

POLITECNICO DI MILANO
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Tesi Magistrale in Ingegneria Matematica



BEYOND RISK-BASED PORTFOLIOS:
BUILDING DIVERSIFIED PORTFOLIOS THAT
OUTPERFORM OUT-OF-SAMPLE

Relatore: Prof. Daniele Marazzina

Candidato:
Luca Bardella
ID: 884526

Anno Accademico 2019-2020

Abstract

Un portafoglio basato sul rischio, per definizione, è costruito mediante le sole informazioni provenienti dalla stima della matrice di covarianza dei rendimenti degli strumenti finanziari disponibili sul mercato. La strategia risultante non mira dunque ad avere nessun controllo esplicito sulla performance per unità di rischio assunti dall'investitore.

Nella prima parte della tesi viene introdotta la "Performance Risk Contribution Concentration" (PRCC), una misura disegnata per essere minima qualora i contributi alla performance e al rischio delle singole componenti del portafoglio risultassero perfettamente allineati. Si discutono le proprietà di tale misura ed il suo utilizzo nella formulazione di un problema di ottimizzazione quadratica volto all'ottenimento di una soluzione che, senza discostarsi troppo dal portafoglio di riferimento, presenti delle migliori proprietà in termini di allineamento fra contributi alla performance e al rischio a livello delle singole componenti.

Nella seconda parte viene invece introdotto l'approccio denominato "Hierarchical Risk Parity" (HRP). I portafogli HRP mirano alla risoluzione di tre macro problematiche degli ottimizzatori quadratici in generale e della soluzione di Markowitz nello specifico: instabilità, concentrazione e sotto-performance.

HRP utilizza una matematica moderna (teoria dei grafi e tecniche di machine learning) per costruire portafogli diversificati basati sulle informazioni contenute nella matrice di covarianza dei rendimenti. Tuttavia, diversamente dagli ottimizzatori quadratici, HRP non richiede l'invertibilità della stessa, essendo in grado di trovare soluzioni in corrispondenza di matrici di covarianza mal-condizionate o addirittura singolari, impresa impossibile per ottimizzatori quadratici.

Indice

Elenco delle tabelle	iv
Elenco delle figure	v
Elenco degli acronimi	vi
Introduzione	1
1 Definizione della misura PRCC	6
1.1 PRCC: quadro generale	6
1.2 Portafoglio di massimo indice di Sharpe	9
1.3 PRCC: formule specifiche	12
1.3.1 Portafoglio MV	13
1.3.2 Portafoglio ERC	15
2 Ottimizzazione di portafogli di rischio	18
2.1 Motivazioni	18
2.2 Ottimizzazione non-lineare	20
2.2.1 Modifica del portafoglio MV	21
2.2.2 Modifica del portafoglio ERC	23
2.2.3 PRCC e performance relativa	24
2.3 Criticità riscontrate	27
2.3.1 Vincolo in performance relativa	28
2.3.2 Interpretazione preservata?	30
2.3.3 PRCC e robustezza	33
3 Ottimizzazione alternativa	43
3.1 Motivazioni	43
3.2 Ottimizzazione 2.0	44
3.2.1 Modifica del portafoglio MV	44
3.2.2 Modifica del portafoglio ERC	45
3.2.3 Ritorni gaussiani?	47

3.3	Backtest	51
4	Portafogli HRP	54
4.1	Motivazioni	54
4.2	L'algoritmo HRP	55
4.2.1	Clustering gerarchico	56
4.2.2	Quasi-diagonalizzazione	59
4.2.3	Bisezione ricorsiva	59
4.2.4	Esempio	61
4.3	Stabilità	64
4.4	Varianti	66
4.5	Backtest	70
5	Conclusioni	72
A	Codici Matlab	79

Elenco delle tabelle

1.1	stimatori annualizzati di media e volatilità dei ritorni	11
1.2	$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*)$ e $\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)$ del portafoglio di massimo indice di Sharpe.	11
1.3	$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w_{MV})$ e $\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w_{MV})$ del portafoglio di minima varianza.	14
1.4	$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w_{ERC})$ e $\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w_{ERC})$ del portafoglio ERC.	16
2.1	Ottimizzazione del portafoglio MV.	21
2.2	Ottimizzazione del portafoglio MV, 10 asset.	22
2.3	Ottimizzazione del portafoglio ERC.	23
2.4	Sintesi strategie.	29
2.5	Soluzione del problema (2.6), MV	32
2.6	Soluzione del problema (2.6), ERC	32
2.7	Robustezza a perturbazione multipla.	36
2.8	Robustezza a perturbazione delle 6 componenti.	37
2.9	Robustezza in performance relativa.	39
2.10	Robustezza in performance relativa.	42
3.1	Ottimizzazione alternativa del portafoglio MV.	45
3.2	Misure di performance e rischio di w_{MV}^{**}	45
3.3	Ottimizzazione alternativa del portafoglio ERC.	46
3.4	Misure di performance e rischio di w_{ERC}^{**}	46
3.5	Curtosi e Asimmetria in eccesso.	50
3.6	Risultati backtest MV.	52
3.7	Risultati backtest ERC.	53
4.1	Stabilità HRP vs MV, matrice mal-condizionata.	64
4.2	Stabilità HRP vs MV, matrice ben-condizionata.	66
4.3	Risultati backtest HRP e varianti.	71

Elenco delle figure

1.1	Analisi delle posizioni del portafoglio di MSR.	12
1.2	Analisi delle posizioni del portafoglio di MV.	14
1.3	Analisi delle posizioni del portafoglio ERC.	16
2.1	Risultato della procedura iterativa (2.1).	19
2.2	Ottimizzazione del portafoglio di MV	22
2.3	Ottimizzazione del portafoglio ERC	24
2.4	Andamento di PRCC e Performance Relativa in dimensione 2.	25
2.5	PRCC-performance relativa, portafogli MV e ERC.	27
2.6	Frontiera efficiente.	29
2.7	Allocazione di rischio in w_{ERC}^*	33
2.8	Robustezza a singola perturbazione, MV	34
2.9	Robustezza a singola perturbazione, ERC	35
2.10	Valori stimati di PRCC	39
2.11	Discostamento in performance relativa	40
2.12	DMQ tra i pesi teorici e stimati	41
2.13	Valori di performance relativa stimati	42
3.1	Allocazione di rischio, w_{ERC}^* vs w_{ERC}^{**}	47
3.2	Distribuzione empirica Asset5	48
3.3	Distribuzione empirica Asset3.	49
4.1	Formazione di cluster	58
4.2	"Heatmap" della matrice di correlazione originale.	62
4.3	Dendrogramma di formazione di cluster.	62
4.4	"Heatmap" in seguito alla quasi-diagonalizzazione.	63
4.5	Allocazione HRP, caso esatto e perturbato.	65
4.6	Allocazione MV, caso esatto e perturbato.	65
4.7	Cluster dei 6 titoli del dataset.	67

Elenco degli acronimi

1. PRCC - Performance Risk Contribution Concentration
2. VaR - Value at Risk
3. ES - Expected Shortfall
4. CPRC - Component Performance Risk Contribution
5. CP - contributi alla performance
6. CR - contributi al rischio
7. MSR - Maximum Sharpe Ratio
8. MV - Minimum Variance
9. ERC - Equally Risk Contribution
10. DMQ - Differenza Media Quadratica
11. EW - Equally Weighted
12. HRP - Hierarchical Risk Parity

Introduzione

Quotidianamente i gestori di investimenti devono elaborare strategie e soluzioni che incorporino le loro previsioni su rischi e ritorni degli strumenti disponibili sul mercato.

Harry Markowitz più di 6 decenni fa provò a fornire una risposta a quello che probabilmente risulta essere il problema più ricorrente in ambito finanziario: la costruzione di portafoglio.

Il suo grande contributo fu quello di aver riconosciuto che strategie di investimento con medesimo rendimento atteso sono associate a diversi livelli di rischio, con l'assunto che fra queste l'investitore razionale sarà portato a preferire quella che minimizza il grado di rischio espresso in termini di varianza del portafoglio: da cui il concetto di "frontiera efficiente".

Nonostante la brillantezza della teoria di Markowitz, alcune problematiche di carattere pratico possono rendere tali soluzioni ben poco affidabili. Il principale problema risiede nel fatto che piccole deviazioni nella stima dei rendimenti attesi possono portare a portafogli molto diversi tra loro (Michaud, 1998). Sarebbe invece desiderabile che piccole perturbazioni sui dati iniziali si riflettessero con piccole perturbazioni sulla soluzione, in termini più matematici viene quindi a mancare una condizione necessaria alla buona positura del problema: la continuità rispetto ai dati iniziali.

Dato che i rendimenti attesi raramente possono essere stimati con sufficiente accuratezza, diversi autori hanno deciso di rimuovere la stima di tali ritorni dalla costruzione della loro strategia di investimento, concentrandosi esclusivamente sulle informazioni provenienti dalla matrice di covarianza. Questo ha portato alla nascita di quelle che tuttora sono definite le strategie di allocazione basate sul rischio.

Tali strategie nascondono una debolezza intrinseca come mostrato da Ardia e Boudt (2015): è solo sotto specifiche condizioni sui rendimenti attesi che i portafogli basati sul rischio risultano essere strategie di investimento efficienti.

Inoltre la rimozione della previsione dei rendimenti a favore di una strategia di investimento basata sulla stima dei parametri di rischio, non mette co-

munque la soluzione al riparo dai possibili errori di stima di quest'ultimi. Per queste ragioni Ardia, Boudt e Nguyen nel loro articolo "Beyond risk-based portfolios: balancing performance and risk contributions in asset allocations" (2018) suggeriscono di raggiungere un compromesso fra i vantaggi e gli svantaggi offerti da una strategia basata sul rischio.

Un ruolo chiave viene giocato dalla "Performance Risk Contribution Concentration" (PRCC), misura disegnata per essere minima in corrispondenza di portafogli con contributi alla performance e al rischio perfettamente allineati a livello di singole componenti.

Spinti dall'osservazione che un portafoglio che aspira ad essere quello di massima performance relativa deve necessariamente esibire un valore nullo di PRCC, gli autori introducono un problema di minimizzazione volto alla modifica dei pesi di un portafoglio basato sul rischio in modo che questo presenti un valore di PRCC più vicino allo zero.

Partendo da un portafoglio di riferimento basato sul rischio, il problema di minimizzazione di PRCC proposto mira dunque ad ottimizzarne i pesi andando ad allineare i contributi alla performance e al rischio apportati dalle singole componenti.

Al fine di preservare l'interpretazione dei pesi di riferimento, derivante da una strategia di allocazione basata sul rischio, tale modifica viene limitata in due direzioni:

1. viene richiesto che la modifica apportata ai pesi del portafoglio di riferimento non vada ad alterarne la performance relativa attesa;
2. viene introdotto un vincolo di disuguaglianza sulla differenza quadratica media fra i pesi, indotta dal problema di minimizzazione di PRCC.

Un ulteriore vantaggio, che secondo gli autori dovrebbe spingere gli investitori verso la costruzione di portafogli a bassi valori di PRCC, risiede nel fatto che tale condizione garantirebbe una maggior robustezza della performance relativa rispetto a possibili errore di stima dei parametri.

L'approccio proposto, che prevede di considerare congiuntamente l'allocazione di rischio e performance fra le componenti del portafoglio, vuole porsi come alternativa al tradizionale problema di ottimizzazione di media-varianza (Markowitz, 1952).

Nella prima parte della tesi viene analizzata con spirito critico la metodologia sopra esposta. I risultati ottenuti seguendo un metodo induttivo sono in contrasto con gli apparenti benefici proposti dagli autori, in particolare:

- viene messo in discussione il presunto beneficio derivante dall'avere una soluzione "ottimizzata" in termini di valori più bassi di PRCC ma che presenti medesima performance relativa del portafoglio originario.

- si mostra come, nonostante i vincoli introdotti al fine di ottenere soluzioni che per "interpretazione" risultassero vicine alle strategie di riferimento basate sul rischio, si giunga a soluzioni le cui proprietà in termini di rischio si discostano notevolmente da quelle originarie.
- si evidenzia come la PRCC non possa essere interpretata come indice di robustezza della performance relativa rispetto a errori di stima dei rendimenti.

La bontà di metodologie che introducono la stima dei rendimenti attesi per problemi di ottimizzazione di strategie basate sul rischio, si misura a parer mio in termini di benefici apportati al netto degli svantaggi introdotti. Sulla base di tale considerazione nella tesi vengono proposte soluzioni ed idee alternative rispetto a quelle citate in letteratura testandone i risultati mediante tecniche di Backtest.

Viene in seguito introdotto un secondo approccio, riportato nell'articolo di Marcos López de Prado intitolato "Building diversified portfolios that outperform out-of-sample" (2016). La metodologia presentata prende il nome di "Hierarchical Risk Parity" (HRP), introdotta per far fronte a tre macro problematiche riguardanti gli ottimizzatori quadratici in generale e la soluzione di Markowitz in particolare: instabilità, concentrazione e sotto-performance. I vantaggi introdotti dalla rimozione della stima dei ritorni nella costruzione di una strategia di investimento, non prevenono comunque la soluzione dal problema dell'instabilità. La ragione è che i metodi di programmazione quadratica richiedono l'invertibilità di una matrice di covarianza definita-positiva (i.e. con tutti gli autovalori positivi).

Tale inversione è soggetta a grandi errori quando la matrice covarianza è numericamente mal-condizionata, ossia presenta un numero di condizionamento molto alto (Bailey e López de Prado, 2012).

Il numero di condizionamento di una matrice di covarianza, correlazione (o normale, dunque diagonalizzabile) è definito come il valore assoluto del rapporto fra il massimo e il minimo (in modulo) autovalore.

Tale numero è più basso per una matrice di correlazione diagonale; non appena si aggiungono investimenti correlati (multicollinearità) il numero di condizionamento aumenta. Ad un certo punto, il numero di condizionamento è talmente alto che errori numerici rendono l'inversa alquanto instabile: piccole variazioni dei parametri in ingresso porteranno ad una inversa molto differente (Bailey e López de Prado, 2012).

Il problema legato all'instabilità della soluzione ha ricevuto una sostanziale attenzione negli anni recenti, come Kolm et al. (2010) hanno avuto modo di documentare. La maggior parte delle strategie presenti in letteratura tenta

di ottenere robustezza incorporando vincoli addizionali (Clarke et al., 2002) o migliorando la stabilità numerica della matrice inversa di covarianza (Ledoit e Wolf, 2003).

Tali metodi, seppur pubblicati in anni recenti, devono la loro derivazione ad aree classiche della matematica: geometria, algebra lineare e calcolo.

Viene invece presentata una nuova tecnica di costruzione di portafoglio mirata alla risoluzione delle problematiche sopra citate e costruita facendo uso di una moderna matematica: teoria dei grafi e machine learning.

Il metodo HRP utilizza le informazioni contenute nella matrice di covarianza senza richiederne la sua inversione o la definita-positività. Infatti, HRP può costruire un portafoglio basandosi su una matrice di covarianza addirittura singolare, richiesta impossibile per problemi la cui risoluzione richiede l'uso di algoritmi di programmazione quadratica.

Come contributo aggiuntivo, verrà proposta una variante della tecnica presentata in letteratura, mostrandone i possibili benefici in termini di raggiungimento di una maggiore stabilità della soluzione. Tutte le tecniche presentate verranno poi testate mediante Backtest.

Nello specifico la tesi è strutturata nel seguente modo:

- Capitolo 1. In questo capitolo vengono introdotte le basi matematico-finanziarie necessarie alla definizione della misura PRCC. Si introduce il portafoglio di massimo indice di Sharpe evidenziandone le proprietà in termini di PRCC. Si conclude poi con l'introduzione del portafoglio di minima varianza (MV) e di uguali contributi al rischio (ERC) che saranno oggetto di ottimizzazione per il resto della trattazione.
- Capitolo 2. Nel capitolo viene indagata più da vicino la relazione fra PRCC e performance relativa di un portafoglio. Nello specifico si introduce il problema di ottimizzazione non lineare (minimizzazione di PRCC soggetta a vincoli) di strategie di rischio proposto dagli autori. Partendo dalle due strategie di rischio introdotte in precedenza, si implementa tale tecnica di ottimizzazione esibendone i risultati. Si conclude infine evidenziando le criticità connesse all'utilizzo dell'approccio presentato.
- Capitolo 3. Alla luce delle analisi in precedenza condotte e delle criticità riscontrate nell'approccio proposto dagli autori, si propongono problemi di ottimizzazione di strategie di rischio alternativi, con l'obiettivo di giustificare a tal fine, almeno a priori, l'introduzione della stima dei rendimenti attesi.

Si conclude sottoponendo le strategie di rischio e le loro versioni ottimizzate a tecnica di Backtest, esibendo e commentando i risultati in performance e rischio da ciascuna mostrati.

- Capitolo 4. Nel capitolo viene presentata la metodologia HRP descrivendone le 3 fasi di cui l'algoritmo si compone: clustering gerarchico, quasi-diagonalizzazione e bisezione ricorsiva e, dopo averne mostrato un esempio di applicazione, si procede con l'analisi della stabilità. Vengono in seguito introdotte varianti della metodologia presentata discutendo i vantaggi da queste offerte. Si conclude infine sottoponendo le strategie di investimento ottenute a Backtest.
- Capitolo 5. Capitolo conclusivo in cui si ripercorrono le analisi, le considerazioni e i principali risultati ottenuti nella tesi.

Capitolo 1

Definizione della misura PRCC

In questo capitolo vengono introdotte le basi matematico-finanziarie necessarie alla definizione della misura PRCC.

Si introduce in seguito il portafoglio di massimo indice di Sharpe mostrando come questo presenti valori nulli di tale misura. Si mostra dunque l'utilizzo della PRCC come strumento diagnostico atto alla valutazione del discostamento dei contributi al rischio e alla performance di un portafoglio finanziario.

Si conclude infine presentando formule specifiche di PRCC nel caso di portafoglio di minima varianza e di portafoglio di uguali contributi al rischio, analizzandone in un caso specifico le allocazioni di performance e rischio a livello di singole componenti.

1.1 PRCC: quadro generale

Si consideri un portafoglio investito in N attività il cui vettore dei pesi viene indicato con $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$. Si assuma di disporre di una misura di performance del portafoglio, indicata con $\mathcal{P}_p(w)$ ed una di rischio, indicata con $\mathcal{R}_p(w)$.

Come menzionato in Caporin et al.(2014), è pratica comune valutare la performance relativa di un portafoglio utilizzando il rapporto che ne indichi il premio per unità di rischio:

$$\tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w) = \frac{\mathcal{P}_p(w)}{\mathcal{R}_p(w)}. \quad (1.1)$$

Le misure usate per la valutazione della performance e del rischio di una strategia di investimento risultano essere, nella maggior parte dei casi, funzioni

omogenee del primo ordine dei pesi di portafoglio.

Ciò significa che, moltiplicare il vettore dei pesi per uno scalare positivo k ed eseguire la valutazione della performance o del rischio del vettore così ottenuto risulta equivalente alla rispettiva valutazione di tali misure in corrispondenza del vettore dei pesi originario ed alla successiva moltiplicazione per k del risultato ottenuto. Nello specifico

$$\mathcal{P}_p(kw) = k\mathcal{P}_p(w) \text{ e } \mathcal{R}_p(kw) = k\mathcal{R}_p(w) \text{ per } k > 0.$$

Nel seguito della tesi verranno utilizzati i rendimenti attesi rapportati al tasso privo di rischio come misura della performance, e la volatilità del portafoglio come suo indice di rischiosità (altre misure di rischio omogenee del primo ordine sono ad esempio il VaR e l'ES sotto assunzione di distribuzioni ellittiche simmetriche dei ritorni).

La proprietà di omogeneità del primo ordine posseduta dalle misure scelte è fortemente legata al teorema di Eulero, dall'applicazione del quale deriva un importante risultato in termini di scomposizione:

$$\mathcal{P}_p(w) = \sum_{i=1}^N w_i \partial_i \mathcal{P}_p(w) \tag{1.2}$$

$$\mathcal{R}_p(w) = \sum_{i=1}^N w_i \partial_i \mathcal{R}_p(w), \tag{1.3}$$

dove con ∂_i si denota la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial w_i}$.

In letteratura i termini

$$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w) \equiv w_i \partial_i \mathcal{P}_p(w), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w) \equiv w_i \partial_i \mathcal{R}_p(w), \tag{1.5}$$

Sono rispettivamente detti contributi delle componenti alla performance e al rischio del portafoglio (Boudt et al., 2008).

Dalla definizione della misura della performance relativa di una strategia di investimento in (1.1), segue immediatamente che il bilancio fra performance e rischio della strategia nel suo complesso è:

$$\mathcal{P}_p(w) = \tau_p^{\mathcal{P}, \mathcal{R}}(w) \mathcal{R}_p(w). \tag{1.6}$$

Ma come si distribuisce questo bilancio tra performance e rischio fra le singole posizioni costituenti il portafoglio?

Per rispondere a tale domanda, gli autori investigano il bilancio fra i contributi alle due quantità apportato dalle singole componenti. Per fare ciò viene definita la *Component Performance/Risk Contribution* dell'asset i come segue:

$$CPRC_i(w) \equiv \mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w).$$

Dalla proprietà di omogeneità del primo ordine e dal conseguente utilizzo del teorema di Eulero, si osserva facilmente che, sfruttando la relazione (1.6), i *Component Performance/Risk Contributions* sono a somma zero:

$$\sum_{i=1}^N CPRC_i = 0. \quad (1.7)$$

Viene a questo punto introdotta la *Performance Risk Contribution Concentration*, misura sintetica per la valutazione della dispersione nel bilancio fra contributi alla performance e al rischio di un portafoglio investito in attività multiple:

$$PRCC(w) \equiv \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w) \right] - \left[\mathcal{C}_j^{\mathcal{P}}(w) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)\mathcal{C}_j^{\mathcal{R}}(w) \right] \right\}^2, \quad (1.8)$$

La doppia sommatoria è riscalata per il fattore $1/(2N^2)$ per via della proprietà dei $CPRC_i$ di avere somma nulla (1.7), grazie alla quale molti dei termini che compaiono in (1.8) si elidono fra loro. Infatti è equivalente definire la $PRCC$ come la somma media quadratica dei $CPRC_i$ (Quantitative Finance, Appendix 1, 2018):

$$PRCC(w) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w) \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[CPRC_i \right]^2 \quad (1.9)$$

Per semplicità computazionale e di interpretazione si utilizza (1.9) come principale definizione di $PRCC$. Infatti, l'interpretazione più naturale per tale misura, è quella di indicare la concentrazione nel disallineamento fra contributi delle componenti alla performance e al rischio di un portafoglio finanziario. Più è alto il valore di $PRCC$ in corrispondenza di un dato portafoglio, maggiore sarà la sua concentrazione in termini di posizioni nelle quali il contributo alla performance diverge da quello al rischio riscalato mediante l'indice di performance relativa del portafoglio.

1.2 Portafoglio di massimo indice di Sharpe

Come anticipato in precedenza, nella tesi vengono utilizzati il ritorno medio in eccesso come indice di performance e la volatilità del portafoglio come sua misura di rischio.

Si denoti con $\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_N)'$, il vettore dei rendimenti attesi degli N assets sul mercato e con $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_N)' \equiv \frac{\mu}{r}$ il vettore dei rendimenti in eccesso rispetto al tasso privo di rischio r .

Si indichi inoltre con Σ la matrice $N \times N$ di covarianza dei rendimenti.

Il rendimento atteso in eccesso del portafoglio può dunque essere scritto come

$$\tilde{\mu}_p(w) \equiv w' \tilde{\mu},$$

mentre la volatilità del portafoglio è data da

$$\sigma_p(w) \equiv \sqrt{w' \Sigma w}.$$

Possiamo dunque ricavare l'espressione dei contributi alla performance e al rischio forniti dal generico asset i che, utilizzando rispettivamente la (1.4) e la (1.5), assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i^\mu(w) &\equiv w_i \partial_i \tilde{\mu}_p(w) = w_i \tilde{\mu}_i, \\ \mathcal{C}_i^\sigma(w) &\equiv w_i \partial_i \sigma_p(w) = w_i \frac{[\Sigma w]_i}{\sigma_p(w)}. \end{aligned}$$

Si definisce a questo punto l'indice di Sharpe come $\tau_p^{\mu,\sigma}(w) \equiv \tilde{\mu}_p(w)/\sigma_p(w)$.

La *PRCC* per un portafoglio con indice di Sharpe $\tau_p^{\mu,\sigma}(w)$ è data da

$$PRCC(w) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\mathcal{C}_i^\mu(w) - \tau_p^{\mu,\sigma}(w) \mathcal{C}_i^\sigma(w) \right]^2. \quad (1.10)$$

Il più basso valore di *PRCC* lo si ottiene in corrispondenza del portafoglio di massimo indice di Sharpe, per il quale la *PRCC* assume valore nullo. Vale infatti la seguente

Proposizione 1.2.1. *Sia $w^* = \arg \max_{w \in \mathcal{C}_{FI}} \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)$ con $\mathcal{C}_{FI} \equiv \{w \in \mathbb{R}^N \mid w \cdot \underline{1} = 1\}$ il portafoglio di massimo indice di Sharpe, allora i contributi alla performance di ogni sua componente risultano uguali ai contributi al rischio riscaldati per l'indice della performance relativa del portafoglio. Risulta cioè*

$$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*) = \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. (Ardia, Boudt e Nguyen, 2018)

Il portafoglio di massima performance relativa (indice di Sharpe) è quello che massimizza la funzione obiettivo $\tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w) = \frac{\mathcal{P}_p(w)}{\mathcal{R}_p(w)}$ sotto il vincolo di investimento totale della ricchezza a disposizione. Nell'ambito della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange per lo studio dei punti stazionari di una funzione soggetta a vincoli di frontiera, la Lagrangiana relativa al problema di ottimizzazione in esame risulta essere

$$\mathcal{L}(w, \lambda) \equiv \frac{\mathcal{P}_p(w)}{\mathcal{R}_p(w)} - \lambda(w \cdot \mathbf{1} - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dalla condizione di prim'ordine ricaviamo che i pesi del portafoglio di massimo performance relativa, che indichiamo con w^* , saranno tali per cui risulterà:

$$\begin{aligned} \partial_i \mathcal{L}(w^*, \lambda) &= \frac{1}{\mathcal{R}_p^2(w^*)} [\mathcal{R}_p(w^*) \partial_i \mathcal{P}_p(w^*) - \mathcal{P}_p(w^*) \partial_i \mathcal{R}_p(w^*)] - \lambda \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}_p(w^*)} [\partial_i \mathcal{P}_p(w^*) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \partial_i \mathcal{R}_p(w^*)] - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando per w_i^* entrambi i lati della condizione sopra ricavata si ha $\frac{1}{\mathcal{R}_p(w^*)} [\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)] - \lambda w_i^*$, da cui:

$$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*) = \mathcal{R}_p(w^*) \lambda w_i^*. \quad (1.11)$$

Dato che $\sum_{i=1}^N [\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)] = 0$, sfruttando la (1.11) si ricava che $\mathcal{R}_p(w^*) \lambda w_i^* \cdot \mathbf{1} = 0$, grazie a cui, utilizzando il vincolo di totale investimento di capitale unito a $\mathcal{R}_p(w^*) > 0$, segue $\lambda = 0$.

Inserendo tale informazione nella (1.11) si ottiene

$$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*) - \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w^*) \mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*) = 0, \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Il valore della *PRCC* in corrispondenza del portafoglio di massima performance relativa risulta dunque essere nullo. □

Nel seguito del paragrafo vengono riportati i risultati relativi alla costruzione su base annua del portafoglio di massimo indice di Sharpe con conseguente analisi dell'allocationi dei contributi alla performance e al rischio tra le sue componenti.

Il dataset utilizzato presenta i valori giornalieri di sei asset da Ottobre 2009 a Novembre 2013, per un totale di 1066 osservazioni.

	media annua	volatilità annua
Asset1	0.2483	0.2322
Asset2	0.1005	0.0935
Asset3	0.1125	0.2311
Asset4	0.3689	0.2374
Asset5	0.1903	0.1955
Asset6	0.1922	0.2555

TABELLA 1.1: stimatori annualizzati di media e volatilità dei ritorni .

Come indicatori di sintesi di ciascuna attività in Tabella 1.1 si riportano i valori annualizzati degli stimatori di media e volatilità dei rendimenti.

La soluzione relativa al portafoglio di massimo indice di Sharpe, indicata con w^* , è associata al seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} w^* = \arg \max_w \tau_p^{\mu, \sigma}(w) \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.12)$$

Nella seguente tabella vengono mostrati i pesi del portafoglio di massima performance relativa derivanti dalla risoluzione del problema sopra esposto, vengono inoltre presentati i contributi assoluti di ciascuna componente alla performance e al rischio del portafoglio, indicati rispettivamente con $\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*)$ e $\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)$.

	w^*	$\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*)$	$\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)$
Asset1	0	0	0
Asset2	0.1813	0.6075	0.0096
Asset3	0	0	0
Asset4	0.4907	6.0337	0.0957
Asset5	0.3280	2.0806	0.0330
Asset6	0	0	0
somma	1	8.7217	0.1383

TABELLA 1.2: $\mathcal{C}_i^{\mathcal{P}}(w^*)$ e $\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(w^*)$ del portafoglio di massimo indice di Sharpe.

La strategia di investimento ottenuta risulta essere, in prima approssimazione, concentrata nella metà degli asset a disposizione sul mercato, di conse-

guenza sono soltanto i contributi alla performance ed al rischio in corrispondenza di tali componenti ad assumere valori non nulli.

Calcolando la *PRCC* del portafoglio se ne ottiene, in linea con la teoria presentata sin qui, un valore nullo.

Partendo dai valori riportati in Tabella 1.2, si rappresentano graficamente le posizioni del portafoglio, evidenziando come il rapporto che sussiste fra i contributi assoluti alla performance e al rischio eguagli proprio l'indice di Sharpe del portafoglio che nel caso specifico assume il valore di 63.0462 essendo il rapporto fra l'indice di rendimento e di rischio della strategia finanziaria in esame.

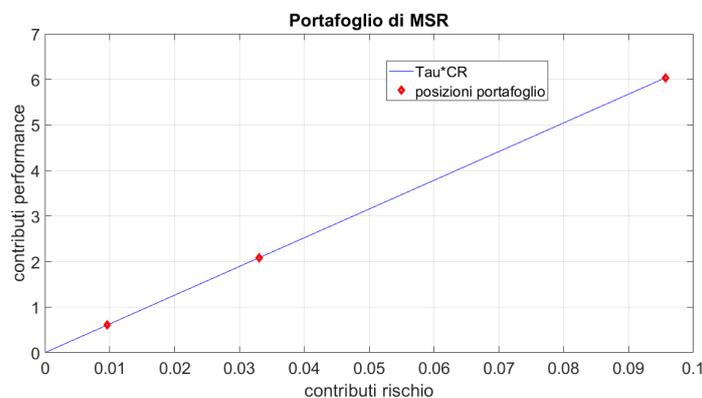


FIGURA 1.1: Analisi delle posizioni del portafoglio di MSR.

Il grafico in Figura 1.1 presenta in ascissa i contributi al rischio ed in ordinata quelli alla performance.

In rosso viene inoltre evidenziata la relazione che sussiste tra i contributi offerti dalle singole componenti del portafoglio: risulta immediato notare come questi appartengano alla retta la cui pendenza è data proprio dall'indice di Sharpe connesso alla strategia di investimento.

Si nota dunque come ciascun contributo alla performance risulti essere uguale al corrispondente contributo al rischio moltiplicato per la performance relativa del portafoglio: tale proprietà è esattamente in linea con il valore nullo di *PRCC* ottenuto.

1.3 PRCC: formule specifiche

Nel paragrafo corrente vengono introdotte le due principali strategie di costruzione di portafoglio basate sul rischio che saranno oggetto di analisi nel

resto della tesi: il portafoglio di minima varianza (MV) e quello di uguali contributi al rischio (ERC).

Vengono presentati i problemi di ottimizzazione che conducono all'ottenimento di tali strategie di investimento mostrandone al tempo stesso formule specifiche di *PRCC*.

Dopo aver calcolato entrambi i portafogli mediante le informazioni provenienti dal dataset introdotto nel paragrafo precedente, si conclude con il calcolo dei rispettivi valori di PRCC e con la conseguente analisi grafica delle posizioni, volta a mettere in luce l'eventuale disallineamento tra i contributi alla performance ed al rischio delle singole componenti.

1.3.1 Portafoglio MV

Come tutte le strategie di investimento basate sul rischio, la costruzione del portafoglio di minima varianza risulta indipendente dalla stima dei rendimenti attesi, focalizzandosi esclusivamente sull'ottenimento di un vettore dei pesi che, al netto dei vincoli imposti, individui la strategia con minore variabilità nel rendimento.

Formalmente la soluzione è connessa alla risoluzione del seguente problema di ottimizzazione quadratica:

$$\begin{cases} w_{MV} = \arg \min_w w' \Sigma w \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.13)$$

Di seguito viene riportata la versione semplificata dell'espressione di PRCC specifica del portafoglio di minima varianza (Quantitative Finance, Appendix 3, 2018).

$$PRCC(w_{MV}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{w_{MV}(i)[\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_p(w_{MV})]\}^2. \quad (1.14)$$

Come si evince dalla (1.14), in questo caso, i contributi al rischio non influenzano sulla PRCC, il cui valore è funzione del solo discostamento presente tra i contributi percentuali di ciascun asset e l'indice di performance collettiva del portafoglio.

Risolvendo numericamente il problema di ottimizzazione quadratica (1.13) otteniamo dunque il portafoglio di minima varianza costruito su base annua

di cui si riportano il vettore dei pesi con i rispettivi valori dei contributi alla performance e alla volatilità del portafoglio stesso.

	w_{MV}	$C_i^P(w_{MV})$	$C_i^R(w_{MV})$
Asset1	0	0	0
Asset2	0.8832	2.9587	0.0786
Asset3	0	0	0
Asset4	0.1168	1.4366	0.0104
Asset5	0	0	0
Asset6	0	0	0
somma	1	4.3953	0.0889

TABELLA 1.3: $C_i^P(w_{MV})$ e $C_i^R(w_{MV})$ del portafoglio di minima varianza.

L'obiettivo di ridurre al minimo il rischio associato alla strategia di investimento, conduce spesso il portafoglio di minima varianza ad ignorare molteplici attività presenti sul mercato, giungendo, come nel caso specifico, a strategie che concentrano gli investimenti in una ridotta gamma di asset. Essendo i pesi determinati senza fare uso dei rendimenti attesi stimati, risulta naturale aspettarsi un disallineamento dei contributi alla performance ed al rischio in corrispondenza delle posizioni del portafoglio. Utilizzando infatti la (1.14) si giunge ad un valore di PRCC pari a 0.2841.

Si rappresenta in seguito la relazione esistente tra i contributi apportati al portafoglio dalle singole componenti costituenti la strategia in esame.

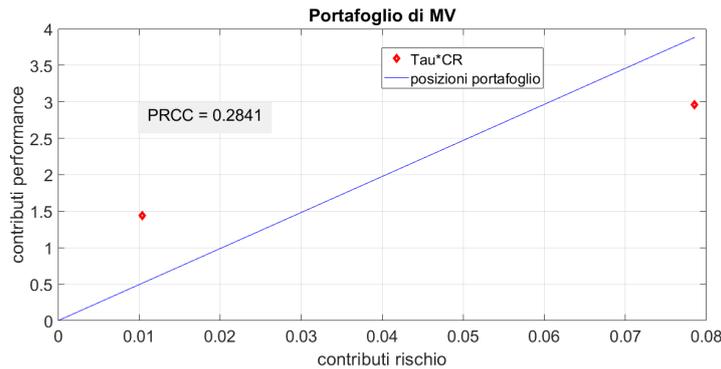


FIGURA 1.2: Analisi delle posizioni del portafoglio di MV.

Come facilmente prevedibile le posizioni della strategia presentano un disallineamento in termini di contributo alla performance ed al rischio del portafoglio: non giacciono infatti sulla retta la cui pendenza corrisponde alla

performance relativa del portafoglio.

Tale disallineamento si manifesta mediante un valore non nullo di PRCC.

1.3.2 Portafoglio ERC

La seconda strategia basata sul rischio che viene presa in esame è quella mirata alla costruzione del portafoglio con medesimi contributi al rischio.

Abbiamo visto come, sotto ipotesi di omogeneità del prim'ordine, l'indice di rischio di un portafoglio possa essere decomposto nella somma dei contributi assoluti al rischio delle singole componenti (1.3) e (1.5).

Il portafoglio di uguali contributi al rischio è dunque quello in cui le componenti partecipano allo stesso modo alla composizione del rischio del portafoglio.

Il problema di ottimizzazione quadratica da cui discende la soluzione è il seguente:

$$\begin{cases} w_{ERC} = \arg \min_w \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [C_i^\sigma(w) - C_j^\sigma(w)]^2 \right\} \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.15)$$

Di seguito viene riportata la versione semplificata dell'espressione di PRCC specifica del portafoglio con uguali contributi al rischio (Quantitative Finance, Appendix 3, 2018).

$$PRCC(w_{ERC}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[w_{ERC}(i) \tilde{\mu}_i - \frac{\tilde{\mu}_p(w_{ERC})}{N} \right]^2. \quad (1.16)$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per il portafoglio di minima varianza, dalla (1.16) notiamo che anche per il portafoglio con uguali contributi al rischio, la PRCC risulta indipendente dall'apporto delle componenti al rischio della strategia.

Risolviendo numericamente il problema di ottimizzazione quadratica (1.15) nel nostro caso specifico, ricaviamo dunque la soluzione costruito su base annua, di cui si riportano in Tabella 1.4 il vettore dei pesi con i rispettivi valori dei contributi alla performance e alla volatilità del portafoglio ottenuto.

	w_{ERC}	$C_i^P(w_{ERC})$	$C_i^R(w_{ERC})$
Asset1	0.1404	1.1625	0.0221
Asset2	0.3316	1.1110	0.0221
Asset3	0.1130	0.4240	0.0221
Asset4	0.1457	1.7911	0.0221
Asset5	0.1702	1.0796	0.0221
Asset6	0.0991	0.6347	0.0221
somma	1	46.2030	0.1326

TABELLA 1.4: $C_i^P(w_{ERC})$ e $C_i^R(w_{ERC})$ del portafoglio ERC.

Come facilmente intuibile, a differenza dei casi precedenti, il vincolo imposto dal problema relativo all'apporto di medesimi contributi al rischio da parte delle componenti, elimina il problema della concentrazione, conducendo ad una soluzione diversificata negli investimenti.

Utilizzando la (1.16) si ottiene per il portafoglio un valore di PRCC pari a 0.1882, che implica dunque la presenza di posizioni nella strategia in corrispondenza delle quali non si ha il perfetto allineamento tra contributi alla performance ed al rischio del portafoglio. A supporto di tale considerazione si mostra la Figura 1.3:

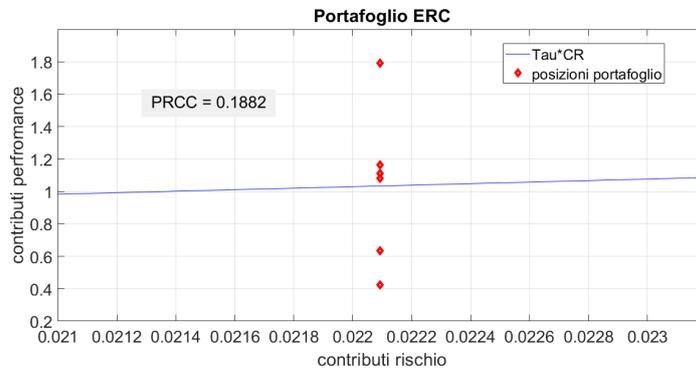


FIGURA 1.3: Analisi delle posizioni del portafoglio ERC.

Abbiamo dunque visto attraverso casi specifici come la $PRCC$ possa essere utilizzata come strumento diagnostico per la valutazione di un portafoglio. L'utilizzo a posteriori di tale misura concerne specialmente l'analisi delle strategie di investimento basate sul rischio, le quali per definizione non introducono alcun controllo sull'allocazione di performance a livello delle componenti. Valori non nulli di $PRCC$ indicano dunque una violazione della condizione necessaria per avere un portafoglio di massima performance relativa.

Le componenti di tale portafoglio infatti, presentano un rapporto fra contributi alla performance e al rischio che eguaglia la performance relativa del portafoglio nel suo complesso.

Viene a questo punto da chiedersi se tale proprietà costituisca solo una condizione necessaria o se invece risulti essere anche sufficiente all'ottenimento del portafoglio di massimo indice di Sharpe.

Nel seguente capitolo verrà dunque indagato più da vicino il legame fra la performance relativa di un portafoglio ed il suo valore di *PRCC*.

Capitolo 2

Ottimizzazione di portafogli di rischio

Nel corso del capitolo viene studiata più da vicino la relazione che sussiste fra la performance relativa di un portafoglio ed il suo valore di *PRCC*, con l'obiettivo di indagare le motivazioni che spingono all'utilizzo della *PRCC* nel processo di costruzione di una strategia di investimento e non solo nella sua valutazione a posteriori.

Nello specifico gli autori propongono un problema di minimizzazione di *PRCC* volto all'ottimizzazione di portafogli basati sul rischio.

Partendo dalle due strategie di rischio introdotte in precedenza, si implementa tale tecnica di ottimizzazione esibendone i risultati. Si conclude infine evidenziando le criticità connesse all'utilizzo dell'approccio presentato.

2.1 Motivazioni

Le motivazioni che hanno condotto alla definizione della misura *PRCC* ed al suo utilizzo nella valutazione a posteriori di strategie di investimento, trovano la loro origine nel perfetto allineamento in termini di contributi in performance e rischio offerti da ciascuna delle componenti del portafoglio di massimo indice di Sharpe, il quale, come ampiamente sottolineato, presenta valori nulli di *PRCC*.

Risulta dunque evidente che una leggera perturbazione del vettore dei pesi di tale portafoglio conduca al tempo stesso ad un aumento del valore di *PRCC* e ad una diminuzione dell'indice di performance relativa.

Non è invece chiaro a priori se in generale un aumento di *PRCC* implichi necessariamente una diminuzione della performance relativa o viceversa.

Partendo dunque dal portafoglio di massimo indice di Sharpe, ci si muova, minimizzando la distanza media quadratica fra soluzioni successive, verso portafogli con valori crescenti di PRCC, riportando per ciascuno di questi il corrispondente valore di performance relativa.

Più precisamente, il generico passo i della procedura iterativa costruita, può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} w_{i+1} = \arg \min_w \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (w(k) - w_i(k))^2 \\ PRCC(w) = PRCC(w_i) + 0.05 \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w(k) \leq 1, \forall k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si riporta di seguito il risultato grafico relativo all'esperimento condotto.

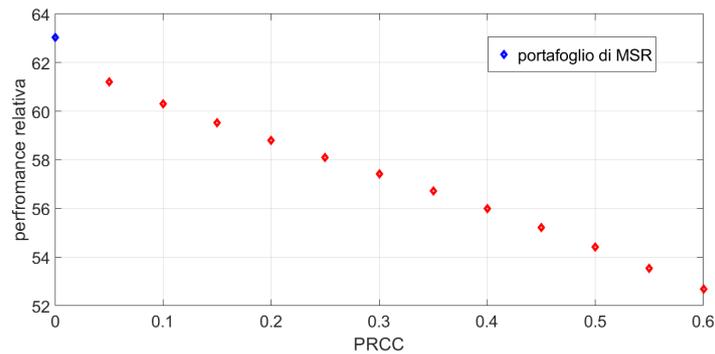


FIGURA 2.1: Risultato della procedura iterativa (2.1).

La Figura 2.1 riporta in rosso le soluzioni ottenute nella risoluzione della procedura iterativa (2.1).

Risulta immediato constatare come, vincolando le soluzioni ad assumere valori crescenti di PRCC, si ottengano in risposta valori decrescenti di performance relativa.

Si potrebbe dunque supporre l'esistenza di un trade-off tra valori di PRCC e quelli di performance relativa e di conseguenza si potrebbe essere orientati alla modifica dei pesi individuati mediante una strategia di rischio in favore di un portafoglio con valori di PRCC inferiori.

La modifica in tal senso della strategia di investimento sottostante, sarebbe da intendersi come tentativo di ottimizzazione della stessa, giungendo ad un portafoglio che presenti degli incentivi maggiori in termini di un aumento della performance attesa per unità di rischio stimato assunto.

2.2 Ottimizzazione non-lineare

Fino ad ora abbiamo assunto che performance relativa e $PRCC$ fossero implicitamente determinati in seguito alla specifica dei pesi di portafoglio.

In tale paragrafo si presenta la procedura inversa: viene preso in esame il problema rivolto all'individuazione della soluzione che minimizzi la $PRCC$ sotto un vincolo imposto sul valore di performance relativa.

Si denoti il portafoglio di riferimento basato sul rischio mediante $w_{rischio}$ e con $\tau_p^{rischio}$ la sua performance relativa.

La tecnica presentata dagli autori mira a migliorare i pesi del portafoglio di rischio \tilde{w} portandoli in una direzione nella quale il rapporto tra i contributi alla performance ed al rischio (i.e. $C_i^{\mathcal{P}}(w)/C_i^{\mathcal{R}}(w)$) siano più simili alla performance relativa $\tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w)$ del portafoglio.

In questo modo i pesi ottenuti violano meno la condizione del prim'ordine del portafoglio di massima performance relativa.

Al fine di preservare l'interpretazione dei pesi del portafoglio di rischio e di limitare l'impatto del potenziale errore di stima dei rendimenti attesi, si introducono due differenti restrizioni:

- Si richiede che la modifica apportata ai pesi non vada ad alterarne la performance relativa
- Si impone un vincolo di disuguaglianza sulla differenza media quadratica tra i pesi originari e la loro versione modificata

Tali richieste, unite a quelle di avere un portafoglio con posizioni comprese tra 0 e 1 e di investire la totalità della ricchezza, conducono al seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} w_{rischio}^* = \arg \min_w PRCC(w), \\ \tau_p^{\mathcal{P},\mathcal{R}}(w) = \tau_p^{rischio}, \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w(i) - w_{rischio}(i))^2 \leq \xi^2, \\ w \cdot \underline{1} = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.2)$$

Da un punto di vista computazionale il (2.2) risulta essere un problema di ottimizzazione non lineare. Quando la $PRCC$ presenta un andamento "liscio" della derivata prima e seconda (calcolata rispetto a w), la soluzione può essere facilmente ottenuta con l'utilizzo di algoritmi di programmazione quadratica.

La precedente richiesta viene rispettata sotto le ipotesi di lavoro assunte, ossia avvalendosi della media rapportata al tasso privo di rischio come indice di performance e della volatilità come misura di rischio.

Si noti infine come il problema (2.2) ammetta comunque sempre una soluzione, vale a dire $w_{rischio}$, usato per inizializzare l'algoritmo di programmazione quadratica sequenziale.

2.2.1 Modifica del portafoglio MV

Avendo già implementato nel capitolo precedente la strategia di minima varianza, si procede ora alla sua modifica secondo il problema (2.2), nel quale, come vincolo superiore per la distanza media quadratica tra i pesi si prende $\xi = 10\%$.

In accordo con la notazione sopra utilizzata si indicano rispettivamente con w_{MV} e w_{MV}^* il portafoglio di minima varianza e la sua versione ottimizzata, i cui pesi e valori di $PRCC$ sono riportati in Tabella 2.1.

	w_{MV}	w_{MV}^*
Asset1	0	0.1698
Asset2	0.8832	0.7130
Asset3	0	0
Asset4	0.1168	0.0837
Asset5	0	0
Asset6	0	0.0334
PRCC	0.2841	0.0632

TABELLA 2.1: Ottimizzazione del portafoglio MV.

La soluzione ottimizzata presenta dei valori di performance e rischio stimati pari a 5.0381 e 0.1019 rispettivamente.

Entrambi gli indici risultano in aumento rispetto a quelli posseduti dal portafoglio di MV, i cui valori nel medesimo ordine sono di 4.3953 e 0.0889, ma che comunque, in linea con il vincolo di stessa performance relativa, presentano anch'essi un rapporto pari a 49.4179.

Senza riportare i valori numerici dei contributi forniti a tali indici dalle posizioni di entrambe le strategie, ci limitiamo a riportarne graficamente l'allineamento rispetto alla performance relativa complessiva, fornendo l'intuizione visiva di come la soluzione ottimizzata presenti un miglior bilancio tra i contributi di ciascuna sua componente.

La Figura 2.2 mostra come le componenti di w_{MV}^* giacciono in prossimità della retta di pendenza pari alla performance relativa di entrambe le strategie.

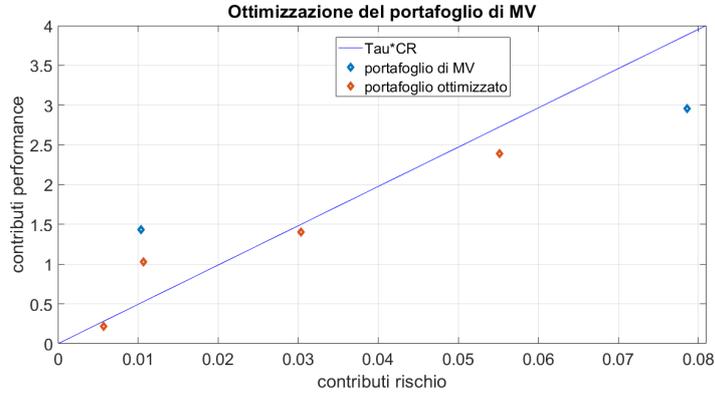


FIGURA 2.2: Ottimizzazione del portafoglio di MV

Si può in secondo luogo notare come la soluzione ottimizzata abbia solo in parte sopperito all'estrema concentrazione presentata da quella originaria. Si giunge infatti ad una strategia che, risultando più omogenea nel suo complesso, non prevede però alcun investimento nell'Asset3 e nell'Asset5. Tale difetto viene maggiormente amplificato al crescere della numerosità delle attività finanziarie considerate. Estruendo infatti in maniera casuale 10 asset dai 50 potenzialmente disponibili nel nostro dataset, la risoluzione del problema relativo all'ottimizzazione del portafoglio di minima varianza, condurrebbe alle soluzioni riportate in Tabella 2.2:

	w_{MV}	w_{MV}^*
Asset1	0	0
Asset2	0.0158	0.0172
Asset3	0	0
Asset4	0	0
Asset5	0	0
Asset6	0	0
Asset7	0	0
Asset8	0.3221	0.1610
Asset9	0.1132	0.0179
Asset10	0.5490	0.8039
PRCC	0.5101	0.0239

TABELLA 2.2: Ottimizzazione del portafoglio MV, 10 asset.

Si osserva immediatamente come il notevole abbassamento di PRCC non sia stato raggiunto a discapito della concentrazione della soluzione.

La ragione di tale comportamento è intrinseca alla formulazione del problema: in corrispondenza di una strategia concentrata su una ridotta gamma di attività, il valore di PRCC è naturalmente determinato dalle sole posizioni non nulle del portafoglio.

Non investire in determinati asset equivale a ricevere da questi contributi nulli alla performance ed al rischio.

Si può dunque verificare che, a causa dei vincoli imposti che si traducono in costrizioni sulle possibilità di allocazione della ricchezza, risulti più conveniente non diversificare ulteriormente la strategia, avvantaggiandosi dei numerosi contributi nulli in PRCC che caratterizzano i portafogli molto concentrati.

Come risultato si ottiene una redistribuzione della ricchezza fra le medesime attività evitando quindi l'investimento in nuovi titoli i cui contributi in PRCC risulterebbero maggiori rispetto alle diminuzioni indotte da una migliore allocazione della ricchezza tra i titoli già presenti nel portafoglio.

Si potrebbe dunque pensare di allentare il vincolo sulla differenza media quadratica tra la soluzione ottimizzata e quella originaria incrementando il valore del parametro ξ , le controindicazioni relative ad una tale scelta verranno però discusse in seguito.

2.2.2 Modifica del portafoglio ERC

Per completezza, denotando con w_{ERC} il portafoglio ERC e con w_{ERC}^* la sua versione ottimizzata secondo il problema (2.2), se ne riportano i valori in Tabella 2.3.

	w_{ERC}	w_{ERC}^*
Asset1	0.1404	0.2976
Asset2	0.3316	0.3972
Asset3	0.1130	0.0099
Asset4	0.1457	0.0296
Asset5	0.1702	0.2271
Asset6	0.0991	0.0386
PRCC	0.1882	0.0100

TABELLA 2.3: Ottimizzazione del portafoglio ERC.

Il portafoglio ERC presenta una performance stimata pari a 6.2030 ed una volatilità di 0.1326 (che naturalmente risulta maggiore di quella del portafoglio di MV).

Il vincolo di preservare inalterata la performance relativa che nel caso specifico è pari a 46.7930, conduce questa volta all'abbassamento di entrambi gli indici (performance e volatilità) nella soluzione ottimizzata che rispettivamente assumo i valori di 5.8838 e 0.1257.

A differenza del caso precedente non si hanno problemi di concentrazione della soluzione, investire nella totalità delle attività finanziarie a disposizione risulta infatti essere condizione necessaria all'ottenimento di una strategia con medesimi contributi al rischio.

Si evitano dunque le potenziali problematiche discusse in precedenza connesse con l'ottimizzazione di strategie concentrate in pochi asset.

Si riportano infine in Figura 2.3 i contributi alla performance e al rischio delle posizioni della soluzione ottimizzata in relazione a quelli offerti dalla strategia di rischio di riferimento.

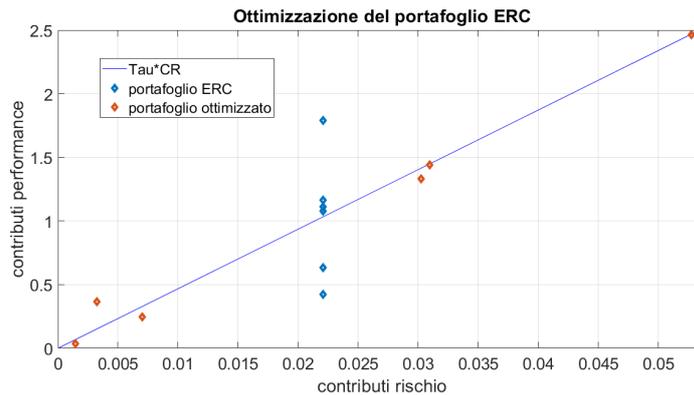


FIGURA 2.3: Ottimizzazione del portafoglio ERC

2.2.3 PRCC e performance relativa

In chiusura del paragrafo 2.1, al seguito dell'esperimento empirico condotto sul portafoglio di massimo indice di Sharpe (i cui risultati sono riportati in Figura 2.1), ci si è interrogati sulla possibile esistenza di un trade-off tra i valori di PRCC e performance relativa di un portafoglio che potrebbe orientare l'investitore alla modifica dei pesi individuati da una strategia di rischio in favore di una a più bassi valori di PRCC.

La formulazione del problema di ottimizzazione non lineare proposto dagli autori sembra però offrire una risposta implicita a tale interrogativo: nell'ottimizzare i pesi dei portafogli di rischio si procede infatti alla minimizzazione

di PRCC sotto il vincolo di stessa performance relativa, lasciando dunque intuire come una diminuzione della prima non porti necessariamente ad un aumento della seconda.

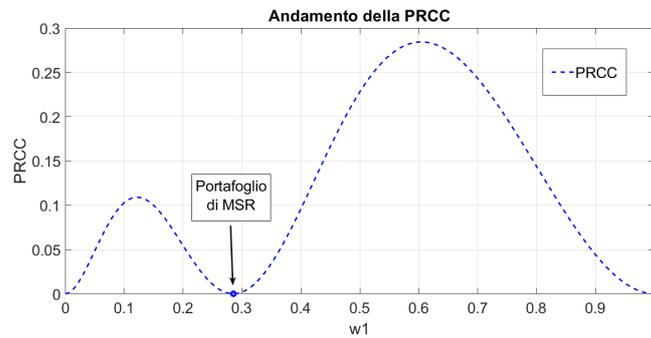
Per averne un'ulteriore conferma visiva, si considerino tutti i possibili sottoinsiemi di 2 asset che si possono formare a partire dai 6 utilizzati sin qui nella costruzione di portafoglio.

Per ognuno dei sottoinsiemi così individuati, si è deciso di rappresentare l'andamento di PRCC e performance relativa al variare dei possibili portafogli ottenibili con gli asset del sottoinsieme considerato.

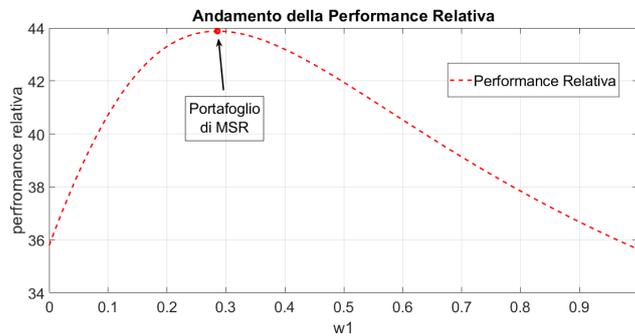
Sfruttando il vincolo di completamento ad uno delle componenti del vettore $w = (w_1, w_2)$ contemporaneamente alla richiesta che queste siano comprese fra 0 e 1, è possibile caratterizzare ciascun portafoglio mediante una sola delle componenti (es. w_1), nel seguente modo:

$$w_1 \leftrightarrow (w_1, w_2) \quad \forall w_1 \in [0, 1], \text{ con } w_2 = 1 - w_1.$$

Facendo uso della relazione biunivoca sopra riportata, si presenta a titolo esemplificativo la relazione tra le due grandezze in esame al variare della prima componente dei portafogli costruiti ad esempio coi titoli 1 e 2.



(1)



(2)

FIGURA 2.4: Andamento di PRCC e Performance Relativa in dimensione 2.

La Figura 2.4 apre a diverse considerazioni: innanzitutto bisogna osservare come la PRCC assuma valori nulli al bordo del dominio di rappresentazione, fatto che risulta del tutto naturale in dimensione 2.

I bordi del dominio corrispondono infatti a portafogli che investono tutta la ricchezza nel primo o nel secondo asset e che dunque nei due casi, risultano rispettivamente responsabili della performance e del rischio di portafoglio.

La componente nulla dunque non dà alcun apporto alla PRCC al pari della seconda componente che per costruzione determina la performance relativa dell'intera strategia e che dunque non può che offrire contributi alla performance ed al rischio in linea con essa.

Si osserva inoltre come il portafoglio di massimo indice di Sharpe sia situato in una "buca" di PRCC che, in corrispondenza del valore $w_1 = 0.2854$ della sua prima componente, assume, in linea con i risultati teorici, un valore nullo. Nel perturbare la soluzione risalendo la buca di PRCC si andrebbe incontro ad una diminuzione di performance relativa, che come mostrato, presenta sempre una concavità rivolta verso il basso.

Tale comportamento però persiste fino al raggiungimento dei due punti stazionari in corrispondenza dei quali si ha una inversione di concavità della PRCC: esternamente a questi infatti, la successiva diminuzione della PRCC è accompagnata dalla diminuzione della performance relativa che come sottolineato non modifica la sua concavità.

Tornando al nostro problema originario, sorge a questo punto spontaneo domandarsi quale sia l'andamento locale della PRCC e della performance relativa nei pressi dei portafogli di MV e di ERC rispettivamente.

Per rispondere a tale interrogativo, a partire da questi due portafogli, si è deciso di implementare una procedura iterativa che, minimizzando la differenza media quadratica fra soluzioni successive, abbattesse ogni volta del 10% il loro valore di PRCC.

Il generico passo i della procedura può essere sintetizzato come segue:

$$\begin{cases} w_{i+1} = \arg \min_w \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (w(k) - w_i(k))^2 \\ PRCC(w) = 0.9 \times PRCC(w_i) \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w(k) \leq 1, \forall k = 1, \dots, N. \end{cases}$$

I risultati che ne conseguono (in Figura 2.5) mostrano come la modifica di tali strategie di rischio a favore di soluzioni a più bassi valori di PRCC non

assicurino il raggiungimento di una più alta performance relativa. In verde vengono infatti riportate le soluzioni derivanti dalla risoluzione del problema di ottimizzazione non lineare (2.2) dal quale è stato però rimosso il vincolo di mantenimento della stessa performance relativa.

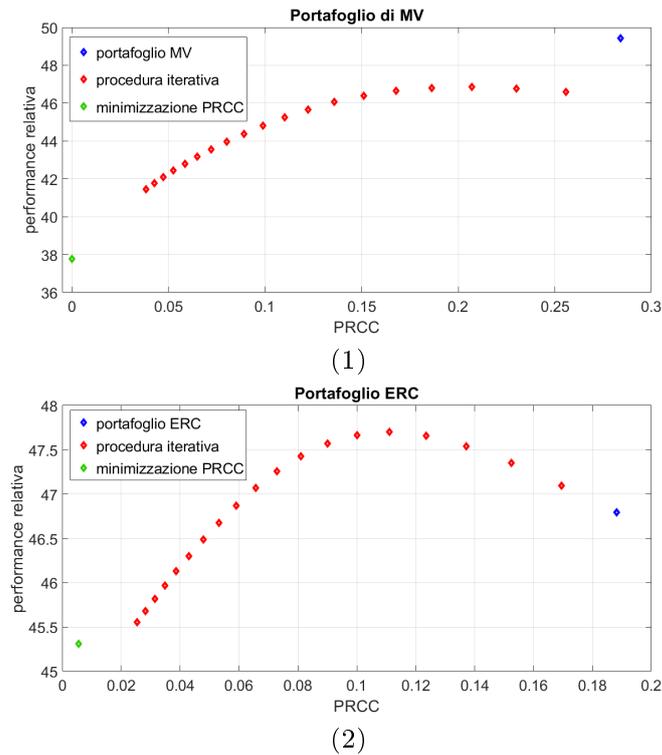


FIGURA 2.5: PRCC-performance relativa, portafogli MV e ERC.

2.3 Criticità riscontrate

Le strategie di rischio nascono appositamente con lo scopo di rimuovere la stima dei rendimenti attesi e dei problemi ad essa connessi dal processo di costruzione di portafoglio.

Le tecniche che, partendo da un portafoglio di rischio, ne prevedono una modifica per mezzo delle informazioni derivanti da tale stima, potrebbero costituire un incentivo per l'investitore qualora il compromesso introdotto tra vantaggi e svantaggi propendesse maggiormente verso i primi.

Il problema di ottimizzazione non lineare introdotto dagli autori, nasce principalmente con lo scopo di correggere i portafogli di rischio in modo che possano presentare un miglior bilancio tra i contributi offerti da ciascuna componente, senza però volerne perdere completamente l'interpretazione.

Si vuole raggiungere il primo obiettivo mediante minimizzazione di PRCC ed il secondo imponendo delle restrizioni sulle possibilità di modifica apportate al portafoglio di riferimento.

Il valore di PRCC di un portafoglio viene inoltre interpretato come indice di robustezza della sua performance relativa rispetto a possibili errori di stima delle statistiche dei rendimenti.

Il seguito del paragrafo è dedicato all'indagine dei risultati ottenuti in relazione ai propositi prefissati dagli autori e all'introduzione di esperimenti addizionali volti a mostrare l'inadeguatezza della PRCC come indice di robustezza della performance relativa di un portafoglio.

2.3.1 Vincolo in performance relativa

L'obiettivo di trovare un bilancio fra misure di "guadagno" e di "costo" marginali sembra intuitivo nella prospettiva di massimizzazione del profitto.

Infatti, il portafoglio di massimo indice di Sharpe è tale per cui il contributo in performance di ciascun asset risulta proporzionale al rispettivo contributo alla volatilità, la costante di proporzionalità risulta proprio essere la performance relativa dell'intero portafoglio.

Il problema principale risiede però nel fatto che il trade-off tra PRCC e performance relativa sembra essere prerogativa locale del solo portafoglio di massima performance relativa.

Più precisamente si è osservato come il portafoglio di massimo indice di Sharpe risieda in una "buca" di PRCC e come la sua perturbazione entro certi limiti possa condurre ad una diminuzione progressiva del valore di performance relativa.

Tale fenomeno non è però di natura generale: la Figura 2.5 mostra chiaramente come, a partire dal portafoglio di MV piuttosto che da quello di ERC, si possa giungere a soluzioni con minor performance relativa nonostante queste presentino valori inferiori di PRCC.

La problematica riscontrata sembra essere implicitamente contenuta nella formulazione del problema (2.2), nel quale la minimizzazione di PRCC è accompagnata dalla richiesta che la soluzione preservi la stessa performance relativa di quella originaria.

Sembra a priori contro-intuitivo introdurre la stima dei rendimenti attesi (implicitamente contenuti nella definizione di PRCC) in un problema di ottimizzazione di strategie di rischio che conduce però ad una soluzione con medesima performance relativa stimata.

Ci si aspetterebbe che un approccio di ottimizzazione di portafogli di rischio fosse tale da garantire, perlomeno a livello di risultati previsti, soluzioni con un miglior rendimento rapportato al rischio intrinseco alla strategia stessa.

La tecnica che fa uso della PRCC come strumento di costruzione di portafogli, come detto, costituisce nelle intenzioni degli autori un'alternativa al classico approccio media varianza proposto da Markowitz nel 1952.

Al fine di esplicitare con un esempio concreto le perplessità evidenziate, si è deciso di porre in relazione le due strategie, valutando ad esempio la soluzione ottimizzata del portafoglio di MV ottenuto risolvendo il problema (2.2) in riferimento al concetto di frontiera efficiente di portafogli introdotto da Markowitz.

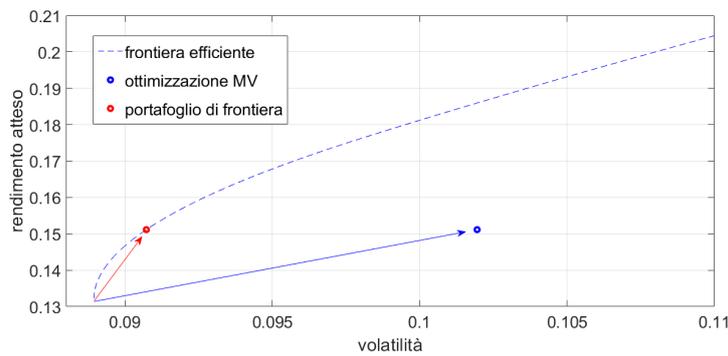


FIGURA 2.6: Frontiera efficiente.

In Figura 2.6, nel piano volatilità-rendimento, viene riportato il posizionamento del portafoglio di MV ottimizzato secondo il problema (2.2) insieme alla sua versione che, in linea con il concetto introdotto da Markowitz, definiamo efficiente.

Tale portafoglio infatti, a parità di rendimento atteso, risulta essere quello a varianza minore.

Per maggior chiarezza riportiamo in tabella 2.4 gli indicatori di sintesi di entrambe le strategie di investimento, indicando la prima con w_{MV}^* e quella di frontiera con w_{eff}^* .

	w_{MV}^*	w_{eff}^*
rendimento atteso	0.1511	0.1511
volatilità	0.1019	0.0907
rendimento/volatilità	1.4828	1.6659
d.m.q. dal MV	0.0099	0.0017
PRCC	0.0632	0.3018

TABELLA 2.4: Sintesi strategie.

Non sembrano a priori esistere motivi apparentemente validi per preferire w_{MV}^* a w_{eff}^* che, oltre a possedere un rapporto rendimento-rischio più vantaggioso, risulta inoltre più vicino, in termini di differenza media quadratica, al portafoglio di minima varianza.

Alla fine del capitolo verrà indagata la capacità della PRCC di misurare la robustezza della performance relativa di un portafoglio che, a questo punto della trattazione, potrebbe costituire l'unico incentivo nel preferire la strategia w_{MV}^* a discapito dei valori di PRCC più alti esibiti da w_{eff}^* .

2.3.2 Interpretazione preservata?

Come detto, le modifiche della strategia di rischio indotte dalla minimizzazione di PRCC, vengono limitate al fine di assicurare che la soluzione ottimizzata sia ancora interpretabile in termini di quella di riferimento.

A questo punto sorgono spontanee due domande tra loro in stretta connessione: che cosa significa nello specifico poter interpretare la nuova soluzione in termini di quella di riferimento? E ancora, prese due versioni modificate del medesimo portafoglio, esiste un criterio quantitativo per stabilire quali delle due presenti un'interpretazione più vicina alla soluzione di riferimento? La risposta alla prima fornisce implicitamente soluzione alla seconda.

Sembra ragionevole assumere che la soluzione ottenuta dalla modifica di una strategia di rischio, sia tanto più interpretabile in termini di quest'ultima, tanto più riesca nel preservare le proprietà con le quali il portafoglio di rischio è stato costruito.

Nello specifico, indicando con w_{MV} la strategia di minima varianza e con \tilde{w}_{MV} una sua modifica, possiamo ad esempio misurarne la "distanza in interpretazione" in termini della distanza che intercorre tra le rispettive varianze, ossia:

$$d_{MV}(w_{MV}, \tilde{w}_{MV}) = \sigma_p^2(\tilde{w}_{MV}) - \sigma_p^2(w_{MV}). \quad (2.3)$$

Per costruzione le componenti del portafoglio ERC che investe in N titoli, presentano un contributo relativo al rischio pari a $1/N$.

In tal caso, indicando con w_{ERC} il portafoglio ERC e con \tilde{w}_{ERC} una sua perturbazione, in analogia con il significato attribuito alla notazione usata in precedenza, possiamo ad esempio utilizzare il seguente criterio:

$$d_{ERC}(w_{ERC}, \tilde{w}_{ERC}) = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\mathcal{C}_i^{\mathcal{R}}(\tilde{w}_{ERC})}{\sigma_p(\tilde{w}_{ERC})} - \frac{1}{N} \right|. \quad (2.4)$$

Ciò che viene misurato con la (2.4) è la somma dei discostamenti che intercorrono tra i contributi relativi di rischio delle componenti di \tilde{w}_{ERC} e quelli

delle componenti del portafoglio ERC che, per costruzione, risultano essere pari a $1/N$.

Sulla base di tali considerazioni, ci si chiede quindi in che maniera il vincolo di disuguaglianza sulla differenza media quadratica introdotto nel problema (2.2) agisca nel preservare l'interpretazione della soluzione ottimizzata in riferimento a quella originaria.

In primo luogo, considerando due perturbazioni della medesima strategia di rischio, sarebbe desiderabile che, quella più vicina alla strategia di riferimento in termini di distanza quadratica, conservasse anche una maggior vicinanza nell'interpretazione nel senso definito in precedenza dalla (2.3) e dalla (2.4) rispettivamente e viceversa.

Indicando con $w_{rischio}$ una generica strategia di rischio, una tale richiesta risulterebbe ad esempio violata nel momento in cui si provasse l'esistenza di due soluzioni \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 tali per cui risultasse che

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (\tilde{w}_1(i) - w_{rischio}(i))^2 < \sum_{i=1}^N (\tilde{w}_2(i) - w_{rischio}(i))^2 \\ d_{rischio}(\tilde{w}_1, w_{MV}) \geq d_{rischio}(\tilde{w}_2, w_{rischio}) \end{cases} \quad (2.5)$$

dove $d_{rischio}$ indicata il criterio di misurazione della "distanza in interpretazione" dal portafoglio di rischio considerato.

Denotando inoltre con $w_{rischio}^*$ la versione ottimizzata secondo il problema (2.2) della strategia di rischio di riferimento, si prenda $\tilde{w}_1 = w_{rischio}^*$ e \tilde{w}_2 derivante dalla risoluzione del seguente problema di massimizzazione soggetto a vincoli :

$$\begin{cases} \tilde{w}_2 = \max_w \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w(i) - w_{rischio}(i))^2 \\ d_{rischio}(w, w_{rischio}) \leq d_{rischio}(\tilde{w}_{rischio}^*, w_{rischio}) \\ w \cdot \underline{1} = 1 \\ 0 \leq w(i) \leq 1, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.6)$$

Il problema (2.6) identifica la soluzione che massimizza la differenza media quadratica dalla strategia di rischio di riferimento tra tutte quelle che, per interpretazione, risultino vicine a $w_{rischio}$, almeno quanto lo è $w_{rischio}^*$.

Avendo implementato tale procedura per entrambe le strategie di rischio considerate, se ne riportano i risultati:

TABELLA 2.5

Portafoglio di MV		
	w_{MV}^*	\tilde{w}_2
d.m.q da MV	0.0099	0.0186
d_{MV}	0.0024	0.0024

TABELLA 2.6

Portafoglio ERC		
	w_{ERC}^*	\tilde{w}_2
d.m.q da MV	0.0099	0.0502
d_{ERC}	0.8128	0.8128

Come si evince da quanto riportato in Tabella 2.5 e 2.6, entrambe le coppie di soluzioni sono tali da soddisfare la condizione (2.5), poiché, la riduzione della distanza quadratica che si ottiene muovendosi da \tilde{w}_2 a $w_{rischio}^*$ non avviene a favore di una riduzione del valore di $d_{rischio}$.

Questo non significa negare che le due cose possano spesso andare di pari passo, significa però evidenziare come, il fatto di rafforzare i vincoli del problema (2.2) non assicuri di ottenere una soluzione ottimizzata più vicina alle peculiari caratteristiche di rischio di quella di riferimento.

Una soluzione che nei pesi risulta più simile a quella di riferimento può, in linea di principio, discostarsi in interpretazione al pari di quanto possa fare una all'apparenza più dissimile.

Non disporre a priori di una relazione biunivoca fra distanza media quadratica e salvaguardia delle proprietà di rischio, significa non fornire un controllo esplicito sul compromesso (in termini di "perdita di proprietà di rischio") raggiunto dalla soluzione ottimizzata.

Tale considerazione verrà ripresa e dunque meglio esplicitata quando, nel capitolo 3, si introdurranno strategie alternative di ottimizzazione.

Si conclude il paragrafo analizzando, nel contesto sopra discusso, la soluzione w_{ERC}^* .

La Figura 2.7 mostra chiaramente come, ottimizzando il portafoglio ERC in accordo al problema (2.2), si giunga ad una soluzione che ben si discosta dall'averne stessi contributi al rischio.

Il vettore dei contributi assoluti al rischio fornito da ciascuna delle sue componenti è infatti:

$$\mathcal{C}^R(w_{ERC}^*) = (0.0528, 0.0302, 0.0015, 0.0033, 0.0310, 0.0070)$$

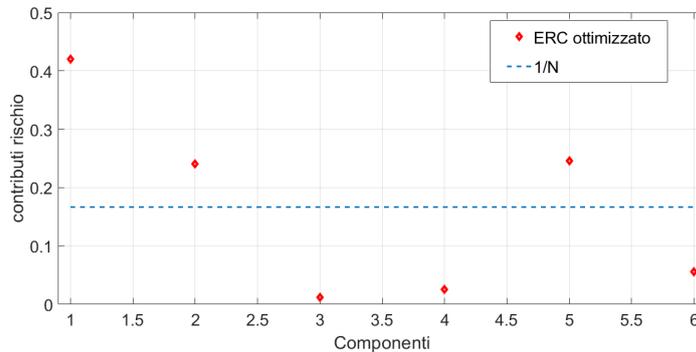


FIGURA 2.7: Allocazione di rischio in w_{ERC}^* .

L'introduzione della stima dei rendimenti attesi conduce dunque, come nel caso specifico, ad una soluzione che, a parità di performance relativa attesa, altera le peculiari caratteristiche di rischio della soluzione originaria.

In un tale scenario, l'unico potenziale incentivo in grado di giustificare il compromesso raggiunto, potrebbe essere quello di aver ottenuto una strategia che, in virtù del decremento in PRCC, si presenta più robusta agli errori di stima.

2.3.3 PRCC e robustezza

Per costruzione, l'ottimizzazione in PRCC (2.2) conduce a portafogli che, comparati a quello di rischio di riferimento, presentano una maggior similarità nei contributi attesi di performance per unità di rischio offerti da ciascuna componente.

Le misure di performance e rischio di un portafoglio sono costruite partendo dai parametri di sintesi caratterizzanti la distribuzione dei rendimenti dei titoli considerati.

Le strategie di investimento costruite sulla base di tali misure, sono dunque da considerarsi delle stime della soluzione teorica a cui si giungerebbe nel caso di conoscenza esatta del valore di tali statistiche.

Nello specifico, il discostamento della soluzione ottenuta da quella teorica è in larga parte attribuibile all'errore commesso nella stima dei ritorni attesi, spesso ben più significativo di quello commesso nella stima della matrice di covarianza (Merton, 1980).

Nel seguito focalizzeremo la nostra attenzione sull'impatto che tale discostamento ha sulla performance relativa del portafoglio.

Sarebbe infatti desiderabile che l'errore di stima inevitabilmente commesso nella determinazione dei pesi della strategia non provocasse una significativa alterazione della performance relativa ad essa connessa.

Una tale richiesta, secondo gli autori, risulterebbe maggiormente rispettata in corrispondenza di portafogli a basso valore di PRCC.

Al fine di ottenere un valore di PRCC prossimo a zero, è infatti necessario che piccole modifiche ai pesi di portafoglio producano effetti trascurabili sull'allocazione di performance e rischio a livello di ciascuna componente.

Minimizzando infatti tale misura sotto vincolo imposto sul valore di performance relativa (i.e. $\tau_p(w) = \tau_p^*$), il vettore dei pesi risultante è tale per cui per ogni posizione i con $w_i > 0$, il contributo di performance per unità di rischio stimato risulta prossimo al valore di τ_p^* e dunque:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_p(w)}{\partial w_i} - \tau_p^* \frac{\partial \mathcal{R}_p(w)}{\partial w_i} \approx 0. \tag{2.7}$$

I portafogli che verificano la (2.7) si trovano così in uno stato stazionario in corrispondenza del quale, la perturbazione infinitesima di una loro componente, produrrebbe un effetto marginale sul valore di performance relativa della strategia risultante.

Procediamo alla verifica numerica di tale proprietà nel seguente modo: si indichi, in riferimento alla notazione precedentemente utilizzata, con $w_{rischio}$ il generico portafoglio di rischio e con $w_{rischio}^*$ la sua versione ottimizzata secondo il problema (2.2).

Come ampiamente discusso, $w_{rischio}^*$ senza alterare la performance relativa della strategie di riferimento, detiene un valore di PRCC prossimo a zero che, come sottolineato poco fa, dovrebbe garantirne una maggior robustezza della performance relativa in seguito a singole perturbazioni.

Nello specifico in Figura 2.8 sono riportati i risultati relativi all'esperimento sopra citato eseguito considerando il portafoglio di MV e la sua versione ottimizzata.

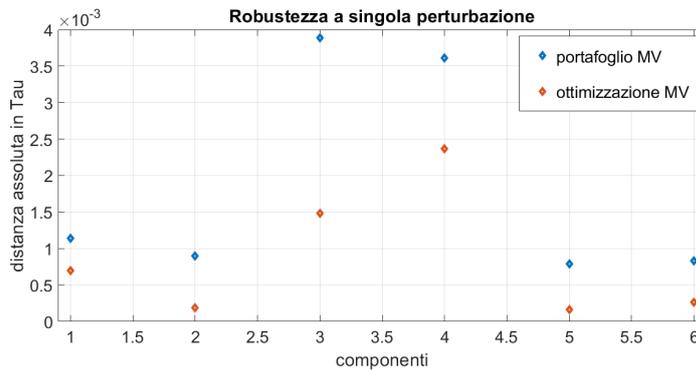


FIGURA 2.8: Robustezza a singola perturbazione, MV .

In corrispondenza di ogni singola perturbazione (eseguita con segno random e modulo fissato), la strategia ottimizzata risponde con discostamenti assoluti della performance relativa di minor significatività.

Un risultato quasi analogo lo si ottiene in corrispondenza della coppia di soluzioni w_{ERC} e w_{ERC}^* per le quali la proprietà in esame risulta essere violata in corrispondenza della perturbazione di una sola delle sei componenti.

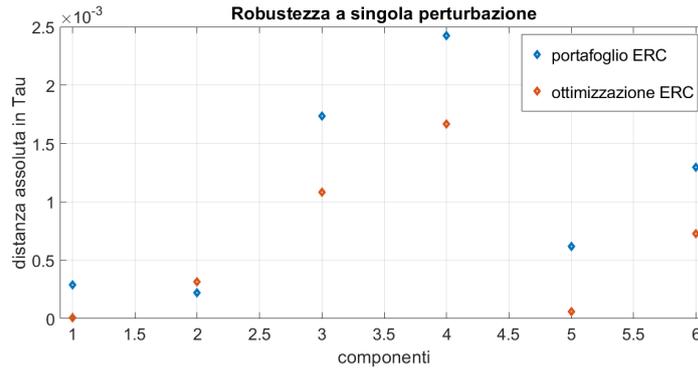


FIGURA 2.9: Robustezza a singola perturbazione, ERC .

Prima di addentrarci in riflessioni più approfondite, notiamo come nella (2.7) compaiano le derivate parziali delle misure di performance e rischio calcolate rispetto a w_i .

La stazionarietà della performance relativa raggiunta da portafogli a valore di PRCC prossimi a zero, sembrerebbe dunque in principio garantita solo a fronte di perturbazioni infinitesime di una componente alla volta, supponendo cioè di fissare tutte le altre.

Non c'è quindi nessuna garanzia a priori sul fatto che, eseguendo perturbazioni multiple sui pesi, siano le strategie con bassa valori di PRCC ad esibire maggior robustezza della performance relativa.

A questa considerazione si aggiunge inoltre che, a fronte di errori di stima delle statistiche dei rendimenti, il vincolo di somma ad uno imposto sulla strategia di allocazione conduce, nella visione più ottimistica (e più che mai rara), alla modifica di almeno due dei pesi di portafoglio (l'alterazione di una sola componente di una strategia a somma uno porterebbe naturalmente alla violazione di tale condizione).

Alla luce di tali considerazioni ci si chiede dunque se una strategia con valori di PRCC prossimi a zero possieda in generale delle migliori proprietà di robustezza della performance relativa rispetto a perturbazioni multiple delle sue componenti (che siano però tali da non inficiare il vincolo di somma ad uno).

A tal proposito si considerino la strategia w_{ERC}^* (preferita rispetto a w_{MV}^*

per il suo più basso valore di PRCC) insieme al portafoglio costruito distribuendo la ricchezza in parti uguali fra gli N asset a disposizione.

La prima strategia, come riportato in precedenza, possiede una PRCC pari a 0.0100 mentre la seconda, che indicheremo con w_{EW} , presenta una PRCC di 0.3247.

Siamo dunque nel caso di strategie con diversi valori di PRCC, uno solo dei quali prossimo a zero.

Al fine di indagare la robustezza in performance relativa mostrata da entrambi i portafogli, si considerino 100 scenari differenti in corrispondenza dei quali, le medesime perturbazioni effettuate su entrambe le strategie, vengono determinate in maniera aleatoria.

In particolare, fissando a priori solo la magnitudine massima di tali perturbazioni, ad essere determinati in maniera casuale sono:

- il numero di componenti soggette a modifica che indichiamo con k ;
- una combinazione di k componenti sulle sei a priori disponibili;
- il segno ed il modulo delle perturbazioni effettuate sul sottoinsieme di componenti così individuato.

Misurando per ogni scenario il discostamento assoluto tra la performance relativa delle strategie di origine e quella associata alle loro rispettive modifiche, riportiamo i risultati percentuali indicanti l'esito dell'esperimento condotto.

p_{ERC^*}	p_{EW}
0.64	0.36

TABELLA 2.7: Robustezza a perturbazione multipla.

In particolare p_{ERC^*} denota la percentuale degli scenari in corrispondenza dei quali si è osservata una maggior robustezza a seguito della modifica apportata al portafoglio w_{ERC^*} mentre p_{EW} indica la percentuale degli scenari con esito complementare.

I risultati sopra ottenuti discendono da un esperimento nel quale, il numero medio di componenti perturbate in ciascuno scenario è risultato essere uguale a 3.88.

Decidendo invece di eseguire una modifica in segno e modulo aleatoria (mantenendo il controllo sulla magnitudine massima di ciascuna perturbazione), ma effettuata su ciascuna delle sei componenti, l'esito ottenuto propende a favore della maggior robustezza del portafoglio w_{EW} .

In riferimento alla notazione sopra utilizzata, si riportano i valori del secondo esperimento così condotto:

$PERC^*$	PEW
0.44	0.56

TABELLA 2.8: Robustezza a perturbazione delle 6 componenti.

Alla luce dei risultati riportati nei tre esperimenti in precedenza condotti, sembra quindi si possa affermare che, un valore di PRCC prossimo a zero, possa in genere assicurare una maggior robustezza della performance relativa al seguito della perturbazione effettuata su un ridotto numero di componenti. Proprietà che però sembra svanire al crescere del numero di componenti coinvolte nella modifica.

Al fine di poter dare una risposta attendibile circa l'interpretazione del valore di PRCC come misura di robustezza, bisogna però fare un passo indietro, tornando al cuore del problema.

È infatti necessario esplicitare in maniera più precisa che cosa significhi richiedere che, l'errore della stima delle statistiche dei rendimenti, non impatti in maniera significativa sulla performance relativa.

Indichiamo a tal proposito con $\underline{\pi}$ il vettore dei rendimenti attesi e con VC la matrice di covarianza ad essi associata.

Non disponendo della conoscenza esatta di tali quantità, non resta che procedere alla loro stima che rispettivamente indichiamo con $\tilde{\pi}$ e \widehat{VC} .

Denotiamo con $\tau_p(w)$ la performance relativa teorica di un portafoglio, nella realtà viene però fatto uso di $\tilde{\tau}_p(w)$, costruita naturalmente sulla base delle stime delle statistiche dei rendimenti sopra effettuate.

Tale misura risulta un indicatore della vera performance relativa tanto più affidabile, quanto più risulta elevata l'accuratezza delle stime di cui si è in possesso.

Richiedere che la soluzione esatta w_{ex} e la sua stima \tilde{w}_{ex} abbiano valori simili di performance relativa, significa dunque domandare che la seguente condizione risulti verificata:

$$\tau_p(w_{ex}) \approx \tau_p(\tilde{w}_{ex}) \quad (2.8)$$

In linea teorica bisognerebbe quindi richiedere che la valutazione della performance relativa di \tilde{w}_{ex} in corrispondenza della misura costruita sui valori reali (non quelli stimati) delle statistiche dei rendimenti conducesse all'ottenimento di un valore poco distante da quello posseduto dalla soluzione teorica.

Si noti inoltre come anche la PRCC vada intesa come una stima essendo costruita in funzione delle statistiche dei rendimenti e dunque, al pari di quanto

fatto con la performance relativa, si distingue tra $PRCC(w)$ e $\widetilde{PRCC}(w)$. Supponiamo per un istante che una perturbazione non significativa di un portafoglio con PRCC prossima a zero, conduca in generale all'ottenimento di una performance relativa molto simile a quella del portafoglio originario. Sotto tali ipotesi allora, la robustezza desiderata sarebbe sicuramente raggiunta nel caso in cui w_{ex} e \tilde{w}_{ex} fossero tra loro molto vicine, ma questa condizione, come vedremo nel seguito, risulta non essere legata al valore di $\widetilde{PRCC}(\tilde{w}_{ex})$.

Questa considerazione sarà meglio esplicitata col supporto degli esempi che riporteremo in seguito, nei quali si assumerà che le statistiche sino ad ora utilizzate nella costruzione di portafogli, siano le reali statistiche dei rendimenti.

Come detto in precedenza spesso si raggiunge maggior accuratezza nella stima della matrice di covarianza piuttosto che in quella dei rendimenti attesi. Assumiamo allora per semplicità di disporre della perfetta conoscenza della matrice covarianza (i.e. $VC \equiv \widetilde{VC}$), la stima dei rendimenti attesi sarà ottenuta mediante perturbazioni aleatorie del vettore dei rendimenti in nostro possesso.

Nel paragrafo 2.3.1 la strategia w_{MV}^* è stata messa a confronto con w_{eff}^* , mostrando come a priori, l'unico motivo per preferire la prima fosse costituito dal suo più basso valore di PRCC che, a detta degli autori, sarebbe garanzia di una miglior robustezza della performance relativa.

Coerentemente con le ipotesi sopra fatte, si assuma allora che w_{MV}^* e w_{eff}^* in precedenza calcolate, siano da intendersi come soluzioni teoriche ottenute con le reali statistiche dei rendimenti.

Considerando nuovamente 100 scenari differenti, la metodologia seguita può essere schematizzata come segue:

- assumendo come detto $VC \equiv \widetilde{VC}$, otteniamo $\tilde{\pi}$ mediante perturbazione aleatoria del vettore dei rendimenti attesi esatti;
- con le stime delle statistiche dei rendimenti si procede alla costruzione di \tilde{w}_{MV}^* e \tilde{w}_{eff}^* ;
- avendo le soluzioni stimate, se ne calcola il valore di PRCC (da intendere come stima di quello ideale) insieme alla distanza media quadratica dei pesi da quelli delle soluzioni teoriche;
- si conclude calcolando il discostamento della performance relativa delle soluzioni stimate da quella delle rispettive soluzioni teoriche (questo calcolo viene effettuato secondo la (2.8), utilizzando cioè le statistiche reali dei rendimenti).

La Figura 2.10 riporta i valori PRCC (ottenuti facendo uso della stima delle statistiche dei rendimenti) di entrambi i portafogli in corrispondenza di ciascuno dei 100 scenari.

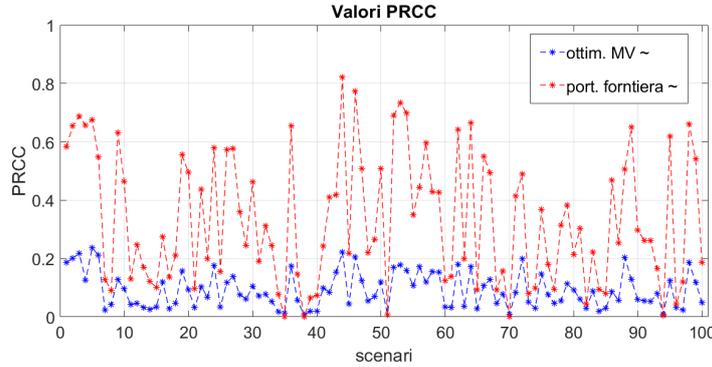


FIGURA 2.10: Valori stimati di PRCC .

Si può chiaramente vedere come, in quasi ogni scenario, \tilde{w}_{eff}^* presenti dei valori di PRCC significativamente più alti di quelli presentati da \tilde{w}_{MV}^* . In seguito a tale considerazione ci si potrebbe dunque aspettare che \tilde{w}_{MV}^* presenti nel complesso una robustezza maggiore dei valori di performance relativi ad essa associati.

In analogia con quanto fatto in precedenza indichiamo con $p_{\tilde{w}_{MV}^*}$ la percentuale di scenari nei quali la soluzione \tilde{w}_{MV}^* avrebbe mostrato una maggior robustezza della performance relativa, con $p_{\tilde{w}_{eff}^*}$ invece la percentuale di scenari con esito complementare.

$p_{\tilde{w}_{MV}^*}$	$p_{\tilde{w}_{eff}^*}$
0.24	0.76

TABELLA 2.9: Robustezza in performance relativa.

Come mostrato dalla Tabella 2.9, in più del 75% dei casi, gli errori di stima commessi nella determinazione dei portafogli, avrebbero portato la soluzione \tilde{w}_{eff}^* ad avere un discostamento della performance relativa da quella teorica di entità inferiore rispetto a quello che si sarebbe verificato in corrispondenza di \tilde{w}_{MV}^* .

I risultati riportati sono la conseguenza di quanto mostrato in Figura 2.11, attraverso la quale è possibile notare la maggior dispersione della performance relativa di \tilde{w}_{MV}^* attorno al suo valore ideale in corrispondenza dei diversi scenari simulati.

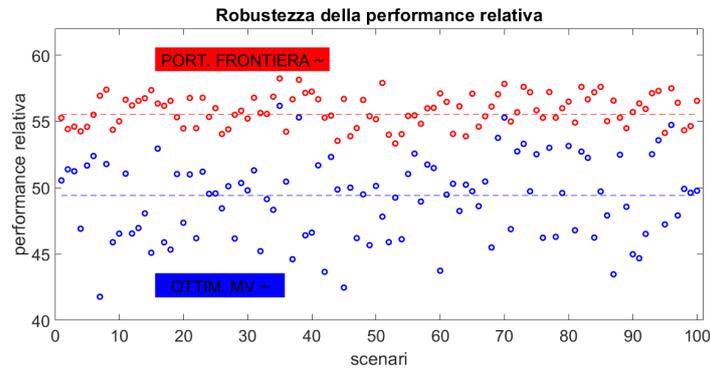


FIGURA 2.11: Discostamento in performance relativa .

Si ha dunque la conferma del fatto che il valore di PRCC di un portafoglio, non dà a priori nessuna garanzia sulla qualità della robustezza da questo posseduta.

Come mostrato in precedenza dai risultati riportati in tabella 2.7 e 2.8, si hanno risposte contraddittorie circa l'entità della variazione di performance relativa subita da portafogli a valore quasi nullo di PRCC a fronte di perturbazioni infinitesime multiple dei suoi pesi.

Ma anche supponendo che un basso valore di PRCC assicuri davvero una maggior robustezza nel senso sopra esposto, non si hanno garanzie sul fatto che la risoluzione del problema (2.2) nel caso teorico e nel caso "reale" (in cui si utilizzando le stime delle statistiche) porti ad ottenere due soluzioni fra loro vicine e dunque non si ha alcuna certezza circa la vicinanza delle loro rispettive performance relative.

A tal proposito si riporta la distanza media quadratica riscontrata fra le soluzioni teoriche e la loro rispettiva stima in corrispondenza di ogni scenario dell'esperimento condotto.

La Figura 2.12 mostra chiaramente come le soluzioni stimate del portafoglio di frontiera presentino, in corrispondenza di quasi ogni scenario, delle distanze quadratiche dalla soluzione teorica di gran lunga minori rispetto a quelle che intercorrono fra w_{MV}^* e le sue stime.

Ecco allora che i migliori risultati di robustezza esibiti dal portafoglio di frontiera sembrano essere spiegati proprio in virtù di questa osservazione.

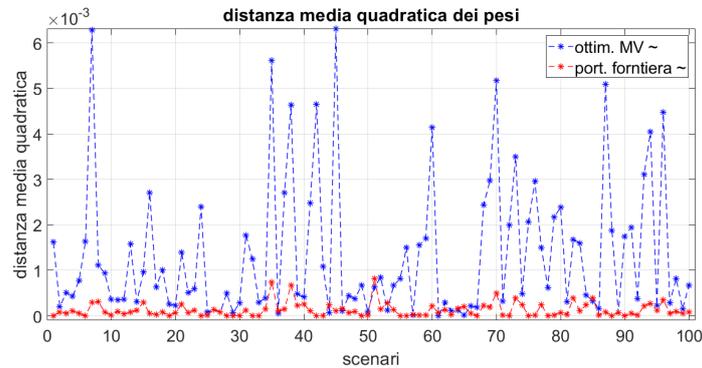


FIGURA 2.12: DMQ tra i pesi teorici e stimati

Concludiamo l'analisi con un secondo esperimento che, ancora una volta mette in evidenza come, la stima del valore di PRCC di un portafoglio non sia in principio connessa alla sua robustezza in performance relativa.

A tal proposito andiamo a calcolare la soluzione ottimizzata del portafoglio di MV secondo il problema (2.2), scegliendo come ξ (parametro che compare nel vincolo di disuguaglianza della DMQ) i valori di 0.1, 0.3 e 0.5 rispettivamente.

In analogia con quanto fatto precedentemente, le tre soluzioni così trovate sono da intendersi come soluzioni teoriche, calcolate cioè assumendo di poter disporre della perfetta conoscenza delle statistiche dei rendimenti dei titoli considerati.

Bisogna notare come il vincolo contenuto nel problema di ottimizzazione, porti tutte e tre le soluzioni ad avere medesima performance relativa, uguale per l'appunto a quella del portafoglio di MV.

Supponendo anche in questo caso che l'errore di stima intervenga solo nella determinazione dei rendimenti attesi, consideriamo 100 scenari distinti ognuno dei quali intende simulare, mediante perturbazioni aleatorie del vettore dei rendimenti attesi in nostro possesso, possibili valori di $\underline{\pi}$.

Per ogni scenario si procede dunque con la risoluzione del problema (2.2) con informazioni distorte dall'errore di stima considerato.

Le soluzioni derivanti dalla scelta di $\xi = 0.1$, pur dotate di valori di PRCC maggiori o al massimo uguali a quelli delle altre due (perché derivanti da un problema di minimo su un dominio minore), presentano i migliori risultati in termini di robustezza della performance relativa.

Si riportano in tabella 2.10 i risultati percentuali dell'esperimento condotto. Nell'85% dei casi, la miglior robustezza in performance relativa è stata raggiunta dalle soluzioni a più alto valore di PRCC stimato.

$\xi = 0.1$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$
0.85	0.06	0.09

TABELLA 2.10: Robustezza in performance relativa.

Al fine di poter disporre di un risultato visivo circa l'esito dell'esperimento, in Figura 2.13 si possono apprezzare i discostamenti della performance relativa delle soluzioni stimate (con $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.5$) da quella teorica. In particolare i valori riportati in blu indicano che nello scenario indicato il discostamento minimo si è osservato in corrispondenza della soluzione stimata usando $\xi = 0.1$, viceversa per il rosso.

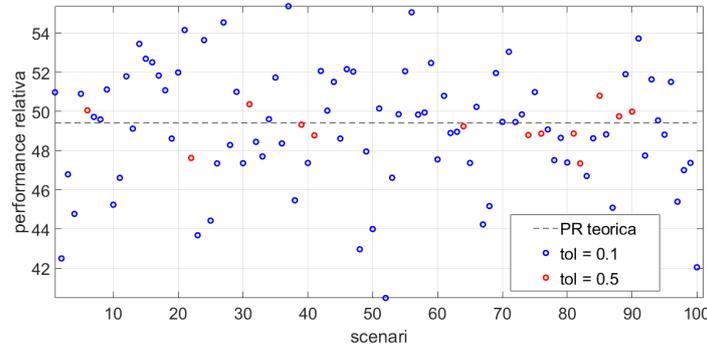


FIGURA 2.13: Valori di performance relativa stimati

I risultati ottenuti non sono in realtà sorprendenti: avendo assunto $VC \equiv \widetilde{VC}$ ed essendo il portafoglio di MV determinato sulla base delle sole informazioni contenute nella matrice di covarianza, risulta $w_{MV} \equiv \tilde{w}_{MV}$.

È quindi naturale aspettarsi che la risoluzione con $\xi = 0.1$ del problema (2.2) possa condurre ad una soluzione stimata "vicina" a quella teorica in virtù del fatto che entrambe mirano all'ottimizzazione della medesima strategia di rischio sottostante.

L'aumento del valore di ξ (volto all'ottenimento di valori inferiori di PRCC) e la maggior libertà di modificare la strategia di rischio che ne consegue, porta inevitabilmente la soluzione ad essere maggiormente soggetta all'errore di stima contenuto nelle statistiche utilizzate.

In conclusione quindi le proprietà di robustezza associate dagli autori al basso valore di PRCC raggiunto dalla soluzione ottimizzata, sono in realtà da attribuire al vincolo di disuguaglianza presente nel problema (2.2).

Capitolo 3

Ottimizzazione alternativa

Alla luce delle considerazioni e delle criticità emerse dall'analisi della strategia di ottimizzazione sin qui presa in esame, nel capitolo corrente verranno proposte metodologie differenti per la modifica di portafogli di rischio, con l'obiettivo di giustificare a tal scopo, l'introduzione della stima dei rendimenti attesi.

Come fatto in precedenza, dopo aver formulato il problema, si procederà alla sua implementazione, considerando nuovamente il portafoglio di minima varianza e quello di uguali contributi al rischio come strategie di riferimento da ottimizzare.

Mediante Backtest valuteremo infine la bontà delle strategie di investimento così ottenute insieme a quelle derivanti dall'ottimizzazione del problema (2.2) in precedenza esaminato.

3.1 Motivazioni

Come discusso in precedenza le tecniche di investimento basate sul rischio nascono dall'intenzione di rimuovere la stima dei rendimenti attesi dai problemi di allocazione, giungendo in tal modo a portafoglio costruiti totalmente sulla base delle informazioni provenienti dalla matrice di covarianza.

Non considerando i rendimenti attesi dei titoli si rischia ad esempio di investire in titoli poco appetibili in termini di apporto al rendimento del portafoglio comparato al contributo di rischio fornito.

Viceversa, decidendo di inglobare le previsioni dei rendimenti dei titoli nella costruzione di portafoglio, ci si espone al maggior errore che spesso la stima di tali rendimenti attesi comporta, da qui l'idea di affidarsi alla maggior accuratezza della stima della matrice di covarianza (Merton,1980).

Si potrebbero dunque avere incentivi nella modifica di una strategia di rischio

nel caso in cui la soluzione ottenuta, senza alterare in maniera significativa le proprietà di rischio di quella originaria (costruite sulla base della matrice di covarianza), presentasse a priori un rapporto performance/rischio più vantaggioso (introduzione della previsione dei rendimenti).

La bontà di tecniche di ottimizzazione di strategie di rischio che fanno uso dei rendimenti attesi, dovrebbe quindi essere misurata sulla base dei vantaggi introdotti al netto degli svantaggi procurati, bilancio che, per la strategia di ottimizzazione (2.2), sembra a priori essere negativo.

Questa infatti, come ampiamente discusso nel precedente capitolo, pur alterando le proprietà di rischio del portafoglio originario, non fornisce alcun premio inteso come miglioramento della performance relativa attesa.

Si presentano allora nel seguito problemi di massimizzazione di performance relativa (indice di Sharpe) in cui però, alla luce delle considerazioni appena fatte, vengono introdotti controlli espliciti sulla massima alterazione delle proprietà di rischio che l'investitore è disposto a tollerare.

3.2 Ottimizzazione 2.0

3.2.1 Modifica del portafoglio MV

Avendone discusso le motivazioni, vediamo ora la formulazione precisa del problema proposto per l'ottimizzazione del portafoglio di MV.

Come anticipato, l'idea è quella di introdurre un vincolo esplicito mediante il quale si possa controllare a priori l'alterazione delle proprietà di rischio a cui si va incontro, a fronte della modifica della soluzione di riferimento.

Nel caso specifico viene quindi introdotta una limitazione sul discostamento che la varianza della soluzione ottimizzata può avere da quella della soluzione originaria.

Il problema di ottimizzazione può dunque essere formulato nel seguente modo, dove ϵ è un parametro scelto a tal scopo dall'investitore:

$$\begin{cases} w_{MV}^{**} = \arg \max_w \tau_p^{\mathcal{P}, \mathcal{R}}(w), \\ \sigma_p^2(w) \leq (1 + \epsilon) \sigma_p^2(w_{MV}), \\ w \cdot \underline{1} = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.1)$$

Utilizzando $\epsilon = 25\%$, la risoluzione del problema (3.1) conduce alla soluzione riportata in Tabella 3.1

	w_{MV}	w_{MV}^{**}
Asset1	0	0
Asset2	0.8832	0.6963
Asset3	0	0
Asset4	0.1168	0.2914
Asset5	0	0.0123
Asset6	0	0

TABELLA 3.1: Ottimizzazione alternativa del portafoglio MV.

Come sottolineato in corrispondenza della soluzione w_{MV}^* del problema (2.2), anche in questo caso l'ottimizzazione non riesce a risolvere il problema della concentrazione che caratterizza la strategia originaria.

L'obiettivo di raggiungimento della minima varianza può spesso condurre ad avere un ridotto ventaglio di investimenti, proprietà che è facile aspettarsi anche dalla soluzione ottimizzata a causa del vincolo di controllo imposto sul valore della sua varianza.

Nonostante la problematica della concentrazione persista, la soluzione ottimizzata presenta però una miglior attrattività in termini di remunerazione attesa per unità di rischio assunto, come mostrato in Tabella 3.2 risulta infatti:

	w_{MV}	w_{MV}^{**}
performance	4.3953	5.9938
volatilità	0.0889	0.0994
indice di Sharpe	49.4179	60.2758

TABELLA 3.2: Misure di performance e rischio di w_{MV}^{**} .

3.2.2 Modifica del portafoglio ERC

Procediamo adesso con la formulazione del problema di ottimizzazione del portafoglio ERC, la cui peculiare proprietà risulta per l'appunto quella di possedere gli stessi contributi al rischio forniti da ciascuna sua componente. Il concetto di ottimizzazione è esattamente lo stesso utilizzato nel caso precedente, l'unica modifica da apportare concerne l'esplicitazione del vincolo di massima alterazione delle proprietà di rischio consentita.

Nello specifico si introduce una limitazione sul discostamento assoluto massimo che i contributi al rischio relativi della soluzione ottimizzata possono avere da $1/N$ (in alternativa si potrebbe usare d_{ERC} definita in precedenza

dalla (2.4)).

La formulazione del problema proposto risulta dunque la seguente:

$$\begin{cases} w_{ERC}^{**} = \arg \max_w \tau_p^{\mathcal{P}, \mathcal{R}}(w), \\ (1 - \epsilon) \frac{1}{N} \leq \frac{C_i^{\mathcal{R}}(w)}{\sigma_p(w)} \leq (1 + \epsilon) \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ w \cdot \underline{1} = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.2)$$

Il vincolo introdotto nel problema (3.2) assicura un controllo uniforme sui contributi relativi di rischio delle componenti di w_{ERC}^{**} , questi infatti risiederanno necessariamente nella striscia centrata in $1/N$ di ampiezza $2\epsilon/N$ (in analogia con la notazione precedente, ϵ risulta essere il parametro di controllo esplicito delle proprietà di rischio).

Utilizzando nuovamente $\epsilon = 25\%$, la risoluzione del problema (3.2) conduce alla soluzione riportata in Tabella 3.3

	w_{ERC}	w_{ERC}^{**}
Asset1	0.1404	0.1083
Asset2	0.3316	0.3673
Asset3	0.1130	0.0819
Asset4	0.1457	0.1756
Asset5	0.1702	0.1938
Asset6	0.0991	0.0731

TABELLA 3.3: Ottimizzazione alternativa del portafoglio ERC.

Riportando le misure di performance e rischio di entrambe le soluzioni, anche in questo caso si può constatare come w_{ERC}^{**} risulti possedere una performance relativa stimata superiore.

	w_{ERC}	w_{ERC}^{**}
performance	6.2030	6.2911
volatilità	0.1326	0.1259
indice di Sharpe	46.7930	49.9690

TABELLA 3.4: Misure di performance e rischio di w_{ERC}^{**} .

In Figura 2.7 del paragrafo 2.3.2 viene mostrata l’allocazione di rischio relativa fra le componenti del portafoglio w_{ERC}^* .

Al fine di evidenziare come la soluzione w_{ERC}^{**} , oltre a possedere una performance relativa attesa più alta, possa essere maggiormente interpretata in relazione alla strategia di rischio ERC di riferimento, si presenta in un unico grafico l'allocazione di rischio relativa di entrambe le soluzioni menzionate.

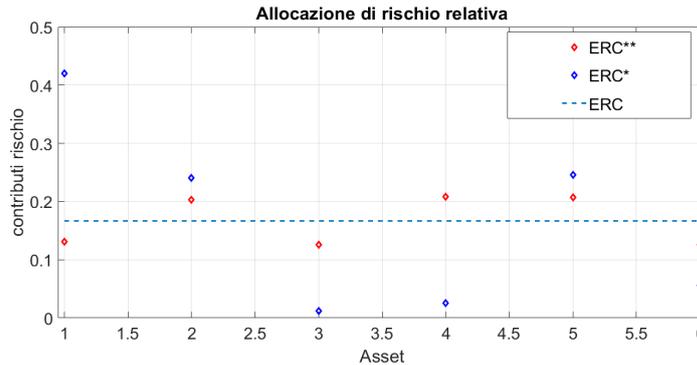


FIGURA 3.1: Allocazione di rischio, w_{ERC}^* vs w_{ERC}^{**} .

3.2.3 Ritorni gaussiani?

Come detto, i problemi (3.1) e (3.2), sono stati formulati in un'ottica di ottimizzazione "costo/beneficio", mirando infatti a trovare un compromesso tra il miglioramento della performance relativa di una strategia e la conservazione delle proprietà di rischio della soluzione originaria. Durante tutta la trattazione si è fatto uso del ritorno atteso in eccesso sul tasso privo di rischio come indice di performance del portafoglio.

In linea teorica dunque, fra portafogli di medesima varianza stimata, la massimizzazione della funzione obiettivo $\tau_p^{\mathcal{P}, \mathcal{R}}(w)$ tenderebbe a selezionare quelli che investono maggiormente nei titoli a rendimento atteso maggiore.

Supponendo per un istante che i ritorni dei titoli considerati abbiano distribuzione gaussiana, il criterio di selezione sopra esposto sembra del tutto ragionevole.

In presenza di distribuzioni simmetriche infatti, ragionando unicamente con l'obiettivo di massimizzare la performance, l'unica discriminante nella preferenza di un titolo piuttosto che di un altro sembrerebbe essere l'ordinamento dei loro valori attesi.

A tal proposito si è deciso di sottoporre le serie dei rendimenti al test di Jarque-Brera, in cui come ipotesi nulla si assume che i dati campionati provengano da una distribuzione normale.

Più precisamente la richiesta di Gaussianità dei rendimenti viene espressa mediante l'ipotesi nulla congiunta che asimmetria e curtosi in eccesso siano

pari a zero.

Le risposte ottenute da ognuno dei test condotti risultano sostanzialmente indipendenti dal livello di confidenza fissato: calcolando infatti i rispettivi p-value, ossia le probabilità di ottenere valori "più estremi" di quelli osservati assumendo vera l'ipotesi nulla, questi risultano prossimi a zero.

Ciò significa che c'è forte evidenza empirica per affermare che i campionamenti dei rendimenti considerati non provengono da distribuzioni gaussiane.

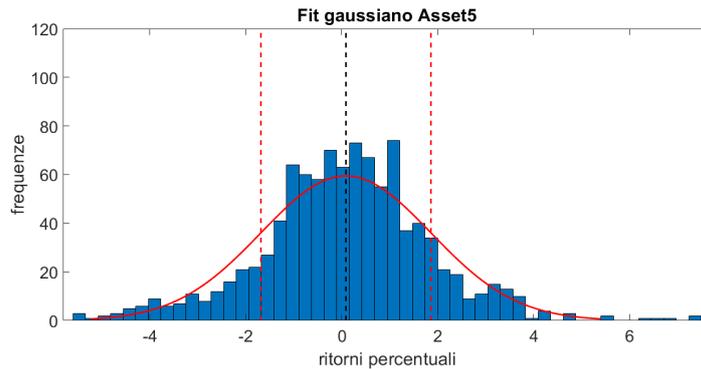


FIGURA 3.2: Distribuzione empirica Asset5 .

La Figura 3.2 riporta a titolo esemplificativo il fit gaussiano della distribuzione empirica dell'asset 5, che come si può vedere, risulta ben poco adeguato. L'allontanamento dalla normalità distributiva è quindi dovuto al verificarsi di almeno uno di questi due fenomeni: asimmetria e/o allungamento/appiattimento della distribuzione.

Sarebbe quindi preferibile utilizzare una misura di performance che tenesse in qualche modo in considerazione le caratteristiche riscontrate nelle distribuzioni empiriche dei rendimenti e non soltanto l'ordinamento dei loro valori attesi.

Nello specifico si propone una misura di performance che orienti contemporaneamente le sue preferenze verso:

- distribuzioni ad alto rendimento atteso;
- distribuzioni empiriche con asimmetria sinistra (negativa), ossia con una maggior concentrazione nella parte destra a fronte di una coda sinistra più allungata;
- distribuzioni leptocurtiche, ossia più "appuntite" di una normale.

È naturale che l'obiettivo di ottenere una strategia con alta performance conduca verso titoli ad elevato rendimento atteso. Il verificarsi futuro di un

valore a questo vicino però è tanto più probabile quanto più la relativa curva di distribuzione dei rendimenti presenta alte frequenze in prossimità dello stesso.

Per esplicitare al meglio il concetto si prenda in considerazione la Figura 3.3 relativa alla distribuzione dei rendimenti dell'Asset 3:

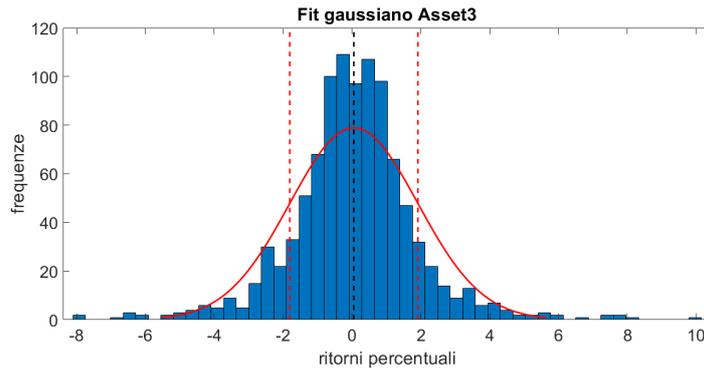


FIGURA 3.3: Distribuzione empirica Asset3.

Si vede chiaramente come i campionamenti con maggior frequenza abbiano valori prossimi a quello del rendimento medio.

La distribuzione dei rendimenti dell'Asset 5, riportata precedentemente in Figura 3.2, presenta invece dei campionamenti con frequenze più omogenee: il valore atteso risulta sempre essere l'indice "baricentrico" della distribuzione, ma si ha una minor confidenza circa un possibile verificarsi futuro di un valore in sua prossimità.

Distribuzioni con asimmetria negativa infine presentano una grande concentrazione di campioni alla destra del proprio valore atteso, il quale risente della presenza di accadimenti nella coda sinistra che, per quanto estremi, si suppone possano verificarsi con assoluta rarità.

Al fine di poter costruire una misura di performance che presenti le caratteristiche sopra richieste, si procede allora nel seguente modo:

1. Si calcolano i valori di curtosi e asimmetria in eccesso (rispetto ad una normale) caratterizzanti le distribuzioni dei rendimenti, indicando i due vettori così ottenuti mediante *kurt* e *skew* rispettivamente.
2. Con l'idea di premiare (svalutare) i titoli la cui distribuzione dei rendimenti presenti un alto (basso) valore di curtosi e un'asimmetria sinistra

(destra), si definiscono le seguenti quantità:

$$\begin{cases} skew_mod(k) \equiv \frac{-skew(k)}{\sum_{i=1}^N |skew(i)|} + 1, \quad \forall k = 1, \dots, N. \\ kurt_mod(k) \equiv \frac{kurt(k)}{\sum_{i=1}^N |kurt(i)|} + 1, \quad \forall k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.3)$$

3. Si procede con la seguente modifica del vettore dei rendimenti attesi in eccesso dei titoli considerati:

$$\tilde{\mu}_{mod} \equiv \tilde{\mu} \odot \frac{(skew_mod + kurt_mod)}{2}, \quad (3.4)$$

dove con \odot si indica il prodotto componente per componente.

4. La nuova misura di performance proposta risulta dunque essere:

$$\mathcal{P}_p^{mod}(w) \equiv w' \tilde{\mu}_{mod}$$

La misura di performance introdotta fa dunque uso della versione modificata dei rendimenti attesi in eccesso dei titoli.

Per agevolare la comprensione delle motivazioni sottese alla procedura presentata, si presentano in Tabella 3.5 i risultati derivanti dalla sua implementazione

	kurt	kurt_mod	skew	skew_mod
Asset1	2.6472	1.1853	0.1394	0.8521
Asset2	2.0192	1.1647	0.3388	0.6405
Asset3	3.5852	1.2161	0.1927	0.6405
Asset4	1.2399	1.1391	0.2110	0.7761
Asset5	1.2767	1.1403	0.0437	0.9536
Asset6	1.7090	1.1545	-0.0169	1.0180

TABELLA 3.5: Curtosi e Asimmetria in eccesso.

Si inizi con il constatare che le distribuzioni dei rendimenti di ciascun asset presentano dei valori positivi di curtosi in eccesso, risultando in tal modo più "appuntite" rispetto ad una normale, proprietà che, per le ragioni in precedenza esposte, porta un titolo ad essere considerato maggiormente attrattivo. Procedendo con la costruzione del vettore `kurt_mod` secondo la (3.3) si vede come, in linea con le considerazioni appena fatte, questo porterà (in accordo alla (3.4)) a sovrastimare il valore atteso in eccesso del rendimento di ciascun

titolo.

In particolare l'intensità della modifica apportata risulta essere proporzionale al valore di curtosi in eccesso esibito da ciascun titolo (il rendimento atteso dell'Asset6 ad esempio, subirà un incremento di circa il 18% del suo valore, a fronte del più alto valore di curtosi mostrato dalla distribuzione empirica dei suoi ritorni).

Il discorso analogo viene ripetuto anche per i valori di asimmetria.

Come si vede dalla Tabella 3.5, tutti i titoli ad eccezione dell'ultimo, presentano valori di asimmetria positiva: alla luce di tali risultati i rendimenti attesi dei primi 5 titoli subiranno una svalutazione mentre quello dell'Asset6 subirà un ulteriore apprezzamento.

Anche in questo caso vige il principio sopra esposto, l'intensità della modifica (in eccesso o in difetto) apportata mediante $skew_mod$, risulta essere più elevata in corrispondenza dei titoli con distribuzioni dei rendimenti marcatamente asimmetriche (la lieve asimmetria sinistra esibita dalla distribuzione dell'Asset6 infatti determinerà un apprezzamento del suo rendimento atteso inferiore al 2%).

Infine, allo scopo di considerare simultaneamente i valori di curtosi e asimmetria, il vettore $\tilde{\mu}_{mod}$ si ottiene, in accordo alla (3.4), come valor medio della duplice modifica subita da ciascun rendimento atteso.

In definitiva, l'ottimizzazione di strategie di rischio in presenza di distribuzioni dei rendimenti non gaussiane, può essere condotta mediante i problemi (3.1) e (3.2) in precedenza esposti, in cui però la tradizionale funzione obiettivo viene sostituita con la sua versione modificata, ossia:

$$\tau_p^{mod}(w) \equiv \frac{w' \tilde{\mu}_{mod}}{\sigma_p(w)}.$$

Le soluzioni derivanti dall'ottimizzazione della strategia di MV e di quella ERC ottenute con l'approccio appena presentato (e che indicheremo rispettivamente con $w_{MV}^{**,mod}$ e $w_{ERC}^{**,mod}$), saranno soggette a procedura di Backtest nel successivo paragrafo.

3.3 Backtest

Avendo sin qui presentato diverse strategie di ottimizzazione di portafoglio di rischio, non ci resta che testarne la bontà delle soluzioni mediante tecnica di Backtest.

A tal proposito si è deciso di implementare una strategia di investimento su base annua che preveda ribilanciamenti mensili.

In corrispondenza di ciascuna data di ribilanciamento, la stima delle statistiche dei rendimenti necessarie per la costruzione delle strategie di rischio e per la formulazione dei rispettivi problemi di ottimizzazione, viene effettuata utilizzando i ritorni mensili dei tre anni precedenti (si usa quindi una finestra di stima "mobile").

In particolare nel seguito vengono riportati i rendimenti e la volatilità di ognuna delle strategie implementate, separando i risultati relativi all'ottimizzazione del portafoglio di MV da quello del portafoglio ERC.

	rendimento	volatilità	rend/vol
w_{MV}	0.0018	0.1982	0.0090
w_{MV}^*	0.0038	0.2036	0.0188
w_{MV}^{**}	0.0123	0.2146	0.0574
$w_{MV}^{**,mod}$	0.0138	0.2142	0.0645

TABELLA 3.6: Risultati backtest MV.

In Tabella 3.6 vengono mostrati i risultati relativi alla strategia di MV e alle sue versioni ottimizzate.

Come ampiamente sottolineato, le strategie di rischio, essendo costruite sulla base delle sole informazioni della matrice di covarianza, rischiano di non essere ottimali dal punto di vista della redditività.

Si nota infatti immediatamente come, pur realizzando la volatilità più bassa, il portafoglio di MV risulta avere il peggior rapporto rendimento/volatilità, a causa di un ritorno realizzato molto basso.

Risulta interessante notare come le strategie di ottimizzate w_{MV}^{**} e $w_{MV}^{**,mod}$ risultino essere quelle che meglio hanno performato, riuscendo nell'obiettivo di migliorare significativamente la performance relativa del portafoglio di riferimento senza alterarne significativamente la volatilità (si nota infatti come i vincoli di varianza imposti a priori siano stati rispettati, la varianza di $w_{MV}^{**,mod}$ risulta essere circa il 17% più grande di quella del portafoglio di MV).

In Tabella 3.7 vengono infine riportati i risultati relativi all'ottimizzazione del portafoglio ERC.

È curioso osservare come tutte e tre le strategie di ottimizzazione falliscano nel loro scopo.

La strategia ERC risulta infatti essere stata quella a maggior rendimento per unità di rischio, mostrando in questo modo quelle che di contro possono essere le problematiche evidenziate in relazione ad approcci di ottimizzazione facenti uso della stima dei rendimenti attesi.

Bisogna però notare come la soluzione w_{ERC}^* sia responsabile di una drastica

	rendimento	volatilità	rend/vol
w_{ERC}	0.0338	0.2097	0.1614
w_{ERC}^*	0.0091	0.2190	0.0417
w_{ERC}^{**}	0.0320	0.2093	0.1532
$w_{ERC}^{**,mod}$	0.0326	0.2091	0.1561

TABELLA 3.7: Risultati backtest ERC.

diminuzione della performance relativa del portafoglio della strategia di riferimento.

Ben più confortanti risultano essere i risultati prodotti da w_{ERC}^{**} e $w_{ERC}^{**,mod}$ che, a dispetto di un leggero abbassamento del rendimento, riescono a mantenere una performance relativa simile a quella del portafoglio ERC mediante un abbassamento della volatilità.

Da sottolineare infine come, in entrambi i casi, fra le tre versioni ottimizzate, quella derivante dalla modifica della misura di performance (proposta per far fronte alla non gaussianità dei rendimenti) produca le soluzioni con più alta redditività.

Capitolo 4

Portafogli HRP

Avendo sin qui presentato tecniche di ottimizzazione di strategie di rischio facenti uso della stima dei rendimenti attesi, presentiamo nel capitolo corrente l'approccio di costruzione di portafoglio denominato "Hierarchical Risk Parity"(HRP) che, al pari delle strategie basate sul rischio, necessita della sola stima della matrice di covarianza dei rendimenti.

I portafogli HRP mirano alla risoluzione delle tre principali problematiche relative agli ottimizzatori quadratici in generale e alla soluzione di Markowitz's nello specifico: instabilità, concentrazione e sotto-performance.

4.1 Motivazioni

Nonostante la brillantezza della teoria di Markowitz, alcune problematiche di carattere pratico possono renderne le soluzioni ben poco affidabili.

Il principale problema risiede nel fatto che piccole deviazioni nella stima dei rendimenti attesi possono portare a portafogli molto diversi tra loro (Michaud,1998).

Dato che i rendimenti attesi raramente possono essere stimati con sufficiente accuratezza, diversi autori hanno deciso di rimuoverne la stima dalla costruzione della loro strategia di investimento, concentrandosi esclusivamente sulle informazioni provenienti dalla matrice di covarianza.

Questo ha portato alla nascita di quelle che tuttora sono definite le strategie di allocazione basate sul rischio. Rimuovere però la previsione dei rendimenti attesi non previene totalmente il problema dell'instabilità.

La ragione è che i metodi di programmazione quadratica richiedono l'inversione di una matrice di covarianza definita positiva (i.e. con autovalori tutti positivi).

Tale inversione è soggetta a grandi errori quando la matrice di covarianza

risulta essere numericamente mal-condizionata, cioè quando presenta un numero di condizionamento elevato (Bailey e Lòpez de Prado, 2012).

Il numero di condizionamento di una matrice di covarianza, correlazione (o normale, quindi diagonalizzabile) è definito come il valore assoluto del rapporto fra il massimo e il minimo (in modulo) autovalore.

Aggiungendo progressivamente investimenti fra loro correlati (multicollinearità) il numero di condizionamento della matrice di covarianza aumenta.

Ad un certo punto tale numero risulta talmente alto che errori numerici rendono l'inversa alquanto instabile: piccole variazioni dei parametri in ingresso porteranno ad una inversa molto differente (Bailey e Lòpez de Prado, 2012).

Una delle ragioni alla base dell'instabilità degli ottimizzatori quadratici è che lo spazio vettoriale delle serie dei rendimenti è modellato come un grafo completo, nel quale ogni nodo risulta essere un potenziale sostituito di un altro. In termini algoritmici, invertire la matrice di covarianza significa valutare la correlazioni parziali lungo il grafo completo (una matrice $N \times N$ è rappresentabile come un grafo di N nodi e $N(N - 1)/2$ rami).

Si considerino per un istante le implicazioni pratiche di una tale struttura topologica.

Supponendo che un investitore desideri costruire un portafoglio diversificato, alcuni investimenti saranno vicini sostituiti uno dell'altro, altri invece risulteranno complementari.

Per esempio i titoli azionari potrebbero essere raggruppati in termini di liquidità, dimensione, industria e regione, in modo che l'allocazione possa avvenire per gruppi.

In tale prospettiva i titoli facenti parti della medesima categoria risulterebbero in competizione tra loro ai fini dell'allocazione.

Per la matrice di covarianza invece, ciascun investimento risulta essere un potenziale sostituto di qualunque altro, non disponendo quindi della nozione di gerarchia.

Questa mancanza di una struttura gerarchica che consente ai pesi di variare senza costrizioni, risulta essere la principale causa di instabilità.

Per tale ragione l'approccio HRP, mediante tecniche di machine learning, si serve di una struttura gerarchica ad albero che, nel tentativo di risolvere il problema dell'instabilità, risulta anche fornire risultati intuitivi.

4.2 L'algoritmo HRP

Il metodo HRP utilizza le informazioni contenute nella matrice di covarianza senza richiederne la sua inversione o la definita-positività. Infatti, HRP può

costruire un portafoglio basandosi su una matrice di covarianza addirittura singolare, richiesta impossibile per problemi la cui risoluzione richiede l'uso di algoritmi di programmazione quadratica.

In particolare l'algoritmo opera attraverso tre distinte fasi: clustering gerarchico, quasi-diagonalizzazione e bisezione ricorsiva.

4.2.1 Clustering gerarchico

Si consideri una matrice X di dimensioni $T \times N$ contenente serie storiche di ritorni di N variabili osservate lungo T istanti di tempo.

L'obiettivo è quello di eseguire un clustering gerarchico sulle N colonne di X in modo tale che l'allocation di ricchezza possa fluire lungo le diramazioni di una struttura ad albero.

Una tale procedura inizia considerando gli N oggetti fra loro distinti, procedendo in seguito al loro progressivo raggruppamento.

Il concetto di raggruppamento richiama implicitamente quello di similarità (o dissimilarità che si voglia): nel seguito ci si servirà dunque di una metrica con la quale sarà possibile quantificare la distanza tra coppie di elementi unitamente ad un criterio di collegamento, ossia uno strumento in grado di quantificare la similarità tra agglomerati di elementi.

Procedendo per passi, si presenta l'algoritmo di raggruppamento utilizzato:

Primo, si calcoli la matrice di correlazione $N \times N$, indicando i suoi coefficienti con $\rho_{i,j}$ e si introduca la distanza $d : (X_i, X_j) \rightarrow [0, 1]$ definita come

$$d_{i,j} = d(X_i, X_j) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{i,j})}.$$

È possibile mostrare come $d_{i,j}$ risulti una metrica (de Prado, Journal of Portfolio Management, 2016, pp. 13) soddisfacendo le proprietà di non-negatività ($d(X, Y) \geq 0, d(X, Y) = 0 \iff X = Y$), di simmetria ($d(X, Y) = d(Y, X)$) e di sub-additività ($d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$).

Questo ci consente di calcolare la matrice di distanza $N \times N$ che indichiamo con $D = \{d_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,N}$.

Riportiamo un semplice esempio numerico in dimensione 3 nel quale, partendo da una data matrice di correlazione, si ottiene la rispettiva matrice di distanza procedendo come appena esposto.

$$\{\rho_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.7 & 1 & -0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{d_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3873 & 0.6325 \\ 0.3873 & 0 & 0.7746 \\ 0.6325 & 0.7746 & 0 \end{bmatrix}$$

Secondo, si calcoli la distanza euclidea fra ciascuna delle coppie di colonne della matrice D , $\tilde{d}(D_i, D_j) \rightarrow [0, \sqrt{N}]$, $\tilde{d}_{i,j} = \tilde{d}(D_i, D_j) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (d_{n,i} - d_{n,j})^2}$. Si noti la differenza fra le metriche $d_{i,j}$ e $\tilde{d}_{i,j}$: la prima viene definita sulle colonne della matrice X mentre la seconda su quelle della matrice D risultando essere concettualmente una "distanza di distanze".

In tal modo dunque due serie di rendimenti risultano tanto più simili quanto risultano esserlo le distanze (in termini di $d_{i,j}$) che intercorrono tra loro e ciascuna delle altre serie.

Continuando nell'esempio numerico introdotto in precedenza al passo 1, procediamo con il calcolo della matrice \tilde{D}

$$\{d_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3873 & 0.6325 \\ 0.3873 & 0 & 0.7746 \\ 0.6325 & 0.7746 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{\tilde{d}_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5659 & 0.9747 \\ 0.5659 & 0 & 1.1225 \\ 0.9747 & 1.1225 & 0 \end{bmatrix}$$

Terzo, avendo introdotto un concetto di similarità (e di conseguenza dissimilarità) tra coppie di elementi, si procede raggruppando la coppia di colonne (i^*, j^*) tali per cui $(i^*, j^*) = \arg \min_{(i,j), i \neq j} \tilde{d}_{i,j}$ e denominando tale cluster $u[1]$.

$$\{\tilde{d}_{i,j}\}_{i,j=\{1,2,3\}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0.5659} & 0.9747 \\ 0.5659 & 0 & 1.1225 \\ 0.9747 & 1.1225 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow u[1] = (1, 2)$$

Quarto, risulta necessario introdurre un criterio di collegamento mediante il quale si possa disporre del concetto di similarità fra il nuovo cluster formato $u[1]$ e i singoli elementi non ancora raggruppati in modo che $\{\tilde{d}_{i,j}\}$ possa essere aggiornata.

Nello specifico si definisce la distanza tra un oggetto i di \tilde{d} ed il nuovo cluster $u[1]$ come $\hat{d}_{i,u[1]} = \min_{j \in u[1]} \tilde{d}_{i,j}$.

$$u[1] = (1, 2) \rightarrow \{\hat{d}_{i,u[1]}\} = \begin{bmatrix} \min[0, 0.5659] \\ \min[0.5659, 0] \\ \min[0.9747, 1.1225] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9747 \end{bmatrix}$$

Quinto, la matrice $\tilde{d}_{i,j}$ viene modificata con l'aggiunta di $\hat{d}_{i,u[1]}$ e la rimozione delle righe e colonne $j \in u[1]$ degli elementi costituenti il cluster (nell'esempio

specifico si procederà quindi alla rimozione delle righe e colonne 1 e 2).

$$\{\tilde{d}_{i,j}\}_{i,j=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5659 & 0.9747 & 0 \\ 0.5659 & 0 & 1.1225 & 0 \\ 0.9747 & 1.1225 & \mathbf{0} & \mathbf{0.9747} \\ 0 & 0 & \mathbf{0.9747} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Sesto, l'applicazione ricorsiva dei punti 3-5 consente la progressiva formazione di cluster fino a che, al passo $N - 1$, si perderà qualsiasi distinzione giungendo ad avere un raggruppamento formato da tutti gli N oggetti: è a questo punto che l'algoritmo si arresta.

$$\{\tilde{d}_{i,j}\}_{i,j=3,4} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0.9747} \\ 0.9747 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow u[2] = (3, 4) \rightarrow Stop.$$

In relazione all'esempio considerato, la Figura 4.1 mostra i raggruppamenti ottenuti nei due passi della procedura.

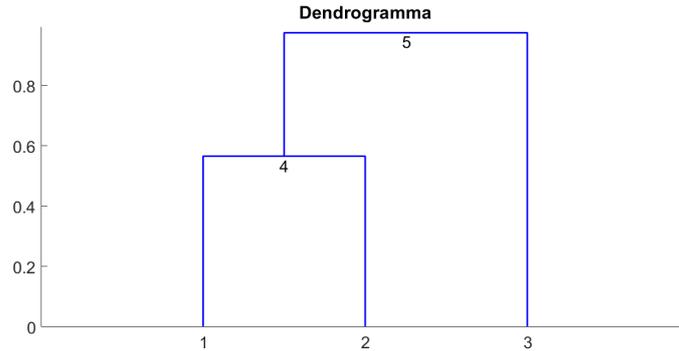


FIGURA 4.1: Formazione di cluster .

La struttura ad albero derivante dall'esempio numerico presentato viene raffigurata come un dendrogramma attraverso il quale, in ordinata, viene riportata la distanza a cui due sottogruppi si uniscono per formare un unico insieme di elementi.

Dalla figura 4.1 possiamo inoltre notare come gli $N - 1$ gruppi determinati dall'algoritmo di cluster assumano una numerazione da $N + 1$ a $2N - 1$.

Questa prima fase permette quindi di definire la cosiddetta matrice di collegamento di dimensioni $(N - 1) \times 3$, la cui struttura può essere sintetizzata come segue: $Y = \{(y_{m,1}, y_{m,2}, y_{m,3})\}_{m=1, \dots, N-1}$.

In particolare $(y_{m,1}, y_{m,2})$ indicano gli elementi costituenti il cluster formato

al passo m , mentre $y_{m,3}$ denota la distanza a cui tale raggruppamento avviene.

Al fine di una maggior comprensione viene di seguito riportata la matrice di collegamento relativa all'esempio numerico considerato:

$$Y = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 0.5659 \\ 3.0000 & 4.0000 & 0.9747 \end{bmatrix}$$

In analogia con la notazione utilizzata, possiamo infatti vedere come il primo passo dell'algoritmo raggruppi gli elementi 1 e 2 (cluster che sarà indicato con 4) per poi concludere la procedura accorpando l'elemento 3 con il cluster 4 in precedenza formato.

4.2.2 Quasi-diagonalizzazione

La seconda fase dell'algoritmo HRP prevede la riorganizzazione delle righe e colonne della matrice di covarianza, in modo tale che i valori (in modulo) più grandi risiedano lungo la diagonale principale.

L'effetto di questa quasi-diagonalizzazione (che avviene senza che sia richiesto un cambio di base) è quello di riordinare gli investimenti in modo tale che questi risultino in prossimità dei propri simili e, contemporaneamente, sufficientemente a distanza dai loro dissimili.

Ricordando che ogni riga della matrice di collegamento rappresenta l'unione di due distinti nodi dell'albero in uno soltanto, la procedura funziona nel seguente modo: si sostituiscono i gruppi $(y_{N-1,1}, y_{N-1,2})$ contenuti nell'ultima riga della matrice di collegamento con i loro elementi costituenti, procedendo ricorsivamente con tale criterio fino al raggiungimento delle foglie dell'albero (i.e. fino a quando non si ha più nessun raggruppamento di elementi).

L'output della procedura risulterà dunque essere una lista ordinata degli elementi di partenza.

4.2.3 Bisezione ricorsiva

La fase due ci consegna una matrice quasi-diagonale. L'allocazione eseguita in maniera proporzionale al valore della varianza di ciascun asset, risulta essere ottima in corrispondenza di matrici di covarianza diagonali (de Prado, *Journal of Portfolio Management*, 2016, pp. 14).

Ci si può avvalere di tale considerazione in un duplice modo: a) con approccio ascendente, supponendo che la varianza di un sottoinsieme di oggetti sia quella derivante dall'allocazione a varianza-inversa fra gli oggetti stessi; b) con approccio verso il basso, procedendo con l'allocazione di ricchezza fra due sottoinsiemi adiacenti in maniera inversamente proporzionale alla varianza

degli stessi.

L'algoritmo proposto formalizza l'idea espressa:

1. l'inizializzazione avviene nel seguente modo:
 - a. selezionando la lista di oggetti $L = \{L_0\}$, con $L_0 = \{n\}_{n=1, \dots, N}$,
 - b. assegnando ad ognuno degli elementi un peso unitario, i.e. $w_n = 1$, $\forall n = 1, \dots, N$.
2. se $|L_i| = 1, \forall L_i \in L$, allora l'algoritmo si arresta.
3. $\forall L_i \in L$ tale che $|L_i| > 1$:
 - a. si biseziona L_i in due sottoinsiemi, $L_i^{(1)} \cup L_i^{(2)} = L_i$, dove $|L_i^{(1)}| = \lfloor \frac{1}{2}|L_i| \rfloor$ e l'ordinamento è preservato;
 - b. si definisce la varianza di $L_i^{(j)}$, $j = 1, 2$ mediante la forma quadratica $V_i^{(j)} \equiv w_i^{(j)'} \Sigma_i^{(j)} w_i^{(j)}$, dove $\Sigma_i^{(j)}$ è la matrice di covarianza delle componenti della bisezione $L_i^{(j)}$ e $w_i^{(j)} = \frac{\text{diag}[\Sigma_i^{(j)}]^{-1}}{\text{tr}[\text{diag}[\Sigma_i^{(j)}]^{-1}]}$, dove $\text{diag}[\cdot]$ e $\text{tr}[\cdot]$ indicano l'operatore diagonale e di traccia rispettivamente;
 - c. si calcola il fattore di divisione $\alpha_i = 1 - \frac{V_i^{(1)}}{V_i^{(1)} + V_i^{(2)}}$, così che $0 \leq \alpha_i \leq 1$;
 - d. si riscalano le allocazioni w_n per il fattore $\alpha_i, \forall n \in L_i^1$;
 - e. si riscalano le allocazioni w_n per il fattore $(1 - \alpha_i), \forall n \in L_i^2$.
4. si ritorna al passo 2.

Possiamo notare come il passo 3.b si avvantaggi della quasi diagonalizzazione con un approccio "bottom-up", poiché nel definire la varianza della partizione $L_i^{(j)}$ utilizza un'allocazione inversamente proporzionale alla varianza di ciascun elemento della stessa.

Il passo 3.c invece se ne avvale mediante un approccio "top-down", perché l'allocazione di ricchezza fra due gruppi adiacenti di una partizione avviene proprio in maniera inversamente proporzionale alla varianza di questi.

Il fatto che ad ogni iterazione l'algoritmo ripartisca la ricchezza tenendo in considerazione il vettore dei pesi in precedenza determinato, ci assicura che $0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N$ e $\sum_{i=1}^N w_i = 1$.

Questo conclude una prima descrizione dell'algoritmo HRP, il quale risolve il problema di allocazione della ricchezza in tempo logaritmico (i.e. $T(n) = \mathcal{O}(\log_2 n)$).

4.2.4 Esempio

Dopo aver presentato le fasi di cui si compone l'algoritmo HRP per risolvere il problema di allocazione, procediamo mediante un'applicazione pratica della procedura introdotta.

Oltre a fornire una maggior comprensione dei risultati ottenuti dall'algoritmo, l'idea è quella di verificare le capacità di discernimento di serie simili (nel senso in precedenza esposto) durante la procedura di raggruppamento gerarchico.

Consideriamo allora una matrice di osservazioni $X = \{X_i\}_{i=1,\dots,10}$ di dimensione 10×1000 generata come segue:

- i primi 5 vettori aleatori vengono simulati da una distribuzione normale standard, i.e. $\{X_j = z\}_{j=1,\dots,5}$;
- si procede alla simulazione di 5 numeri interi provenienti da una distribuzione uniforme discreta sull'insieme $1, \dots, 5$ indicandoli con $\{\theta_k\}_{k=1,\dots,5}$;
- le restanti colonne del dataset vengono ottenute come $X_{5+k} = X_{\theta_k} + \frac{1}{4}z, \forall k = 1, \dots, 5$. Una tale costruzione induce la seconda metà delle colonne del dataset ad essere parzialmente correlate a quelle della prima.

Seguendo la procedura in precedenza esposta, si inizi con il calcolare la matrice di correlazione relativa al dataset generato.

Risulta a questo punto possibile calcolare la matrice $D = \{d_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,10}$ mediante la quale si ottiene infine $\tilde{D} = \{\tilde{d}_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,10}$: è proprio questa infatti che permette di identificare le due serie più simili fra loro procedendo in tal modo alla formazione del primo cluster.

In Figura 4.2 viene riportata "l'heatmap" della matrice di correlazione in precedenza calcolata.

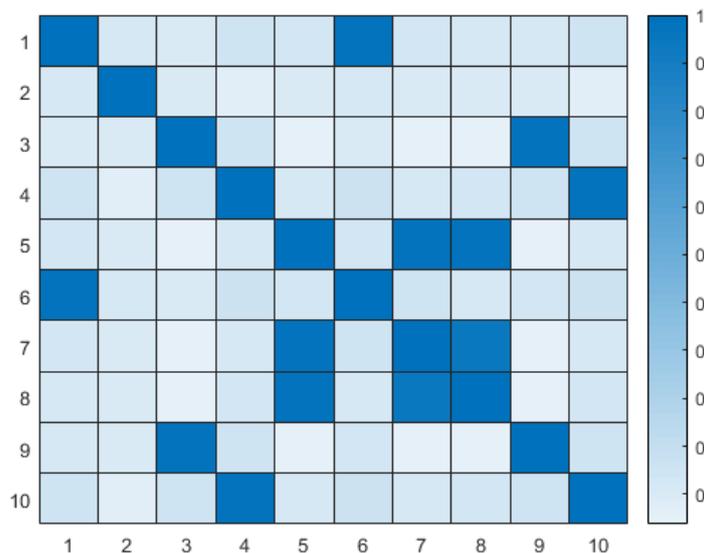


FIGURA 4.2: "Heatmap" della matrice di correlazione originale.

Procedendo nell'implementazione della procedura di clustering gerarchico, si ottiene la relativa matrice di collegamento necessaria per la fase 2 dell'algoritmo HRP (quasi-diagonalizzazione). In Figura 4.3 si riporta il dendrogramma relativo alla formazione dei cluster fra le 10 serie contenute nel dataset utilizzato.

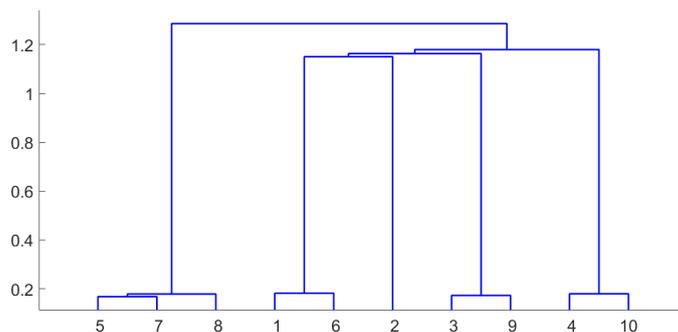


FIGURA 4.3: Dendrogramma di formazione di cluster.

Al fine di poter apprezzare la capacità dell'algoritmo di riconoscere le serie tra loro simili, riportiamo il vettore dei $\{\theta_k\}_{k=1,\dots,5}$ che, nell'esperimento condotto, è risultato essere (1, 5, 5, 3, 4).

Come mostrato in Figura 4.3, la procedura di clustering identifica correttamente che le serie 7 e 8 risultano essere perturbazioni della serie 5 e di conseguenza le raggruppa insieme.

Allo stesso modo, 6 è una perturbazione di 1, 9 è una perturbazione di 3 ed infine 10 lo è di 4.

L'unica colonna a non essere stata perturbata è la 2 ed è infatti l'unico elemento per il quale l'algoritmo di cluster non riscontra alcuna similarità immediata.

A questo punto, disponendo della matrice di collegamento derivante dall'algoritmo di clustering, procediamo con la quasi-diagonalizzazione della matrice di correlazione.

Come spiegato in precedenza, sostituendo ricorsivamente i costituenti di ciascun cluster a partire da quelli indicati nell'ultima riga della matrice di collegamento, si ottiene in output una lista ordinata delle 10 serie originarie.

Permutando quindi le serie del dataset originario in accordo con i risultati della fase 2 dell'algoritmo HRP, la matrice di correlazione risulta essere come riportato in Figura 4.4.

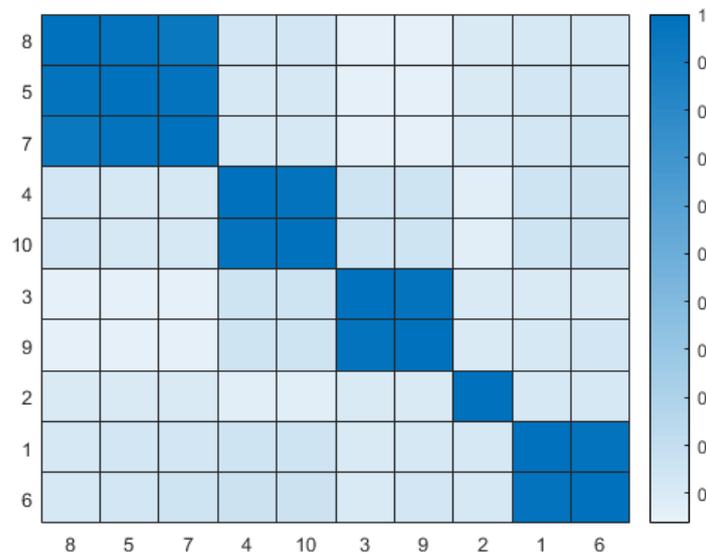


FIGURA 4.4: "Heatmap" in seguito alla quasi-diagonalizzazione.

Eseguendo infine l'allocazione mediante bisezione ricorsiva come riportato nel paragrafo 4.2.3, il portafoglio ottenuto risulta essere

$$w_{HRP} = (0.0986, 0.2009, 0.1088, 0.0700, 0.0717, 0.0917, 0.1192, 0.0667, 0.1043, 0.0680).$$

4.3 Stabilità

L'algoritmo HRP, a differenza dei metodi di programmazione quadratica, non richiede l'inversione della matrice di covarianza.

Come anticipato, nel caso di matrici mal-condizionate, tale inversione è spesso causa di instabilità nella soluzione in quanto, in tale scenario, piccole variazioni dei parametri in ingresso possono condurre ad un'inversa molto differente (Bailey e Lòpez de Prado, 2012).

Nel seguito del paragrafo si riporta l'esito di un esperimento numerico che nell'indagare la stabilità dei portafogli HRP e MV mostra dei risultati in linea con le aspettative a priori sopra espresse.

In particolare, si consideri una matrice di osservazioni $X = \{X_i\}_{i=1,\dots,20}$ tale per cui $X_{20} = \frac{1}{4}z + \sum_{i=1}^{19} \alpha_i X_i$, dove z risulta essere un vettore campionato da una normale standard e $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,19}$ i coefficienti della combinazione lineare delle prime 19 colonne, generati aleatoriamente in $[-1,1]$.

Una tale scelta è mirata all'ottenimento di una matrice di covarianza ad alto numero di condizionamento che nello specifico è risultato essere 695.5311.

Per misurare l'instabilità di entrambe le soluzioni rispetto alla variazione dei parametri contenuti nella matrice di covarianza, si esegue una perturbazione aleatoria della stessa (limitando l'intensità massima delle perturbazioni effettuate su ciascun coefficiente e assicurandosi inoltre di ottenere nuovamente una matrice simmetrica e definita-positiva).

Per poter quantificare come la variazione dei parametri in ingresso vada ad impattare sulle soluzioni delle due diverse metodologie, si calcola per entrambe il discostamento assoluto della strategia di investimento originaria da quella ottenuta a seguito della perturbazione effettuata.

Come anticipato, i risultati riportati in Tabella 4.1, confermano le previsioni a priori, evidenziando una maggiore stabilità della soluzione HRP.

$\sum_{i=1}^{20} w_{MV}(i) - \tilde{w}_{MV}(i) $	$\sum_{i=1}^{20} w_{HRP}(i) - \tilde{w}_{HRP}(i) $
0.5626	0.1077

TABELLA 4.1: Stabilità HRP vs MV, matrice mal-condizionata.

Per poter meglio comprendere la causa dei risultati mostrati in Tabella 4.1, con l'ausilio di grafici a torta si pongono a diretto confronto le soluzioni fornite da entrambe le strategie nel caso esatto e perturbato.

In Figura 4.5 vengono riportate le allocazioni derivanti dall'utilizzo dell'approccio HRP. Si può notare come l'errore di stima commesso nella determinazione della matrice di covarianza dei rendimenti, pur consegnando una soluzione leggermente modificata nei pesi, non sia comunque tale da modifi-

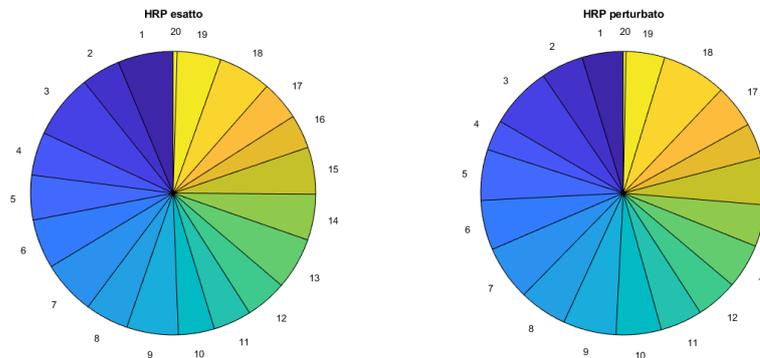


FIGURA 4.5: Allocazione HRP, caso esatto e perturbato.

care in maniera significativa l'allocazione di ricchezza.

Lo stesso discorso non può essere fatto per la strategia di MV di cui si riportano in Figura 4.6 i portafogli ottenuti nei due casi (esatto e perturbato).

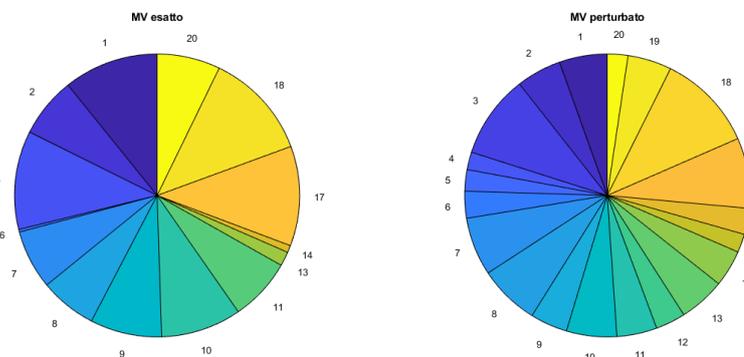


FIGURA 4.6: Allocazione MV, caso esatto e perturbato.

Si vede chiaramente come le allocazioni risultanti appaiano molto diverse nel loro complesso. La soluzione nel caso esatto risulta essere ben più concentrata (prevedendo investimenti in solo 14 dei 20 titoli), quella ottenuta nel caso perturbato risulta essere assolutamente più diversificata, investendo infatti nella totalità delle attività finanziarie a disposizione.

Concludiamo le analisi di stabilità chiedendoci se questa differenza di comportamento tra le soluzioni HRP e MV a favore delle prime, possano essere

in definitiva imputabili al mal-condizionamento che talvolta la matrice di covarianza può presentare.

Consideriamo allora un secondo dataset che indicheremo nuovamente con $X = \{X_i\}_{i=1,\dots,20}$ in cui ciascuna delle colonne risulta questa volta essere un campionamento proveniente da una distribuzione normale standard.

Non introducendo una forte correlazione a priori tra le colonne di X , otteniamo un condizionamento della matrice di covarianza ad essa associata pari a 3.6292.

Ripercorrendo le stesse analisi condotte in precedenza, riportiamo in Tabella 4.2 i risultati di stabilità delle due metodologie in esame.

$\sum_{i=1}^{20} w_{MV}(i) - \tilde{w}_{MV}(i) $	$\sum_{i=1}^{20} w_{HRP}(i) - \tilde{w}_{HRP}(i) $
0.1053	0.1105

TABELLA 4.2: Stabilità HRP vs MV, matrice ben-condizionata.

I risultati mostrati in Tabella 4.2 evidenziano come, in caso di matrice di covarianza ben-condizionata (i.e. con un basso numero di condizionamento), le risposte in stabilità offerte dall'applicazione di entrambe le metodologie risultino pressoché le stesse (non si riportano infatti i risultati grafici relativi alle allocazioni poiché non presentano modifiche significative riscontrabili visivamente).

In sintesi dunque la netta differenza in stabilità mostrata dalle soluzioni HRP e MV (a favore delle prime) in corrispondenza di una matrice di covarianza mal-condizionata, sembrano mitigarsi (portando nel caso presentato ad un minor discostamento assoluto dei pesi delle soluzioni di MV) col diminuire del numero di condizionamento della stessa.

4.4 Varianti

La metodologia HRP presentata nel capitolo risulta essere molto flessibile ammettendo di conseguenza diverse varianti sul tema.

Risulta infatti possibile configurare le fasi di cui l'algoritmo nel suo complesso si compone in modo da ottenere una procedura che meglio si adatti alle esigenze dell'investitore.

Per esempio, nella fase 1 è possibile utilizzare diverse definizioni per $d_{i,j}$, $\tilde{d}_{i,j}$ e $\hat{d}_{i,u}$, servendosi in tal modo di concetti differenti per misurare la similarità fra singoli elementi o aggregati di questi.

Nella fase 3 di bisezione ricorsiva è invece possibile fare uso di diverse funzioni per w_n e α o di diversi vincoli di allocazione.

Nel seguito proponiamo invece una variante che si avvale solamente dell'algoritmo di cluster (descritto in fase 1), senza fare uso dell'allocazione mediante bisezione ricorsiva (descritto in fase 3).

Come sottolineato in apertura di capitolo (paragrafo 4.1), in ottica di costruzione di un portafoglio diversificato, alcuni investimenti risulteranno essere fra loro "simili", altri invece si dimostreranno complementari.

Alla luce di tali considerazioni si potrebbe propendere per un'allocazione "top-down" lungo l'albero di cluster identificato nella fase 1 dell'algoritmo HRP.

Per favorire la visualizzazione di una tale strategia di costruzione di portafogli, si immagini che la ricchezza iniziale sia assimilabile ad un secchio contenente un fluido che versato lungo l'albero di cluster ripartisca il suo flusso ad ogni bivio incontrato in maniera inversamente proporzionale alla varianza dei due sottogruppi identificati dal bivio stesso.

In analogia con quanto fatto nell'algoritmo di bisezione ricorsiva (passo 3.b), anche in questo caso le varianze di ciascuno dei due raggruppamenti identificati ad ogni bivio dell'albero di cluster, vengono calcolate assumendo un'allocazione inversamente proporzionale alla varianza di ciascun elemento costituente i rispettivi sottogruppi.

Al fine di una miglior comprensione del funzionamento della strategia proposta, ci si serve dell'albero di cluster generato dalla fase 1 dell'algoritmo HRP, in corrispondenza del dataset utilizzato nelle analisi condotte nei precedenti capitoli.

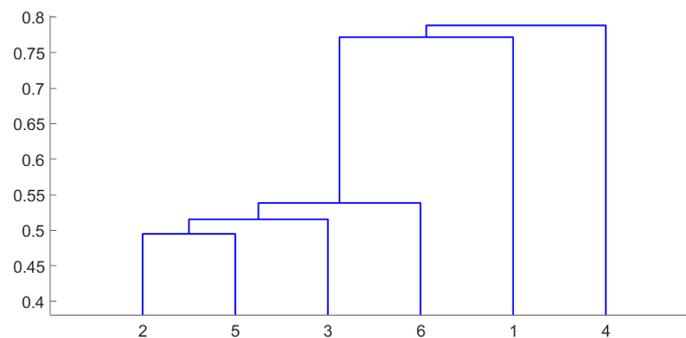


FIGURA 4.7: Cluster dei 6 titoli del dataset.

In riferimento alla Figura 4.7 la strategia di allocazione (che da ora in poi chiameremo "ad albero") partirebbe identificando $\{4\}$ e $\{2, 5, 3, 6, 1\}$ come due distinti gruppi di titoli.

La varianza del primo gruppo risulta naturalmente essere pari alla varianza

del solo titolo 4, mentre quella del secondo è determinata dalla forma quadratica $w'\Sigma w$, dove Σ indica la matrice di covarianza del gruppo e w l'allocazione inversamente proporzionale alla varianza di ciascuno dei titoli facenti parte di tale gruppo.

In accordo con l'idea espressa nella fase 3 dell'algoritmo HRP, l'allocazione della ricchezza iniziale avanza in maniera inversamente proporzionale alla varianza dei due gruppi sopra individuata.

L'algoritmo procede ricorsivamente nell'applicazione della stessa idea (nella seconda fase distinguerà i due gruppi $\{1\}$ e $\{2, 5, 3, 6\}$) fino alla terminazione delle diramazioni nella struttura ad albero.

Una tale metodologia di allocazione risulta fornire soluzioni intuitive, allocando la ricchezza fra i sottogruppi che mano a mano vengono a definirsi aumentando lo "zoom" sui titoli originariamente a disposizione.

Per maggior completezza, indaghiamo ora le proprietà di stabilità esibite dalla nuova metodologia proposta in relazione a quella mostrata dal classico approccio HRP.

A tal scopo si consideri nuovamente una matrice di osservazioni $X = \{X_i\}_{i=1,\dots,20}$ in cui ciascuna delle colonne risulta essere una simulazione proveniente da una distribuzione normale standard e se ne calcoli la matrice di covarianza. Come più volte fatto in precedenza, consideriamo 100 scenari differenti in ognuno dei quali la matrice di covarianza viene sottoposta a perturbazione aleatoria.

Nello specifico ad essere determinati in maniera aleatoria sono:

- un numero intero k compreso fra $[0, N \times (N + 1)/2]$ (data la simmetria delle matrice di covarianza infatti si considerano solamente gli elementi $\sigma_{i,j}$ con $i = 1, \dots, N$ e $j = i, \dots, N$ che risultano per l'appunto essere $N \times (N + 1)/2$);
- un sottoinsieme di k elementi fra i $\sigma_{i,j}$ con $i = 1, \dots, N$ e $j = i, \dots, N$;
- il segno e l'entità (non superiore al 30% del modulo dell'elemento perturbato) della perturbazione applicata a ciascuno degli elementi del sottogruppo individuato (al fine di preservare la simmetria della matrice, dopo aver perturbato il generico elemento $\sigma_{i,j}$ con $i \neq j$, si sostituisce con l'analogo valore l'elemento $\sigma_{j,i}$ ad esso simmetrico).

Per poter quantificare come la variazione dei parametri in ingresso vada ad impattare sulle soluzioni delle due diverse metodologie, si calcola per entrambe il discostamento assoluto della strategia di investimento originaria da quella ottenuta a seguito della perturbazione effettuata.

L'esito dell'esperimento condotto nel quale il numero medio di perturbazioni aleatorie eseguite in ciascun scenario è risultato essere pari a 105.75 (su 210 potenzialmente perturbabili), ha visto una maggiore stabilità (misurata come detto in termini di somma dei discostamenti assoluti dei pesi originari da quelli soggetti a perturbazione) della soluzione "ad albero" rispetto a quella HRP in 88 dei 100 scenari.

Al fine di poter comprendere meglio questi risultati si consideri il seguente esempio: supponiamo di essere in possesso di un dataset composto da 6 serie di titoli.

Supponiamo inoltre che la procedura di cluster gerarchico individui inizialmente i gruppi $\{5, 6\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$ e che la quasi-diagonalizzazione (fase 2 dell'algoritmo HRP) produca la lista ordinata $\{5, 6, 1, 2, 3, 4\}$.

Se ad esempio, in seguito alla perturbazione della matrice di covarianza, la prima distinzione dell'algoritmo di cluster rimanesse la stessa mentre la fase di quasi-diagonalizzazione producesse la lista ordinata $\{5, 6, 3, 4, 1, 2\}$, il primo passo dell'allocazione ad albero risulterebbe invariato, lo stesso non si potrebbe dire per l'allocazione HRP classica.

Quest'ultima infatti, nel caso esatto avrebbe partizionato la ricchezza in maniera inversamente proporzionale alla varianza dei gruppi $\{5, 6, 1\}$ e $\{2, 3, 4\}$, nel caso perturbato invece la distribuzione di ricchezza sarebbe avvenuta fra due diversi gruppi, nello specifico $\{5, 6, 3\}$ e $\{4, 1, 2\}$.

Con questo esempio in mente, per ogni scenario dell'esperimento condotto, si è tenuto traccia (per ciascuna delle due metodologie) del numero di ripartizioni di ricchezza avvenute tra gli stessi elementi, eseguite nel caso esatto e perturbato.

I risultati ottenuti sono nettamente a favore della strategia ad albero che in 82 dei 100 scenari, ha ottenuto un maggior numero di allocazioni uguali a quelle effettuate nel caso esatto, rispetto a quanto fatto dalla strategia HRP. In definitiva sembra che le prime diramazioni dell'albero di cluster abbiano spesso individuato gli stessi due gruppi di elementi sia nel caso esatto che in quello perturbato e, in virtù di tale fenomeno, l'allocazione ad albero sia risultata essere maggiormente stabile.

Concludiamo il capitolo presentando brevemente un'ulteriore variante dell'algoritmo HRP facente uso della stima dei rendimenti attesi.

Come sottolineato in precedenza, nella fase 3 di bisezione ricorsiva, l'allocazione tra due sottogruppi adiacenti avviene in maniera inversamente proporzionale alla loro varianza.

Si potrebbe invece decidere di utilizzare un criterio di ripartizione della ricchezza che prenda in considerazione anche i rendimenti attesi degli elementi

costituenti i due sottogruppi.

Una possibile soluzione si ottiene modificando il punto 3.c della procedura di bisezione ricorsiva nel seguente modo:

- 3.c : si calcola il fattore di divisione $\alpha_i = \frac{1 - \frac{V_i^{(1)}}{V_i^{(1)} + V_i^{(2)}}}{\frac{R_i^{(1)}}{R_i^{(1)} + R_i^{(2)}}}$,
così che $0 \leq \alpha_i \leq 1$

Dove $R_i^{(j)} \equiv w_i^{(j)'} \mu_i^{(j)}$ indica il rendimento atteso di $L_i^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Infatti, in analogia con le notazioni utilizzate nella fase 3 dell' algoritmo HRP, $w_i^{(j)}$ è il portafoglio derivante da un'allocazione a "varianza inversa" formato con gli elementi della lista $L_i^{(j)}$, mentre $\mu_i^{(j)}$ è il vettore dei loro rendimenti attesi.

La ridefinizione del passo 3.c porta dunque la ricchezza ad essere allocata tra due gruppi adiacenti in maniera inversamente proporzionale alla loro varianza ma direttamente proporzionale al loro rendimento atteso.

La stessa idea può agevolmente essere applicata anche nel caso della strategia di allocazione ad albero in precedenza introdotta.

Tutte le tecniche presentate nel capitolo saranno valutate mediante Backtest insieme alle varianti con esse proposte.

4.5 Backtest

Come anticipato tutte le tecniche di costruzione di portafoglio presentate nel capitolo vengono sottoposte a Backtest, insieme alle varianti proposte.

Al fine di consentire al lettore una comparazione dei risultati da queste ottenute con quelli raggiunti dalle tecniche presentate nei primi tre capitoli, si è deciso di implementare la stessa strategia di investimento utilizzata nel paragrafo 3.3 (ossia una strategia su base annua con ribilanciamenti mensili e una finestra temporale "mobile" di tre anni per la stima dei parametri necessari).

Indicheremo rispettivamente con w_{HRP} e w_{HRP}^{mod} il portafoglio HRP e la sua versione modificata mediante l'utilizzo dei rendimenti attesi.

Lo stesso varrà per la strategia di investimento ottenuta mediante allocazione ad albero e per la sua variante che, rispettivamente, saranno indicate con w_{alb} e w_{alb}^{mod} .

	rendimento	volatilità	rend/vol
w_{MV}	0.0018	0.1982	0.0090
w_{HRP}	0.0337	0.2117	0.1591
w_{HRP}^{mod}	0.0341	0.2134	0.1597
w_{alb}	0.0226	0.2219	0.1017
w_{alb}^{mod}	0.0245	0.2254	0.1089

TABELLA 4.3: Risultati backtest HRP e varianti.

Come mostrato dalla Tabella 4.3 il portafoglio di MV, nonostante presenti il più basso valore di volatilità, risulta ancora una volta essere quello a minor rendimento per unità di rischio.

Questo fatto è in linea con le problematiche evidenziati a priori: la strategia di MV, concentrando spesso (come nel caso in esame) gli investimenti in una ridotta gamma di attività, risulta maggiormente esposta all'eventuale andamento negativo delle stesse.

Un simile scenario risulta invece impattare in maniera meno significativa sulle performance dei portafogli w_{HRP} e w_{alb} (e delle loro varianti) a causa della loro miglior diversificazione.

Le quattro strategie proposte nel capitolo corrente infatti, pur presentando dei valori maggiori di volatilità, risultano ben più attrattive dal punto di vista del rendimento per unità di rischio ottenuto.

Da notare infine come, le varianti delle allocazioni ad albero e HRP facenti uso della stima dei rendimenti attesi, abbiano in entrambi i casi condotto al raggiungimento di un rendimento maggiore (accompagnato da un aumento della volatilità).

In particolare, la soluzione w_{HRP}^{mod} si è rivelata maggiormente attrattiva dal punto di vista del rapporto rendimento/volatilità.

Capitolo 5

Conclusioni

L'obiettivo primario della tesi è quello di presentare metodologie di costruzione di portafoglio in alternativa alle più classiche strategie di investimento basate sul rischio.

Le motivazioni alla base delle analisi condotte nella prima parte, risiedono in maniera sintetica nella considerazione di Ardia e Boudt (2015), i quali affermano che i portafogli di rischio nascondono una debolezza intrinseca: è solo sotto specifiche condizioni sui ritorni attesi che queste strategie si rivelano essere efficienti.

Alla luce di tale osservazione, Ardia, Boudt e Nguyen nel loro articolo "Beyond risk-based portfolios: balancing performance and risk contributions in asset allocations" (2018), suggeriscono di raggiungere un compromesso fra i vantaggi e gli svantaggi offerti da una strategia basata sul rischio.

Nel primo capitolo viene così introdotta la "Performance Risk Contribution Concentration" (PRCC), misura disegnata per essere minima in corrispondenza di portafogli con contributi alla performance e al rischio perfettamente allineati a livello di singole componenti.

Spinti dall'osservazione che il portafoglio di massimo indice di Sharpe deve necessariamente esibire valori nulli di PRCC, gli autori propongono un problema di ottimizzazione non lineare volto alla modifica dei pesi di un portafoglio basato sul rischio in modo che questo presenti un valore di PRCC più vicino allo zero.

Un ulteriore vantaggio che secondo gli autori dovrebbe spingere gli investitori verso la costruzione di portafogli a basso valore di PRCC, risiede nel fatto che tale condizione garantirebbe una maggior robustezza della performance relativa rispetto a possibili errori di stima dei parametri.

Partendo dall'assunto che la bontà di metodologie che introducono la stima dei ritorni attesi per problemi di ottimizzazione di strategie basate sul rischio dovrebbe essere misurata sulla base dei benefici apportati al netto degli svan-

taggi introdotti, si è deciso di analizzare con spirito critico la metodologia presentata.

Le analisi condotte e le principali considerazioni da queste tratte, vengono riassunte nel seguito:

- Studiando da vicino la relazione esistente fra PRCC e performance relativa di un portafoglio, si è potuto osservare come, in generale, ad una diminuzione della prima non faccia necessariamente seguito un aumento della seconda: tale proprietà sembra essere prerogativa locale del solo portafoglio di massima performance relativa.

Questa problematica sembra essere implicitamente contenuta nella formulazione del problema di ottimizzazione (2.2) proposto dagli autori, nel quale viene introdotto un vincolo di non alterazione della performance relativa del portafoglio di rischio di riferimento.

Partendo infatti dai portafogli di MV e ERC ed implementando la suddetta strategia di minimizzazione di PRCC rimuovendo però il vincolo sulla performance relativa, si giungerebbe ad avere soluzioni con performance relativa attesa nettamente più bassa di quella dei rispettivi portafogli di riferimento.

L'introduzione dei rendimenti attesi (implicitamente contenuti nella definizione di PRCC) non sembra quindi essere giustificata: sembra infatti una contraddizione in termini richiedere che una soluzione ottimizzata presenti la stessa performance relativa di quella d'origine.

- I vincoli (in particolar modo quella sulla differenza media quadratica) presenti nella formulazione del problema (2.2) sono stati introdotti al fine di poter interpretare la soluzione ottimizzata in relazione a quella di riferimento.

Sembra ragionevole assumere che la soluzione ottenuta dalla modifica di una strategia di rischio, sia tanto più interpretabile in termini di quest'ultima, tanto più riesca nel preservare le proprietà con le quali il portafoglio di rischio è stato costruito.

Le analisi effettuate evidenziano come non sussista una relazione biunivoca tra la distanza media quadratica dalla soluzione di riferimento e la salvaguardia delle sue proprietà di rischio: in primo luogo questo significa non fornire un controllo esplicito sul compromesso (in termini di "perdita di proprietà di rischio") raggiunto dalla soluzione ottimizzata ed in secondo non poter garantire che a fronte di vincoli più stringenti, si ottenga una soluzione maggiormente interpretabile in termini di quella di riferimento.

- Nonostante le analisi condotte non portino a credere che un basso valore di PRCC possa garantire una maggior stabilità della performance relativa di un portafoglio a fronte di variazioni infinitesime dei suoi pesi, supponiamo per un istante che sia così.

Questo non sarebbe ugualmente prova di maggior robustezza: misurare la robustezza in performance relativa non significa infatti perturbare i pesi di \tilde{w}_{ex} e osservarne la risposta in termini di performance relativa stimata (i.e. misurata in corrispondenza di errori di stima delle statistiche), significa invece richiedere che la soluzione esatta w_{ex} e la sua stima \tilde{w}_{ex} siano tali da soddisfare la seguente condizione:

$$\tau_p(w_{ex}) \approx \tau_p(\tilde{w}_{ex}).$$

In linea teorica bisognerebbe quindi richiedere che la valutazione della performance relativa di \tilde{w}_{ex} in corrispondenza della misura costruita coi valori reali (non quelli stimati) delle statistiche dei rendimenti, conducesse all'ottenimento di un valore poco distante da quello posseduto dalla soluzione teorica, condizione per nulla garantita dall'ottenimento di una strategia a basso valore di PRCC

Gli esperimenti condotti nel paragrafo 2.3.3 mostrano infatti come le proprietà di robustezza associate dagli autori al basso valore di PRCC raggiunto dalle soluzioni ottimizzate, siano in realtà da attribuire al vincolo di disuguaglianza presente nel problema (2.2).

Alla luce delle molteplici criticità riscontrate nella metodologia analizzata, nel Capitolo 3 vengono presentati problemi di massimizzazione di performance relativa (indice di Sharpe) con l'introduzione di controlli espliciti sulla massima alterazione delle proprietà di rischio che l'investitore è disposto a tollerare.

Per tenere conto della non gaussianità dei rendimenti, viene proposto l'utilizzo di una misura di performance in grado di considerare le caratteristiche riscontrate nelle distribuzioni empiriche e non soltanto l'ordinamento dei loro valori attesi.

Nello specifico si propone una misura di performance che orienti contemporaneamente le sue preferenze verso:

- distribuzioni ad alto rendimento atteso;
- distribuzioni empiriche con asimmetria sinistra (negativa), ossia con una maggior concentrazione nella parte destra a fronte di una coda sinistra più allungata;

- distribuzioni leptocurtiche, ossia più "appuntite" di una normale.

Il proposito con cui sono stati introdotti i nuovi problemi di ottimizzazione, ossia quello di modificare i pesi di una strategia di rischio in modo che possa presentare maggiori incentivi in termini di un aumento della performance attesa per unità di rischio assunto, sono stati infine confermati dai risultati ottenuti mediante Backtest.

Nella seconda parte viene invece introdotto l'approccio denominato "Hierarchical Risk Parity" (HRP). I portafogli HRP mirano alla risoluzione di tre macro problematiche degli ottimizzatori quadratici in generale e della soluzione di Markowitz nello specifico: instabilità, concentrazione e sotto-performance.

HRP utilizza una matematica moderna (teoria dei grafi e tecniche di machine learning) per costruire portafogli diversificati basati sulle informazioni contenute nella matrice di covarianza dei rendimenti.

Tuttavia, diversamente dagli ottimizzatori quadratici, HRP non richiede l'invertibilità della stessa, essendo in grado di trovare soluzioni in corrispondenza di matrici di covarianza mal-condizionate o addirittura singolari, impresa impossibile per ottimizzatori quadratici.

In particolare l'algoritmo opera attraverso tre distinte fasi: clustering gerarchico, quasi-diagonalizzazione e bisezione ricorsiva, ognuna delle quali viene ampiamente spiegata nel paragrafo 4.2.

Il paragrafo 4.3 è dedicato all'analisi di stabilità delle soluzioni HRP e MV rispetto ad errori di stima di una matrice di covarianza ad alto numero di condizionamento: i risultati ottenuti, oltre a mostrare la diversificazione caratterizzante le soluzioni HRP, ne confermano la miglior robustezza dei pesi a fronte di perturbazioni eseguite sui coefficienti della matrice di covarianza. Viene inoltre proposta una variante della metodologia presentata che si avvale solamente dell'algoritmo di cluster gerarchico (fase 1 dell'approccio HRP) senza fare uso della ripartizione mediante bisezione ricorsiva.

In particolare tale tecnica di allocazione, denominata "ad albero", prevede che la ricchezza iniziale venga mano a mano ripartita ad ogni bivio dell'albero di cluster in maniera inversamente proporzionale alla varianza dei due sottogruppi identificati dal bivio stesso.

Le analisi condotte perturbando la matrice di covarianza dei rendimenti hanno evidenziato una miglior stabilità della soluzione derivante da allocazione ad albero rispetto a quanto mostrato dalle soluzioni HRP.

Come sottolineato, entrambe le tecniche di allocazione presentate prevedono un'allocazione della ricchezza fra due gruppi in maniera inversamente proporzionale alla loro varianza.

Sfruttando la flessibilità degli approcci introdotti, viene infine mostrato come poter utilizzare un criterio di suddivisione della ricchezza che prenda in considerazione anche i rendimenti attesi degli elementi facenti parte dei gruppi coinvolti nell'allocazione.

Coerentemente a quanto fatto nella prima parte, le strategie di investimento vengono sottoposte a Backtest mostrando di possedere un rapporto rendimento/rischio decisamente superiore a quello esibito dalla strategia di minima varianza.

Bibliografia

- [1] Michaud, R. *Efficient asset allocations: A practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Harvard Business School Press, 1998.
- [2] Ardia, D., Boudt, K. *Implied expected returns and the choice of a mean-variance efficient portfolio proxy*. Journal of Portfolio Management 41, 2015.
- [3] Markowitz, H. *Portfolio selection*. The journal of finance 7, 1952.
- [4] Bailey, D., López de Prado, M. *Balanced baskets: A new approach to Trading and Hedging Risks*. Journal of Investment Strategies, Vol. 1, 2012.
- [5] Kolm, P., Tutuncu, R., Fabozzi, F. *60 years of portfolio optimization*. European Journal of Operational Research, Vol. 234, pp. 356-371, 2010.
- [6] Clarke, R., De Silva, H., Thorley, S. *Portfolio constraints and the fundamental law of active management*. Financial Analysts Journal, Vol. 58, pp. 48-66, 2012.
- [7] Ledoit, O., Wolf, M. *Improved estimation of the covariance matrix of stocks returns with an application to portfolio selection*. Journal of Empirical Finance, Vol. 10, pp. 603-621, 2003.
- [8] Ardia, D., Boudt, K., Nguyen, G. *Beyond risk-based portfolios: balancing performance and risk contribution in asset allocation*. Quantitative Finance, Vol.18, pp. 1249-1259, 2018.
- [9] López de Prado, M. *Building diversified portfolios that outperform out-of-sample*. Journal of Portfolio Management, 2016.
- [10] Caporin, M., Jannin, G.M., Lisi, F., Maillet, B. *A survey on the four families of performance measures*. Journal of Economic Surveys 28, 2014.

- [11] Boudt, K., Peterson, B.G., Croux, C. *Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns*. Journal of Risk 11,2008.
- [12] Merton, R.C. *On estimating the expected return on the market*. Journal of financial economics, 1980.

Appendice A

Codici Matlab

In questa appendice si mostra un piccolo estratto dei codici implementati in Matlab R2018b.

In particolare, per quanto riguarda la prima parte della trattazione, si riportano le funzioni corrispondenti alla formulazione dei problemi di ottimizzazione (3.1) e (3.2).

Si riporta in seguito la funzione che mediante algoritmo ricorsivo implementa l'allocazione ad albero proposta nel paragrafo 4.4.

Partiamo allora dal problema di ottimizzazione del portafoglio di MV, la funzione *SR_opt_mv* seleziona fra tutti i portafogli che soddisfano i vincoli (componenti tra 0 ed 1, somma unitaria e alterazione della varianza) quello di massima performance relativa.

```
1 function [w_opt, disc] = SR_opt_mv(w_MV, mu, VC, tol)
2 %%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % Ottimizzazione del portafoglio di MV
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % w_MV : portafoglio di minima varianza
9 % mu : rendimenti attesi in eccesso sul tasso privo
10 %      di rischio
11 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti
12 % tol : parametro di definizione del vincolo di
13 %      alterazione della varianza
14 %
15 %%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%
```

```

16 %
17 % w_opt : portafoglio ottimizzato
18 % disc: discostamento percentuale tra la varianza della
19 %       soluzione ottimizzata e quella del portafoglio
20 %       di MV
21 %
22 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
23
24 %% vettori colonna
25 w_MV = w_MV(:); mu = mu(:);
26 %% Problema di ottimizzazione
27 % componenti fra 0 e 1 e somma unitaria
28 N = length(VC);
29 Aeq = ones(1,N); beq = 1;
30 lb = zeros(1,N); ub = ones(1,N);
31 % ottimizzazione non lineare
32 f_obj = @(w,mu,VC) -(w'*mu/sqrt(w'*VC*w));
33 w_opt = fmincon( @(w) f_obj(w,mu,VC),w_MV,[],[],...
34                Aeq,beq,lb,ub,@(w) SR_opt_const_mv(w,w_MV,VC,tol));
35 % misuro il discostamento percentuale della varianza
36 disc = (w_opt'*VC*w_opt)/(w_MV'*VC*w_MV) -1;
37
38 end

```

Mostriamo in seguito l'implementazione della funzione *SR_opt_const_mv* che compare fra i parametri della funzione Matlab *fmincon* e che serve ad esplicitare il vincolo di disuguaglianza sul massimo valore di varianza concesso alla soluzione ottimizzata del problema

```

1 function [c,ceq] = SR_opt_const_mv(w,w_MV,VC,tol)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % Vincolo di disuguaglianza sulla varianza
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % w : generico portafoglio
9 % w_MV : portafoglio di minima varianza
10 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti
11 % tol : parametro di definizione del vincolo di

```

```

12 %      alterazione della varianza
13 %
14 %%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%
15 %
16 % c : vincolo di disuguaglianza sui valori
17 %      ammissibili di varianza
18 % ceq : vincolo di uguaglianza
19 %      (in questo caso non presente , i.e. [] )
20 %
21 %%%%%%%%%%%%%%
22
23 %% vettori colonna
24 w = w(:); w_MV = w_MV(:);
25 %% vincoli
26 ceq = [];
27 min_var = w_MV'*VC*w_MV;
28 c = w'*VC*w - (1+tol)*min_var;
29 end

```

Il problema (3.2) di ottimizzazione del portafoglio ERC può essere implementato mediante una leggera modifica delle funzioni sopra presentate.

In particolare la modifica riguarda il vincolo di alterazione massima delle proprietà di rischio del portafoglio di riferimento che come più volte sottolineato nel caso della strategia ERC, riguarda il discostamento da $1/N$ dei contributi al rischio relativi della soluzione ottimizzata.

Nel seguito si presenta dunque la funzione *SR_opt_erc*.

```

1 function [w_opt, disc] = SR_opt_erc(w_ERC,mu,VC, tol)
2 %%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % Ottimizzazione del portafoglio ERC
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % w_ERC : portafoglio di uguali contributi di rischio
9 % mu : rendimenti attesi in eccesso sul tasso privo
10 %      di rischio
11 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti
12 % tol : parametro di definizione del vincolo di
13 %      alterazione dei contributi relativi al rischio

```

```

14 %
15 %%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%
16 %
17 % w_opt : portafoglio ottimizzato
18 % disc: massimo discostamento percentuale dei
19 %       contributi al rischio relativi da 1/N
20 %
21 %%%%%%%%%%%%%%
22
23 %% vettori colonna
24 w_ERC = w_ERC(:); mu = mu(:);
25 %% Problema di ottimizzazione
26 % componenti fra 0 e 1 e somma unitaria
27 N = length(VC);
28 Aeq = ones(1,N); beq = 1;
29 lb = zeros(1,N); ub = ones(1,N);
30 % ottimizzazione non lineare
31 f_obj = @(w,mu,VC) -(w'*mu/sqrt(w'*VC*w));
32 w_opt = fmincon( @(w) f_obj(w,mu,VC),w_ERC,[],[],...
33               Aeq,beq,lb,ub,@(w) SR_opt_const(w,VC,tol));
34 % discostamento percentuale massimo dei contributi al
35 %       rischio da 1/N
36 disc = max(abs(w_opt.*VC*w_opt/(w_opt'*VC*w_opt)- 1/N))
37         /(1/N);
38 end

```

In analogia con il caso precedente, riportiamo la funzione *SR_opt_const_erc* utilizzata per esplicitare il vincolo sul discostamento massimo fra $1/N$ ed i contributi relativi al rischio della soluzione ottimizzata.

```

1 function [c,ceq] = SR_opt_const_erc(w,VC,tol)
2 %%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % Vincolo sui contributi relativi al rischio
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % w : generico portafoglio
9 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti

```

```

10 % tol : parametro di definizione del vincolo di
11 %     alterazione dei contributi al rischio
12 %
13 %%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%
14 %
15 % c : vincolo di disuguaglianza sui valori
16 %     ammissibili di contributi al rischio
17 % ceq : vincolo di uguaglianza
18 %     (in questo caso non presente , i.e. [] )
19 %
20 %%%%%%%%%%%%%%
21
22 %% vettore colonna
23 w = w(:);
24 %% constraints
25 N = length(VC);
26 ceq = [];
27 c = max(abs(w.*VC*w/(w'*VC*w) - 1/N)) - 1/N*tol;
28 end

```

Come anticipato si presenta ora la funzione *all_ALB* che mediante chiamate ricorsive a sé stessa, implementa l'allocazione ad albero: la ricchezza viene ripartita ad ogni diramazione in maniera inversamente proporzionale alla varianza dei gruppi considerati per l'allocazione.

```

1 function w = all_ALB(n_nodi,VC,link ,w0)
2 %%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 %     Allocazione ad albero
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % n_nodi : numero di nodi dell'albero
9 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti
10 % link : matrice di collegamento
11 % w0 : ricchezza iniziale
12 %
13 %%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%
14 %
15 % w : strategia di investimento

```

```

16 %
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18
19 n_foglie = size(link,1)+1;
20 if n_nodi > n_foglie
21     indici_sottogruppi = link( (n_nodi-n_foglie),1:2 );
22     % calcolo suddivisione della ricchezza
23     var = [var_alb(indici_sottogruppi(1),link,VC) ,...
24           var_alb(indici_sottogruppi(2),link,VC) ];
25     temp = 1./var;
26     w0_temp = w0*(temp/sum(temp));
27     % allocazione ricorsiva
28     w = [all_ALB(indici_sottogruppi(1),VC,link,w0_temp
29             (1)) ,...
30          all_ALB(indici_sottogruppi(2),VC,link,w0_temp
31             (2)) ] ;
32 else
33     w = w0;
34 end
35 end

```

Per completezza si riporta anche la funzione *var_alb* usata all'interno di *all_ALB* per calcolare la varianza dei gruppi coinvolti nell'allocazione.

Nello specifico la funzione identifica le foglie (mediante la funzione *quasi_diag_index* che riporteremo in seguito) che fanno da terminazione ai rami uscenti dal nodo in esame.

In questo modo risulta possibile procedere con l'allocazione a varianza inversa (indicata con w_{IV}) che una volta ottenuta, permette alla funzione di restituire la varianza del gruppo considerato.

```

1 function var_gruppo = var_alb(n_nodi,link,VC)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % Calcolo varianza del portafoglio w_IV
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % n_nodi : numero di nodi dell'albero
9 % link : matrice di collegamento
10 % VC : matrice di covarianza dei rendimenti

```

```

11 %
12 %%%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%%
13 %
14 % var_gruppo : varianza del gruppo costituito dagli
15 %             elementi di lista_elem
16 %
17 %%%%%%%%%%%%%%%
18
19 lista_elem = quasi_diag_index(n_nodi, link);
20 w_IV = allocazione_IV(VC(lista_elem, lista_elem));
21 var_gruppo = w_IV'*VC(lista_elem, lista_elem)*w_IV;
22 end

```

In ultimo si riporta *quasi_diag_index* originariamente utilizzata per l'implementazione della fase 2 dell' algoritmo HRP e ripresa da *var_alb* al fine di risalire alla lista degli elementi sottostanti un determinato nodo.

Fornendole come parametro un qualsiasi nodo dell'albero (che non sia una foglia per evitare casi banali) infatti, tale funzione è in grado di risalire ricorsivamente ai suoi sotto-nodi, terminando la procedura quando quest'ultimi risultano essere tutti delle foglie.

```

1 function lista_elem = quasi_diag_index(n_nodi, link)
2 %%%%%%%%%%%%%%% DESCRIZIONE %%%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 %             quasi-diagonalizzazione
5 %
6 %%%%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%%%
7 %
8 % n_nodi : numero di nodi dell'albero
9 % link   : matrice di collegamento
10 %
11 %%%%%%%%%%%%%%% OUTPUT %%%%%%%%%%%%%%%
12 %
13 % lista_elem: lista ordinata derivante dal processo
14 %            di quasi-diagonalizzazione
15 %
16 %%%%%%%%%%%%%%%
17
18 n_foglie = size(link,1)+1;
19 if n_nodi > n_foglie

```

```
20     indice_sottogruppi = link( (n_nodi-n_foglie), 1:2 );
21     lista_elem = [ quasi_diag_index(indice_sottogruppi
22                   (1), link) , ...
23                   quasi_diag_index(indice_sottogruppi(2), link) ];
23 else
24     lista_elem = n_nodi;
25 end
26 end
```