

POLITECNICO DI MILANO
Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Mathematical Engineering:
Quantitative Finance



POLITECNICO
MILANO 1863

Tesi di Laurea Magistrale
**ASSET ALLOCATION PER INVESTIMENTI
BILANCIATI A LUNGO TERMINE**

Relatore: Prof. Daniele Marazzina

Autore: Luigi Rebecchini

Matricola: 892267

Anno Accademico 2018-2019

Sommario

Il settore finanziario dell'asset management sta acquisendo giorno dopo giorno sempre più importanza a livello globale. Le persone tendono ad aumentare il più possibile i propri risparmi e in un periodo storico come quello attuale, dove i tassi di interesse sono nulli o quasi negativi, l'importanza di una buona gestione dei propri asset è diventata fondamentale. In questa tesi mettiamo a confronto due metodi di costruzione di un portafoglio ottimo, il primo basato su una strategia di media varianza e il secondo su una strategia che porta ad avere pesi costanti negli asset lungo tutto l'orizzonte temporale. La strategia ottima basata sulla teoria di media varianza del portafoglio porta ad avere una deviazione standard della ricchezza finale del portafoglio molto minore rispetto a quella trovata da un portafoglio che ha pesi costanti. Lo stesso discorso vale per quanto riguarda la probabilità di un portafoglio di scendere sotto una certa soglia.

Indice

Introduzione	1
1 Il modello	4
1.1 Portafoglio a proporzione costante	5
1.2 Dinamica del portafoglio media varianza	6
2 Parametri	13
3 Algoritmo	16
4 Media varianza vs Proporzione Costante	19
4.1 Caso base	20
4.1.1 Strategia a pesi costanti	20
4.1.2 Strategia MV con leva ($q_{max} = 1.5$)	22
4.1.3 Strategia MV con leva ($q_{max} = 1$)	23
4.1.4 Strategia MV con leva infinita	24
4.2 Secondo caso	25
4.2.1 Strategia a pesi costanti	26
4.2.2 Strategia MV	28
4.3 Terzo caso	31
4.3.1 Strategia a pesi costanti	31
4.3.2 Strategia MV	32
5 Backtesting	36
5.1 Strategia di ricampionamento del bootstrap	38
6 Conclusioni	41
7 Bibliografia	42

A Codici	43
A.0.1 Run caso base	43
A.0.2 Simulazione dei sottostanti	45
A.0.3 Proporzione costante	46
A.0.4 Media Varianza	47

Elenco delle figure

2.1	<i>R</i> e <i>r</i>	14
4.1	Ricchezza di un Portafoglio e Deviazione Standard ($p = 0.5$)	21
4.2	Deviazioni standard e Probabilità di default	25
4.3	Deviazioni standard e Probabilità di default CP	27
4.4	Efficienza strategie	30
4.5	Andamenti efficienze in relazione ai parametri	34

Elenco delle tabelle

2.1	Indice dello stock R e risk free rate annualizzato r .	15
4.1	Ipotesi caso base	20
4.2	Risultati caso base a proporzione costante	21
4.3	Risultati caso base MV $q_{max} = 1.5$	22
4.4	Risultati caso base MV $q_{max} = 1$	23
4.5	Risultati caso base MV $q_{max} = \infty$	24
4.6	Ipotesi secondo caso	26
4.7	Risultati secondo caso a proporzione costante	27
4.8	$q_{max} = 1.5$	28
4.9	$q_{max} = 1$	28
4.10	$q_{max} = \infty$	29
4.11	Ipotesi terzo caso	31
4.12	Risultati terzo caso a proporzione costante	32
4.13	Risultati terzo caso MV, $x = 0.5$	33
4.14	Risultati terzo caso MV, $x = 1$	33
5.1	1926-1954	37
5.2	1926-1984	37
5.3	1926-2017	37
5.4	Misura del blocco: 1 anno	39
5.5	Misura del blocco: 5 anni	39
5.6	Misura del blocco: 10 anni	39
5.7	Misura del blocco: 20 anni	40

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è di replicare il lavoro fatto da P.A Forsyth e K.R. Vetzal nel 2017 quando pubblicarono l'articolo "*Robust asset allocation for long-term target-based investing*" [1] e il lavoro, "*Multi-period mean-variance portfolio optimization based on Monte-Carlo simulation*", scritto da F.Cong e C.W. Oosterlee nel 2016 [2]. Negli articoli gli autori introducono la ormai fondamentale importanza dei risparmi dedicati a obiettivi di lungo termine, come la pensione o l'educazione universitaria dei propri figli. Per capire la portata del mercato della gestione dei risparmi basta pensare all'ammontare di ricchezza posseduta dai risparmiatori negli Stati Uniti d'America : il valore si avvicina ai 106 trilioni di dollari come riporta uno studio fatto da alcuni ricercatori di Credit Suisse nel 2019 [3]. Perciò, non possiamo che comprendere che anche solo il minimo miglioramento nella gestione di questi asset può portare a benefit economici rilevanti.

Quando parliamo di fondi target date (in inglese, target date funds, spesso abbreviati in TGF), non siamo nel settore dei fondi di investimento classici e neppure in quello dei fondi pensione, anche se si tratta di uno strumento ideale come investimento previdenziale. Si tratta di fondi bilanciati diversificati fra azioni, obbligazioni e liquidità (con composizioni di portafoglio anche molto diverse tra loro). Ma in essi la quota azionaria diminuisce automaticamente via via che si avvicina il momento del pensionamento o comunque la data prestabilita (target date) a seconda dell'orizzonte temporale del sottoscrittore.

Quindi i TGF implementano una strategia di asset allocation che aiuti un investitore il cui scopo è avere denaro accessibile a una specifica data futura. Però, l'efficacia di questi fondi è alle volte dubbia: da un punto di vista di un portafoglio MV, un percorso deterministico che guidi una strategia è dominato da una strategia che mantiene costante il peso degli asset nel tempo. Infatti, come riportato da April M.Knill, Bong Soo Lee e Nathan Mauckb (2012)[4], questa strategia ha lo scopo primario di mantenere costante il rischio di portafoglio, ma nel lungo termine beneficia della volatilità dell'attività rischiosa.

Proviamo a dare un'allocazione a lungo termine per un investitore che vuole arrivare a una data finale a una ricchezza target. Dimostrerò che la nostra strategia dinamica sovraperforma il benchmark della proporzione costante tra asset in termini di standard deviation del portafoglio a tempo finale e probabilità di default del portafoglio. Infatti, in ogni caso affrontato possiamo notare come, a parità di attesa ricchezza del portafoglio finale, i risultati portano sempre alla tesi a favore di un ribilanciamento dinamico piuttosto che costante in termini di rischio.

In questo studio, il portafoglio è sempre composto da un asset rischioso e uno non rischioso. Per ciascuna strategia utilizzata ci basiamo sempre sul metodo di Monte Carlo, che ci permette di simulare lo stock nel portafoglio in più step temporali e in un numero di simulazioni da noi prescelto. Attraverso questo metodo possiamo analizzare le proprietà del nostro portafoglio sia per la strategia MV che per la strategia benchmark.

In particolare, il presente lavoro contribuisce raggiungendo i seguenti risultati:

- Fornisce esempi nei quali mettiamo a confronto la strategia ottimale di media varianza con la strategia a proporzione costante che prendiamo come benchmark. Entrambe le strategie avranno lo stesso valore atteso della ricchezza finale del portafoglio. In ogni esempio consideriamo diversi limiti reali sulla leva del portafoglio e sulla frequenza del trading e quindi del ribilanciamento del portafoglio, a seconda dell'orizzonte temporale che consideriamo.
- Fornisce test aggiuntivi che confermano la robustezza della tesi sulla sovraperformance della strategia ottima MV anche con incertezza e variabilità dei parametri e con modelli con mis-specification.
- Opera backtesting basati su dati storici che ci porta a risultati che supportano il risultato di riduzione del rischio del portafoglio.

Il mio lavoro si suddivide nei seguenti capitoli:

- Capitolo 2. Presentazione del modello su cui basiamo lo studio: quindi, oltre a specificare le dinamiche dei nostri asset, mostriamo la teoria che guida le strategie utilizzate: portafoglio a proporzione costante e portafoglio mean variance.
- Capitolo 3. Spieghiamo i parametri che utilizziamo nei modelli sottostanti agli asset. Forniamo l'algoritmo esatto che sta alla base di ciascun caso preso in considerazione, partendo così dalla strategia benchmark e concludendo con il nuovo portafoglio a rischio ridotto.

- Capitolo 4. Forniamo l'algoritmo esatto che sta alla base di ciascun caso preso in considerazione, partendo così dalla strategia benchmark e concludendo con il nuovo portafoglio a rischio ridotto.
- Capitolo 5. Mettiamo a confronto le due strategie, fornendo molteplici esempi e casi, facendo variare tutti i parametri, sia per quanto riguarda l'asset rischioso, l'asset non rischioso ma anche per quanto concerne la maturità del portafoglio e i limiti di leva e i tempi di ribilanciamento
- Capitolo 6. Operiamo il backtesting sui dati storici conosciuti dal 1926 ad oggi, andando così a confermare i risultati ottenuti nel Capitolo 5.
- Appendice dedicata ai codici MatLab utilizzati per la strategia a proporzioni costanti e la strategia ottimale media varianza.

Capitolo 1

Il modello

Qual'è il portafoglio ottimo? Molti investitori si sono fatti questa semplice domanda fin da quando il mercato azionario è non ha aperto i battenti. Tuttavia, il primo che diede una risposta argomentando la propria tesi è stato Harry Markowitz, un economista statunitense, vincitore, insieme a Merton Miller e William Sharpe, del premio Nobel per l'economia nel 1990. Markowitz scrisse l'articolo "*Portfolio Selection*", pubblicato nel "*Journal of Finance*" del 1952, nel quale ha dato una spiegazione riguardo a come si possa costruire un portafoglio con la strategia di media varianza considerando due asset. L'economista statunitense ha basato il suo studio poggiandosi principalmente su tre ipotesi:

- Gli investitori selezionano il proprio portafoglio sulla base dei rendimenti attesi e sul rischio atteso del proprio legato al proprio investimento.
- Periodo unico d'investimento.
- Gli investitori in generale sono individui avversi al rischio.

Sfruttando queste ipotesi, Markowitz riesce a mostrare che si possa trovare una strategia ottima tale per cui un investitore massimizzi il valore atteso del proprio portafoglio, minimizzando la deviazione standard.

Nella tesi viene considerato un modello nel quale l'investitore deve scegliere come allocare i propri fondi avendo due scelte: un'azione di una società rischiosa e un asset privo di rischio, entrambi con un orizzonte temporale T . Usiamo come notazione S_t per identificare la ricchezza investita nell'asset rischioso e B_t quella nel titolo risk free al tempo t . Gli asset appena citati seguono le seguenti dinamiche lungo tutto l'orizzonte temporale:

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ \\ dB_t = r B_t dt \end{cases} \quad (1.1)$$

dove, per quanto riguarda S_t , che segue un processo geometrico browniano, μ è il tasso di interesse, σ la volatilità dello stock e dZ è l'incremento del processo di Wiener. Dall'altro lato, per quanto riguarda l'asset non rischioso B_t , r identifica il tasso d'interesse privo di rischio.

L'assunzione standard che facciamo è che $\mu > r$, quindi non sarebbe mai ottimale vendere allo scoperto l'asset rischioso S_t a favore dell'asset non rischioso. Al contrario, potrebbe risultare una buona strategia vendere allo scoperto B_t .

La ricchezza che un individuo ha investito nel proprio portafoglio sarà quindi così composta

$$W_t = S_t + B_t, \quad (1.2)$$

con $S_t = xW_t$ e $B_t = (1-x)W_t$ al tempo t , dove x misura quindi la percentuale investita nell'asset rischioso.

Entriamo ora nel dettaglio delle due strategie che utilizziamo e che mettiamo a confronto.

1.1 Portafoglio a proporzione costante

Al fine di spiegare la teoria su cui si basa un portafoglio a pesi costanti, iniziamo con lo specificare la teoria sull'asset allocation pubblicata da Benjamin Graham, che è stato un economista, professore universitario e imprenditore statunitense, nel suo libro "*The intelligent investor*" [5]. Graham è considerato il primo economista ad aver sviluppato la teoria del value investing e inoltre uno dei principali mentori del famoso investitore Warren Buffet. Graham ha spiegato che, per un *investitore difensivo*, una classica strategia di investimento potrebbe essere quella di scegliere una frazione della propria ricchezza da investire in un asset rischioso e di ribilanciare periodicamente il proprio portafoglio così da preservare il rapporto iniziale che c'era tra l'ammontare investito nello stock e quello nel asset non rischioso. Infatti, un portafoglio a proporzioni costanti è un tipo di portafoglio costruito partendo dalla decisione dell'investitore di imporsi dei limiti, e, di conseguenza, costruisce il proprio la propria strategia in base a questa decisione.

Le due asset classes che vengono utilizzate per la definizione di questa strategia sono le azioni scambiate sul mercato e tipi di asset più conservativi che possono essere cash o anche treasury bond, cioè lo strumento di debito utilizzato dallo stato americano.

Se consideriamo x e $1-x$ come le percentuali costanti della ricchezza investita nei due asset, rischioso e non, il portafoglio, che è evidentemente ribilanciato costantemente, porterebbe ad avere una ricchezza che segue la seguente

dinamica:

$$dW_t = [(1-x)r + x\mu]W_t dt + x\sigma W_t dZ. \quad (1.3)$$

Il nostro scopo è quello di seguire in ogni caso affrontato lo stesso identico percorso per calcolare un portafoglio a pesi costanti.

Partiamo con il seguente sistema che specifica la ricchezza iniziale:

$$\begin{cases} W_0 = S_0 + B_0 \\ S_0 = xW_0 \\ B_0 = (1-x)W_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Imponiamo un numero di simulazioni per il processo di Wiener in modo tale che i nostri risultati possano essere il più precisi possibili e dividiamo l'orizzonte temporale T in un numero predefinito di sotto set, in ciascuno dei quali avviene, per ogni simulazione, il ribilanciamento del portafoglio.

Iniziando al tempo $t = 0$, conosciamo ovviamente il rapporto tra la ricchezza investita nell'asset rischioso e la ricchezza totale del portafoglio in questo esatto momento, altro non è che la percentuale

$$x = \frac{S_0}{S_0 + B_0}, \quad (1.5)$$

e, ad ogni istante temporale in cui blocchiamo la simulazione, ribilanciamo la ricchezza del portafoglio così da mantenere sempre costante il rapporto di ricchezza investita nel rischio e quella investita nel asset privo di rischio:

$$x = \frac{S_t}{S_t + B_t} \quad \forall t. \quad (1.6)$$

Procediamo ripetendo lo stesso algoritmo in ogni step temporale periodico fino ad arrivare alla maturità T del portafoglio.

1.2 Dinamica del portafoglio media varianza

La strategia dinamica di media varianza è un modello più recente rispetto alla strategia appena descritta. Questa più giovane allocazione di portafoglio è stata studiata principalmente per investimenti a lungo termine, così che si possa diminuire il rischio del portafoglio data una ricchezza target da raggiungere come dicono entrambe le fonti [1] e [2] su cui basiamo la tesi.

Esaminiamo ora più a fondo il caso in cui il portafoglio sia composto unicamente da due asset, il solito asset rischioso e quello non rischioso.

In questa sezione descriviamo la dinamica di ottimizzazione di un portafoglio

per un piano di fondo pensioni. Assumiamo che il mercato finanziario sia definito in uno spazio di probabilità $(\Omega; \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ in un lasso temporale finito $[0, T]$. Lo spazio di stato Ω è il set che comprende tutte le possibili realizzazioni nel mercato finanziario nel periodo temporale considerato, $[0, T]$. \mathcal{F} è la σ -algebra degli eventi al tempo T , i.e. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Assumiamo che la filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ sia generata dal processo di prezzaggio del mercato finanziario e aumentata con il set nullo \mathcal{F} . Anche per quanto riguarda la misura di probabilità P , la definiamo in \mathcal{F} .

Noi consideriamo un portafoglio che possa essere modificato in tempi discreti $t \in [0, \Delta t, \dots, T - \Delta t]$ prima che arrivi a maturità T . In ciascun momento t in cui è possibile modificare il portafoglio, un investitore decide la sua strategia di allocazione per massimizzare l'aspettativa del valore finale della sua ricchezza minimizzando la volatilità del proprio portafoglio. Formalmente quindi, il problema di un investitore è il seguente:

$$v_t(W_t) = \max_{x_{s=t}^{T-\Delta t}} \{E[W_T|W_t] - \lambda Var[W_T|W_t]\}, \quad (1.7)$$

soggetto alle condizioni di restrizioni sulla ricchezza date da:

$$W_{s+\Delta T} = W_s(x_s R_s^e + R_f) + C\Delta t, \quad s = t, t + \Delta t, \dots, T - \Delta t. \quad (1.8)$$

In questo caso, R_f è il rendimento dell'asset non rischioso in un singolo periodo temporale ed'è considerato costante nel tempo.

R_s^e è il rendimento in eccesso dell'asset rischioso sempre in un singolo periodo temporale $[s, s + \Delta t)$, quindi è non è altro che la differenza tra il rendimento del titolo rischioso rispetto a quello privo di rischio.

Grazie al seguente sistema di equazioni mostriamo come calcoliamo i rispettivi rendimenti dei due diversi asset:

$$\begin{cases} R_f = \frac{B_{s+\Delta t} - B_s}{B_s} \\ R_s^e = \frac{S_{s+\Delta t} - S_s}{S_s} - R_f \end{cases} \quad (1.9)$$

$\{R_t^e\}_{t=0}^{T-\Delta t}$ sono considerati statisticamente indipendenti l'uno dall'altro.

La percentuale x_s specifica l'asset allocation della ricchezza dell'investitore nel asset rischioso nel periodo $[s, s + \Delta t)$. Abbiamo assunto che la strategia ammissibile x_t sia un controllo di Markov \mathcal{F}_t -misurabile, $x_t \in \mathcal{F}_t$.

Per quanto riguarda $C\Delta t$ invece, viene considerato come un contributo dell'investitore lungo il periodo $[s, s + \Delta t]$ e un C negativo può essere interpretato come il ritiro di cash dal portafoglio da parte dell'investitore dopo aver fatto un disinvestimento. In tutti i nostri casi comunque non consideriamo questo termine in quanto, basandoci sui paper di riferimento, abbiamo scoperto che

l'influenza di questo parametro nel nostro modello è veramente minima. L'attitudine di essere avversi al rischio, che è propria di un investitore, è specificata con il termine λ . Riusciamo così a capire quale sia il fattore di trade-off tra la massimizzazione del profitto e la minimizzazione del rischio. $v_t(W_t)$ è invece la famosa value function, la quale ci permette di calcolare le possibilità di investimento di un investitore al tempo t .

Per essere più precisi, entriamo nel dettaglio della value function. Quando vediamo il problema di ottimizzazione media varianza proposto nell'equazione (1.7), ci accorgiamo che può essere un problema convesso, perciò la risoluzione dell'equazione (1.7) è identica al problema di determinazione dei punti ottimali della parete di portafoglio. Possiamo quindi dire che la sua risoluzione è uguale alla risoluzione della seguente equazione:

$$\min_{\{x_s\}_{s=t}^{T-\Delta t}} \{Var[W_T|W_t]\} \quad t.c. \quad E[W_T|W_t] \geq d, \quad (1.10)$$

con un'opportuna scelta della soglia d . Tuttavia, quando il problema non è convesso, risolvere l'equazione (1.10) ci genera una parete ottimale, ma non ci fornisce tutti i punti necessari.

La difficoltà nel risolvere questo problema di ottimizzazione di media varianza è dovuta alla condizione di non linearità delle varianze, cioè di $Var[Var[W_T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] \neq Var[W_T|\mathcal{F}_s], s \leq t$, che rende impossibile una risoluzione analitica. Per affrontare questo problema, ci appoggiamo al seguente teorema, prendendo spunto dal lavoro fatto da Duan Li e Wan-Lung Ng (2000) [6], che ci permette di guardare al problema da un altro punto di vista.

Teorema 1. *Sia $\{x_s^*\}_{s=t}^{T-\Delta t}$ il controllo ottimo per il problema definito nell'equazione (1.7), allora $\{x_s^*\}_{s=t}^{T-\Delta t}$ è anche il controllo ottimo per il seguente problema di ottimizzazione:*

$$\min_{\{x_s\}_{s=t}^{T-\Delta t}} \left\{ E \left[\left(W_T - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_t \right] \right\} \quad (1.11)$$

dove $\gamma = \frac{1}{\lambda} + 2E_{x^*}[W_T|W_t]$. In questo caso l'operatore $E_{x^*}[\cdot]$ denota l'aspettativa della ricchezza finale di un investitore se investe seguendo la strategia ottima $\{x_s^*\}_{s=t}^{T-\Delta t}$.

Basandoci sul Teorema 1 appena citato, il problema originale sulla media varianza può essere ridefinito come un problema LQ ausiliario. La strategia d'investimento corrispondente a questo problema LQ è chiamata strategia pre-commitment. Questa tecnica può anche essere interpretata come la trasformazione del problema originale di media varianza in un problema di ottimizzazione, che fu discusso in precedenza da Haberman e Vigna (2002) e da

Gerrard et al.(2004). Per risolvere questo tipo di problema, si potrebbe utilizzare l'equazione differenziale parziale di Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB PDE). Risolvendo questa equazione si otterrebbero risultati accurati per uno scenario unidimensionale, cioè con un singolo asset rischioso nel portafoglio. Per esempio, Wang e Forsyth (2010) hanno risolto il problema di ottimizzazione di un portafoglio mean varince continuo con limitazioni e con l'asset rischioso simile a quello che utilizziamo noi, cioè con una dinamica che segue un processo browniano. Gli autori di uno dei nostri papers di riferimento, Dand e Forsyth, risolvono un problema simile con lo stock che segue un processo jump-diffusion.

In entrambi gli articoli che prendiamo come base del nostro studio vengono utilizzate delle limitazioni realistiche a supporto di un controllo di portafoglio realistico. Tuttavia è molto costoso implementare un algoritmo basato sulla risoluzione di una HJB PDE per un portafoglio con molteplici asset. Di conseguenza, per poter dare dinamicità, velocità, e un'idea più vicina alla realtà, cioè considerando un portafoglio non composto da un singolo asset, durante la risoluzione del nostro problema sfruttiamo il metodo di Monte Carlo.

Il problema di ottimizzazione al tempo t si legge come segue:

$$J_t^{*pc}(W_t) = \min_{\{x_s\}_{s=t}^{T-\Delta t}} \left\{ E \left[\left(W_T - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_t \right] \right\}, \quad (1.12)$$

altrimenti, in maniera ricorsiva:

$$J_t^{*pc}(W_t) = \min_{x_t} \{ E[(J_{t+\Delta t}^{*pc}(W_{t+\Delta t}) | W_t)] \}, \quad (1.13)$$

con $J_t^{*pc}(W_T) = (W_T - \frac{\gamma}{2})^2$.

Nello stato di portafoglio (t, W_t) , la funzione valore $J_t(W_t)$ dipende unicamente dalla allocazione al tempo successivo $t + \Delta t$. Questa è la spiegazione principale del perché questi tipi di problemi vengano risolti quasi esclusivamente backward nel tempo e in maniera ricorsiva.

In questa sezione, restringiamo il campo delle variabile non considerando i contributi positivi e negativi di cash da parte dell'investitore, quindi diciamo che $C = 0$. Ovviamente è possibile estendere l'analisi ai casi in cui $C \neq 0$, quindi nel caso in cui l'investitore supporti il suo portafoglio con immissioni di denaro ($C > 0$) e nel caso in cui invece prelevasse denaro dal portafoglio dopo un disinvestimento ($C < 0$).

Sotto le condizioni appena citate, otteniamo i risultati da noi sperati.

Nel nostro caso otteniamo una forma analitica della funzione valore in ciascuno step intermedio appartenente a $[0, T]$. Utilizzando il lemma già citato

da F. Cong e C. W. Oosterlee (2016) [2] siamo capaci di trovare l'allocazione ottima del portafoglio in ciascuno step temporale e per ciascuna simulazione fatta.

Lemma 1. *Per il problema pre-commitment mostrato in equazione (9), la value function $J_t(W_t)$ può essere formulata come :*

$$J_t(W_t) = L_t \left(W_t R_f^{(T-t)/\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \right)^2, \quad (1.14)$$

dove $L_t = \prod_{s=t}^T l_s$ con l_t definita come segue:

$$l_t = 1 - \frac{E[R_t^e]^2}{E[(R_t^e)^2]}, \quad t = 0, \Delta t, \dots, T - \Delta t,$$

$$l_T = 1.$$

Dimostrazione. Al tempo finale T , la value function è conosciuta come:

$$J_T(W_T) = \left(W_T - \frac{\gamma}{2} \right)^2,$$

che soddisfa l'equazione (11). Al tempo $T - \Delta t$, la value function è invece la seguente:

$$\begin{aligned} J_{T-\Delta t}(W_{T-\Delta t}) &= \max_{x_{T-\Delta t}} \{ E[J_T(W_{T-\Delta t}(x_{T-\Delta t} R_{T-\Delta t}^e + R_f)) | W_{T-\Delta t}] \} \\ &= \max_{x_{T-\Delta t}} \left\{ E \left[\left(W_{T-\Delta t}(x_{T-\Delta t} R_{T-\Delta t}^e + R_f) - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_{T-\Delta t} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Per ottenere la forma analitica di $J_{T-\Delta t}(W_{T-\Delta t})$, abbiamo bisogno per prima cosa di determinare l'asset allocation del titolo rischioso $x_{T-\Delta t}^*$, che soddisfa:

$$x_{T-\Delta t}^* = \arg \min_{x_{T-\Delta t}} \left\{ E \left[\left(W_{T-\Delta t}(x_{T-\Delta t} R_{T-\Delta t}^e + R_f) - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_{T-\Delta t} \right] \right\}.$$

Risolvendo l'equazione del problema di ottimizzazione al primo ordine, otteniamo che la soluzione per $x_{T-\Delta t}^*$ non è altro che data dall'equazione seguente:

$$E \left[\left(W_{T-\Delta t}(x_{T-\Delta t} R_{T-\Delta t}^e + R_f) - \frac{\gamma}{2} \right) W_{T-\Delta t} R_{T-\Delta t}^e \middle| W_{T-\Delta t} \right] = 0.$$

Quindi, l'allocazione ottima $x_{T-\Delta t}^*$ può essere calcolata come:

$$x_{T-\Delta t}^* = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} - W_{T-\Delta t} R_f\right) E[R_{T-\Delta t}^e]}{W_{T-\Delta t} E[(R_{T-\Delta t}^e)^2]}. \quad (1.16)$$

Inserendo l'equazione (13) nell'equazione (12) otteniamo:

$$\begin{aligned} J_{T-\Delta t}(W_{T-\Delta t}) &= E \left[\left(1 - \frac{E[R_{T-\Delta t}^e] R_{T-\Delta t}^e}{E[(R_{T-\Delta t}^e)^2]} \right)^2 \right] \left(W_{T-\Delta t} R_f - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{E[R_{T-\Delta t}^e]^2}{E[(R_{T-\Delta t}^e)^2]} \right) \left(W_{T-\Delta t} R_f - \frac{\gamma}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Risulta quindi chiaro che la value function al tempo $T - \Delta t$ abbia la stessa forma che ha nell'equazione (11).

Per gli step temporali rimanenti, possiamo calcolare le value function utilizzando un metodo di induzione all'indietro.

Assumiamo che al tempo $t + \Delta t$ abbiamo:

$$J_{t+\Delta t}(W_{t+\Delta t}) = L_{t+\Delta t} \left(W_{t+\Delta t} (R_f^{(T-t)/\Delta t - 1} - \frac{\gamma}{2}) \right)^2.$$

Allora, al tempo t , la funzione valore può essere determinata come:

$$\begin{aligned} J_t(W_t) &= \max_{x_t} \{ E[J_{t+\Delta t}^e + R_f] | W_t \} \\ &= \max_{x_t} \left\{ E \left[L_{t+\Delta t} \left(W_t (x_t R_t^e + R_f) (R_f)^{(T-t)/\Delta t - 1} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_t \right] \right\} \\ &= E[L_{t+\Delta t}] \max_{x_t} \left\{ E \left[\left(W_t (x_t R_t^e + R_f) (R_f)^{(T-t)/\Delta t - 1} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 \middle| W_t \right] \right\}. \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione è basata sull'indipendenza dei rendimenti in eccesso del nostro asset rischioso.

Risolvendo ancora al primo ordine otteniamo:

$$x_t^* = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} - W_t(R_f)^{(T-t)/\Delta t}\right) E[R_t^e]}{W_t(R_f)^{(T-t)/\Delta t} E[(R_t^e)^2]}, \quad (1.17)$$

e la corrispondente funzione valore sarà:

$$\begin{aligned} J_t(W_t) &= L_{t+\Delta t} \left(1 - \frac{E[R_t^e]^2}{E[(R_t^e)^2]}\right) \left(W_t(R_f)^{(T-t)/\Delta t} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \\ &= L_t \left(W_t(R_f)^{(T-t)/\Delta t} - \frac{\gamma}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Questo ci permette di arrivare alla conclusione della dimostrazione.

Possiamo ora quindi costruire il nuovo portafoglio basato sulla strategia MV, basandoci sulle nuove allocazioni degli asset $\{\tilde{x}_t(i)\}_{i=1}^N$.

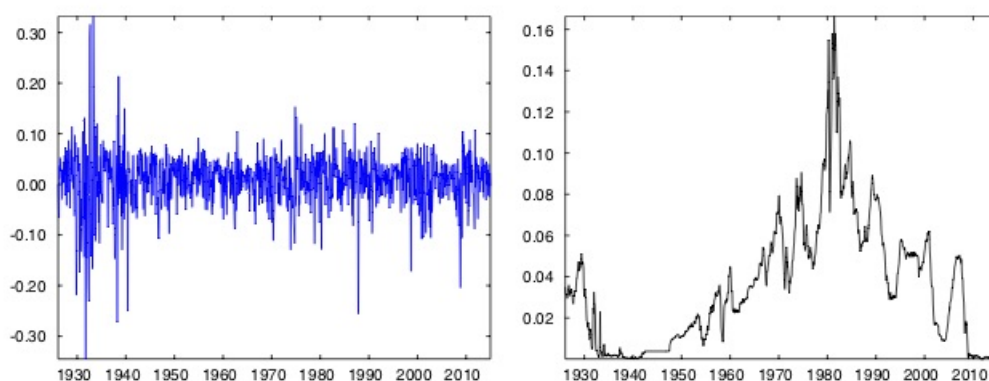
Capitolo 2

Parametri

In questo capitolo descriviamo la scelta dei parametri che abbiamo utilizzato per lo svolgimento del nostro studio. Mi sono basato sull'articolo scritto da P.A. Forsyth e K.R. Vetzal [1], infatti, ho pensato che i migliori parametri che potessero dare risultati ragionevoli, fossero derivanti dai dati storici del mercato finanziario americano.

Per quanto riguarda l'asset rischioso, ho scelto di utilizzare, come nell'articolo di riferimento, i dati storici presi dagli indici di borsa NYSE/AMEX/NASDAQ/ARCA negli Stati Uniti, prendendo tutte le informazioni dal Center for Research in Security Prices (CRSP). Consideriamo l'intero periodo che parte da gennaio 1926 fino a oggi. Utilizziamo i valori mensili degli indici S_i e calcoliamo il rendimento logaritmico R per il mese i -esimo $R_i = \ln(S_i/S_{i-1})$. Da questi dati sono riuscito a ricavare i valori medi di μ e della volatilità σ da poter sfruttare durante il processo di risoluzione.

Per l'asset non rischioso invece l'unico parametro da stimare è il tasso d'interesse risk free, che deduciamo dal mercato secondario nel quale vengono scambiati i titoli di stato statunitensi a tre mesi. A questo punto convertiamo gli yields trovati in tassi annuali composti che chiamiamo r .

Figura 2.1: R e r

Il nostro modello si basa su tre parametri: il drift dell'asset rischioso μ , la sua volatilità σ e il tasso d'interesse dell'asset non rischioso r . Specificato il geometric brownian motion, risulta diretto il metodo di calcolo delle stime μ e σ attraverso lo stimatore di maximum likelihood utilizzando i rendimenti logaritmici R . Per il tasso d'interesse risk free invece utilizziamo la media dei valori dei tassi continui composti e annualizzati, in modo tale da ottenere r . Ovviamente anche per quanto riguarda i parametri di drift e volatilità, anche in questo caso sono considerati termini annualizzati.

La Tabella 1 fornisce le statistiche descrittive per l'indice mensile dello stock attraverso i rendimenti logaritmici R e per l'interesse annualizzato dell'asset senza rischio r durante tutto il periodo 1926–2017, dividendolo per altro in tre sotto-periodi. Il primo sotto-periodo va dal 1926 al 1954. Il secondo, che ha durata più lunga, comprende sia il primo periodo che l'estensione di esso fino al 1984. Infine l'ultimo periodo prende in considerazione tutti i dati che vanno dal 1955 al 2017. Quindi l'ultimo periodo ricopre circa 6 decenni che potrebbero essere più rappresentativi se vogliamo fare delle previsioni future più veritiere.

	1926–2017		1926–1954		1926–1984		1955–2017	
	R	\tilde{r}	R	\tilde{r}	R	\tilde{r}	R	\tilde{r}
Media	0.007	0.035	0.007	0.011	0.007	0.034	0.008	0.047
Mediana	0.013	0.031	0.013	0.004	0.011	0.027	0.013	0.046
Dev.std	0.053	0.031	0.070	0.012	0.057	0.033	0.043	0.030
Skewness	-0.565	1.083	-0.357	1.380	-0.371	1.339	-0.807	0.838
Kurtosis	9.898	4.396	8.544	3.984	9.955	4.683	5.912	4.270
Correlazione	-0.0164		-0.0090		-0.0351		-0.0381	
Drift $\hat{\mu}$	0.1108		0.1134		0.1077		0.1095	
Volatilità $\hat{\sigma}$	0.1867		80.2445		0.1998		0.1511	

Tabella 2.1: Indice dello stock R e risk free rate annualizzato r .

Come si può notare dalla Tabella 2.1, la media dei rendimenti logaritmici mensili dell'indice rischioso sono relativamente stabili intorno allo 0.7–0.8% lungo tutti i quattro periodi considerati. In ogni caso, i valori mediani sono alti rispetto alle medie e questo fenomeno può essere collegato al fatto che la skewness, cioè la simmetria della distribuzione, risulta negativa. Infine per quanto riguarda lo stock rischioso possiamo dire che la kurtosis dei nostri dati in tabella supera la kurtosis di una distribuzione normale generica per quanto riguarda lo stock.

Dall'altra parte invece, il tasso d'interesse non rischioso ha una media pari circa al 3.5% lungo tutto l'arco temporale. Tuttavia, è variato significativamente nei diversi sotto-periodi, raggiungendo minimi intorno all'1% nel primo sotto-periodo, e massimi nell'ultimo sotto periodo pari a 4.7%. I valori mediani di r sembrano essere più bassi rispetto ai valori medi, e ciò è consistente con la positività della skewness. Invece, per quanto riguarda la kurtosis, il risultato è simile a quello dello stock, cioè valori di kurtosis in generale alti.

L'ultima nota importante da rilevare è la relazione che hanno i valori di R e r . Infatti, risulta che lungo tutto il periodo considerato e in tutti i sotto periodi la loro correlazione è leggermente negativa. Ciò è dovuto al fatto che, da sempre, quando il mercato azionario sale, il mercato delle obbligazioni tende ad avere un comportamento "opposto", quindi scende.

Capitolo 3

Algoritmo

In questo capitolo ci occupiamo di fornire l'algoritmo seguito per la risoluzione del problema, sia per quanto riguarda il portafoglio con pesi costanti nel tempo che il portafoglio media varianza dinamico.

- **Inizializzazione**

In questa prima fase della risoluzione dell'algoritmo, forniamo tutti i dati necessari per la risoluzione dei nostri modelli. Introduciamo quindi la ricchezza iniziale dell'investitore, il tasso d'interesse risk free e quello rischioso, la volatilità dello stock rischioso, la maturità del portafoglio, il numero di simulazioni e il numero di step temporali che dividono il periodo di tempo $[0, T]$.

- **Simulazione del portafoglio a pesi costanti**

Come secondo step simuliamo l'andamento del portafoglio. Presa la ricchezza iniziale del portafoglio, calcoliamo l'ammontare investito nell'asset rischioso, l'ammontare in quello non rischioso data la percentuale di ricchezza investita nello stock al tempo t_0 . Successivamente, per ogni step temporale e per ogni simulazione, simuliamo l'andamento dello stock rischioso e di quello non rischioso e calcoliamo la ricchezza al tempo t dell'individuo. Prima di ribilanciare il portafoglio, calcoliamo i rendimenti attesi sia dell'asset non rischioso R_f , che ovviamente sarà costante sempre, e l'eccesso di rendimento dell'asset rischioso, sfruttando le equazioni nel sistema (1.9). A questo punto ribilanciamo la ricchezza del portafoglio seguendo sempre la stessa formula e la stessa proporzione per gli asset:

$$\begin{cases} W_t = S_t + B_t \\ S_t = xW_t \\ B_t = (1 - x)W_t \end{cases} \quad (3.1)$$

- **Portafoglio a proporzione costante**

Dopo aver simulato il portafoglio nella maniera descritta sopra, calcoliamo il valore atteso della ricchezza al tempo finale, studiamo la deviazione standard di quest'ultima e infine calcoliamo la probabilità che la ricchezza del portafoglio sia minore di una certa soglia data.

- **Portafoglio media varianza**

Per quanto riguarda la struttura della strategia dinamica, ci basiamo ovviamente sui risultati ottenuti dai passaggi precedenti. Per comprendere meglio l'algoritmo utilizzato per la costruzione ottimale di questo nuovo portafoglio, suddividiamo in diversi step il processo.

- **Inizializzazione**

Consideriamo la stessa asset allocation della strategia a proporzioni costanti $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{T-\Delta t} = x$, e consideriamo la stessa identica simulazione del portafoglio $\{W_t(i)\}_{i=1}^N$, $t = 0, \dots, T$ fatta al passo due, così da avere lo stesso valore atteso della strategia a pesi costanti per quanto riguarda la ricchezza del finale. Quando finisce la simulazione, avremo la value function al tempo T , $J_T = (W_T - \frac{\gamma}{2})^2$.

- **Risoluzione**

In questo passaggio dell'algoritmo, ci preoccupiamo di risolvere il problema dell'ottimizzazione per ciascuna simulazione a ciascun tempo intermedio t . Partendo da $\{W_t(i)\}_{i=1}^N$, procediamo passo dopo passo nel seguente modo:

- * Per ciascuna simulazione abbiamo il valore della ricchezza del portafoglio $\{W_{t+\Delta t}(i)\}_{i=1}^N$, perciò, da quest'ultima, calcoliamo il valore della value function $\{J_{t+\Delta t}(i)\}_{i=1}^N$ al tempo $t + \Delta t$.
- * Partendo dalla seguente equazione:

$$J_{t+\Delta t}(W_{t+\Delta t}) = L_{t+\Delta t} \left(W_{t+\Delta t} (R_f^{(T-t)/\Delta t - 1} - \frac{\gamma}{2}) \right)^2,$$

riusciamo a determinare la funzione valore al tempo t :

$$J_t(W_t) = \max_{x_t} \{E[J_{t+\Delta t}^e + R_f] | W_t\}.$$

Infatti, risolvendo il problema di ottimizzazione al prim'ordine, troviamo $\{\hat{x}_t(i)\}_{i=1}^N$ con la seguente formula:

$$\hat{x}_t^* = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} - W_t (R_f)^{(T-t)/\Delta t} \right) E[R_t^e]}{W_t (R_f)^{(T-t)/\Delta t} E[(R_t^e)^2]}.$$

- * Utilizzando $\{W_t(i)\}_{i=1}^N$ e l'allocazione appena trovata, $\{\hat{x}_t(i)\}_{i=1}^N$, calcoliamo per regressione la nuova value function $\{\hat{J}_t(i)\}_{i=1}^N$. In questo caso, $\hat{J}_t(i)$ è il valore atteso di $J_{t+\Delta t}(W_{t+\Delta t})$ condizionato a $W_t(i)$ e $\hat{x}_t(i)$, quindi risulta essere:

$$\hat{J}_t(i) = E[J_{t+\Delta t}(W_{t+\Delta t}) | W_t = W_t(i), x_t = \hat{x}_t(i)].$$

– **Rinnovamento**

Per ciascuna simulazione, dal momento che conosciamo l'allocazione dalla quale siamo partiti $\{\tilde{x}_t(i)\}_{i=1}^N$, attraverso una regressione, possiamo calcolare i vecchi valori delle value functions $\{J_t(i)\}_{i=1}^N$. Per l' i -esima simulazione, se $\tilde{J}_t(i) > \hat{J}_t(i)$, scegliamo $\hat{x}_t(i)$, cioè la nuova allocazione per il portafoglio ottimo. Altrimenti, manteniamo l'allocazione di partenza.

– **Evoluzione**

Una volta calcolati tutti i pesi per ciascuna simulazione a ciascun tempo intermedio $\{x_t(i)\}_{i=1}^N$, calcoliamo la deviazione standard del portafoglio finale e la probabilità che la ricchezza scenda sotto una certa soglia al tempo finale T .

L'algoritmo viene ripetuto per ogni simulazione e a ciascun time step. Specialmente, gli ultimi tre passaggi di regressione sono fatti per calcolare le value functions. Dal momento che le value functions sono utilizzate per trarre informazioni tra due passi temporali, un errore di accumulazione nel loro calcolo può avvenire durante la ricorsione. Possiamo ovviare a questo problema allargando il numero di simulazioni, tuttavia pagheremmo in termini di tempo computazionale.

Si veda l'Appendice A. per i principali codici MatLab.

Capitolo 4

Media varianza vs Proporzione Costante

In questo capitolo mostriamo i risultati relativi a casi differenti nei quali mettiamo a confronto sempre la strategia ottima basata sulla teoria di media varianza e la strategia della quale l'investitore mantiene costanti i pesi degli asset che adotta per il suo portafoglio ottimo.

Dopo la scelta accurata dei parametri migliori per il nostro modello, lavoriamo sulla strategia a proporzioni costanti. Calcoliamo il valore atteso della ricchezza al tempo finale T , la sua deviazione standard finale e la probabilità che la ricchezza finisca sotto una data soglia.

Dopo questo primo passaggio dell'algoritmo, determiniamo la deviazione standard della ricchezza finale per la strategia ottima di media varianza dato il valore atteso del portafoglio calcolato con la precedente strategia. Infine confrontiamo i risultati delle due differenti strategie, trovando sempre una diminuzione di rischio quando utilizziamo la strategia dinamica di media varianza.

In tutti i casi che mostriamo, siamo sempre attenti al fatto che la strategia dinamica rispetti le condizioni di insolvenza, cioè che se la ricchezza al tempo t diventa negativa o nulla, l'investitore deve immediatamente liquidare il proprio investimento nel asset rischioso e smettere di fare trading. Un'altra condizione a cui prestiamo attenzione riguarda i limiti di leva del portafoglio. Abbiamo detto che non è vantaggioso sotto pesare l'asset rischioso, cioè avere una percentuale negativa investita nel titolo, quindi la percentuale di ricchezza nello stock sarà $x_t \in [0, q_{max}]$. Infine, rimaniamo consistenti in tutti i casi affrontati per quanto riguarda il tempo di ribilanciamento dei portafogli, per entrambe le strategie.

4.1 Caso base

Per quanto riguarda il caso base, utilizziamo i parametri in Tabella 4.1. I parametri di mercato μ , σ e r riflettono i parametri stimati in Tabella 2.1 con un particolare focus nei 60 anni più recenti. Partiamo con una ricchezza iniziale pari $W_0 = 100$ e un orizzonte temporale degli investimenti T pari a 30 anni. Per quanto riguarda il ribilanciamento in questo caso adottiamo una periodicità annuale per entrambe le strategie e invece per quanto riguarda la massima leva raggiungibile studiamo due differenti casi: uno in cui non si abbia limite, l'altro in cui si possa arrivare a una percentuale di asset rischioso pari a $q_{max} = 1.5$.

	Proporzione costante	Media Varianza
Orizzonte d'investimento T	30	30
Investimento iniziale W_0	100	100
Tasso drift dell'asset rischioso μ	0.10	0.10
Volatilità σ	0.15	0.15
Tasso d'interesse risk free r	0.04	0.04
Frequenza di ribilanciamento	Annuale	Annuale
Condizione di insolvenza	Si	Si
Leva massima q_{max}	n.a.	Variabile

Tabella 4.1: Ipotesi caso base

4.1.1 Strategia a pesi costanti

Per quanto riguarda la strategia a pesi costanti, otteniamo i risultati come descritto nel quarto capitolo, cioè sfruttando il metodo di Monte Carlo, iniziamo con una ricchezza iniziale così suddivisa $W_0 = S_0 + B_0 = 100$, dividiamo l'intero intervallo di tempo in sotto intervalli lunghi un anno e simuliamo ventimila diversi andamenti del portafoglio. In ciascuno step temporale intermedio, quindi in questo primo caso dopo ogni anno, ribilanciamo il portafoglio tenendo costanti i pesi iniziali sugli asset. Ho deciso di lavorare con tre differenti pesi ($p = 0$, $p = 0.5$ e $p = 1$) così da poter dare un'idea più chiara dei portafogli. La Tabella 4.2 mostra il valore atteso finale calcolato come la media tra tutte le 20.000 simulazioni al tempo T , la deviazione standard e la probabilità di fallimento dei tre portafogli differenti.

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0$	332.01	n.a.	n.a.
$x = 0.5$	827.40	362.40	$P(W_T < 800) = 0.5501$
$x = 1$	2005.54	1956.32	$P(W_T < 2000) = 0.6620$

Tabella 4.2: Risultati caso base a proporzione costante

Notiamo dalla Tabella 4.2 che i risultati riguardanti il rischio che si corre intraprendendo una strategia di questo tipo sono elevati. Ovviamente questo non riguarda il caso in cui consideriamo un portafoglio composto unicamente da un asset privo di rischio come può essere un titolo di stato di un paese considerato "infallibile", come gli Stati Uniti d'America.

Grazie al codice MatLab implementato per questo passaggio dell'algoritmo, siamo riusciti a ricavare la seguente figura che ci permette di spiegare la strategia adottata in questo caso.

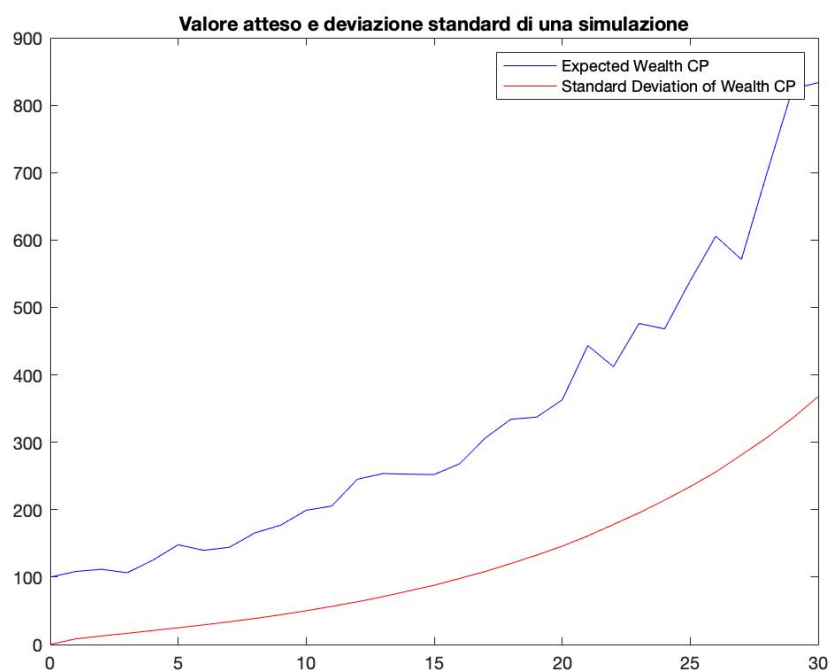


Figura 4.1: Ricchezza di un Portafoglio e Deviazione Standard ($p = 0.5$)

In figura 4.1 viene riportato l'andamento della ricchezza di un portafoglio di una delle simulazioni considerate e l'andamento della deviazione standard del portafoglio utilizzando la strategia a pesi costanti.

Vediamo ora invece i risultati che riguardano la strategia media varianza con diverse restrizioni riguardanti la leva raggiungibile nel portafoglio.

4.1.2 Strategia MV con leva ($q_{max} = 1.5$)

Il primo caso di strategia MV che analizziamo tiene conto di un limite massimo di percentuale investita nello stock rischioso. Con questo tipo di strategia possiamo sovra caricare il portafoglio di rischio vendendo allo scoperto il titolo non rischioso. Volendo comparare i risultati delle due strategie diverse, abbiamo deciso di prendere in considerazione i due portafogli a pesi costanti differenti, cioè per $x = 0.5$ e per $x = 1$. I risultati ottenuti sono i seguenti in tabella:

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	827.40	122.03	$P(W_T < 800) = 0.3379$
$x = 1$	2005.54	390.75	$P(W_T < 2000) = 0.4788$

Tabella 4.3: Risultati caso base MV $q_{max} = 1.5$

La tabella 4.3 mostra quindi che a parità di valore atteso di ricchezza a tempo finale T calcolata con il metodo a pesi costanti, riusciamo ad ottenere una ricchezza finale che abbia una deviazione standard molto minore rispetto alla strategia benchmark, infatti, calcolando il rapporto tra le deviazioni standard delle due strategie, si vede come il nuovo metodo dinamico diminuisca il rischio legato al portafoglio. Per quanto riguarda il portafoglio che parte con una percentuale pari a $x = 0.5$, la nuova standard deviation diminuisce del 66%. Nell'altro caso, in cui partiamo da un portafoglio completamente dedicato all'asset rischioso ($x = 1$), la deviazione standard ha un decremento ancora più significativo, infatti, passiamo da una $\sigma_{CP} = 1956.32$, a una $\sigma_{MV} = 390.75$.

Per quanto riguarda invece la probabilità di avere una ricchezza finale al di sotto di una certa soglia, troviamo risultati anche in questo caso molto confortanti. In particolare, la probabilità di fallimento con questa strategia dinamica è diminuita vertiginosamente, infatti, risulta pari a circa 2/3 della

probabilità di shortfall calcolata nel caso a proporzioni costanti per quanto riguarda il primo tipo di portafoglio $x = 0.5$. Per l'altro portafoglio considerato invece, la probabilità di default diminuisce ma in maniera meno accentuata. I risultati che troviamo in questo caso infatti portano a una diminuzione di "solamente" 27 punti percentuali.

4.1.3 Strategia MV con leva ($q_{max} = 1$)

Il secondo tipo di strategia ottimale che consideriamo per quanto riguarda la teoria di media varianza è tale che non si possa sovra-pesare lo stock rischioso, infatti in questo caso consideriamo una percentuale massima pari a $q_{max} = 1$. Nel caso in cui raggiugessimo questo tipo di allocazione allora avremmo tutto il portafoglio investito nell'asset rischioso e una percentuale nulla di ricchezza dedicata al titolo non rischioso. Come nel caso precedente consideriamo i due portafogli in cui $x = 0.5$ e per $x = 1$ per la strategia a pesi costanti.

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	827.40	95.26	$P(W_T < 800) = 0.3383$
$x = 1$	2005.54	304.05	$P(W_T < 2000) = 0.5184$

Tabella 4.4: Risultati caso base MV $q_{max} = 1$

Anche in questo caso, i risultati che otteniamo sono a difesa della tesi a favore della strategia MV.

Per quanto riguarda le deviazioni standard in entrambi i portafogli con le asset allocation differenti ($x = 0.5$ e $x = 1$), notiamo una diminuzione veramente significativa, anche più significativa del caso con $q_{max} = 1.5$. Questo risultato è dovuto al fatto che l'esposizione allo stock rischioso ha un limite minore e di conseguenza una forbice di possibili valori meno aperta. Nel caso del primo portafoglio $x = 0.5$, la σ_{MV} è minore rispetto a σ_{CP} del 73%, mentre per il secondo portafoglio la diminuzione è ancora maggiore, infatti tocca l'84%.

Dall'altro lato, anche le probabilità di fallimento diminuiscono per entrambi i portafogli. Il portafoglio in cui siamo investiti a pari peso nello stock rischioso e nel titolo non rischioso va a diminuire da 0.55 a 0.3383. Nell'altro

portafoglio invece la differenza di punti percentuali delle due probabilità di shortfall è pari al 14%.

4.1.4 Strategia MV con leva infinita

L'ultima variante considerata per quanto riguarda il caso base è quella in cui in cui fosse possibile avere un portafoglio senza restrizioni in termini di leva, cioè che si possa raggiungere una percentuale molto elevata di ricchezza investita nell'asset rischioso shortando di conseguenza il titolo privo di rischio. Come i casi precedenti, analizziamo e mettiamo a confronto i soliti due diversi portafogli.

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	827.40	226.21	$P(W_T < 800) = 0.3351$
$x = 1$	2005.54	1656.87	$P(W_T < 2000) = 0.4325$

Tabella 4.5: Risultati caso base MV $q_{max} = \infty$

Anche in questo ultimo caso, che può essere comunque considerato più rischioso rispetto ai precedenti dato che non consideriamo alcun limite riguardante la leva del portafoglio, riscontriamo dei risultati ottimi in termini di rischio. Ovviamente, rispetto ai due casi precedentemente studiati in cui avevamo $q_{max} = 1.5$ e $q_{max} = 1$, la diminuzione in termini di standard deviation è meno evidente. Consideriamo infatti che nel caso del portafoglio $x = 0.5$, la σ_{MV} vale poco meno dei 2/3 di σ_{MV} . Andando a vedere l'altro portafoglio, $x = 1$, il risultato del cambiamento è ancora meno evidente, infatti la nuova standard deviation è diminuita di poco più del 15%.

Per quanto concerne invece le probabilità di fallimento invece notiamo che i risultati sono comunque più a favore della nostra tesi, in quanto comunque arriviamo ad avere una diminuzione significativa in entrambi i casi.

Nel grafico sottostante, implementato con il codice MatLab, vengono rappresentati i risultati ottenuti riportati nelle tabelle. Per quanto riguarda le deviazioni standard abbiamo in entrambi i due portafogli ($x = 0.5$ e $x = 1$) una chiara diminuzione al diminuire della percentuale massima di investimento raggiungibile q_{max} nell'asset rischioso.

I risultati grafici in Figura 4.2 per quanto riguarda le probabilità che la ricchezza finale di un portafoglio finale finisca sotto una certa soglia rispec-

chiano quanto fornito dalle tabelle. Infatti, per il portafoglio a percentuali costanti $x = 0.5$, vediamo che le probabilità per i portafogli costruiti con la teoria della media varianza sono sempre diminuite e molto simili, tanto che nel grafico si accavallano i punti. Diversamente per il portafoglio $x = 1$ le probabilità di default variano in base al q_{max} , infatti, al crescere di questa percentuale massima diminuisce la probabilità per la ricchezza di scendere sotto una certa soglia.

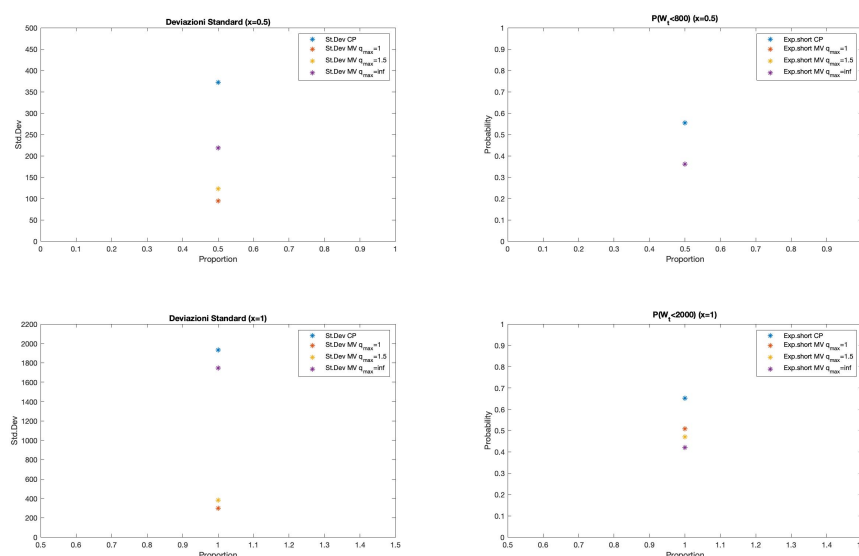


Figura 4.2: Deviazioni standard e Probabilità di default

Andiamo ora ad analizzare il secondo caso, vediamo infatti come la strategia media varianza sovra performa la strategia a proporzioni costanti diminuendo l'orizzonte temporale.

4.2 Secondo caso

Nel secondo caso preso in considerazione utilizziamo i parametri di mercato identici al caso base precedentemente analizzato. In questo secondo caso vogliamo misurare l'influenza che ha l'orizzonte temporale nelle nostre strategie e proprio per questo motivo abbiamo deciso di diminuire la maturità del portafoglio T .

Anche in questo frangente seguiamo lo stesso identico percorso fatto per il precedente caso, iniziando dalla strategia di proporzione costante costruita

tramite il metodo di Monte Carlo e basando la strategia ottima dinamica sui risultati ottenuti dal portafoglio a pesi costanti. La seguente tabella illustra i parametri, le restrizioni e le ipotesi aggiuntive utilizzati in questo secondo caso:

	Constant Proportion	MV ottimale
Orizzonte d'investimento T	15	15
Investimento iniziale W_0	100	100
Tasso drift dell'asset rischioso μ	0.10	0.10
Volatilità σ	0.15	0.15
Tasso d'interesse risk free r	0.04	0.04
Frequenza di ribilanciamento	Semestrale	Semestrale
Condizione di insolvenza	Si	Si
Leva massima q_{max}	n.a.	Variabile

Tabella 4.6: Ipotesi secondo caso

Come precedentemente fatto per il caso base, dividiamo il problema in due considerando prima la strategia benchmark e poi quella MV.

4.2.1 Strategia a pesi costanti

Per quanto riguarda la strategia a pesi costanti, sfruttiamo nuovamente il metodo di Monte Carlo, partendo con una ricchezza iniziale $W_0 = S_0 + B_0 = 100$, dividiamo l'intero intervallo di tempo in questo caso in sotto intervalli lunghi un semestre e simuliamo diecimila diversi andamenti del portafoglio come nel caso base. In ciascuno step temporale intermedio, quindi in questo caso dopo ogni sei mesi, ribilanciamo il portafoglio tenendo costanti i pesi iniziali sugli asset. Per dare continuità e per avere un'idea comparabile dell'andamento del portafoglio con il caso base, anche in questo secondo caso ho deciso di lavorare con gli stessi pesi utilizzati in precedenza ($p = 0$, $p = 0.5$ e $p = 1$). La Tabella 4.7 mostra il valore atteso finale calcolato come la media tra tutte le simulazioni al tempo T , la deviazione standard e la probabilità di fallimento dei tre portafogli differenti.

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0$	182.21	n.a.	n.a.
$x = 0.5$	286.48	87.51	$P(W_T < 250) = 0.3798$
$x = 1$	446.35	277.85	$P(W_T < 400) = 0.5365$

Tabella 4.7: Risultati secondo caso a proporzione costante

Come si può notare dalla Tabella 4.7, i risultati ottenuti sono ovviamente completamente diversi da quelli ottenuti in Tabella 4.3. L'influenza che ha l'orizzonte temporale di un portafoglio è ovviamente significativa. Rispetto al caso base in particolare notiamo che se abbiamo una maturità di portafoglio pari alla metà, la deviazione standard diminuisce drasticamente, infatti, se prendiamo il portafoglio con percentuale pari a $x = 0.5$ investita nell'asset rischioso e non rischio vediamo che passiamo da una deviazione standard pari a 362.4, a una pari a 87.51. Per quanto riguarda invece la probabilità di andare sotto una certa soglia, notiamo che l'influenza che può avere l'orizzonte temporale è meno significativa.

I grafici in Figura 4.3 mostrano le differenze tra il primo e il secondo caso presi in considerazione per entrambi i portafogli, cioè con le percentuali costanti $x = 0.5$ e $x = 1$.

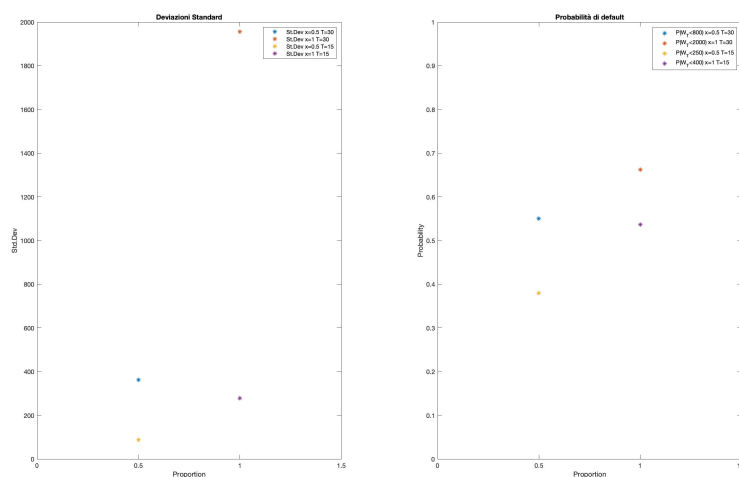


Figura 4.3: Deviazioni standard e Probabilità di default CP

Come si può notare dai grafici, l'effetto che ha il tempo per quanto riguarda i rischi legati a un portafoglio è molto evidente. In Figura 4.3 infatti è facile notare che le deviazioni standard sono diminuite di molto rispetto al caso in cui $T = 30$. Specialmente per quanto riguarda il portafoglio completamente investito nell'asset rischioso ovviamente si nota una differenza molto ampia tra le due deviazioni standard.

Dall'altra parte invece, la differenza tra le probabilità di essere inferiori a una certa soglia specifica di ciascun diverso portafoglio è abbastanza costante, ciò significa che non è così influente il tempo in questo caso.

Affrontiamo ora i diversi casi per i portafogli MV, contraddistinti l'un l'altro dalla leva massima raggiungibile q_{max} .

4.2.2 Strategia MV

Per quanto riguarda la strategia a media varianza, studiamo i portafogli che partono con una percentuale di titolo rischioso $x \neq 0$. Gli esempi che vengono proposti sono anche in questo caso differenti l'un dall'altro a seconda della leva massima q_{max} e anche in questo secondo caso vediamo tre diverse opzioni, identiche al caso base. Le seguenti tabelle descrivono i risultati al variare di q_{max} .

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	286.48	38.38	$P(W_T < 250) = 0.1562$
$x = 1$	446.35	180.25	$P(W_T < 400) = 0.3229$

Tabella 4.8: $q_{max} = 1.5$

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	286.48	33.74	$P(W_T < 250) = 0.1129$
$x = 1$	446.35	140.31	$P(W_T < 400) = 0.2945$

Tabella 4.9: $q_{max} = 1$

Poporzione costante	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
$x = 0.5$	286.48	57.47	$P(W_T < 250) = 0.1724$
$x = 1$	446.35	240.32	$P(W_T < 400) = 0.3621$

Tabella 4.10: $q_{max} = \infty$

Le Tabelle 4.8, 4.9 e 4.10 ci permettono di investigare l'impatto di una diminuzione del tempo di investimento T . Come precedentemente detto abbiamo comunque utilizzato gli stessi parametri del caso base.

Come per il caso con più ampio orizzonte temporale, la strategia ottimale MV ha gli stessi valori attesi di ricchezza finale come nel caso dei portafogli a proporzione costante e diminuisce significativamente la deviazione standard in confronto a questa strategia, così come la probabilità di shortfall. I miglioramenti ottenuti in questo caso sono meno significativi rispetto alle strategie con maturità di portafoglio più grandi, specialmente per quanto riguarda le deviazioni standard.

Per avere un'idea ben precisa su quanto incida la strategia a con ribilanciamento dinamico MV, ho calcolato le percentuali di efficienza con le seguenti formule:

$$\frac{\sigma_{CP} - \sigma_{MV}}{\sigma_{CP}} \quad (4.1)$$

$$\frac{P_{CP}(W_T < K) - P_{MV}(W_T < K)}{P_{CP}(W_T < K)}, \quad (4.2)$$

Attraverso le formule appena citate, si possono quindi migliorare, apportati dalla strategia MV, in termini di deviazione standard e probabilità di rimanere con una ricchezza finale minore di una soglia, denominata K nell'equazione (4.2).

I grafici in Figura 5 ci permettono di capire meglio la differenza di impatto della strategia MV rispetto a quella a proporzioni costanti tra il primo e il secondo caso, infatti, riusciamo ad avere una rappresentazione grafica delle efficienze per i diversi portafogli con i diversi parametri e diverse regole sia per quanto riguarda la leva che per quanto riguarda il ribilanciamento.

CAPITOLO 4. MEDIA VARIANZA VS PROPORZIONE COSTANTE 30

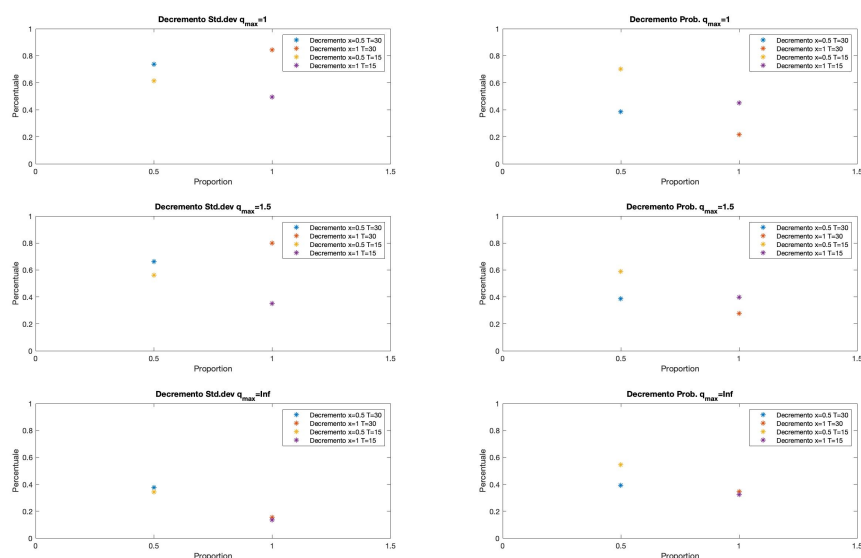


Figura 4.4: Efficienza strategie

I grafici riguardanti la parte sinistra di Figura 5 mostrano le diminuzioni percentuali delle deviazioni standard tra le strategie CP E MV per i portafogli $x = 0.5$ e $x = 1$. Per ciascun limite di leva e per ciascun portafoglio si vede che nel caso base la diminuzione di deviazione standard è maggiore rispetto al caso in cui l'orizzonte temporale è diminuito fino a $T = 15$. La differenza di performance tra i due casi con diverse maturità è minore per il caso in cui $q_{max} = \infty$.

La parte destra di Figura 4.4 invece mostra la diminuzione delle probabilità del portafoglio di trovarsi al tempo finale con una ricchezza minore di una certa soglia. Come detto in precedenza, i risultati per le probabilità di shortfall sono meno netti così come si può notare dal grafico, anzi, nel caso specifico in cui $q_{max} = \infty$ e $x = 1$, la probabilità di avere una ricchezza minore di una certa soglia nel lungo termine diminuisce meno rispetto al caso con orizzonte temporale minore.

Affrontiamo ora l'ultimo caso che mette a confronto diverse leve ma nel caso in cui venga diminuito ancor di più il tempo d'investimento.

4.3 Terzo caso

Il terzo e ultimo esperimento mette a confronto la strategia a pesi costanti con la strategia media varianza per investimenti a "breve" termine. La diminuzione dell'orizzonte temporale è volta a considerare l'effetto che può avere la limitazione della leva q_{max} .

Differentemente rispetto ai casi precedenti, analizziamo solamente gli effetti che la strategia MV ha nei confronti delle deviazioni standard.

In questo caso inoltre affrontiamo il problema considerando dei parametri differenti rispetto ai primi due esempi. In particolare, diminuiamo la volatilità dello stock σ e il rendimento dell'asset privo di rischio lo consideriamo nullo; così facendo mettiamo in evidenza principalmente lo stock rischioso che in questo caso sarà meno volatile rispetto ai casi precedenti. In Tabella 4.11 si possono notare i parametri e le restrizioni utilizzate.

	Proporzione costante	MV ottimale
Orizzonte d'investimento T	10	10
Investimento iniziale W_0	100	100
Tasso drift dell'asset rischioso μ	0.10	0.10
Volatilità σ	0.10	0.10
Tasso d'interesse risk free r	0	0
Frequenza di ribilanciamento	Quadrimestrale	Quadrimestrale
Condizione di insolvenza	Si	Si
Leva massima q_{max}	n.a.	Variabile

Tabella 4.11: Ipotesi terzo caso

Vediamo ora prima i risultati ottenuti con la strategia costante e per i portafogli con le seguenti proporzioni: $x = 0$, $x = 0.5$ e $x = 1$.

4.3.1 Strategia a pesi costanti

Questo terzo caso affrontato ha parametri differenti rispetto ai precedenti e infatti lo scopo di quest'ultimo esempio non è tanto mostrare la differenza tra le strategie CP e MV ma bensì vedere l'effetto di q_{max} n.

Ad ogni modo, rimane un passaggio fondamentale il calcolo della ricchezza finale attesa e la sua deviazione standard per i portafogli a pesi costanti dato che per la strategia MV partiremo dallo stesso valore atteso ottenuto da questa strategia.

Anche in quest'ultimo caso utilizziamo lo stesso algoritmo dei casi precedenti, in Tabella 4.12 vediamo i risultati ottenuti per questa prima strategia.

Peso in portafoglio	Valore atteso	Deviazione standard
$x = 0$	100	n.a.
$x = 0.5$	165.56	26.65
$x = 1$	272.28	88.09

Tabella 4.12: Risultati terzo caso a proporzione costante

I risultati in tabella mostrano ciò che ci si poteva aspettare dopo il cambiamento dei parametri, infatti una diminuzione della volatilità nell'asset rischioso ha portato a una diminuzione notevole della deviazione standard, così come la frequenza di ribilanciamento e l'ampiezza del intervallo di tempo di investimento.

Nello specifico, è giusto che il valore atteso del portafoglio finale investito completamente nell'asset non rischioso sia pari al valore di partenza dato che comunque il tasso risk free $r = 0$.

Per quanto riguarda i valori attesi e le deviazioni degli altri portafogli, $x = 0.5$ e $x = 1$, si può notare come i risultati ottenuti siano molto più bassi rispetto ai precedenti casi.

Affrontiamo ora la strategia MV per i diversi valori di q_{max} .

4.3.2 Strategia MV

Prima di descrivere i risultati ottenuti in questa sezione, proviamo a ricordare cosa significa avere una leva massima q_{max} da rispettare durante la gestione di un portafoglio. Prendiamo in considerazione il caso in cui $q_{max} = 1.5$, ricordiamo quindi che, ipoteticamente, possiamo sovra pesare la percentuale di ricchezza investita nell'asset rischioso vendendo una stessa percentuale di ricchezza investita nell'asset non rischioso. In altre parole avrei al massimo il 150% investito nell'asset rischioso e il -50% investito nell'asset non rischioso. Vediamo ora i risultati ottenuti, dividendo i due portafogli in due diverse tabelle, una per $x = 0.5$ e l'altra per il portafoglio più rischioso $x = 1$.

q_{max}	Valore atteso	Deviazione standard
1.0	165.56	7.65
1.5	165.56	14.45
10.0	165.56	23.09
∞	165.56	25.03

 Tabella 4.13: Risultati terzo caso MV, $x = 0.5$

q_{max}	Valore atteso	Deviazione standard
1.0	272.28	14.95
1.5	272.28	35.56
10.0	272.28	82.09
∞	272.28	88.09

 Tabella 4.14: Risultati terzo caso MV, $x = 1$

Come si può notare dalle tabelle appena lette, è molto influente la scelta di leva massima. I risultati ottenuti sono a favore del fatto che cambiando in questo modo i parametri sottostanti le dinamiche degli asset e diminuendo l'orizzonte temporale, riduciamo il gap tra le due strategie studiate.

Concludiamo il capitolo riassumendo i risultati ottenuti nei tre casi differenti descritti sopra.

Nel primo caso in cui abbiamo un orizzonte temporale molto vasto ($T = 30$) la strategia MV migliora di gran lunga la strategia a proporzione costante. Ovviamente il tempo è nemico del rischio di un portafoglio, perciò una strategia dinamica che punta a minimizzare la deviazione standard e la probabilità di fallimento verrà favorita nel lungo termine rispetto a una strategia di investimento più statica che punta al bilanciamento costante degli asset di un portafoglio.

Il secondo e il terzo caso invece ci permettono di vedere le differenze in termini rischio di portafoglio al variare principalmente del tempo T e dei parametri su cui si basano le dinamiche degli asset. Come già specificato per quanto riguarda il tempo, riducendo l'orizzonte temporale d'investimento troviamo

una differenza di efficienza delle strategie di asset allocation minore in termini di rischio. Non solo, allo stesso modo si vede che la forbice che divide l'efficienza delle due strategie si riduce al diminuire della volatilità dello stock e al diminuire della frequenza di ribilanciamento della strategia MV.

Facendo riferimento alla Figura 4.6, utilizzata anche da P. A. Forsyth e K. R. Vetzal [1], riusciamo a comprendere in maniera più chiara il comportamento del rapporto tra la deviazione standard calcolata con la strategia a pesi costanti e quella calcolata con la strategia MV.

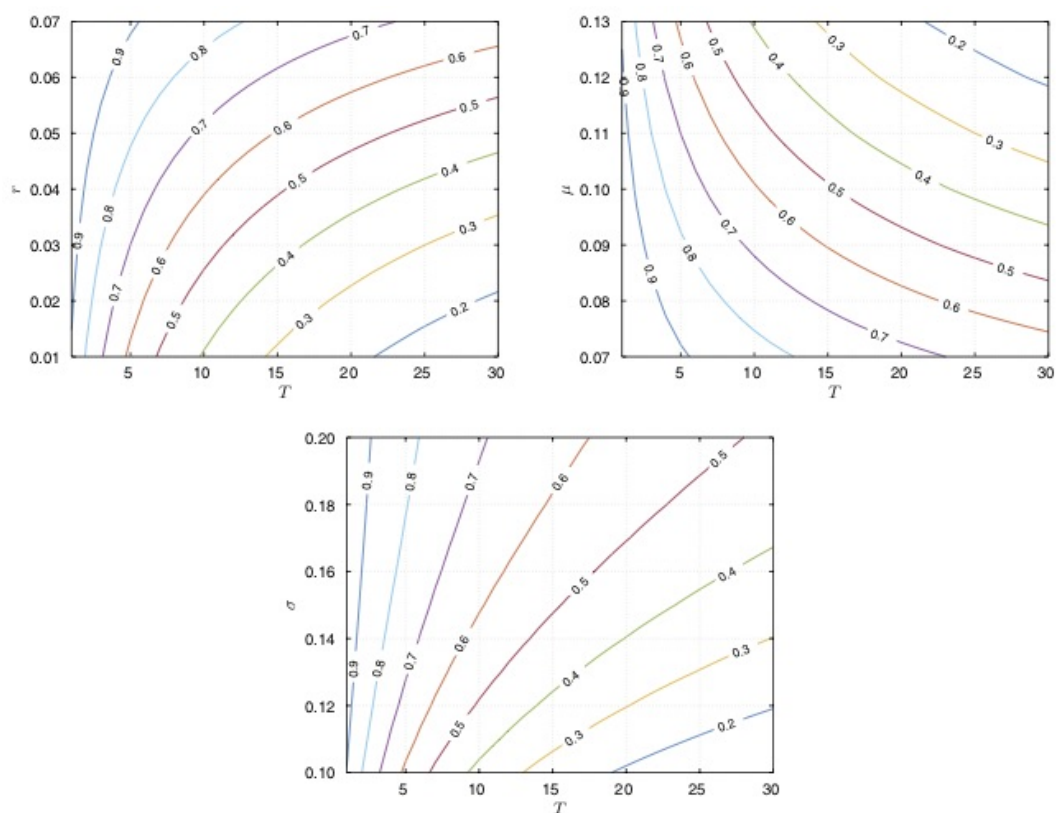


Figura 4.5: Andamenti efficienze in relazione ai parametri

In Figura 4.5 troviamo i grafici dei profili dei rapporti delle deviazioni standard delle ricchezze a tempo finale per la strategia MV, così come trovati in Bielecki et al. (2005) [7], e le corrispondenti deviazioni standard per la strategia a proporzioni costanti per un portafoglio con peso costante $x = 0.5$ investito nell'asset rischioso. Entrambe le strategie assumono la stessa frequenza di ribilanciamento e hanno lo stesso valore atteso di ricchezza finale, cioè quello calcolato con la strategia benchmark. Il grafico in alto a sinistra mostra l'andamento dei rapporti tra deviazioni standard al variare del tempo

finale T e al variare del tasso d'interesse dell'asset non rischioso r . In altro a destra vediamo l'andamento relativo al tempo T e al drift μ dello stock rischioso e infine il riquadro in basso mostra l'andamento del rapporto delle deviazioni standard al variare della volatilità dello stock σ e la maturità del portafoglio T .

Capitolo 5

Backtesting

Il backtesting è una metodologia per testare la validità delle capacità esplicative di una teoria o di un modello o la valutazione della bontà di una strategia, basata sull'analisi di dati del passato [8].

In questo capitolo descriviamo i backtests della strategia ottimale MV utilizzando i dati storici del mercato statunitense su cui abbiamo basato le stime dei parametri per i casi precedentemente descritti. Questi test permettono di verificare la robustezza della strategia conoscendo l'imperfezione del processo stocastico dello stock rischioso e il tasso d'interesse privo di rischio.

Mentre per i casi descritti sopra ci basiamo sulla stima dei parametri che riflettano l'andamento di mercato americano degli ultimi 60 anni, i test che riportiamo in questo capitolo sono basati sulle stime dei parametri prese dai seguenti sotto periodi: 1926-1954, 1926-1984 e infine 1926 fino ad oggi.

Per tutti e tre i sotto periodi utilizziamo le seguenti ipotesi:

- $T = 30$
- $W_0 = 100$
- $x=0.5$
- $q_{max} = 1.5$
- Ribilanciamento annuale
- Asset rischioso \sim GBM

Facendo riferimento ai parametri di Tabella 2.1 in cui vengono mostrati i dati relativi a ciascun sotto periodo, riusciamo ad ottenere i seguenti risultati:

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	674.90	543.95	$P(W_T < 525) = 0.50$
MV ottimale	674.90	175.20	$P(W_T < 525) = 0.15$

Tabella 5.1: 1926-1954

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	868.26	539.81	$P(W_T < 725) = 0.49$
MV ottimale	868.26	185.03	$P(W_T < 525) = 0.16$

Tabella 5.2: 1926-1984

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	912.12	517.17	$P(W_T < 725) = 0.51$
MV ottimale	912.12	171.23	$P(W_T < 525) = 0.13$

Tabella 5.3: 1926-2017

Come si può notare dalle Tabelle 5.1, 5.2 e 5.3 i risultati confermano la robustezza dei nostri test predittivi precedentemente descritti. Andando a vedere i risultati basati su dati passati stocastici ma conosciuti vediamo come la strategia MV porti ad una minimizzazione della volatilità del portafoglio a maturità rispetto al rischio trovato per il portafoglio costruito con una strategia a pesi costanti.

Andiamo ora ad affrontare il backtesting basandoci sulla strategia di bootstrap.

5.1 Strategia di ricampionamento del bootstrap

La strategia di bootstrap ha lo scopo di stimare caratteristiche della distribuzione di probabilità di uno stimatore o, più in generale, di una statistica di interesse. La tecnica si basa sull'assunto che, se i dati sono il risultato di un campionamento casuale, la distribuzione di uno stimatore (o una sua qualche caratteristica, come la media, la varianza o i quantili) può essere vista come una funzione dipendente dalla legge di probabilità della popolazione da cui provengono le osservazioni campionarie [8].

Un fattore importante nella strategia di ricampionamento del bootstrap delle serie storiche è il fatto che i rendimenti siano indipendenti tra loro nel tempo. Nel nostro caso in realtà c'è una leggera dipendenza temporale per R , mentre per quanto riguarda il tasso privo di rischio è confortante il fatto che è abbastanza persistente lungo tutto il periodo.

Per ovviare a questo problema, utilizziamo un approccio a blocchi. Un singolo andamento è quindi costruito così come segue: l'orizzonte temporale T è diviso in k blocchi di M anni, così che avremo $T = kM$. Successivamente selezioniamo in maniera casuale k blocchi dai dati storici da rimpiazzare e ciascun blocco parte da un quarto di anno casuale. In questo modo formiamo un singolo andamento concatenando questi blocchi. Ripetiamo questa procedura per diversi andamenti possibili del portafoglio.

Nel nostro caso stimiamo i parametri prendendo i dati storici dal 1924 ad oggi. Grazie ai dati in Tabella 1 sappiamo che $\hat{\mu} = 0.1108$, $\hat{\sigma} = 0.1867$ e $\hat{r} = 0.0354$. Partendo sempre da un livello di ricchezza iniziale $W_0 = 100$ e l'orizzonte temporale che arriva a $T = 30$, calcoliamo il valore atteso finale e la deviazione standard del portafoglio a pesi costanti nei due asset, rischioso e non rischioso ($x = 0.5$). Successivamente determiniamo la strategia ottimale MV, con leva massima $q_{max} = 1.5$, che avrà come sempre lo stesso valore atteso di ricchezza finale del portafoglio a proporzioni costanti. I risultati si trovano in Tabella 18. Una volta calcolate le allocazioni per ciascun tempo di ribilanciamento, le applichiamo ai dati storici utilizzando la strategia di ricampionamento appena descritta. Il rimpiazzo dei dati stocastici con i ritorni passati conosciuti, viene fatto sia per la strategia a pesi costanti che per quella MV.

L'importanza della dimensione dei blocchi in termini di anni è fondamentale. Se i blocchi sono troppo piccoli per esempio, la dipendenza dei dati non è messa in evidenza. Se i blocchi sono troppo "ampi" i valori della varianza stimata saranno poco robusti.

Vediamo ora i risultati che otteniamo al variare degli anni considerati per ciascun blocco, considerando il ribilanciamento annuale per entrambe le strategie, CP e MV.

Le seguenti tabelle si basano sui risultati ottenuti da P. A. Forsyth e K. R. Vetzal.[1]. Al variare della misura dei blocchi troveremo differenti valori per i valori attesi, le deviazioni standard e le probabilità del portafoglio finale di scendere sotto la soglia di 800 dollari.

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	966	600	$P(W_T < 800) = 0.48$
MV ottimale	870	213	$P(W_T < 800) = 0.15$

Tabella 5.4: Misura del blocco: 1 anno

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	936	481	$P(W_T < 800) = 0.46$
MV ottimale	888	191	$P(W_T < 800) = 0.11$

Tabella 5.5: Misura del blocco: 5 anni

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	923	470	$P(W_T < 800) = 0.46$
MV ottimale	911	148	$P(W_T < 800) = 0.11$

Tabella 5.6: Misura del blocco: 10 anni

Strategia	Valore atteso	Deviazione standard	Probabilità Shortfall
Proporzione costante	933	493	$P(W_T < 800) = 0.48$
MV ottimale	929	104	$P(W_T < 800) = 0.05$

Tabella 5.7: Misura del blocco: 20 anni

I risultati nelle tre tabelle sono in accordo con quanto ci si potesse aspettare. I valori attesi non corrispondono esattamente per le due strategie visto che nella ricostruzione dei portafogli con i nuovi blocchi di dati certi vengono leggermente variati i risultati seppur le allocazioni degli asset ad ogni tempo x_t rimangano quelle calcolate tramite il metodo descritto dall'algoritmo nel Capitolo 4 e utilizzato poi nel Capitolo 5 per i nostri vari casi presi in considerazione.

Come precedentemente commentato, blocchi troppo corti di dati conosciuti non influenzano troppo i risultati mentre blocchi troppo estesi diminuiscono di troppo la varianza del portafoglio.

Per tutte le diverse grandezze dei blocchi la strategia MV sopra performa la strategia a pesi costanti in termini di probabilità e deviazione standard. Ovviamente, quanto più sono grandi i blocchi tanto più l'efficienza dell'MV sarà migliore rispetto alla strategia a pesi costanti, tuttavia, non possiamo basarci su una predizione che sfrutta blocchi di dati conosciuti troppo influenti. Si può notare inoltre che i risultati nelle Tabelle 20 e 21, quindi nei casi in cui i blocchi siano di 5 e 10 anni, sono simili ai risultati teorici descritti in Tabella 18 per entrambe le strategie. Questo fatto non fa altro che dimostrare nuovamente la robustezza della strategia ottimale MV seppure si può notare mettendo a confronto con la Tabella 18 che anche la strategia a proporzioni costanti beneficia di questa tecnica di ricampionamento del bootstrap dei dati.

Capitolo 6

Conclusioni

Ripercorriamo il percorso fatto in questo studio. Lo scopo di questa tesi è stato quello di mettere a confronto due strategie che possono essere utilizzate per l'allocazione di due asset in un portafoglio. Le strategie prese in considerazione sono state la strategia benchmark di proporzione costante tra gli asset lungo tutto l'orizzonte temporale e la strategia basata sulla media varianza, entrambe con lo stesso valore atteso di ricchezza finale calcolato tramite la strategia benchmark. Gli asset a disposizione dell'investitore erano: uno stock rischioso che seguiva le dinamiche di un geometric brownian motion e un asset non rischioso caratterizzato dal suo tasso risk free r . Per la stima dei parametri sottostanti agli asset sono stati utilizzati i dati provenienti dal mercato americano dal 1924 fino ad oggi.

Tutti gli esperimenti hanno evidenziato un netto dominio da parte della strategia MV nei confronti della strategia a pesi costanti. Infatti, a parità di valore atteso di ricchezza finale, la strategia MV, che ribilancia periodicamente il portafoglio con diverse allocazioni, minimizza la deviazione standard per arrivare allo stesso valore atteso della strategia benchmark. Quindi, visti i risultati degli esempi al variare dei parametri e visti i risultati dei backtesting non possiamo che preferire la strategia MV se vogliamo diminuire il rischio di non ottenere il valore atteso preso in considerazione.

Ovviamente l'utilizzo della deviazione standard come misura di rischio è ciò che favorisce la diminuzione di probabilità di perdite ma allo stesso tempo anche la diminuzione di probabilità di guadagno relativa ai valori attesi di un portafoglio.

Capitolo 7

Bibliografia

- 1 P. A. Forsyth e K. R. Vetzal. *Robust asset allocation for long-term target-based investing*. International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 20, No. 3, 2017.
- 2 F. Cong e C.W. Oosterlee. *Multi-period mean-variance portfolio optimization based on Monte-Carlo simulation*. Journal of Economic Dynamics and Control 64 (2016) 23–38.
- 3 Richard Kersley e Nannette Hechler-Fayd'herbe. *Global wealth report 2019*. Credit Suisse Research Institute.
- 4 April M. Knill, Bong Soo Lee e Nathan Mauckb. *Sovereign wealth fund investment and the return-to-risk performance of target firms*. Journal of Financial Intermediation, April 2012 Volume 21, Issue 2, Pages 315-340.
- 5 Benjamin Graham. *The intelligent investor*. Rev. Ed., collana Harper Business, Harper & Row, Publishers Inc., 2009.
- 6 Duan Li Wan-Lung Ng. *Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multi-period Mean-Variance Formulation*. Mathematical Finance, Volume 10, Issue3, July 2000, Pages 387-406.
- 7 T. R. Bielecki, H. Jin, S. R. Pliska e X. Y. Zhou (2005) *Continuous time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition*. Mathematical Finance 15, 213–244.
- 8 Treccani. *Dizionario di Economia e Finanza* (2012)

Appendice A

Codici

In questa sezione troviamo i codici matlab utilizzati per implementare il caso base visto nel Capitolo 5.

A.0.1 Run caso base

```
%% Run Caso base

W0=100; % Ricchezza iniziale
mu=0.10; % Rendimento risky asset
sigma=0.15; % Volatility
r=0.04; % Rendimento risk free asset
T=30; % Maturity
Nsim=10^2; % Numero simulazioni
Nsteps=T; % Numero di steps temporali
Qmax=1.5;
Qmax2=1;

% Constant proportion p=0

p1=0;
K1=0;
S0=p1*W0;
B0=(1-p1)*W0;

[S,B,~,~,~]=Sampling_Ratio...
(B0,S0,T,sigma,mu,r,Nsim,Nsteps);

[Exp_val_C_1,Std_dev_C_1,Exp_short_C_1]=...
Constant_Prop(S,B,K1,T,Nsteps);

%%
% Constant proportion p=0.5
```

```

p2=0.5;
K2=800;
gamma2=1715;
S0=p2*W0;
B0=(1-p2)*W0;

[S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret]=...
    Sampling_Ratio(B0,S0,T,sigma,mu,r,Nsim,Nsteps);

%% Constant Proportion
[Exp_val_C_2,Std_dev_C_2,Exp_short_C_2]=...
    Constant_Prop(S,B,K2,T,Nsteps);

%% MV with Qmax=1.5
[x2,Exp_val_MV_2,Std_dev_MV_2,Exp_short_MV_2]=Mean_Variance...
    (W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret,r,mu,sigma,K2...
    ,T,Nsteps,gamma2,Qmax,p2);

%% MV with Qmax=1
[x2_Q,Exp_val_MV_2_Q,Std_dev_MV_2_Q,Exp_short_MV_2_Q]=...
Mean_Variance(W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret,r,mu,...
sigma,K2,T,Nsteps,gamma2,Qmax2,p2);

%% MV without Q
[x2_NoQ,Exp_val_MV_2_NoQ,Std_dev_MV_2_NoQ,Exp_short_MV_2_NoQ]=...
Mean_Variance(W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret,r...
,mu,sigma,K2,T,Nsteps,gamma2,NoQ,p2);

%%
% Constant proportion p=1

p3=1;
K3=2000;
gamma3=5856.15;
S0=p3*W0;
B0=(1-p3)*W0;

[S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret]=...
    Sampling_Ratio(B0,S0,T,sigma,mu,r,Nsim,Nsteps);

%% Constant Proportion
[Exp_val_C_3,Std_dev_C_3,Exp_short_C_3]=...
    Constant_Prop(S,B,K3,T,Nsteps);

%% MV with Qmax=1.5
[x3,Exp_val_MV_3,Std_dev_MV_3,Exp_short_MV_3]=Mean_Variance...
    (W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret,Risk_Free_Ret,r,mu,sigma,K3...
    ,T,Nsteps,gamma3,Qmax,p3);

```

```

%% MV with Qmax=1
[x3_Q, Exp_val_MV_3_Q, Std_dev_MV_3_Q, Exp_short_MV_3_Q]=...
Mean_Variance(W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret ,Risk_Free_Ret ,r,mu,...
sigma,K3,T,Nsteps ,gamma3 ,Qmax2 ,p3);

%% MV without Qmax
[x3_NoQ, Exp_val_MV_3_NoQ, Std_dev_MV_3_NoQ, Exp_short_MV_3_NoQ]=...
Mean_Variance(W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret ,Risk_Free_Ret ,r,...
mu ,sigma ,K3,T,Nsteps ,gamma3 ,NoQ ,p3);

```

A.0.2 Simulazione dei sottostanti

```

function [S,B,Z,Risky_Excess_Ret ,Risk_Free_Ret]=...
Sampling_Ratio(B0,S0,T,sigma,mu,r,Nsim,Nsteps)

% Sampling_Ratio ci permette di costruire l'andamento della
% ricchezza del portafoglio partendo dalla ricchezza investita
% nei singoli assets.

dt=T/Nsteps;
S=zeros(Nsim,Nsteps+1); S(:,1)=S0;
B=zeros(Nsim,Nsteps+1); B(:,1)= B0;
Z=randn(Nsim,Nsteps);

% Excess return risky asset
Risky_Excess_Ret=zeros(Nsim,Nsteps);

% Return free risk asset
Risk_Free_Ret=exp(r*dt)-1;

% Risk_Free_Ret=zeros(Nsim,Nsteps);

% teniamo pesi costanti per gli asset a ogni passaggio temporale
ratio=S0/(S0+B0);
for i =1:Nsteps
    for j =1:Nsim
        B(j,i+1)=B(j,i)*exp(r*dt);
        S(j,i+1)=S(j,i)*exp((mu-sigma^2/2)*dt+sigma*sqrt(dt)...
            *Z(j,i));
        % Calcolo del rendimento in eccesso
        Risky_Excess_Ret(j,i)=(exp((mu-sigma^2/2)*dt+sigma...
            *sqrt(dt)*Z(j,i))-1)-Risk_Free_Ret;
        W=B(j,i+1)+S(j,i+1);
        if (i~=Nsteps)
            %Ribilanciamento
            S(j,i+1)=ratio*W;
        end
    end
end

```

```

        B(j,i+1)=(1-ratio)*W;
    end
end
end
end

```

A.0.3 Proporzione costante

```

function [Exp_Value_Port,St_Dev_Port,Exp_Short_Prob]=...
    Constant_Prop(S,B,K,T,Nsteps)

% Constant_Proportion ci permette di calcolare gli output...
% richiesti
% S: (Nsim x Nsteps+1) matrix
% B: 1 x Nsteps vector
% soglia: utilizzata per l'expected shortfall probability

%% Constant Proportion

Exp_Value_Port=mean(S(:,end)+B(:,end));
St_Dev_Port=std(S(:,end)+B(:,end));
Exp_Short_Prob=mean(S(:,end)+B(:,end)<K);

x=linspace(0,T,Nsteps+1);
y=(S(1,:)+B(1,:));
z=std(S+B);
ymax=max(y);
figure
plot(x,y,'b');
hold on
plot(x,z,'r');
axis([0 30 0 ymax])
legend('Expected_Wealth_CP','Standard_Deviation_of_Wealth_CP');
title('Valore_atteso_e_deviazione_standard_di_una_simulazione');

end

```

A.0.4 Media Varianza

```

function [x,Exp_Value_Port ,St_Dev_Port ,Exp_Short_Prob]=...
    Mean_Variance(W0,S,B,Z,Risky_Excess_Ret ,Risk_Free_Ret ,r,...
    mu ,sigma ,K,T,Nsteps ,gamma ,Qmax ,p)
% Mean_Variance ci permette di calcolare i tre output richiesti.
% Prendendo come argomenti la matrice dell'asset rischioso e il
% vettore dell'asset non rischioso, costruisce backward in...
% time il portafoglio, fermandosi ad ogni step richiesto a...
% ricalcolare l'optimal
% weight da investire nell'asset rischioso.
% S: (Nsim x Nsteps+1) matrix
% B: 1 x Nsteps vector
% soglia: utilizzata per l'expected shortfall probability

%% Ricchezza del portafoglio
S_MV=S;
B_MV=B;
W = S+B;
Size=size(W);
C = Size(2); % colonne W
R = Size(1); % righe W
x = zeros(R,C-1); % pesi
dt=T/Nsteps;

% Value function Constant Proportion portfolio
Value_Function_C=zeros(size(W));
Value_Function_C(:,end)=(S(:,end)+B(:,end)-gamma/2).^2;
% Value function MV portfolio
Value_Function_MV=zeros(size(W));

% Passaggio in T-1
for j = 1:R
    x(j,end)=max((gamma/2 - W(j,end-1)*Risk_Free_Ret)...
        *mean(Risky_Excess_Ret(:,end))/(W(j,end)...
        *mean((Risky_Excess_Ret(:,end-1)).^2)),0);
    x(j,end)=min(x(j,end),Qmax);
    %Portafoglio Mean Variance
    S_MV(j,end-1)=x(j,end)*W(j,end-1);
    B_MV(j,end-1)=W(j,end-1)-S_MV(j,end-1);
    S_MV(j,end)=S_MV(j,end-1)*exp((mu-sigma^2/2)*dt+sigma...
    *sqrt(dt)*Z(j,end));
    B_MV(j,end)=B_MV(j,end-1)*exp(r*dt);

% Calcolo della value function per il nuovo portafoglio
Value_Function_MV(j,end)=(S_MV(j,end)+B_MV(j,end)-gamma/2)^2;

% Mettiamo a confronto la le value function per stabilire...

```

```

% quale asset allocation sia ottimale
if (Value_Function_C(j,end)<Value_Function_MV(j,end))
    S_MV(j,end-1)=S(j,end-1);
    B_MV(j,end-1)=B(j,end-1);
    S_MV(j,end)=S(j,end);
    B_MV(j,end)=B(j,end);
    x(j,end)=p;
end

end

% Backward in time trovo le allocazioni ottime per ogni t
for i = C-2:-1:1
    for j = 1:R
        x(j,i)=max((gamma/2 - W(j,i)*Risk_Free_Ret^(T/dt-i))...
            *mean(Risky_Excess_Ret(:,i))/(W(j,i)...
            *Risk_Free_Ret^(T/dt-i-1)...
            *mean((Risky_Excess_Ret(:,i)).^2)),0);
        x(j,i)=min(x(j,i),Qmax);
        S_MV(j,i+1)=S_MV(j,i)*exp((mu-sigma^2/2)*dt+sigma...
            *sqrt(dt)*Z(j,end));
        B_MV(j,i+1)=B_MV(j,i)*exp(r*dt);
        Value_Function_MV(j,i+1)=(S_MV(j,end)+B_MV(j,end)-...
            mean(W(:,end)))^2;
        Value_Function_C(j,i+1)=(S(j,end)+B(j,end)-...
            mean(W(:,end)))^2;
        if (Value_Function_C(j,i+1)<Value_Function_MV(j,i+1))
            S_MV(j,i)=S(j,i);
            B_MV(j,i)=B(j,i);
            S_MV(j,i+1)=S(j,i+1);
            B_MV(j,i+1)=B(j,i+1);
            x(j,i)=p;
        end

        end

    end

end

% Ricostruzione del portafoglio

[Snew, Bnew] = NewSampling(W0,S,B,Z,mu,sigma,r,T,x);

%Risultati

Exp_Value_Port=mean(Snew(:,end)+Bnew(:,end));
St_Dev_Port=std(Snew(:,end)+Bnew(:,end));
Exp_Short_Prob=mean(Snew(:,end)+Bnew(:,end)<K);

end

```
