanto derivate superiori delle densità di singolarità sul corpo bensì anche derivate di un ordine maggiore della geometria. A tal proposito, per ottenere risultati migliori, distribuzioni di ordine superiore di singolarità vanno accoppiate con una rappresentazione 3D del corpo, quindi con l'inserimento dello spessore come spiegato nel punto precedente. E' possibile così ottenere un cosiddetto *Higher Order Panels Method* (HOPM).

L'incremento di accuratezza è massimo nel momento in cui ad intensità variabili vengono associati dei pannelli curvi e non più piatti. Essenzialmente il metodo a pannelli rimane lo stesso, però il calcolo delle velocità indotte va rimpiazzato con formule di integrazione analitiche o numeriche sul pannello inducente. Queste formule contengono le derivate geometriche del pannello, note in quanto si conosce la geometria, e le derivate delle singolarità che per continuità saranno dipendenti anche da quelle dei pannelli vicini. In generale per risparmiare tempo computazionale, vanno utilizzate formule analitiche insieme a metodi di approssimazione per l'induzione in punti lontani, quale l'espansione in multipoli. Ulteriori dettagli possono essere ritrovati in [34].

6.5 Correzioni di strato limite

Uno dei vantaggi intrinseci dell'implementazione di un metodo a pannelli è la possibilità di aggiungere una correzione di strato limite che permetta la valutazione del flusso "interno", dove la viscosità gioca un ruolo fondamentale. In tal modo sono possibili ulteriori analisi come la valutazione della resistenza viscosa e di forma, l'individuazione di separazioni e una descrizione più realistica del flusso in prossimità di pareti. Il punto di partenza sono le equazioni di strato limite, semplificazioni di quelle di Navier-Stokes per $Re \rightarrow \infty$, per la prima volta ottenute da Prandtl. Si ricavano attraverso una *trasformazione di strato limite* che impone un'adimensionalizzazione con scale differenti per le direzioni parallele ($x^* = x/L$) e perpendicolari ($\eta = y/\delta^*$) alla parete. In questo modo la direzione in y viene ingrandita e il flusso a parete viene descritto bidimensionalmente attraverso un'approssimazione chiamata *teoria delle strisce*. La connessione tra le due regioni, interna ed esterna, avviene in maniera asintotica per $\eta \rightarrow \infty$ dove la velocità esterna u_e viene recuperata completamente dalla velocità interna $u_e = u(\eta \rightarrow \infty)$ e rappresenta la velocità tangenziale sui pannelli del corpo portante calcolata tramite il metodo a pannelli. Si creano così due zone, una interna ed una esterna che comunicano. In questo modo è possibile ottenere attraverso la manipolazione dell'equazione di quantità di moto, la cosiddetta *equazione di Von Karman* dello strato limite in caso di flusso stazionario :

$$\frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (6.6)$$

dove sono necessarie ulteriori informazioni per la chiusura per connettere i termini di spessore di quantità di moto θ , fattore di forma H e coefficiente di attrito C_f . A tal proposito sono stati sviluppati diversi metodi:

- ipotizzare una distribuzione di velocità a parete : $\frac{u}{u_e} = f(\eta, \dots)$
- formulare relazioni semiempiriche per legare i parametri H, θ nella cosiddetta *equazione ausiliaria* o *equazione del fattore di forma*, che viene spesso espressa in modo completo come:

$$\theta \frac{dH}{dx} = F(H, Re_\theta, \frac{\theta}{U}, \frac{dU}{dx}) \quad (6.7)$$

- aggiungere l'equazione integrale dell'energia :

$$\theta \frac{dH^*}{dx} + H^*(1 - H) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = 2C_D - H^* \frac{C_f}{2} \quad (6.8)$$

con la necessità di includere un'espressione per $H^* = H^*(H, \theta)$.

Si può notare come in ogni caso siano presenti i termini di coefficiente di attrito e di resistenza, ma le espressioni di questi è meno critica rispetto a quelle esposte precedentemente:

$$C_f = C_f(H, \theta) \quad C_D = C_D(H, \theta) \quad (6.9)$$

Le equazioni integrali sono valide sia per un flusso laminare che per uno turbolento, e l'unica differenza risiede nell'espressione delle equazioni di chiusura che variano a seconda del regime analizzato e che sono disponibili in diverse approssimazioni. Per completare il quadro, va aggiunto un metodo per l'analisi della transizione e della separazione dello strato limite.

Per far interagire le due regioni vi sono diverse tecniche. La prima è quella di spostare la parete solida normalmente alla sua superficie usando lo spessore di spostamento che rappresenta il difetto di portata. Un altro approccio è rappresentato dalle *tecniche di traspirazione*: lo spessore dello strato limite è simulato dalle sorgenti che impongono la non penetrazione sulla parete spostata di una quantità pari allo spessore di spostamento. In questo modo non si deve ricalcolare ogni volta la matrice dei coefficienti di influenza.

6.6 Accoppiamento con BET

La *teoria dell'elemento di pala*, in inglese BET, è un processo matematico che divide la pala lungo l'apertura in sezioni che non interagiscono tra di loro. L'assunzione di base è che ognuna di queste sezioni agisca come un profilo aerodinamico bidimensionale e gli effetti di tridimensionalità sono racchiusi solamente nell'angolo indotto dal rotore, variabile lungo il raggio. La pala viene quindi rappresentata solo nella sua lunghezza attraverso N_b segmenti, e si perdono informazioni riguardanti le distribuzioni in corda dei carichi.

In questo modo si abbandona il modello di superficie portante, in quanto le pale non sono più discretizzate in corda e non è richiesta la risoluzione di un sistema che impone la non penetrazione nei punti di collocazione. Il resto dell'algoritmo procede normalmente e solamente il calcolo della circolazione distribuita sulla linea portante cambia. Il procedimento si basa su delle tabelle, chiamate in inglese *lookup tables*, che contengono i dati tabulati dei coefficienti di portanza $C_l(r)$ e di resistenza $C_d(r)$ in base al tipo di profilo in funzione dell'angolo di incidenza effettivo, numero di Mach e Reynolds:

$$C_l = f_l(\alpha_{eff}, Ma, Re) \quad C_d = f_d(\alpha_{eff}, Ma, Re) \quad (6.10)$$

Al fine di ottenere questi valori, è necessario sapere il valore dell'angolo di incidenza effettivo su ogni sezione della pala, esprimibile attraverso l'angolo di influsso relativo ϕ e l'angolo di passo θ :

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{V_P}{V_T} \right) \quad \rightarrow \quad \alpha_{eff} = \theta - \phi \quad (6.11)$$

Considerando una condizione generale di volo, le componenti viste dal singolo profilo possono essere espresse come:

$$\begin{aligned} V_T &= \Omega r + [1, 0, 0] \left[T_\beta(\beta) T_\Psi(\Psi) \right]^T (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}_{ind}) \\ V_P &= -[0, 0, 1] \left[T_\beta(\beta) T_\Psi(\Psi) \right]^T (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}_{ind}) + \dot{\beta}(r - c_{out}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

dove V_∞ rappresenta la velocità asintotica, \mathbf{u}_{ind} l'induzione delle pale e della scia. Le matrici di rotazione $T_\beta(\beta)$ e $T_\Psi(\Psi)$ sono quelle descritte nella sezione 3.3.1 e

servono a trasformare le componenti delle velocità dal sistema di riferimento globale \mathcal{F}_0 a quello della pala flappingata \mathcal{F}_2 . La figura 6.2 mostra direzioni e angoli di interesse per ogni singola sezione.

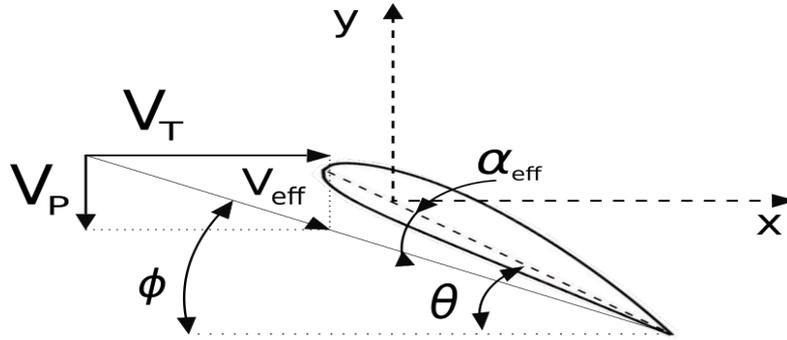


Figura 6.2: Definizione angoli e velocità BET

Nonostante sia possibile applicare un approccio numerico a questo problema tramite per esempio l'applicazione della teoria del disco attuatore per il calcolo di \mathbf{u}_{ind} , è di maggiore interesse il calcolo degli angoli e delle velocità in questione attraverso l'accoppiamento con il codice a vortex blobs implementato. Siccome l'induzione delle pale non è calcolabile al passo temporale considerato in quanto la loro circolazione è incognita, si prendono le circolazioni di riferimento del passo temporale precedente. Se il dt utilizzato è piccolo, questo procedimento non influisce in modo significativo sull'accuratezza.

Per completare l'accoppiamento di questo metodo al vortex blob method è necessario conoscere solamente il valore di circolazione di ogni singolo segmento Δr in apertura della pala, calcolabile semplicemente tramite Kutta-Joukowski :

$$L = \rho V_\infty \Gamma \quad \rightarrow \quad \Gamma^i = \frac{1}{2} C_l^i V_{tot} \bar{c} \Delta r \quad (6.13)$$

Il valore Γ^i è quello che dovrà essere imposto alla nuova striscia di pannelli di scia rilasciata al successivo passo temporale.

La BET procede attraverso l'integrazione delle equazioni che esprimono i carichi sulla pala grazie al seguente modello matematico :

$$\begin{cases} dT = N_b(dL \cos(\phi) - dD \sin(\phi)) & \text{trazione} \\ dQ = N_b(dL \sin(\phi) + dD \cos(\phi))y & \text{coppia} \\ dP = N_b(dL \sin(\phi) + dD \cos(\phi))\Omega y & \text{potenza} \end{cases} \quad (6.14)$$

riscrivibile in forma adimensionale come :

$$\begin{aligned} dC_T &= \frac{1}{2} \sigma C_l(r) r^2 dr \\ dC_Q &= dC_P = \frac{1}{2} \sigma (\phi C_l(r) + C_d(r)) r^3 dr \end{aligned} \quad (6.15)$$

nelle quali il termine σ indica la solidità della pala.

Questo metodo permette così di calcolare in modo semplice e veloce anche il coefficiente di coppia, valore utile per la progettazione, senza dover risolvere lo strato limite.

6.7 Accoppiamento con CFD

In alternativa ad una correzione di strato limite attraverso la risoluzione dell'equazione di Von Karman, è possibile accoppiare il vortex blob method con un risolutore dell'equazioni complete di Navier-Stokes utilizzato all'interno dello strato limite. Infatti le correzioni in forma integrale presentate nella sezione precedente sono utili strumenti ingegneristici ma non forniscono dettagli del flusso nella zona interna. L'unica via possibile è fornita dalla fluidodinamica computazionale (CFD), intesa come tecniche di risoluzione a volumi finiti delle equazioni complete tramite descrizioni in pressione o densità. In questo modo si elimina la grossa approssimazione del metodo rappresentata dall'imposizione del punto di iniezione della scia e della mancanza di un calcolo della vorticità prodotta dalle pareti. In termini di tempo di calcolo si ottiene un grosso risparmio in quanto la mesh relativa alla CFD è confinata nell'intorno della pala.

Un esempio interessante di recente data è stato sviluppato da P.Anusonti-Inthra (2010) [35] nel quale modelli di turbolenza RANS, capaci di prevedere la generazione di vorticità a parete, vengono accoppiati ad un metodo di risoluzione dell'equazione di trasporto della vorticità basato su particelle (VPM, 'Vortex Particle Method'), in modo tale da superare le loro limitazioni del calcolo del campo lontano su un lungo periodo (dissipazione numerica, riadattamento della griglia di calcolo).

Al fine di accoppiare i due metodi, essi devono essere in grado di scambiarsi le necessarie informazioni ad ogni passo temporale :

- la vorticità che lascia il dominio della CFD.
- la velocità indotta dai domini della CFD (uno per ogni pala) nel dominio del VPM.
- la velocità indotta dal VPM nel dominio della CFD
- la velocità indotta tra i domini della CFD

Per il calcolo dell'influenza del dominio della CFD, è stato utilizzata una trasformazione del campo continuo di velocità in un campo continuo di vorticità per poi approssimarlo attraverso una rappresentazione a particelle (in modo simile al vortex-in-cell). I risultati ottenuti in questo lavoro correlano abbastanza bene con i dati sperimentali, evidenziando però una grossa dipendenza dell'accuratezza del VPM dalla precisione con cui il modello RANS identifica la posizione in cui rilasciare il vortice di estremità nel dominio VPM.

CONCLUSIONI

Il presente lavoro di tesi ha avuto come obiettivo lo sviluppo di un codice di calcolo basato su un metodo ibrido che accoppia il classico approccio a vortex lattice (reticolo vorticoso) con un metodo a vortici discreti desingularizzati, in inglese blobs, per la simulazione della scia del rotore di un'elicottero. Le pale sono state rappresentate attraverso un modello di superficie portante composto da segmenti vorticosi e il problema è stato risolto in velocità. L'accoppiamento dei due approcci risiede nella trasformazione del reticolo in blobs quando viene raggiunto il numero massimo di strisce di pannelli con cui si vuole rappresentare la scia come vortex lattice. L'inserimento dei vortici discreti viene così effettuato attraverso la conservazione del momento di ordine zero e uno della vorticità rappresentata dai segmenti vorticosi, la quale viene così ridistribuita nel nucleo dei blobs.

In una prima fase, è stata analizzata ed esposta la trattazione della teoria che supporta i vortex blob methods, riferimento utile per comprendere le potenzialità e i limiti di un approccio a vortici discreti. Si è quindi evidenziato come i blobs, in confronto ad una rappresentazione della scia tramite reticolo, permettano uno sviluppo analitico dei contributi che determinano l'evoluzione del campo di vorticità quali velocità indotta, vortex stretching e diffusione viscosa, portando ad un'analisi matematica più semplice. La scelta dei blobs è stata ulteriormente motivata dalla loro particolare libertà di riorganizzarsi da soli in modo da cambiare la topologia delle linee vorticosi, evitando possibili intrecci dei corrispondenti segmenti vorticosi del vortex lattice che possono portare il metodo ad instabilità. In verità, questa proprietà si è però delineata anche come punto debole del metodo, in quanto non è garantita una ricostruzione a divergenza nulla del campo di vorticità. Si è così riportato uno schema di trasporto la cui particolarità, al contrario di altri, risiede nelle capacità di conservare la vorticità totale e di ottenere una soluzione debole del problema quando vi è sovrapposizione tra i nuclei dei blobs.

Nella seconda parte, è stato implementato un codice sulle basi teoriche analizzate. Le pale sono state definite attraverso la loro superficie media la quale permette l'introduzione di svergolamenti, rastremazioni e modifiche temporali del passo mentre gli elementi non portanti sono stati inseriti attraverso le coordinate degli estremi dei loro pannelli quadrilateri o triangolari, considerati nei calcoli come pannelli di sorgenti costanti con intensità incognite. Tutti i corpi presenti sono stati trattati come rigidi, ed è stata inserita la possibilità di simulare il flappeggio libero delle pale. Nel caso di analisi in effetto suolo, è stato implementato un sistema immagine in modo da contribuire ai calcoli delle velocità indotte.

Per evitare che i blobs potessero attraversare le superfici solide, è stato sviluppato ed inserito anche un algoritmo di non penetrazione il quale modella la geometria

dei pannelli attraverso un'interpolazione bilineare e, nel caso di intersezione della traiettoria, modifica la componente normale al pannello della velocità di convezione dei blobs.

Dopo la scrittura del codice, si è resa quindi necessaria una fase di validazione iniziale, passo preliminare fondamentale per la continuazione del lavoro. Da un controllo degli errori di implementazione si è passati così ad un controllo dei risultati del metodo. Poichè il numero dei blobs è stato fortemente limitato dalle potenze di calcolo a disposizione, le condizioni di convergenza del vortex blob method non sono mai state soddisfatte. Per questa ragione, gli effetti di vortex stretching e di diffusione viscosa, seppur implementati in quanto utili per gli sviluppi futuri e per il completamento del metodo, sono stati disattivati. Si è così evidenziato come il metodo ibrido presenta risultati pressoché identici ad una rappresentazione della scia a vortex lattice, portando a valori in accordo con il metodo a superficie portante calcolato analiticamente.

La parte principale del lavoro è composta dal confronto con dati sperimentali ottenuti da diverse configurazioni e posizioni di un modello di rotore in galleria del vento. In questi calcoli, per ridurre i disturbi sull'andamento temporale dei carichi, si è deciso di inserire un modello cilindrico del mozzo, dimostratosi efficace. I risultati così ottenuti hanno presentato complessivamente una buona correlazione con i coefficienti di trazione misurati. Si sono notate maggiori discrepanze nei casi in cui le interazioni con gli elementi di contorno, quali suolo ed ostacolo, hanno distanze comparabili con il raggio del rotore.

In conclusione del lavoro sono state studiate ed esposte diverse strategie per sviluppare e migliorare il metodo con la possibilità di accoppiarlo ad ulteriori approcci differenti. Tra tutte quelle presentate, quelle più utilizzate ed indispensabili per effettuare simulazioni più accurate con un maggior numero di blobs risultano essere le tecniche di velocizzazione del calcolo dell'induzione. A tal fine sono disponibili nella letteratura scientifica diversi metodi, i quali, in aggiunta, permettono un aumento dell'efficienza di parallelizzazione del codice. Per ottenere un ottimo compromesso tra accuratezza e tempo di calcolo, è stato esposto il possibile accoppiamento con un risolutore delle equazioni di Navier-Stokes in concomitanza con una rappresentazione dello spessore della pala. Lo sviluppo di un tale approccio zonale sarebbe preferibile ai metodi considerati separatamente in quanto capace di sfruttare i vantaggi specifici di ogni singolo modello componente.

Bibliografia

- [1] R.Padakannaya. *The Vortex Lattice Method for the Rotor-Vortex Interaction Problem*. 1974.
- [2] J.L.Hess e A.M.Smith. *Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies*. Department of the Navy,Douglas Corporation, 1962.
- [3] J.P.Choquin e S.Huberson. *Particle Simulation of Viscous Flow*. C.M.A.P Ecole Polytechnique, 1988.
- [4] J.T.Beale e A.Majda. «Vortex Methods I: Convergence in Three Dimensions». In: *Mathematics of Computation*, Vol. 39 (1982).
- [5] G.Winckelmans. «Topics in vortex methods for the computation of three- and two-dimensional incompressible unsteady flows». thesis. California Institute of Technology, 1989.
- [6] G.H. Cottet e P.D.Koumoutsakos. *Vortex Methods : Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000.
- [7] P.G.Saffman e G.R.Meiron. «Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flow». In: *Physics of Fluids*, Vol.29 (1986).
- [8] E.A.Novikov. «Generalized dynamics of three-dimensional vortical singularities(vortons)». In: *Soviet Physics*, Vol.57 (1983).
- [9] J.T.Beale e A.Majda. «Vortex Methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions». In: *Mathematics of Computation*, Vol. 39 (1982).
- [10] J.T.Beale. «On the Accuracy of Vortex Methods at Large Times». In: *Journal of Computational Physics*,vol.59 (1986).
- [11] J.T.Beale. «A convergent 3D vortex method with grid-free stretching». In: *Mathematics of Computation and vol.46* (1986).
- [12] J.P.Choquin e G.H.Cottet. *Sur l'analyse d'une classe de méthodes de vortex tridimensionnelles*. Acad.Scu.Paris, 1988.
- [13] G.H.Cottet. *A new approach for the analysis of vortex methods in two and three dimensions*. Ann.Inst.HenryPoincarè, Vol.5, 1988.
- [14] C.Rehbach. «Numerical calculation of three-dimensional unsteady flows with vortex sheet». In: *AIAA 16th Aerospace Sci. Meet*. 1978.
- [15] G.Winckelmans e A.Leonard. «Weak solutions of the three-dimensional vorticity equation with vortex singularities». In: *Physics of FLuids* (1988).

- [16] C.Greenard e E.Thomann. «Singular vortex systems and weak solutions of Euler equations». In: *Physics of Fluids, Vol.31* (1988).
- [17] A.J.Chorin. «Numerical study of slightly viscous flow». In: *Journal of Fluid Mechanics, Vol.57* (1973).
- [18] P.A.Raviart. «An analysis of particle methods». In: *Numerical Methods in Fluid Dynamics, vol 1127* (1983).
- [19] G.H.Cottet e Mas-Gallic. *A particle method to solve transport-diffusion equations*. Ecole Polytechnique,Palaiseau,France, 1983.
- [20] S.G.Voutsinas. «Vortex methods in aeronautics: how to make things work». In: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* (2005).
- [21] H.Hu et al. «Hybrid Vortex Method for the Aerodynamic Analysis of Wind Turbine». In: *International Journal of Aerospace Engineering* (2015).
- [22] H.Schlichting e E.Truckenbradt. *Aerodynamics of the airplane*. McGraw-Hill Companies, 1979.
- [23] D.Zagaglia e G.Gilbertini. *Forces on Obstacles in Rotor Wake*. Politecnico di Milano, 2017.
- [24] H.Kudela. «Application of the vortex-in-cell method for the simulation of two-dimensional viscous flow». In: *TASK* (1999).
- [25] I.Zawadzki e H.Aref. «Mixing during vortex ring collision». In: *Physics of Fluids* (1991).
- [26] H.Kudela e P.Regucki. «The vortex-in-cell method for the study of three-dimensional vortex structures». In: *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics*. 1986.
- [27] A.W.Appel. «An Efficient Program for Many-Body Simulation». In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* (1985).
- [28] L.Greenard e V.Rokhlin. «A fast algorithm for particle simulations». In: *Journal of Computational Physics* (1987).
- [29] L.Greenard e V.Rokhlin. «A new version of the Fast Multipole Method for the Laplace equation in three dimensions». In: *Journal of Cambridge* (1997).
- [30] H.Cheng, L.Greenard e V.Rokhlin. «A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions». In: *Journal of Computational Physics* (1999).
- [31] T.K.Sheel. «Acceleration of Vortex Methods Calculation using FMM and MDGRAPE-3». In: *Progress In Electromagnetics Research B* (2011).
- [32] J.L.Hess. *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Lifting Bodies*. Department of the Navy,Douglas Corporation, 1972.
- [33] J.L.Hess. «A Higher Order Panel Method for Three-Dimensional Potential Flow». In: Fluid Mechanics Conference, 1980.
- [34] J.L.Hess. *An Improved Higher Order Panel Method for Three-Dimensional Lifting Potential Flow*. Douglas Aircraft, 1981.

-
- [35] P.Anusonti-Inthra. *Developments and Validations of Fully Coupled CFD and Particle Vortex Transport Method for High-Fidelity Wake Modeling in Fixed and Rotary Wing Applications*. National Institute of Aerospace, 2010.